

中国科学技术大学数学科学学院
2018 ~ 2019 学年第 2 学期期中考试试卷

☒A卷 ☐B卷

课程名称 多变量微积分 课程编号 001512

考试时间 2019年4月27日上午 考试形式 闭卷

姓 名 学 号 学 院

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(本题8分)

计算第一型曲线积分 $\int_L (x + y + z) ds$, 其中 L 是由直线段 AB ($A(2, 2, 0), B(2, 0, 0)$) 和螺旋线 $BC: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t, t \in [0, 2\pi]$ 组成.

二、求下列各题（每小题8分，共16分）

1. 平面 Π 过点 $M(0, -1, 1)$ 到直线 $L: \frac{x-1}{0} = 2y+1 = \frac{2z+1}{2}$ 的垂线 l , 并垂直于平面 $y=0$, 求垂线 l 和平面 Π 的方程.

2. 在椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 位于第一卦限部分上求一点, 使过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小, 并求这个最小体积.

三、(本题15分)

函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 证明函数在(0,0)点连续, 偏导数存在但不可微.

四、(本题共16分, 第1小题10分,第2小题6分)

1. 函数 $z = x^3 f(xy^2, \sin xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 设 $f(x, y) = x^y + \int_1^x dv \int_v^x e^{-u^2} du$ ($x > 1$), 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

五、(本题 15分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 的极值点(包括条件极值点), 及最大值和最小值.

六、(本题10分)

计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2]dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

七、(本题10分)

计算三重积分 $\iiint_V (x^2 + y^2) dV$, 其中 V 是由 $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 9$, 所围成的空心立体.

八、(本题10分)

设点 P 为椭球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若曲面 S 在 P 点处的切平面 Π 与 xoy 平面垂直,

(1) 求点 P 的轨迹曲线 Γ ;

(2) 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 Γ 上方的部分.