线面积分复习

一、二型曲线积分

要求掌握：

(1) 引入定义的实际例子;$\int_L \mathbf{V}\cdot\tau dl.\quad \tau dl=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dl=(dx,dy,dz)$

$$\int_L \mathbf{V}\cdot\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz.$$

(2) 二型曲线积分的计算方法:

$$\begin{cases}\text{1.基本方法:当曲线给出参数方程,化为定积分时,注意积分上下限,}\\ \text{及积分变量满足曲线的方程.}\\ \text{2.公式：}Green\text{公式;}Stokes\text{公式.在使用公式时一定要注意定理的条件.}\\ \text{3.积分与路径无关(求待定函数；重选路径计算二型曲线积分.)}\end{cases}$$

(3) 用二型曲线积分计算平面封闭曲线所围成区域的面积.

$$S=\int_L xdy=-\int_L ydx=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx, L\text{的方向为逆时针}.$$

....

1. (20)(12分) 设$\mathbf{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))=\left(\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},1-\frac{xy}{z^2}\right)$ $(y>0,z>0)$.

   (1) 证明$\mathbf{v}$是有势场; (2) 求其全体势函数; (3) 计算$\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} Pdx+Qdy+Rdz$.

2. (20)(10分) 设$u(x,y)$在圆盘$D:\ x^2+y^2\leqslant\pi$上有二阶连续偏导数, 且$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\sin(x^2+y^2)$, $\mathbf{n}$ 为边界圆周∂D的单位外法向, 计算曲线积分$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,ds$.

3. (20)(12分) 计算曲线积分

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz,$$

   其中L 是球面$x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面$x^2+y^2=2x$交线$(z\geqslant 0)$, 从z 轴的正向看去L 沿顺时针方向.

4. (20)(8分) 设$P(x,y),Q(x,y)$在$\mathbf{R}^2$ 上具有连续偏导数, 且对以任意点(x_0,y_0)为圆心, 任意$r>0$为半径的半圆L： $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta\ \ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, 恒有$\displaystyle\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 证明$P(x,y)=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

5. (19)(7分) 设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi(x)$连续可导，且$\varphi(0)=0$，求$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

6. (18)(10分) 计算曲线积分$I=\displaystyle\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-2x^2)dy+(x^2-3y^2)dz$,其中$L$是由平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从原点看$L$是沿逆时针方向.

7. (18)(10分) 计算曲线积分$I=\displaystyle\int_L (xe^x+3x^2y)dx+(x^3+\sin y)dy$,其中积分曲线$L$分别是:

   (1) 正向圆周$(x-2)^2+(y-2)^2=4$;

   (2) 从点$A(-1,0)$到点$B(2,3)$的任意分段光滑曲线.

8. (17)(18分) (1) 计算$\displaystyle\int_L (x+2xy)dx+(x^2+2x+y^2)dy$,其中$L$是$x^2+y^2=4x$的上半圆由$A(4,0)$至$B(0,0)$.

   (2) 设$u(x,y)$在单位圆盘$D: x^2+y^2\leq 1$上有二阶连续偏导数,且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$, 求积分$\displaystyle\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}ds$.

9. (16)(12分) 计算$\displaystyle\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$, $(A,C,AC-B^2>0)$其中L为二维区域包含原点的封闭逆时针曲线.

10. (16)(12分) 求积分$\displaystyle\int_L xzdy-yzdx$,其中$L$为上半圆$x^2+y^2+z^2=1$与$x^2+y^2=x$的交线，从$z$轴正方向看为逆时针.

11. (15)(7分) 设a,b,R为已知常数,且$R>0$,计算曲线积分$\displaystyle\oint_C (-ay)\mathrm{d}x+(bx)\mathrm{d}y$,其中积分曲线$C$是圆周$x^2+y^2=R^2$,沿逆时针方向.

12. (15)(8分) 计算曲线积分$\displaystyle\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中曲线$C$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从$z$轴正向来看,$C$沿逆时针方向.

13. (14)(10分) 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数, 在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线L上, 曲线积分$\oint_L \frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}=0$.

(1) 求函数$\varphi(x)$;

(2) 设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求$\oint_C \frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}$.

14. (13)(8分) 设$f(x,y),g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$上有一阶连续偏导数,且$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$,证明在单位圆周上存在一点$(\xi,\eta)$,使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

15. (12)(8分)$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$,和平面$x+y+z=0$的交线,$L$的方向与$z$轴正向成右手系.

