凯特摆测重力加速度

姓名：**王昱**
学号：**PB21030814**

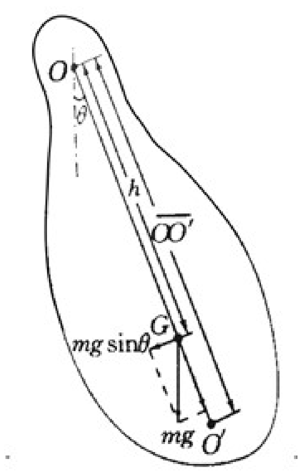
一. 实验目的

- 学习凯特摆的实验设计思想和技巧，掌握一种相比较而言精确的测量重力加速度的方法，熟练分析误差，计算不确定度等。

二. 实验原理

- 刚体质量为m,转轴O到重心G的距离为h，绕O轴刚体的转动惯量为I，当地重力加速度为g，当它绕O轴转动时即为一复摆。当复摆离开平衡位置时，受到重力的分量$mgsin\theta$作用而做周期性摆动，其运动方程为：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mghsin\theta$$



- 当摆幅很小的时候，我们可以进行近似$sin\theta \approx \theta$,则上式可化为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgh\theta}{I} = -\omega^2\theta$$

其中，$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{I}}$是圆周率，又因为在简谐运动中$\omega=\frac{2\pi}{T}$, 于是复摆的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

- 设复摆通过重心G的转动惯量为I_G，则根据平行轴定理：

$$I=I_G+mh^2$$

代入上式得：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_G+mh^2}{mgh}}$$

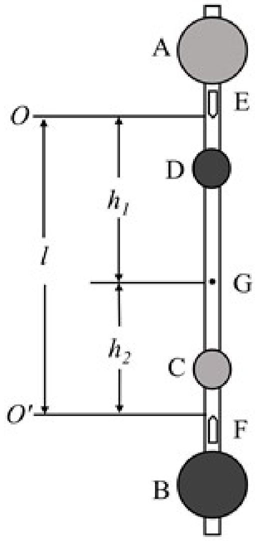
故等效摆长l为

$$\sqrt{\frac{I_G+mh^2}{mh}}$$

- 利用复摆的共轭特性，可精准地测量l。即在复摆重心两侧，并且和重心处于同一条直线上的两个点O、O', 分别测量以O、O'为悬点(这里就是刀口)的摆动周期T_1、T_2，当T_1和T_2相等(**通过调节四个摆锤的位置达到相等**)时，可以证明OO'(**刀口之间的距离**)就是等效摆长。即：

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{I_G+mh_1^2}{mgh_1}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + mh_2^2}{mgh_2}}$$



- 调节至$T_1 \approx T_2$时，$h_1 + h_2 \approx l$(等效摆长),消去I_G即可得:

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)} = a + b$$

  当$h_1 - h_2$足够大时，b项相对于a项影响很小。

- 最终的计算公式为:

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(2h_1 - l)}$$

只需要测量T_1、T_2、l、h_1。

三. 实验过程

- 测量两刀口之间的距离l,测三次取平均值，当作等效摆长。
- 将摆杆悬挂到支架上水平的V形刀承上，调节底座上的螺丝，使摆杆能在铅垂面内自由摆动，倒挂也如此。将光电探头放在摆杆下方，让摆针在摆动时经过光电探测器(**注意要将激光对准孔**)让摆杆作小角度摆动，待稳定后，按下reset

钮，则测试仪开始自动记录一个周期的时间。调整四个摆锤的位置，使T_1和T_2逐渐靠近，差值小于$0.001s$后，测量正、倒摆动10个周期的时间$10T_1$和$10T_2$，各测5次取平均值。

