单变量微分学复习课

主要内容

1. 导数的概念,导数的几何意义

2. 求导运算: 基本公式,求导法则（四则运算，复合运算，反函数求导运算），隐函数求导，参数方程表示的函数求导

3. 微分概念，一阶微分形式不变性，几何意义

4. 中值定理（**Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, Taylor**）

5. 导数应用（**L'Hospital**法则，单调性，极值，凹凸性，拐点，作图）

一.导数的概念

1. 注意导数概念的正确理解 **2.** 在很多时候必须用导数定义求导,例如:分段函数在分段点的导数,若不用导数极限定理,则需用导数定义.另外在求极限时有时**L'Hospital**法则是不能用的,只能用导数定义.

例1 设$f(x)$在$x=a$的某个邻域内有定义,则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{2h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

例2 设$f(x)$可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$,是$F(x)$在$x=0$处可导的(　　)条件

(A) 充要　(B) 充分但不必要　(C) 必要但不充分　(D) 既不充分也不必要

例3 设对任意x恒有$f(x+1)=f^2(x)$,且$f(0)=f'(0)=1$,求$f'(1)$

例4 已知$f''(0)$存在,$f(0)=f'(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}$.

例5 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且满足$|f(x)|\le x^2$,则点$x=0$必为$f(x)$的(　　).

(A) 间断点　　(B) 连续,但不可导

(C) 可导点,且$f'(0)=0$　(D) 可导点,且$f'(0)\neq 0$

二.注意一些结论

1. 函数可导则一定连续,反之不真.若$f(x)$在x_0左右可导, 则$f(x)$在x_0也连续.初等函数在其定义区间上均连续,但未必在其定义区间上可导.例如$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$在$x = 0$处是连续的,但不可导.

2.四则运算

(i)若$f(x), g(x)$均可导,则$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$也可导;

(ii) 若$f(x), g(x)$均不可导,则$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$未必不可导;

(iii) 若$f(x)$可导,$g(x)$不可导,则$f(x) \pm g(x)$不可导,$f(x)g(x)$未必不可导,若$f(x) \neq 0$,则$f(x)g(x)$也不可导

3. 函数$y = f(g(x))$,若$u = g(x)$ 在x_0可导,$y = f(u)$在$u_0 = g(x_0)$可导,则$y = f(g(x))$在x_0可导, 且有

$$(f(g(x)))'|_{x_0} = f'(u_0)g'(x_0).$$

但注意,如果$u = g(x)$在x_0与$y = f(u)$在u_0至少有一个不可导,那么$f(g(x))$在x_0的可导性都是不能确定的.

例 (1)$f(x) = x^2, g(x) = |x|$,则$f(g(x)) = x^2$,在$x = 0$点$g(x)$不可导,$f(x)$和$g(f(x))$均可导.

$f(x) = x, g(x) = |x|$,则$f(g(x)) = |x|$,在$x = 0$点$f(x)$可导,$g(x)$和$g(f(x))$均不可导.

(2)$f(x) = |x|, g(x) = x^2$,则$f(g(x)) = x^2$,在$x = 0$点$f(x)$不可导,$g(x)$和$f(g(x))$均可导.

$f(x) = |x|, g(x) = x$,则$f(g(x)) = |x|$,在$x = 0$点$g(x)$可导,$f(x)$和$f(g(x))$均不可导.

(3)$f(x) = 2x + |x|, g(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}|x|$,则$f(g(x)) = x$,在$x = 0$点$f(x)$和$g(x)$均不可导,而$f(g(x))$可导.

$f(x) = |x|, g(x) = x + |x|$,则$f(g(x)) = x + |x|$,在$x = 0$点$f(x)$和$g(x))$均不可导,$f(g(x))$也不可导.

4. $f(x)$与$|f(x)|$的可导关系:

$f(x)$可导+$f(x) \neq 0 \Longrightarrow |f(x)|$可导; $|f(x)|$可导+$f(x)$连续$\Longrightarrow f(x)$可导.