解:解法一：用S表示L在平面$x+y+z=0$上围出的那块圆盘面。由L的定向，圆盘面的单位法向为平面的外法向，即$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. (4 分)

根据Stokes公式，我们有

$$\begin{aligned}&\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\\ =&\iint_{S^+}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}+\frac{-2}{\sqrt{3}}+\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)dS\\ =&\iint_{S^+}-2\sqrt{3}dS=-2\sqrt{3}\pi a^2. \qquad (4分)\end{aligned}$$

解法二：本题也可以利用确定出交线的参数方程，直接进行计算。因方法较多，不再具体给出。

16. (12)(8分)设$\overline{D}$是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域,设$u(x,y)$在$\overline{D}$内有二阶连续偏导数,且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证明(1) $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=0$,其中$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$是$\overline{D}$内沿简单光滑闭曲线$L$上单位外法线方向上的方向导数.

(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时,$u(x,y)=A$(A为常数),证明:$u(x,y)\equiv A,(x,y)\in D$.

17. (11)(10分) 1）证明曲线积分$\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$与路径无关

2）求$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$

18. (11)(12分)设曲线L是以$(1,0)$为中心,R为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向,计算积分$\oint_L \dfrac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$.

19. (11)(7分)设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微,在$D$内任一圆周$L$上,有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dl=0$,其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量,试证在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.

20. (10)(10分) 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数, 对任一围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线 C^+, 曲线积分 $\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}$ 的值相同.

    (i) 设 C^+ 是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线,证明:$\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}=0$.

    (ii) 求函数 $\varphi(x)$.

    (iii) 设 C^+ 是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线求$\int_{c^+}\dfrac{ydx+\varphi(x)dy}{x^2+4y^2}$.

21. (09)(4分) 设L为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$取逆时针方向,则$\int_L \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=$______

22. (09)(4分) 设曲线积分$\int_L (f(x)-e^x)\sin ydx-f(x)\cos ydy$与路径无关,其中$f(x)$具有一阶连续导数,且$f(0)=0$,则$f(x)=($　　$)$

    (A) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$　　(B) $1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　(C) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$　　(D) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

23. (08)(5分) $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,其中$\varphi(x)$具有连续的一阶导数,且$\varphi(0)=0$,则$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$的值为(　　)

    (A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

24. (08)(10分) 设L为抛物线$2x=\pi y^2$自$(0,0)$到$(\dfrac{\pi}{2},1)$的弧段,计算积分$I=\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$.

25. (07)(4分) 设D是由R^2中一条光滑的$Jordon$曲线L围成的区域,则D的面积(可有多项选择).

    (A) $\int_L ydx$　　(B) $\int_L xdy$　　(C) $\iint_D dxdy$　　(D) $\dfrac{1}{2}\int_L xdy-ydx$.

26. (07)(8分) 设L为圆周$x^2+y^2=1$,按逆时针方向,求曲线积分$\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+2y^2}$.

27. (07)(7分) 已知$f(x)$是正值连续函数,曲线$L:(x-1)^2+(y-1)^2=1$取逆时针方向,证明$\int_L -\frac{y}{f(x)}dx+xf(y)dy \geqslant 2\pi$.

28. (06)(4分) $L:x^2+y^2=1$逆时针方向,则$\oint_L (3x^2y-y)dx+x^3dy=$.______

29. (05)(8分) 设L是R^3中圆周$\{x^2+y^2=a^2, z=\frac{a}{2}\}$,取逆时针方向(从$z$轴正向看),求$\int_L xdy+y^2dz+z^3dx$.

30. (04)(16分) 求曲线积分
(i) $\int_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$,其中$L$为椭圆$4x^2+y^2=a^2(a>0)$,反时针方向.
(ii) $\int_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$,其中$L$为$x^2+y^2=1$,反时针方向.

31. (03)(14分) 求$\int_L -3x^2ydx+(3xy^2+z^3)dy+3yz^2dz$,其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=1$与圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$的交线,从原点看去顺时针方向.

32. (02)(12分) 设曲线积分$\int_L \varphi'(y)\cos xdx-(\varphi(y)-y)\sin xdy=0$,其中$\varphi(y)$有连续二阶导数,$L$为平面上任意一条封闭曲线(i) 若$\varphi(0)=\varphi'(0)=1$,求$\varphi(y)$.(ii) L取抛物线$y=\frac{4}{\pi}x^2$上从$(0,0)$到$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$的一段,求上述曲线积分的值.

