多元函数微分学复习

要求掌握：

(1) 多元函数的连续，偏导存在，可微之间的关系.

(2) 熟练掌握复合函数，隐函数，向量值函数的微分法，一阶全微分形式不变性.

(3) 掌握非条件极值和条件极值的求法。

(4) 掌握空间曲线的切线和法平面方程求法，空间曲面的切平面和法线的方程求法。

一、多元函数的极限、连续、偏导存在性、可微

1. (20)(5分) 求极限$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

2. (18)(15分) 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在$(0,0)$点连续, 偏导数存在但不可微.

3. (17)(16分) 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   其中n为正数,讨论n为何值时,$f(x,y)$在原点$(0,0)$处

   (1) 连续, (2) 一阶偏导存在, (3)可微, (4) 一阶偏导连续.

4. (16)(10分) 判断下面的极限是否存在,若存在求出极限值.

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{e^{xy}-1}{x},\quad (2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^3}{x^2+y^3}.$$

5. (14)(4分) 二元函数$f(x,y)$在$O(0,0)$处可微的一个充分条件是(　　).

   (A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

   (B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

   (C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

   (D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$且$\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

6. (14)(8分) 设函数$f(x,y)=\varphi(|xy|)$,其中函数$\varphi(0)=0$,在$u=0$的某邻域满足 $|\varphi(u)|\le u^2$. 证明$f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

7. (13)(4分) 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则$f(x,y)$在原点处(　　)

(A) 偏导数不存在　　(B) 偏导数存在但不可微

(C) 可微但偏导数不连续　　(D) 偏导数连续

8. (12)(4分) 下列4个选项中,**不正确的**是(　　).

(A) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的必要条件是$f(x,y)$在D中连续.

(B) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的充分条件是它的两个一阶偏导在D中连续.

(C) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的充分条件是$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\triangle z-f'_x(M_0)\triangle x-f'_y(M_0)\triangle y}{\rho}=0$,其中$\triangle z=f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0),\rho=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$.

(D) 函数$f(x,y)$在区域D中可微的必要条件是它在D中两个一阶偏导存在且连续.

9. (11)(4分) 下列二元函数在原点连续的有(　　)个。

i) $\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$　ii) $\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$　iii) $\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3

10. (11)(12分) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 当a,b取何值时,函数$f(x,y)$在原点连续?

(2) 当a,b取何值时,函数$f(x,y)$在原点可微?

二、多元函数的偏微商、Taylor公式

1. (20)(5分) 求函数$f(x,y)=e^{x+y}$在原点的4阶Taylor展开式.

2. (20)(10分) 设$f(x,y)$是2阶连续可微函数,且$\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$,设$y=\varphi(x)$是$f(x,y)=0$确定的隐函数,试求$\varphi''(x)$,用$f$的各阶偏导表示.

3. (20)(10分) 设参数变换$u=u(x,y), v=v(x,y)$具有2阶连续偏导数, 且满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,证明对任意二阶连续可微函数$z=f(u,v)$,恒成立

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

4. (20)(10分) 设f是定义在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$上的三阶连续可微函数,且$f(0,0)=0$.

   (1).证明:存在D上的二阶连续可微函数g_1,g_2满足$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$;

   提示:可利用$f(x,y)=\displaystyle\int_0^1\frac{df(tx,ty)}{dt}dt$.

   (2). 设$\nabla f(0,0)=0$,且$det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{(0.0)}<0$.

   证明:在原点的一个邻域内存在参数变换,$x=x(u,v), y=y(u,v)$,使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2.$$

5. (18)(10分) 函数$z=x^3f(xy^2,\sin xy)$, 其中f具有二阶连续偏导数, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. (18)(6分) 设$f(x,y)=x^y+\displaystyle\int_1^x dv\int_v^x e^{-u^2}du\quad(x>1)$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

7. (17)(12分) 试用变量代换$\xi=\dfrac{y}{x}$, $\eta=y$ 将方程 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$ 其中函数$u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数.

8. (16)(6分) 设$z=z(x,y)$由方程$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$确定，其中$F$有连续的一阶偏导,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9. (15)(4分) 设由方程$\displaystyle\int_{y^2}^x e^t\ dt-\int_1^{\frac{1}{z}}\frac{1}{t}\ dt=0$ 确定的隐函数$z=z(x,y)$ 的全微分$dz=$____________________.

10. (15)(15分) 证明: 方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$ 在变换$u=\dfrac{x+y}{2}$, $v=\dfrac{x-y}{2}$, $w=ze^y$ 下化为函数$w=w(u,v)$ 的方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w,$$

其中函数$z(x,y)$, $w(u,v)$ 都具有二阶连续偏导数.