5.$f(x)$在x_0点n阶可导,则:

(i)$f(x)$在$U^{\circ}(x_0)$内未必n阶可导,

(ii) $f(x)$在$U(x_0)$内$n-1$阶可导,且$f(x) \in C^{(n-2)}(U(x_0))$

6.周期函数的导数仍为周期函数,奇函数的导数是偶函数,偶函数的导数是奇函数.

7.导数三大性质：$\begin{cases}\text{导数介值定理}\\ \text{导数极限定理}\\ f(x)\text{在区间上可导,其导函数在区间上无第一类间断点}\end{cases}$

8. $f(x)\in C(U(x_0))$,且在x_0的左右两侧单调性相反,则x_0点为极值点,但反之不真.

9. 单调可导函数的导函数未必单调;导函数单调,原来的函数也未必单调.例如$y=x^3\quad x\in(-1,1), y'=3x^2;\quad y'=x\quad x\in(-1,1), y=\dfrac{1}{2}x^2$.

10. $f(x),g(x)$在(a,b)内可导,且$f(x)>g(x)$,不能推出$f'(x)>g'(x)$.例$y_1=\sqrt{1-x^2}, y_2=x, x\in(0,\sqrt{\frac{1}{2}}), y_1>y_2, y_1'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}<0, y_2=1, y_1'<y_2'$.

三. 讨论函数的可导性

(i) $\begin{cases}\text{抽象函数}\\ \text{分段函数}\end{cases}$　　(ii) 已知函数可导求参数

例1 设$\varphi(x)$在$x=a$点连续,讨论下列函数在$x=a$点的可导性.

(i) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,　　(ii) $g(x)=|x-a|\varphi(x)$.

例2 求$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点的个数.

例3 讨论$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x<0\\ \ln(1+x) & x\geq 0\end{cases}$的可导性,并求$f'(x)$.

例4 先研究$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leq 0\end{cases}$ 的连续性,再研究可微性,其中$g(x)$在$x\leq 0$上连续.(2009-2010)

例5 确定常数a,b,使$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & x\leq 1\\ ax+b. & x>1\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,并求$f'(x)$

四.导数、微分的几何意义

切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$　**法线方程** $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

例1 求出曲线$x=\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t, y=\sin t,\quad 0<t<\pi$的每一条切线上从切点到与$x$轴交点的距离.(2010–2011期中)

例2 设$f(x)$在含有$x=0,1$的开区间内连续,在$x=1$处可导,且在$x=0$的邻域内满足

$$f(1+\sin x)-2f(1-\sin x)=3x+o(x)\quad x\to 0,$$

求$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程.(2009–2010期中)

例3 设$y=f(x)$具有二阶导数,且$f'(x),f''(x)>0,\triangle x$为自变量$x$在点$x_0$处的增量,$\triangle y$与$dy$分别为$f(x)$在$x_0$处对应的增量与微分,若$\triangle x>0$,则(　)

(A) $0<dy<\triangle y$　(B) $0<\triangle y<dy$　(C) $\triangle y<dy<0$　(D) $dy<\triangle y<0$

五.函数求导(高阶导)

求下列函数的导数

(1) 初等函数求导

例: 求$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\quad y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$的$y'$.

(2) 隐函数求导

例: 设$2y+\sin y-x=0$,求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 幂指函数求导

例: 求$[(\tan x)^{\sin x}]'$.

(4) 取对数求导法: $f(x)$可导,$[\ln|f(x)|]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

例: 设$y=x^2\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,求$y'$.

(5) 参数方程求导

例: 设$f(u)$在$u=0$的邻域内二阶可导,$f'(0)=f''(0)=1,y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=te^{-t} \\ y=t \end{cases}$所确定,$z=f(\ln(y+1)-\sin x)$,求$\dfrac{dz}{dx}|_{x=0},\dfrac{d^2z}{dx^2}|_{x=0}$.