二、二型曲面积分

要求掌握:

(1) 引入定义的实际例子$\iint\limits_S \mathbf{v}.\mathbf{n}ds$, $\quad \mathbf{n}ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(dydz,dzdx,dxdy)$

$$\iint\limits_S \mathbf{v}.\mathbf{n}ds=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

(2) 曲面的方程形式:参数式(向经式);隐函数方程$F(x,y,z)=0$,显示方程$z=f(x,y)$

(3) 二型曲面积分的计算方法:

$$\begin{cases} 1.\text{基本方法——化为二重积分:} \iint\limits_{S} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds = \varepsilon \iint\limits_{D_{uv}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv, (\ \varepsilon = \pm 1) \\ = \varepsilon \iint\limits_{D_{xy}} [-P(x,y,f(x,y))f'_x - Q(x,y,f(x,y))f'_y + R(x,y,f(x,y)]dxdy \\ 2.\text{公式}: Gauss\text{公式(注意定理的条件,加辅助曲面使用Gauss公式)}; \\ 3.\text{注意对称性}. \end{cases}$$

....

1. (20)(10分) 计算曲面积分

$$\iint\limits_{S} 2(1+x)dydz + yzdxdy$$

其中 S 是曲线 $y=\sqrt{x}\ \ (0\leqslant x\leqslant 1)$绕$x$轴旋转生成的旋转面, 且法向量与$x$轴正向夹角为钝角.

2. (19)(7分) 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+2ydzdx+3zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，正向指向曲面外侧.

3. (18)(12分) 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中Σ是曲面$(x-1)^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0, a\neq 1)$的外侧.

4. (17)(12分) 求曲面积分$\iint\limits_{S}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

5. (16)(12分) 计算$\iint\limits_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的外侧.

6. (15)(7分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中曲面$\Sigma$是由上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$以及$xoy$平面围成的立体的全表面的外侧.

7. (15)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

8. (14) (10分) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$ $(z \geqslant 0)$, 法线方向朝上.

9. (13)(12分) 计算曲面积分$\iint\limits_{S^+} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$,其中$S^+$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \le z \le 1)$的下侧.

10. (12)(10分)计算曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+1)dxdy$, 其中$S^+$为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2(z \geqslant 0, R>0)$的上侧.

11. (11)(4分)设曲面S为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$ $(z \geqslant 0)$的上侧,则下列积分为零的是(　　).

    (A) $\iint\limits_{S} xdydz$;　　(B) $\iint\limits_{S} ydzdx$;　　(C) $\iint\limits_{S} zdxdy$;　　(D) $\iint\limits_{S} zdzdx$.

12. (11)(12分) 设S为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的下侧,求

$$I=\iint\limits_{S}\frac{x^3dydz+y^3dzdx+(z^3+z^2)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

13. (10)(10分) 计算第二型的曲面积分 $\iint\limits_{S^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$S^+$是光滑闭曲面的外侧,并且原点不在曲面$S^+$上.

14. (09)(4分) 设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$, S^+为该球面的外侧,则下列式子正确的是(　　)

    (A) $\iint\limits_{S} x^2dS=0, \iint\limits_{S^+} x^2dydz=0$　　(B) $\iint\limits_{S} xdS=0, \iint\limits_{S^+} xdydz=0$

    (C) $\iint\limits_{S} xdS=0, \iint\limits_{S^+} x^2dydz=0$　　(D) $\iint\limits_{S} xydS=0, \iint\limits_{S^+} ydzdx=0$

15. (09)(10分) 设向量场$\overrightarrow{v}(x,y,z)=(yz,zx,2)$,计算$\iint\limits_{\sum^+}\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}(x,y,z)dS$, 其中$\sum^+$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1,(z \geqslant 0)$的上侧,$\overrightarrow{n}$是其上的朝上的单位法向量.

16. (08)(5分) 设S为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,则曲面积分$\iint\limits_{S} zdxdy$为(　　)

    (A) 0　　(B) $\frac{4\pi}{3}$　　(C) 2π　　(D) 4π

17. (08)(10分) 计算向经$\mathbf{r}=(x,y,z)$穿过圆锥曲面$z=1-\sqrt{x^2+y^2}(0<z<1)$侧面的流量.

18. (07)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy$,其中$S$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,其法向量与$z$轴正向夹角为锐角.