11. (15)(4分) 设$z=f(\dfrac{x}{g(y)},y)$,其中可微函数$g(y)\neq 0$, 则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

12. (14)(4分)设$f(x,y)$有连续的偏导数,且$f(x,x^2)=x^2e^{-x}$,$f'_x(x,x^2)=-x^2e^{-x}$,若$x\neq 0$,则$f'_y(x,x^2)$等于(　　)

(A) $2xe^{-x}$　(B) $(-x^2+2x)e^{-x}$　(C) e^{-x}　(D) $(2x-1)e^{-x}$

13. (14)(8分) 设$z=f(t,x),t=\varphi(x+y)$, 其中φ,f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14. (14)(8分)设$z=f(u),u=\varphi(u)+\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$,其中$f(u)$可微,$\varphi'(u)$连续,且

$\varphi'(u)\neq 1,P(t)$连续,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

15. (13)(8分)设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求出$f(x,y)$在原点$O(0,0)$处的所有的二阶导数.

16. (13)(8分) 设f为可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，试求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.

17. (12)(8分) 设函数$w=f(x+y+z,xyz)$具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$及$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

18. (12)(8分) 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定,求微分dz以及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

19. (12)(8分) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$,其中函数$\varphi$具有二阶导数,函数$\psi$具有一阶导数,证明$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

20. (12)(8分) 若函数$u = f(x,y,z)$在凸的开区域Ω内可微(开区域Ω中任意两点的连线在Ω中),并且存在正数$M>0$,使$\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2}\le M$, 证明对$\Omega$ 中任意两点A,B 都有$|f(A)-f(B)|\le M\cdot\rho(A,B)$,其中$\rho(A,B)$是$A,B$两点间距离.

21. (11)(8分) 设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由下列两式确定:$e^{xy}-xy=2,\ e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$,求$\frac{du}{dt}$.

22. (11)(8分) 设函数$u=xye^{x+y}$,求$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$,其中$p,q$为正数.

三、多元函数的极值

1. (20)(10 分) 设$x,y,z\geqslant 0,\ x+y+z=1$,试用拉格朗日乘数法求函数$f(x,y,z)=x^ay^bz^c\ (a,b,c>0)$的最大值.

2. (20)(15 分) 设A,B,C是平面三个不共线的点,且三角形ΔABC有一个内角$\geqslant\frac{2\pi}{3}$,考虑平面上的函数$f(P)=|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PC}|\ (\forall P)$,

   (1).证明函数f可以在平面上取到最小值;

   (2).求函数f在可微点的梯度;

   (3).证明函数没有驻点,求函数的最小值,并说明理由.

3. (18)(8 分) 在椭球面$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$位于第一卦限部分上求一点, 使过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小, 并求这个最小体积.

4. (18)(15 分) 求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0\}$的极值点(包括条件极值点), 及最大值和最小值.

5. (17)(10 分) 设实数x,y,z满足$x+y+z=0$,求函数$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z$的取值范围.

6. (16)(10 分)求曲线$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2+xy=1\end{cases}$ 到Oxy平面的最小和最大距离.

7. (16)(10 分)求函数$f(x,y)=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},p>0,q>0$, 在$\mathbf{R}^2$上的极值.

8. (15)(15 分)；第(1)小题5分; 第(2)小题10分)

   已知可微函数$z=f(x,y)$ 的全微分$z=2x\ x-\varphi(y)\ y$, 且$f(1,y)=3-y^2$.
   (1) 求$f(x,y)$ 及$\varphi(y)$ 的表达式;

(2) 求$z=f(x,y)$ 在闭区域$D=\{(x,y)|\ x^2+\dfrac{1}{4}y^2\leqslant 1\}$ 上的最大、最小值, 并说明函数在区域D 内的极值情况.

9. (15)(4分) 设$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$,则其极值点为___________.

10. (14)(8分) 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的函数,求$z=z(x,y)$的极值点与极值.

11. (13)(12分) 在三维空间中给定n个点$M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,在单位球面$S:x^2+y^2+z^2=1$上求一点P,使得P到$M_i(i=1,2,\cdots n)$的距离平方和最小。

12. (12)(4分) 下列4个选项中,**正确的**是(　　).

    (A) 可微函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$有极值的必要条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

    (B) 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极值的充分条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

    (C) 函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极值的充要条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点.

    (D) 具有二阶连续偏导的函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处有极小值的充分条件是M_0为$f(x,y)$的一个驻点,且$A=f''_{xx}(M_0)>0,\ AC-B^2\geq 0$,其中$B=f''_{xy}(M_0),\ C=f''_{yy}(M_0)$.

13. (12)(8分) 求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的所有极值.

14. (12)(8分) 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长与最短距离.