(6) 抽象函数求导

例: 设$f(x)$为可导函数,且$f'(x)=[f(x)]^2$,则$f^{(n)}(x)=(\ A\ )$

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　(C) $[f(x)]^{2n}$　(D) $n![f(x)]^{2n}$

六. 用导数研究函数的性质

$$\begin{cases} \text{1.函数单调性与极值.} \\ \text{2.函数的凹凸性与拐点.} \\ \text{3.渐近线: 水平渐近线、垂直渐近线、斜渐近线.} \\ \text{4.函数作图, 由函数图像推知函数的相关性质.} \\ \text{5.方程的根(函数的零点),方法：单调性；零值定理；Rolle定理.} \end{cases}$$

例1 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$f''(x) > 0$,则$f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$的大小关系为..................$(f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1))$

例2 已知$f(x)$可导,$f(0) = 0, f'(x)$单调减少,证明:(1) $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$在$(0,1]$内单调减少,(2) $f(1)x \le f(x)$.

例3 设$f(x)$在$x = a$连续,且$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$,则$f(x)$在点$x = a$处(A)

(A) 取极大值 (B) 取极小值 (C) 产生拐点 (D) 以上都不是

例4 设$f(x)$满足$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$,且$f'(x_0) = 0$ $(x_0 \ne 0)$,则(B)

(A) $f(x_0)$为$f(x)$的极大值 (B) $f(x_0)$为$f(x)$的极小值

(C) $(x_0, f(x_0))$为$y = f(x)$的拐点 (D) 以上都不对

例5 设$f(x)$满足$f''(x) + (1 + x^2)f'(x) + x^3 f(x) = \sin x$,且$f'(0) = 0$,则(C)

(A) $f(0)$为$f(x)$的极小值 (B) $f(0)$为$f(x)$的极大值

(C) $f'(0)$为$f'(x)$的极大值 (D) $(0, f(0))$为曲线$y = f(x)$的拐点

例6 设$f(x) = |x(1 - x)|$,则(B)

(A) $x = 0$是极值点,$(0,0)$不是拐点 (B) $x = 0$是极值点,$(0,0)$是拐点

(C)$x = 0$不是极值点,$(0,0)$不是拐点 (D) $x = 0$不是极值点,$(0,0)$是拐点

例7 曲线$y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是(C)

(A) (1.0) (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

例8 证明曲线$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$有位于同一直线上的三个拐点.(2010-2011期中)

例9 证明$f(x) = x^3 - 3x + 5$有唯一零点.

例10 证明曲线$f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ $(n > 1, n \in \mathbf{N})$与$x$轴在区间$(0,1)$中有唯一交点$(x_n, 0)$,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例11 设$P(x)$是n次实系数多项式,若$P(x)$的根都是实数,证明:$P'(x)$的根也都是实数.

例12 $B(x)=(x^2-1)^n$,求证$B^{(n)}(x)$在$(-1,1)$内有n个相异的实根.

例13 讨论曲线$y=4\ln x+k$与$y=4x+\ln^4 x$的交点的个数.

七.不等式证明

方法:

(1) 单调性

(2) 凹凸性

(3) 最值

(4) 中值定理(Lagrange, Cauchy, Taylor)

例1 设$f''(x)<0, f(0)=0$,证明对任意$x_1>0, x_2>0$有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

八.证明关于$\xi(\eta)$的等式(不等式)

例1 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{2}$,证明存在不同的$\xi,\eta\in(0,1)$,使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

例2 设$f(x)\in C[0,1]$, $f(x)$在$(0,1)$内可导,$f(0)=0, f(1)=1$,证明:对任意正数a,b,在$(0,1)$内存在不同的ξ,η使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

九.Taylor 公式

1.牢记几个基本初等函数的Maclaurin公式.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x, \qquad 0<\theta<1., \qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1},\qquad 0<\theta<1.\qquad x>-1.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\qquad 0<\theta<1.\qquad x>-1.$$

2. Taylor公式的应用

(1). 近似计算.

(2). 利用Taylor求极限.

(3). 利用函数的Taylor公式求函数在某点的高阶导数.

(4). 利用Taylor公式证明不等式.

(5). 其它

例1. 设$f(x)=e^{-x^2}$,求$f^{(10)}(0)$.