19. (06)(8分) 计算曲面积分$\iint\limits_S (x^3+y^3)dydz+(y^3+z^3)dzdx+(z^3+x^3)dxdy$,其中$S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$上侧.

20. (05)(10分) 设V是由半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$与xy平面围成的区域,S是V的表面,取外侧法向量,求积分$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

21. (03)(14分) 设$f(u)$有连续的导数,S是$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$的外侧表面,求$I=\iint\limits_S x^3dydz+(y^3+yf(yz))dzdx+(z^3-zf(yz))dxdy$.

22. (02)(12分) 求$\iint\limits_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$,其中$S$是曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的下侧.

三、势函数、全微分方程

要求掌握:

(1) 求势函数的方法:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\ &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz\end{aligned}$$

(2) 已知全微分方程求待定的参数:由$rot\vec{v}=0$,建立关于参变量的方程.特:$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$是全微分方程,则$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

....

1. (18)(12分) 已知可微向量函数$\mathbf{V}=(f(y,z),xz,xy)$,其中$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

   (1) 求函数$f(y,z)$,使得$\mathbf{V}$是有势场;

   (2) 当$f(0,0)=0$时,求$\mathbf{V}$的一个势函数$u(x,y,z)$;

   (3) 求出上述势函数$u(x,y,z)$在点$M(1,1,1)$处方向导数的最大值和最小值.

2. (15)(10分) 已知向量场$\vec{v}=(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy),(x,y,z\in\mathbf{R}^3)$,证明$\vec{v}$是有势场,并求全体势函数.

3. (13)(10分) 设$f(x),g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数,$f(0)=g(0)=1$,且第二型曲线积分$\int_{L_{AB}}yf(x)dx+(f(x)+zg(y))dy+g(y)dz$与路径无关,只与起点$A$和终点$B$有关,求向量场$(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$的势函数.

4. (13)(4分) 设$\mathbf{v}$是区域V中的连续向量场,$\mathbf{v}$在V中的第二型曲线积分与路径无关,则(   )

   (A) $\mathbf{v}$是区域V中的无旋场　　(B) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是无旋场

   (C) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是保守场　　(D) $\mathbf{v}$在区域V中不一定是有势场

5. (12)(10分)设$f(z)$是$(-\infty,+\infty)$的可微函数,$f(0)=0$, 且向量场$\vec{V}=(2xz,2yf(z),x^2+2y^2z-1)$是整个空间区域上的保守场,求向量场$\vec{V}$的一个势函数.

6. (10)(10分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数,$f(0)=1$, 且向量场 $\mathbf{F}=(yf(x),f(x)+ze^y,e^y)$ 是整个空间区域上的保守场, 求向量场 $\mathbf{F}$ 的势函数.

7. (09)(4分) 下列结论中错误的是(   )

   (A) 保守场必是有势场　　(B) 有势场必是保守场

   (C) 保守场必是无旋场　　(D) 无旋场必是保守场.

8. (09)(10分) 设$\mathbf{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2})(y>0,z>0)$是否是有势场, 若回答是有势场,请说明你的理由,并求它的一个势函数,若回答不是有势场,请证明之.

9. (07)(4分) 已知$(x^2+2xy-ay^2)dx+(bx^2+2xy-y^2)dy=0$是全微分方程,则(   )

   (A) $a=-1,b=1$　　(B) $a=b=1$　　(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=b=-1$

10. (07)(8分) 证明向量场$\mathbf{F}=yz(2x+y+z)\mathbf{i}+zx(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}$是有势场,并求势函数.

11. (06)(4分) $(x+ay)dx+(y+bz)dy+(z+cx)dz$是全微分形式,则(   )

    (A) $(a,b,c)=(1,1,1)$　　(B) $(a,b,c)=(0,0,0)$

    (C) $(a,b,c)=(1,0,1)$　　(D) $(a,b,c)=(0,1,1)$

12. (05)(10分) 设$\mathbf{r}=(x,y,z)$是R^3的位置向量,$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$\alpha\in R$,问定义在$R^2-\{原点\}$上的向量场$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{r}}{r^\alpha}=\frac{1}{r^\alpha}(x,y,z)$是否是有势场,若是,求$\mathbf{V}$的一个势函数.