15. (11)(12分) 求函数$z=(2x+3y-6)^2$在椭圆$x^2+4y^2\leq 4$中的最大值和最小值.

四、空间曲线的切向量，法平面、空间曲面的切平面，法线

1. (17)(12分) 求直线$L_1:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程,并求$l_0$绕$Oy$轴旋转一周所成曲面的方程.

2. (16)(10分)二元函数F具有二阶连续偏导数,证明曲面$F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$的所有切平面经过定点,其中$a,b,c$为常数.

3. (16)(10分) l为过点$M(22,0,2)$且与两直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{-1}=y+1=\frac{z+6}{-2},\quad L_2:\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=z-1.$$

都相交的直线，求出l的方向及L_1与l的交点.

4. (15)(4分) $z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于$2x+2y+z-1=0$,则P点的坐标是____________.

5. (15)(4分) 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附件有定义,且$f'_x(0,0)=2,f'_y(0,0)=3$,则曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0, \end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$处的切线方程是____________.

6. (14)(8分) 设函数$f(x,y,z)$有一阶连续偏导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是$f(x,y,z)$在空间光滑曲线$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 上的极值点，$(f'_x,f'_y,f'_z)|_{P_0}\neq\overrightarrow{0}$，$\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\neq\overrightarrow{0}$,证明:等值面$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$与曲线$\Gamma$在$P_0$相切.

7. (13)(8分)求曲线$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ 在点$M(0,-1,0)$处的切线方程和法平面方程.

8. (13)(10分) 求常数λ的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.

9. (13)(4分) 在曲线$\Gamma:x=t,y=-t^3,z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线(　　)

   (A) 只有1条　　(B) 只有2条　　(C) 至少有3条　　(D) 不存在.

10. (12)(4分) 下列4个选项中,**不正确的**是(　　).

    (A) 可微二元函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的偏导数$f'_x(x_0,y_0)$的几何意义是空间曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线对x轴的斜率.

    (B) 函数$F(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微,且$F(x_0,y_0,z_0)=0$,则非零向量$\mathbf{n}=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))$ 是空间曲面$F(x,y,z)=0$在点M_0处的切平面的法向量.

    (C) 可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的微分$dz=f'_x(M_0)\triangle x+f'_y(M_0)\triangle y$的几何意义是曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面关于$z$值的增量.

    (D) 球面$x^2+y^2+z^2=14$上,点$M_0(1,2,3)$处的纬线Γ在该点处的切线方程是: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{0}$.

11. (12)(4分) 设函数$f(u,v)$可微,证明曲面$f\left(\dfrac{y-b}{x-a},\dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.

12. (11)(4分) 设二元函数$f(x,y)$在$(0,0)$附近有定义，且$f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$,则下列结论**正确**的有(　　)个。

    i) $\mathrm{d}f|_{(0,0)}=3dx+dy$;

    ii) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$(3,1,1)$；

    iii) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$(1,0,3)$.

    (A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3

13. (11)(4分) 曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面方程为__________.

14. (11)(4分) 设曲线$C: x=t, y=t^2, z=t^3$在第一卦限中点P处的切线平行于平面$3x+4y-z=4$,则P的坐标为__________.

五、方向导数与梯度

1. (14)(8分) 求函数$u=xyz$在曲线$x=t^3, y=2t^2, z=-2t^3$上点$t=1$处与z轴正向夹角为锐角的切线方向的方向导数.

2. (11)(9分) 设三元函数$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,点$M(1,1,1)$和方向$\mathbf{n}=(-3,0,4)$，则$\mathrm{grad}\,u\big|_M=$_______________，$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_M=$_______________,

3. (09)(4分) 设$u=3x^2+xy-y^2$在点$M(1,-1)$沿方向$\overrightarrow{l}=(-3,4)$的方向导数是_____.

4. (08)(4分) 置于原点的单位点电荷产生的电位场是$\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{r}$,这里$r$是点$(x,y,z)$到原点的距离, 则$\varphi$的梯度在$(2,0,0)$处的值$\mathrm{grad}\varphi(2,0,0)=$_____.

5. (06)(4分) 设$u=e^{x^2+y^2+z^2}, M(1,1,1)$,则$\mathrm{gradu}|_M=$_____.

6. (05)(5分) 求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,1,1)$沿方向$(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$的方向导数.

六、空间解析几何

1. (20)(5分) 求向量$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$与向量$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$的叉乘$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$.

2. (18)(8分) 平面 Π 过点 $M(0,-1,1)$到直线 $L: \dfrac{x-1}{0}=2y+1=\dfrac{2z+1}{2}$的垂线$l$, 并垂直于平面$y=0$, 求垂线 l 和平面 Π 的方程