例2. 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,$f'(a)=f'(b)=0$,试证:$\exists\xi\in(a,b)$,使得$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.**(同一点值写成不同点的Taylor 公式)**

例3. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有界,并有非负的二阶导数,求证$f(x)=c\quad(c$为常数).

例4 设$f(x)$是n次多项式,$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n,\quad(a_n\neq0)$,并且$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(m)}(x_0)=0,\quad f^{(m+1)}(x_0)\neq0\quad(m\leq n-1)$,试证$x=x_0$是方程$f(x)=0$的$m+1$重根.

例5 设$f(x)$在以x_0为内点的某区间I上有连续的二阶导数,$f''(x_0)\neq0$,对于$x_0+h\in I$有中值定理$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)\qquad(0<\theta<1)$,证明$\lim\limits_{h\to0}\theta=\frac{1}{2}$.

例6 函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有三阶导数,且$f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$,证明;$\exists\,\xi\in(-1,1)$,使得$f'''(\xi)=3$. **(不同点值写成在同一点Taylor公式)**

例7 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有三阶导数,极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)$都存在有限,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$,证明$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

一般情形下,只要见到函数2阶或2阶以上可导,就应该想到Taylor公式.使用方法:

(1) 有时在某固定点x_0处的Taylor公式,有时是在x处的Taylor公式.

(2) 将不同点的函数值写成同一点的Taylor 公式,然后将两个式子相加(减).

(3) 将一点的值写成不同点的Taylor公式,然后将两个式子相加(减).

十.求极限的方法

1° 连续函数的极限值等于函数值.

2° 四则运算（通分、分解因式，分子、分母有理化）; 复合函数的极限运算（变量代换）.

3° 等价无穷小（大）量的代换.$x \to 0$

$\sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x;\quad a^x - 1 \sim x\ln a;$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x;\quad \tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3;\quad x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3.$

4° 重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

5° 无穷小量乘有界量,仍为无穷小量.

6° 利用左、右极限求极限.

7° 利用夹逼定理求极限.

8° 利用单调有界数列极限存在.

9° 利用O.Stolz定理,L'Hospital法则.

10° 利用Taylor公式.

11° 利用中值定理.

12° 利用定积分、级数等求极限.

注 L'hospital法则不是万能的,在满足(i) $f(x), g(x)$在$U^0(x_0)$内可微, $g'(x) \neq 0$, 且(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (或$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$),如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

若不满足条件(i)不能用L'hospital法则,或虽满足条件(i)但$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,也不能下结论$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在,或知道$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,也不能得$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在.

例 设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3} + \dfrac{f(x)}{x^2}\right) = 0$.试求(1)$f(0), f'(0), f''(0)$,(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.(2012-2013期中)

错误解法;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x + f(x) + xf'(x)}{3x^2} = 0$$

于是可得

$$\lim_{x\to 0}(3\cos x + f(x) + xf'(x)) = 0 \Longrightarrow f(0) = -3$$

错误在于：由

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = 0$$

不能推出

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x + f(x) + xf'(x)}{x^3} = 0$$

正确解法:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3) + x(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + o(x^2))}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(f(0)+3)x + f'(0)x^2 + (-\frac{9}{2} + \frac{f''(0)}{2})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0
\end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} f(0) + 3 = 0 \\ f'(0) = 0 \\ -\dfrac{9}{2} + \dfrac{f''(0)}{2} = 0 \end{cases}$$

即$f(0) = -3, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 9.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}f''(0) = \frac{9}{2}.$

注： 在(2)的解答中如果对$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$继续用L'Hospital法则,则得不出结论.因为我们的条件仅仅是二阶可导而没有二阶导数连续.