四、方向导数、梯度、散度、旋度

要求掌握:

(1) 方向导数、梯度是研究数量场$u = f(x,y,z)$的结果,在一点处沿某一方向的方向导数是确定的数值,梯度是确定的一个向量.

$$gradf = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}), \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}^\circ} = gradu \cdot \mathbf{l}^\circ$$

(2) 散度、旋度是研究向量场$\mathbf{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$的结果,

$$div\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad rot\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(3) 运算公式:

1° $gradf(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1gradu_1 + c_2gradu_2;$

2° $gradu_1u_2 = u_1gradu_1 + u_2gradu_1;$

3° $gradf(u) = f'(u)gradu;$

4° $div(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1div\mathbf{v}_1 + c_2div\mathbf{v_2};$

5° $div(u\mathbf{v}) = udiv\mathbf{v} + gradu \cdot \mathbf{v};$

6° $rot(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1rot\mathbf{v}_1 + c_2rot\mathbf{v_2};$

7° $rot(u\mathbf{v}) = urot\mathbf{v} + gradu \times \mathbf{v};$

....

1. (11)(9分) 设三元函数$u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,点$M(1,1,1)$和方向$\mathbf{n} = (-3,0,4)$,则$\mathrm{grad}\, u\big|_M =$ ________________, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\big|_M =$ ________________, $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u)\big|_M =$ ____________.

2. (10)(5分) 设$u = e^{xyz}$,求$div(gradu)$.

3. (09)(4分) 设$u = 3x^2 + xy - y^2$在点$M(1,-1)$沿方向$\overrightarrow{l} = (-3,4)$的方向导数是______.

4. (08)(4分) 置于原点的单位点电荷产生的电位场是$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$,这里$r$是点$(x,y,z)$到原点的距离, 则$\varphi$的梯度在$(2,0,0)$处的值$grad\varphi(2,0,0) =$______.

5. (08)(4分) 设向量场$\mathbf{E}(x,y,z)=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$,其中$\mathbf{r}(x,y,z), r=|\mathbf{r}|$, 则$\mathbf{E}$的散度在$(1,0,0)$处的值$div\mathbf{E}(1,0,0)=$______.

6. (08)(4分) 设$\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$是常向量,$\mathbf{r}=(x,y,z)$, 则$\omega\times\mathbf{r}$的旋度$rot(\omega\times\mathbf{r})=$______.

7. (06)(4分) 设$u=e^{x^2+y^2+z^2}, M(1,1,1)$,则$gradu|_M=$______.

8. (05)(5分) 求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,1,1)$沿方向$(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$的方向导数.

Fourier分析复习

要求掌握：

(1) 周期为$2\pi, 2L$的函数Fourier级数展开;

(2) 函数在有限区间$[-L, L]$上的Fourier展开;函数在有限区间$[0, L]$展成正弦级数、余项级数;

(3) Dirichlet收敛定理;

(4) Fourier积分与Fourier变换公式.

……………………………………………………………………………………………

1. (20)(16分) (1) 将$f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x,\ x \in [0, \pi]$展开为余弦级数;

   (2) 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

2. (19)(10分) $f(x)$在$[0, 2\pi]$上可积且平方可积. 证明

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

   其中$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\ dx (n \geq 1)$ 为$f(x)$延拓函数的Fourier系数.

3. (18)(20分) $f(x)$是以2为周期的周期函数,在$(-1, 1]$上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

   (1) 将$f(x)$展开为Fourier级数,并说明该Fourier级数的收敛性;

   (2) 写出相应的Parseval等式；

   (3) 求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

4. (17)(14分) 将函数$y = |x|$在$[-\pi, \pi]$上展开成傅里叶级数,并利用其结果分别求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$的和.

5. (16)(12分) 设2π 周期函数$f(x)$连续,$f'(x)$分段连续,证明$f(x)$的Fourier级数一致收敛.

6. (15)(20分) 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

(1) 将$f(x)$展成傅里叶级数，并指出该傅里叶级数的收敛性;
(2) 写出相应的Parseval等式；
(3) 根据$f(x)$的傅里叶级数，分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和;
(4) 根据上述的Parseval等式分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$的和.

7. (14)(3分) 设函数$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$, 则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$ ________; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2=$ ________.

8. (14)(15分) 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$ 求$f(x)$ 的Fourier 级数, 讨论其收敛性并利用所得结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

9. (14)(10分) 求函数$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\geqslant 0\\ e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的Fourier 变换.

