分析：如何不重不漏地写出$X_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$各层次的全部公式？

本质上是一个“排列组合”问题。

首先易知$L_0 = X_n$，故$|L_0| = n$；

对于$L_i(i \geq 1)$，根据公式形成的规则“若p是公式，则$\neg p$是公式；若p, q是公式，则$p \to q$是公式”可知：L_i的公式必然形如“$\neg p$”或“$p \to q$”，且p, q均为$L_k(k < i)$当中的公式。对于L_i中形如“$\neg p$”的公式，p全部属于L_{i-1}，故这类公式的个数为$|L_{i-1}|$；

对于L_i中形如“$p \to q$”的公式，不妨设p属于L_α而q属于L_β，α, β应当满足：“$0 \leq \alpha \leq i-1$”且“$0 \leq \beta \leq i-1$”且“$\alpha + \beta = i-1$”，这类公式的个数为$\sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|$。

综合以上两类公式，便知$\boxed{|L_i| = |L_{i-1}| + \sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|}$，而依据这种思路，各层次（即$L_i(i \geq 1)$）具体有哪些公式也可以不重不漏地写出。

以$X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}(n = 3)$为例，$|L_0| = 3$，$|L_1| = |L_0| + |L_0| \cdot |L_0| = 12$，

$|L_2| = |L_1| + \sum_{l=0}^{1} |L_l| \cdot |L_{1-l}| = |L_1| + 2|L_0| \cdot |L_1| = 84$，

$$|L_3| = |L_2| + \sum_{l=0}^{2} |L_l| \cdot |L_{2-l}| = |L_2| + 2|L_0| \cdot |L_2| + |L_1| \cdot |L_1| = 732 \ldots\ldots$$

L(X_n)每层元素个数

2° $\{\neg\neg p\} \vdash p$

证：

(1) $\neg\neg p$ 假定
(2) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)
(3) $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1)，(2)，MP
(4) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)
(5) $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3)，(4)，MP
(6) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)
(7) $\neg\neg p \to p$ (5)，(6)，MP
(8) p (1)，(7)，MP

4° $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

证：

(1) $p \to (q \to r)$ 假定
(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)
(3) $(p \to q) \to (p \to r)$ (1)，(2)，MP
(4) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)
(5) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (3)，(4)，MP
(6) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)
(7) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (5)，(6)，MP
(8) $q \to (p \to q)$ (L1)
(9) $q \to (p \to r)$ (7)，(8)，MP

然后根据 HS 规则的直接证明：

1. $p \to q$ 已知
2. $q \to r$ 已知
3. $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ L1
4. $p \to (q \to r)$ 2,3,MP
5. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ L2
6. $(p \to q) \to (p \to r)$ 4,5,MP
7. $p \to r$ 1,6,MP

HS的直接证明

2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$.（换位律）

注：由于在练习 3 的 3.2° 这道作业题中已完成对$\{\neg\neg p\} \vdash p$（双重否定律）的证明，本题在简化证明里直接引用双重否定律，但并不默认可同时直接引用“第二双重否定律”。

证：根据演绎定理，只用证$\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$，下面是所需要的一个证明。

(1) $\neg\neg\neg p \to \neg p$ 双重否定律
(2) $(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ (L3)
(3) $p \to \neg\neg p$ (1)，(2)，MP
(4) $q \to p$ 假定
(5) $q \to \neg\neg p$ (3)，(4)，HS
(6) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律
(7) $\neg\neg q \to \neg\neg p$ (5)，(6)，HS
(8) $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$ (L3)
(9) $\neg p \to \neg q$ (7)，(8)，MP

换位律间接证明

3° $((p \to q) \to p) \to p$.（Peirce 律）

证：根据演绎定理，只用证$\{(p \to q) \to p\} \vdash p$，下面是所需要的一个证明。

(1) $(p \to q) \to p$ 假定
(2) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律
(3) $\neg p \to p$ (1)，(2)，HS
(4) $(\neg p \to p) \to p$ 否定肯定律
(5) p (3)，(4)，MP

Peirce律间接证明

命题 2-3°

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$. 下面是所要的一个证明：

假定 $q \to \neg p$、p 和 q，立即可得

(1) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash p$
(2) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{q \to \neg p, p\} \vdash \neg q$.