历年考试题

一. 极限、连续、可导之间的关系

1. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} (x + a - 2)^2 \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x\cos x + (b-1)(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0. \end{cases}$$

试问常数a, b为何值时，函数$f(x)$在$x = 0$处连续？此时是否在$x = 0$可导？(20)

2. (10 分)$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0, f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=0$. (19)

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中$\varphi(x)$具有二阶连续导函数,且$\varphi(0)=1$. (1)确定a的值，使$f(x)$在$x=0$处连续; (2)求$f'(x)$; (3)讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.(2017六12分)

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求导函数$f'(x)$,并说明$f'(x)$在点$x=0$处是否连续.(2016一(4)6分)

5. 设$f(x)$在$x=0$有二阶导数，$f(0)=1, f'(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^x$.(2015一(4)5分)

6. 函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2ax}+\ln(1+bx)-\cos x}{x}, & x>0,\\ a^2x+b, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 a,b 使$f(x)$在$x=0$处可微.(2014二(10分))

7. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\ a\cos x+\sin bx, & x\geq 0\end{cases}$ 试按情况给出参数a,b应满足的条件分别使得:(1) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续; (2) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,并说明此时导函数在$(-\infty,+\infty)$上连续.(2013)

8. 设$f(x)$在$x=0$的某个邻域内大于零,$f'(0)$存在,求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x^{-1})}{f(0)}\right]^x$. (2012)

9. 设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$,试求(1) $f(0), f'(0), f''(0)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$. (2012)

10. 设函数$f(x)$在a点处二阶可导,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-3f(a)+f(a-h)}{h^2}$. (2011)

11. 设函数$\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 其中参数$\alpha\in\mathbf{R}$,对以下两种不同的情形,分别讨论α的范围: (1) $f(x)$在$\mathbf{R}$上连续; (2) $f(x)$在$\mathbf{R}$上可导,但其导函数$f'(x)$在$x=0$不连续. (2011)

12. 写一个区间$[-1,1]$上的连续函数$f(x)$,满足$f(0)=f'(0)=0$,但$f''(0)$不存在. (2010)

13. 先研究函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$ 的连续性,而后研究可微性,其中$g(x)$在$x\le 0$上连续. (2009)

14. $f(x)$在含$x=0,1$的开区间内连续,在$x=1$处可导,且在$x=0$的邻域内满足$f(1+\sin x)-2f(1-\sin x)=3x+o(x)\ x\to 0$,求$y=f(x)$在$(1,f(1))$处切线方程. (2009)

二. 求导

1. 设$f(x)=(\sin x)^{\cos x}$，计算$f'(x)$. (20)

2. 设$f(x)$ 连续，对某个固定的$a\in(0,1)$以及某个实数A满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(ax)}{x}=A,$$

试证$f(x)$ 在$x=0$ 可导, 并求$f'(0)$ 的值. (20)

3. $f(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x$. 求$f^{(4)}(0)$.(19)

4. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0;\\ x^3-3x^2, & x\le 0.\end{cases}$ 求$f'(x)$. (19)

5. 设$y=f(x)$由参数方程

$$\begin{cases}x=t-\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$$

确定，求$f(x)$在参数$t=\pi$处的二阶导数. (19)

6. 求由方程$\sin y+e^x-xy-1=0$决定的$(0,0)$附近的隐函数$y(x)$在$x=0$处的二阶导数. (19)

7. 求$f(x)=\frac{1}{2x^2-1}$ 在$x=0$ 处的第2018 阶导数值$f^{(2018)}(0)$. (2018二、10分)

8. 设函数$y=y(x)$ 由方程组

$$\begin{cases}x=x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$$

求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 和$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$. (2018 三、10分)

9. 设$y=f\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$(2017一(4)6分)

10. 设函数$y=y(x)$由方程组

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$$

所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=1}$及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=1}$.(2017二10分)

11. 已知函数$f(x)$在$x=0$的某个领域内有连续导数,且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2.$$

试求$f(0)$, $f'(0)$.(2017三10分)

12. 设$f(x)=x^2\sin x$,求高阶导函数$f^{(10)}(x)$.(2016一(5)6分)

13. 设$f(x)=\begin{cases} x+5\cos x-\cos 2x, & x<0 \\ 1+ae^x+b\sin 2x, & x\geqslant 0 \end{cases}$, 求$a,b$的值,使得$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上可导.(2016二(2)10分)

14. 设函数$y=y(x)$由方程组

$$\begin{cases} x=2t-\sin t \\ y=t^2+t \end{cases}$$

所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=0}$及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=0}$.(2016三10分)