10. (14)(6分) 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且满足$\alpha\ (0<\alpha<1)$ 阶*Lipschitz* 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}.$$

记$a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是$f(x)$ 的Fourier 系数. 求证:

$$|a_n|\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha},\quad |b_n|\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

11. (13)(4分) 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上是可积并平方可积函数,且$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上导出相同的Fourier级数,则(　　)

(A) 在$[a,b]$上,$f(x)\equiv g(x)$

(B) 在$[a,b]$上,$f(x)$不一定恒等于$g(x)$

(C) 在$[a,b]$上,$f(x)\equiv g(x)+c$,其中c是某个常数

(D) 选项(A),(B),(C)都不正确

12. (13)(10分) 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$展成以2π为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.

13. (12)(4分) $f(x)=x^2$,利用$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上的定义,以2π为周期计算出的相应的Fourier级数,记为$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则$\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\underline{\frac{2\pi^4}{5}}$.

14. (12)(4分)设$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi],\\ 0, & 其它\end{cases}$,则$f(x)$的Fourier变换为$\underline{\frac{e^{i\pi\lambda}-e^{-i\pi\lambda}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}}$

15. (12)(7分) 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$展开成余项级数(须讨论其收敛性).

解:根据Fourier系数的展开公式得

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^3}{3},\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\\
&=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{4(-1)^n}{n^2}. \qquad (3分)
\end{aligned}$$

所以对应的Fourier级数为

$$\frac{\pi^3}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx. \qquad (1分)$$

由Dirichlet收敛定理，$\frac{\pi^3}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$一致收敛于$x^2$. (2 分)

16. (11)(12分)设函数$f(x)$是以2为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

1）试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$上的草图，并将$f(x)$展开为傅里叶级数；

2）试画出$f(x)$傅里叶级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$上的草图；

3）试求数项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$的和。

解 (1)

$a_0 = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x)dx = 3/2,$

$a_n = \int_1^3 f(x)\cos n\pi x dx = \int_1^2 \cos n\pi x dx + \int_2^3 (3-x)\cos n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2},$

$b_n = \int_1^3 f(x)\sin n\pi x dx = \int_1^2 \sin n\pi x dx + \int_2^3 (3-x)\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^n}{n\pi}.$

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right) = \begin{cases} f(x), x \neq 2k+1 & k=0,\pm1,\pm2\cdots, \\ \frac{1}{2}, \quad x = 2k+1, & k=0,\pm1,\pm2\cdots, \end{cases}$$

....6分

(2)

....8分

(3) 令$x=2$

由$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2} = 1,$ 得$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2},$ 得$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$................12分

17. (11)(3分)已知在$[-\pi,\pi]$上,有$\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$,则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} =$ $\underline{\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$.

18. (10)(10分) 将函数$f(x) = x, x \in (0,\pi)$展开为以2π为周期的余弦级数,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

19. (09,08)(4分) 设$f(x) = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$,而$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x), -\infty < x < +\infty$,其中$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx, n = 1,2,3\cdots$,则$S(-\frac{1}{2})$为(　　)

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $-\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

20. (09,07)(10分,8分) 设$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \pi. \end{cases}$ 试将$f(x)$展成以2π为周期的Fourier级数,并求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$和$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和.

21. (08)(10分) 设$f(x)=x,(0\leqslant x\leqslant 1)$,

(i) 将$f(x)$展成以2为周期的Fourier余项级数;

(ii) 利用(i)求$\int_0^2 \frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}dx$;

(iii) 利用(i)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

22. (06)(4分) 设$f(x)$以2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上$f(x)=x+\sin x$, $F(x)$是$f(x)$的Fourier级数,则$F(\pi)=$______

(A) $-\pi$ (B) π (C) 0 (D) $\pi/2$

23. (06)(12分) 设$f(x)$以2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上$f(x)=\cos\frac{x}{2}$,求$f(x)$的Fourier级数,并求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

24. (05)(15分) 设$f(x)$是定义在R上周期为2π的奇函数,且在$[0,\pi]$上$f(x)=x^2$,

(i) 画出$f(x)$在一个周期上的图像;

(ii) 求$f(x)$的Fourier级数;

(iii) 利用(ii)的结论和等式$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}, 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$

计算$\dfrac{\pi^6}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots}$.

25. (04)(14分) 设a不是整数,把$f(x)=\cos ax$在$[-\pi,\pi]$上展成Fourier级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

26. (03)(14分) 设周期函数$f(x)$的周期为2π,$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ 把$f(x)$展成周期2π的Fourier级数,并由此求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的值.