- 将摆杆从刀承上取下，平放在刀口上使其平衡，平衡点即重心G找到重心G的位置后测出$|GO|$，即h三次，同样取平均值。

四. 数据处理

n	1	2	3
l/mm	723.1	722.8	723.1

n	1	2	3	4	5
$10T_1/s$	17.3365	17.3360	17.3363	17.3368	17.3369
$10T_2/s$	17.3362	17.3361	17.3366	17.3363	17.3363

n	1	2	3
h_1/mm	423.0	423.2	422.8

- l的平均值：

$$\bar{l} = \frac{723.1 + 722.8 + 723.1}{3} = 723.0mm$$

l的A类不确定度：

$$u_A(l) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(l_i - \bar{l})^2}{3 \times (3-1)}} = 0.10mm$$

卷尺的$\Delta_{仪} = 0.8mm, t_{0.95} = 4.30, k_p = 1.96, C = 3$根据：

$$U_{0.95}=\sqrt{(t_{0.95}u_A)^2+(k_p\Delta_{仪}/C)^2}$$

$$U_{0.95}=\sqrt{(4.30\times 0.10)^2+(1.96\times 0.8/3)^2}=0.7mm$$

$$\therefore l=(723.0\pm 0.7)mm\ldots\ldots\ldots\ldots(P=0.95)$$

- h_1的平均值：

$$\overline{h_1}=\frac{423.0+423.2+422.8}{3}=423.0mm$$

h_1的A类不确定度：

$$u_A(h)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(h_i-\overline{h})^2}{3\times(3-1)}}=0.12mm$$

卷尺的$\Delta_{仪}=0.8mm, t_{0.95}=4.30, k_p=1.96, C=3$。根据：

$$U_{0.95}=\sqrt{(t_{0.95}u_A)^2+(k_p\Delta_{仪}/C)^2}$$

$$U_{0.95}=\sqrt{(4.30\times 0.12)^2+(1.96\times 0.8/3)^2}=0.7mm$$

$$\therefore h_1=(423.0\pm 0.7)mm\ldots\ldots\ldots\ldots(P=0.95)$$

- T_1的平均值：

$$\overline{T_1} = \frac{17.3365 + 17.3360 + 17.3363 + 17.3368 + 17.3369}{5 \times 10} = 1.73365s$$

T_1的A类不确定度：

$$u_A(T_1) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(T_{1i} - \overline{T_1})^2}{5 \times (5-1)}} = 1.6 \times 10^{-5}s$$

$\Delta_{仪} = 0, t_{0.95} = 4.30$

根据：

$$U_{0.95} = t_{0.95}u_A$$

$$U_{0.95} = 4.30 \times 1.6 \times 10^{-5} = 7 \times 10^{-5}s$$

$$\therefore T_1 = (1.73365 \pm 0.00007)s \ldots\ldots\ldots\ldots (P = 0.95)$$

- T_2的平均值：

$$\overline{T_2} = \frac{17.3362 + 17.3361 + 17.3366 + 17.3363 + 17.3363}{5 \times 10} = 1.73363s$$

T_2的A类不确定度：

$$u_A(T_2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(T_{2i} - \overline{T_2})^2}{5 \times (5-1)}} = 8 \times 10^{-6}s$$

$\Delta_{仪} = 0, t_{0.95} = 4.30$

根据：

$$U_{0.95}=t_{0.95}u_A$$

$$U_{0.95}=4.30\times 8\times 10^{-6}=3\times 10^{-5}s$$

$$\therefore T_1=(1.73363\pm 0.00003)s\ldots\ldots\ldots\ldots(P=0.95)$$

- 计算g及其不确定度
  已知：

$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2l}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(2h_1-l)}=a+b$$

由$a=\frac{T_1^2+T_2^2}{2l}$可得

$$a=\frac{1.73365^2+1.73363^2}{2\times 0.7230}=4.157m^{-1}s^2$$

两边取对数

$$\ln a=\ln(T_1^2+T_2^2)-\ln l-\ln 2$$

求微分

$$\frac{1}{a}\mathrm{d}a=\frac{2T_1}{T_1^2+T_2^2}\mathrm{d}T_1+\frac{2T_2}{T_1^2+T_2^2}\mathrm{d}T_2-\frac{1}{l}\mathrm{d}l$$