15. 设$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,求$f'(x)$.(2015一(5)5分)

16. 设$f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, 求$f^{(9)}(0)$.(2015一(6)5分)

17. $y=f(x)$由方程组$\begin{cases} x=t+\sin t \\ y+te^y=t^2 \end{cases}$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=0}$.(2015二10 分)

18. 设函数$y=y(x)$由方程组$\begin{cases} x=\ln(1+t) \\ e^y-\arctan t=1 \end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=0}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=0}$.(2014三(1)10分)

19. 设$f(x)$在$x=0$处有三阶导数, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x^2+2x-1+f(x)}{x^3}=1$, 求$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$及$f'''(0)$.(2014三(2)10分)

20. 设函数$f(x)=x^2\sin 3x$,求$f^{(20)}(x)$. (2013)

21. 设函数$f(u)$在$u=0$的邻域内二阶可导,$f'(0)=1, f''(0)=2, t=t(x)$是函数$x=te^t$的反函数$(t>-1), y=f(e^t+x-\cos x)$, 求$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.(2013)

22. $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,求$\dfrac{dy}{dx}$. (2012)

23. $y=\sin[f(x^2)]$,其中f具有二阶导数,求$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (2012)

24. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$所确定,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (2012)

25. 设函数$y=y(x)$由方程组$\begin{cases} x=e^t+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$所确定,求$\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$. (2011)

26. 令$f(x)=e^{-x^2}$,求$f^{(10)}(0)$. (2010)

27. 求$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'$ (2010)

28. 求$\big((\tan ax)^{\sin(x/b)}\big)'$, a,b为常数,$b\neq 0$. (2010)

29. 求$(x^2\cos x)^{(50)}$. (2010)

30. 设$f(u)$在$u=0$的邻域内二阶可导,$f'(0)=f''(0)=1, y=y(x)$由$\begin{cases} x=te^{-t} \\ y=t \end{cases}$所确定,$z=f(\ln(y+1)-\sin x)$,求$\dfrac{dz}{dx}|_{x=0}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}|_{x=0}$. (2009)

三. 中值定理

1. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 上可导, 且$ab>0$. 求证: 存在$\xi\in(a,b)$, 使得
$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi). \ (20)$$

2. 计算$f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$在$x=0$处的直到x^5的Taylor公式. (20)

3. (10 分) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$|f(x)|\leq 1$, $f'(0)>1$. 证明：存在ξ使得$f''(\xi)+f(\xi)=0$. (19)

4. 设$f(x)$ 为$\mathbb{R}$ 上的二阶可导函数, 满足: $f(0)=1$, $f^{'}(0)=0$, $f^{''}(0)>0$, $f(1)=0$. 试证明: 存在$x_0\in(0,1)$, 使得$f^{'}(x_0)=0$. (2018六、10分)

设$f(x)$ 为如下定义的$\mathbb{R}$ 上的函数：
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0; \\ 1, x=0. \end{cases}$$

(1). (10分) 求$f^{'}(x)$, 并证明$f^{'}(x)$ 为$\mathbb{R}$ 上的连续函数.
(2). (5分)证明存在$x_0 \in \mathbb{R}$, 满足: $|f^{'}(x_0)| < 1$, 并且$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{'}(x)| \leqslant |f^{'}(x_0)|$.
(3). (5分)设$a \in \mathbb{R}$, 令$x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.(2018)

5. 假设$f(x)$ 在区间$[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. 证明: 必存在$\xi \in (-1, 1)$, 使得$|f'''(\xi)| = 3$.(2017、五10分)

6. 设$f(x)$在区间$[0, 1]$上二阶可导,$f(0) = f(1)$,并且存在$x_0 \in (0, 1)$,使得$|f'(x_0)| > 1$,证明:必存在$\xi \in (0, 1)$,使得$|f"(\xi)| > 2$.(2016五12分)