27. (02)(10分) 将$f(x)=\pi-2x,(0\leqslant x\leqslant\pi)$展成余项级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

含参变量积分复习

要求掌握：

(1) 广义积分的收敛判定;

(2) 含参变量的常义积分的性质:连续性、可微性、可积性.含参变量的常义积分求极限,求导,及利用对参数的微分或积分的方法计算积分值;

(3) 含参变量的广义积分在一致收敛下的性质:连续性、可微性、可积性.利用含参变量的广义积分求极限,求导,及利用对参数的微分或积分的方法计算积分;

(4) Euler积分性质,并能利用Euler积分求某些积分的值.

....

1. (20)(6分) 设$I(u)=\displaystyle\int_{\sin u}^{\cos u} e^{x^2-xu}dx$, 求$I'(u)$.

2. (20)(16分) (1) 求使积分$\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$ 收敛的参数α 取值范围;

   (2) 收敛时, 利用Euler积分计算$\varphi(\alpha)$;

   (3) 证明含参广义积分$\varphi(\alpha)$ 在区间$[-\alpha_0,\alpha_0]$上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

3. (19)(6+4分)

   1. 证明广义含参积分$g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ 对$\forall\alpha$ 收敛；
   2. 化简，求$g(\alpha)$的初等表达式.

4. (19) (10分) 已知$s>0$，求曲线$x^s+y^s=a^s(x>0,y>0)$与坐标轴围成的在第一象限的平面图形的面积.

5. (18)(8分) 设$g(x)=\displaystyle\int_{2^x}^{\cos^3 x}(e^{-xt^2}+\cos(xt)^2)dt$,求$g'(x)$与$g'(0)$.

6. (17)(8分) 讨论$I(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$在

   (1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$,其中$\alpha_0>0$,   (2) $\alpha\in(0,+\infty)$上的一致收敛性.

7. (17)(16分) 求积分(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(9+x^2)^5}dx$;   (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx\ \ (a>0)$.

8. (16)(12分) 函数$F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x)|y-x|dx,\ b>a$,求$F''(y)$.

9. (16)(12分) 含参变量函数$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$在$\alpha\in[b,B],0<b<B$上是否一致收敛? 并说明理由

10. (15)(8分) 设 $g(x)=\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x}e^{-t^2+xt}\mathrm{dt}$, 求$g'(x)$, $g'(0)$.

11. (14)(10分) 计算含参变量积分$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\,dx,\quad (u>0)$.

12. (13)(4分) 设$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上黎曼可积,则(　　)

    (A) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$上可积

    (B) $\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$上关于y连续

    (C) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$上不一定可积

    (D) $\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$上关于y不连续

13. (13)(4分) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上非负,$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{dx}$收敛,其中$a>0$,则(　　)

    (A) $F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,+\infty)$上是无界函数

    (B) $\int_a^{+\infty}(\sin x)f(x)dx$条件收敛

    (C) $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$发散

    (D) 当$x\to+\infty$时,$f(x)$不一定有极限

14. (13)(8分) 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数,设$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)dx$,求$F'(\alpha)$.

15. (12) (7分)计算$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$,其中$\alpha>0$.

    解:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx &= \int_0^{\alpha}du\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}dx\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{1}{1-u^2}\{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+x^2u^2}dx\}\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1-u}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha).
\end{aligned}
$$

16. (12)(5 分) 利用$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$,计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

解: 记积分为I.

$$I=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx(1\text{分})=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)(2\text{分})=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt(1\text{分})=\frac{\pi}{2}.$$

(1分)

17. (12)(4分)积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的值是$\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

18. (12)(4分)函数 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 的连续域是 $\underline{x>0, y>0}$.

19. (12)(4分)令 $I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}e^{x^2+xu}dx$, 则 $I'(0)=\underline{\frac{e-3}{2}}$

20. (12)(4分)下述命题正确的是(D) (请写出所有正确命题的编号):

A. 无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

B. 周期函数 $f(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑，则其 Fourier 级数收敛于 $f(x)$；

C. 无旋场必是有势场；

D. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且含参变量广义积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$

在 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛，则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。

21. (11)(3分) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=$ ________________.

22. (10)(5分) 设$F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$,求$F'(x)$.

23. (10)(5分) 利用Euler积分计算$\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-at}dt$,其中$a>0$.

24. (09)(4分) 设$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$,则$F'(\alpha)=$______.

25. (08)(10分) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.