(3) $(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$ 由演绎定理
(4) $((q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p))$ 换位律
(5) $\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$ (3), (4), MP

---

4. 证明命题 4-1°

$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

即证 $\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$

先证 $\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$

由演绎定理，只需证 $\{\neg\neg(p \to \neg q)\} \vdash \neg\neg p \to \neg q$

(1) $\neg\neg(p \to \neg q)$ 假定
(2) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (p \to \neg q)$ 双重否定律
(3) $p \to \neg q$ (1)(2) MP
(4) $\neg\neg p \to p$ 双重否定律
(5) $\neg\neg p \to \neg q$ (3)(4) HS
(6) $\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)$ 由演绎定理

再证 $(\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$

由演绎定理，只需证 $\{\neg\neg p \to \neg q\} \vdash \neg\neg(p \to \neg q)$

(7) $\neg\neg p \to \neg q$ 假定
(8) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律
(9) $p \to \neg q$ (7)(8) HS
(10) $(p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 第二双重否定律
(11) $\neg\neg(p \to \neg q)$ (9)(10) MP
(12) $(\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$ 由演绎定理

(13) $(\neg\neg(p \to \neg q) \to (\neg\neg p \to \neg q)) \to (((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)))$ (命题 3-5°)
(14) $((\neg\neg p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)) \to (\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q))$ (6)(13) MP
(15) $\neg\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg q)$ (12)(14) MP

德摩根定律

3. 以下结论是否正确？为什么？

1° $\models p(x_1,\cdots,x_n) \Leftrightarrow \models (\neg x_1,\cdots,\neg x_n)$.

2° $\models (p\to q)\leftrightarrow(p'\to q') \Rightarrow \models p\leftrightarrow p'$ 且 $\models q\leftrightarrow q'$.

解

1° 结论正确，以下对等价关系 $\Leftrightarrow$ 做两个方向上的 分别证明： 形式上参考代换定理的证明

证明. '$\Rightarrow$': 由代换定理，取 $p_1,\cdots,p_n$ 分别为 $\neg x_1,\cdots,\neg x_n$，立刻可得：

$$\models p(x_1,\cdots,x_n) \Rightarrow \models (\neg x_1,\cdots,\neg x_n).$$

'$\Leftarrow$': 设 v 是 $L(X)$ 的任一赋值，记

$$u_1 = v(\neg x_1),\cdots,u_n = v(\neg x_n)$$

将 $u_1,\cdots,u_n$ 分别指派给 $x_1,\cdots,x_n$，且将此真值指派扩张成 $L(X_n)$ 的赋值 u。于是 u 满足：

(1) $$u(x_i) = u_i = v(\neg x_i) = \neg v(x_i) \qquad i = 1,\cdots,n$$

现需证明下面的(2)式：

(2) $$v(p(x_1,\cdots,x_n)) = u(p(\neg x_1,\cdots,\neg x_n))$$

我们有：

$$\begin{aligned}
u(p(\neg x_1,\cdots,\neg x_n)) &= p(\neg u(x_1),\cdots,\neg u(x_n)) && \text{（}u\text{ 的保运算性）}\\
&= p(\neg u_1,\cdots,\neg u_n)\\
&= p(\neg v(\neg x_i),\cdots,\neg v(\neg x_n)) && \text{（由(1)式）}\\
&= p(\neg\neg v(x_i),\cdots,\neg\neg v(x_n)) && \text{（}v\text{ 的保运算性）}\\
&= p(v(x_i),\cdots,v(x_n)) && \text{（}\mathbb{Z}_2\text{ 中公式）}\\
&= v(p(x_i,\cdots,x_n)) && \text{（}v\text{ 的保运算性）}
\end{aligned}$$

有了(2)便可得：

$$\begin{aligned}
\models (\neg x_1,\cdots,\neg x_n) &\Rightarrow u(p(\neg x_1,\cdots,\neg x_n)) = 1\\
&\Rightarrow v(p(x_i,\cdots,x_n)) = 1\\
&\models p(x_1,\cdots,x_n)
\end{aligned}$$

□

代换定理的运用

1. 设 x 不在 q 中自由出现. 求证

1° $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p\to q)$.

2° $\vdash \exists x(p\to q)\to(\forall x p\to q)$.

- 第一问

命题 2 ($\exists_1$ 规则) 设项 t 对 $p(x)$ 中的 x 自由，则有

$$\vdash p(t)\to\exists x p(x).$$

先用一次演绎定理 等价证明$\{\exists xp\to q\}\vdash\{\forall x(p\to q)\}$

---

(1) $p\to\exists xp$ $\exists_1$规则

(2) $\exists xp\to q$ 假定

(3) $p\to q$ $(1)(2)HS$

(4) $\forall x(p\to q)$ $(3)Gen$

- 第二问

先用一次演绎定理 等价证明$\{\exists x(p\to q),\forall xp\}\vdash\{q\}$

反证律 只需要证明 $\{\exists x(p\to q),\forall xp,\ \neg q\}\vdash\{\neg\forall x\neg(p\to q)\}$ 而且 $\{\exists x(p\to q),\forall xp,\ \neg q\}\vdash\{\forall x\neg(p\to q)\}$

(1) $\forall xp$ 假定

(2) $\forall xp\to p$ $K4$

(3) p $(1)(2)MP$

(4) $\neg q$ 新假定

(5) $p\to(\neg q\to\neg(p\to q))$ 永真式

(6) $\neg q\to\neg(p\to q)$ $(4)(5)MP$

(7) $\neg(p\to q)$ $(4)(6)MP$

(8) $\forall x\neg(p\to q)$ $(7)GEN$

(9)$\neg\forall x\neg(p\to q)$假定

故得证