# 1 命题演算公式,定理,性质合集

公理：

(L1) $p \to (q \to p)$

(L2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to q))$

(L3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

定理：

$\vdash p \to p$ （同一律）

$\vdash \neg q \to (q \to p)$ （否定前件律）

$\vdash (\neg p \to p) \to p$ （否定肯定律）

$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ （HS，假设三段论）

$\vdash \neg\neg p \to p$ （双重否定律）

$\vdash p \to \neg\neg p$ （第二双重否定律）

$\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ （换位律）

演绎定理 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q$

假设三段论 $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$

反证律

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash p$$

归谬律

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg p$$

**L的简单性质:**

**性质 1 (单调性)**

$1^\circ$ 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$，且$\Gamma \vdash p$，则$\Gamma' \vdash p$;

$2^\circ$ 若$\vdash p$，则对任何$\Gamma$，$\Gamma \vdash p$。

**性质 2 (紧致性)**

若$\Gamma \vdash p$，则存在有穷子集$\Delta \subseteq \Gamma$,使$\Delta \vdash p$.

**性质 3 (平凡性)**

定义：一致性/相容性/无矛盾性

若存在公式$p$使$\Gamma \vdash p$ 且$\Gamma \vdash \neg p$,则称$\Gamma$是不一致的（不相容的，矛盾的）；否则，称其为一致的

平凡性：若$\Gamma$不相容，则对$\forall p$有$\Gamma \vdash p$.

**性质 4 (可证等价替换规则)**

若$p$是$q$的子公式，$q'$是任意公式，$p'$是用$q'$替换$p$中的$q$所得公式

若$\vdash q \to q'$ 且$\vdash q' \to q$;

则$\vdash p \to p'$，且$\vdash p' \to p$.

**性质 5 (语义后承/逻辑推论/语义推论性质)**

$1^\circ$ 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vDash p$,则$\Gamma' \vDash p$ *(语义的单调性)*

$2^\circ$ 若$\Gamma \vDash p$且$\Gamma \vDash p \to q$，则$\Gamma \vDash q$ *(语义的MP规则)*

$3^\circ$ $\Gamma \vDash p \to q \Leftrightarrow \Gamma \cup \{p\} \vDash q$ *(语义的演绎定理)*

$4^\circ$ $p$是重言式$\Leftrightarrow \phi \vDash p$ (记$\phi \vDash p$ 为 $\vDash p$)

$5^\circ$ $p \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash p$

$6^\circ$ $\vDash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$，即永真式是任何公式集的语义推论

**性质 6 (L的可靠性与完全性)**

$$\left.\begin{array}{ll}L\text{的可靠性} & \Gamma \vdash p \Rightarrow \vDash p \\ L\text{的完全性} & \Gamma \vDash p \Rightarrow \vdash p\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash p \Leftrightarrow \vDash p$$

**性质 7 (等值公式)**

$p$与$q$等值，是指$p \leftrightarrow q$为永真式

判断两公式是否等值的方法：真值表

# 2 一阶逻辑（一阶谓词逻辑）/谓词演算

公理：

(K1) $p \to (q \to p)$

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to q))$

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

(K4) $\forall x p(x) \to p(t)$,其中项t对p(x)中的x是自由的

(K5) $\forall x(p \to q) \to (p \to \forall q)$,其中项x不在p中自由出现

(*Gen)

**定理 1 (From L)**

$\vdash p \to p$ （同一律）

$\vdash \neg q \to (q \to p)$ *(否定前件律)*

$\vdash (\neg p \to p) \to p$ *(否定肯定律)*

$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ *(HS，假设三段论)*

$\vdash \neg\neg p \to p$ *(双重否定律)*

**定理 2 (平凡性)**

$\Gamma$ *有矛盾*$\Rightarrow$ $K$的任一公式从$\Gamma$可证

**定理 3 ($\exists_1$规则)**

设项$t$对$p(x)$中的$x$自由，则有 $\vdash p(t) \to \exists x p(x)$

**定理 4 ($\exists_2$规则)**

设$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，其证明中$Gen$变元不在$p$中自由出现，且$x$不在$q$中自由出现，那么有$\Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash q$，且除了$x$不增加其它$Gen$ 变元

**定理 5 (演绎定理)**

$1^\circ$ 若$\Gamma \vdash p \to q$，则$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

$2^\circ$ 若$\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，**且证明中所用的$Gen$变元不在$p$中自由出现**，则不增加新的$Gen$变元就可得$\Gamma \vdash p \to q$

**推论**：当$p$是闭式时，有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \vdash p \to q$$

**定理 6 (不知道叫什么(−.−))**

$\vdash \forall x(p \to q) \to (\exists x p \to \exists q)$

**定理 7 (反证律)**

所用$Gen$变元不在$p$中自由出现，则不增加新的$Gen$变元就可以得到结论

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash p$$

**定理 8 (归谬律)**

所用$Gen$变元不在$p$中自由出现，则不增加新的$Gen$变元就可以得到结论

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash \neg p$$

**定理 9**

$1^\circ \vdash \forall x p(x) \leftrightarrow \forall y p(y)$

$2^\circ \vdash \exists x p(x) \leftrightarrow \exists y p(y)$

**其中$y$不在$p(x)$中出现**

**定理 10**

$1^\circ \vdash \neg\forall x p \leftrightarrow \exists x \neg p$

$2^\circ \vdash \neg\exists x p \leftrightarrow \forall x \neg p$

**定理 11**

$1^\circ$ $|p|_M = 1 \Leftrightarrow |\forall x p|_M = 1$

$2^\circ$ 设$p'$ 是$p$的全称闭式，则 $|p|_M = 1 \Leftrightarrow |p'|_M = 1$

$3^\circ$ $|p|_M = 0 \Leftrightarrow |\forall x p|_M = 0$

$4^\circ$ 设$p'$ 是$p$的全称闭式，则 $|p|_M = 0 \Rightarrow |p'|_M = 0$

$5^\circ$ $|p|_M = 1$ 且$|p \to q|_M = 1 \Rightarrow |q|_M = 1$

**定理 12**

$1^\circ$ $\Gamma \vDash p$且$\Gamma \vDash p \to q \Rightarrow \Gamma \vDash q$

$2^\circ$ $\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash \forall x p$

$3^\circ$ 若$p'$ 是$p$的全称闭式,则：$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p'$

**定理 13 (K的可靠性)**

$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma \vDash p$

**定理 14 (K的完全性)**

$\Gamma \vDash p \Rightarrow \Gamma \vdash p$