所以不确定度公式为

$$U_a = a\sqrt{(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2+T_2^2})^2+(\frac{2T_2U_{T_2}}{T_1^2+T_2^2})^2+(\frac{U_l}{l})^2}$$

代入数值求得

$$U_a = 0.004m^{-1}s^2$$

所以

$$a = (4.157 \pm 0.004)m^{-1}s^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(P=0.95)$$

考虑修正项b:

$$b = \frac{T_1^2-T_2^2}{2(2h_1-l)} = 0.0003m^{-1}s^2$$

由于b的大小与a相比可以忽略不计，从而

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2+T_2^2}{2l} = a$$

求得

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{4.157} = 9.4969m/s^2$$

对g的不确定性公式两边取对数:

$$\ln g = \ln(4\pi^2) - \ln a$$

求微分：

$$\frac{1}{g}\mathrm{d}g = -\frac{1}{a}\mathrm{d}a$$

最终得到不确定度计算公式为：

$$U_g = \frac{g}{a}U_a$$

故g的不确定度为：

$$U_{0.95}(g) = \frac{9.4969}{4.157} \times 0.004 = 0.009m/s^2$$

$$\therefore g = (9.497 \pm 0.009)m/s^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (P = 0.95)$$

- 求g(考虑修正项b)

$$g = \frac{4\pi^2}{a+b} = 9.4962m/s^2$$

可见该值与不考虑修正项的g值相差不大。

五. 思考题

- 凯特摆测量重力加速度，在实验设计上有什么特点？避免了什么量的测量？降低了哪个量测量精度？实验室如何来实现？
  答：

①凯特摆巧妙地运用了共轭点，避免和减少了某些不易测准的物理量对实验结果的影响，提高了实验的精度
②避免测量重心G到转轴O的距离、绕O轴转动惯量。而是测量l、T_1、T_2，利用复摆的两点共轭性求得等效摆长l，利用数字测试仪精准测量T_1、T_2。
③降低了周期T的测量精度。
④在实验过程中，当两刀口位置确定后，通过调节A、B、C、D四摆锤的位置使得正、倒悬挂时的摆动周期T_1、T_2基本相等。

- 结合误差计算，影响凯特摆测量精度的主要因素是什么？将所得的实验结果与当地的重力加速度的公认值比较，有无偏差？为什么？
  答：由于T_1、T_2的精度较高，所以影响凯特摆测量精度的主要原因是等效摆长l，也即两刀口之间的距离。该实验利用米尺测量等效摆长l，米尺的精度不高，产生的误差较大。

- **下面分析误差**

该实验产生的误差较大，测出的g与实际的g差距很大。查表知合肥市的g大约是$9.7947m/s^2$

$$|\frac{9.4969-9.7947}{9.7947}|\times 100\% = 3.04\%$$

原因如下：

①测量得到的g值偏小，可能是对l的测量出现了较大的误差。由于米尺的误差较大，测量时可能没有读准确导致了等效摆长l偏小。
②测得的g值偏小，还有一种可能是周期T的测量出现问题。在实验过程中有可能没有控制好摆角的大小，使得摆动的幅度大于最大的幅度值；在实验过程中我还发现，凯特摆在摆动过程中可能并不是严格在同一平面上的，形成锥面摆，凯特摆在摆动过程中有轻微的晃动。
③有可能没有调整好光电门与凯特摆下端的相对位置，造成误差。
④支架底座没有调平造成误差。

六. 实验总结

- 通过本次实验，掌握了测量重力加速度g的另一种方法，同时复习了复摆的相关知识。
- 再一次熟悉了不确定度分析的相关方法。
- 虽然实验的准确度不高，但是通过本次实验第一次使用markdown语言写实验报告的电子版，收获颇多。