7. 函数$f(x)$在$x = 0$的某邻域中有三阶连续导数，$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$,设$a_{n+1} = f(a_n)$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0, (a_n \neq 0,\ n = 1, 2, \cdots)$, 求$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^2$. (2015七6分)

8. 设$f(x)$在区间$[0, 3]$上连续, 在$(0, 3)$内可导, 且$f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$, 试证：在开区间$(0, 3)$内存在一点 ξ 使得$f'(\xi) = 0$.(2014七8分)

9. 设函数$y = f(x)$在点$x = 1$处三阶可导,且$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - 1}{(x - 1)^3} = 2$,求$f(x)$在点$x = 1$处带Peano余项的三阶Taylor展开式,并证明$x = 1$不是$f(x)$的极值点,但是$f(x)$的拐点.(2013)

10. 设$f(x)$在区间$[0, 1]$上二阶可导且对$\forall\, x \in [0, 1], |f''(x)| \leq 2$,试证:如果函数$f(x)$在区间$(0, 1)$内有驻点,则必有$|f(1) - f(0)| < 1$.(2013)

11. 设$a > 0$,函数$f(x)$在区间$[0, a]$上三阶可导,且$f(0) = f''(0) = 0$,证明:$\exists\, \xi \in (0, a)$,使得$af'(a) = f(a) + \dfrac{1}{3}a^3 f'''(\xi)$.(2013)

12. 若$f(x)$在$[0, a]$上连续,在$(0, a)$内可导,$a > 0$,且$f(0) = 1, f(a) = 0$.求证(1) 至少存在一点$\xi \in (0, a)$,使$f(\xi) = \dfrac{\xi}{a}$. (2) 在$(0, a)$内必存在两点$x_1 \neq x_2$使$f'(x_1)f'(x_2) = \dfrac{1}{a^2}$. (2012)

13. 设函数$f(x)$具有二阶连续导数,且$f'(1) = 0, \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f''(x)}{(x - 1)^2} = 1$,问$f(1)$是$f(x)$极值吗?如果是,是极大值还是极小值?请证明你的结论. (2011)

14. 设$f(x)$在$[0, 1]$上连续,在$(0, 1)$内可导,$f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{3}) = 1$,证明: (1) 存在$\xi \in (\frac{1}{3}, 1)$,使得$f(\xi) = \xi$; (2) 存在$\eta \in (0, \xi)$,使得$f'(\eta) - f(\eta) + \eta = 1$. (2011)

15. 写出$f(x)=\arctan x$带Peano余项的$2k$次(k为正整数)Maclaurin展开式. (2010)

16. 函数$f(x)$在$(-1,1)$上二阶可导,$f(0)=f'(0)=0$,而且对任意$x\in(-1,1)$, $|f''(x)|\le |f(x)|+|f'(x)|$,证明在$(-1,1)$上$f\equiv 0$. (2010)

17. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有三阶导数,极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)$都存在有限,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$,证明$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$. (2009)

四. 极值和最值

1. 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限的切线与坐标轴围成的三角形的最小面积. (20)
2. 设函数$f(x)$在区间$I=[0,2016]$上连续,且在$(0,2016)$内无极值点,证明:$f(x)$在区间I上是严格单调的.(2016六8分)
3. (1) 求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在区间$[1,+\infty)$上的最值; (2) 求 $\sqrt[n]{n}$ 的最大值 ($n\in\mathbb{Z}^+$).(2014四10分)
4. 试确定函数$f(x)=x^x$在闭区间$[0,1]$上的最大值与最小值,并写出相应的最大值点与最小值点.(其中$f(0+0)=f(0)=1$)(2013)

五. 不等式证明

1. (10 分) $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 证明：$\sin x+\tan x>2x$. (19)
2. 设$e<a<b<e^2$, 证明：$\ln^3 b-\ln^3 a>\dfrac{3}{e}(b-a)$.(2018四、10分)
3. 求证:$p\cos\theta\leqslant\cos(p\theta)$,对$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$和$0<p<1$.(2017四10分)
4. 讨论函数$f(x)=x(1+e^x)-2(e^x-1)$的单调性，并证明不等式
$$\frac{e^a-e^b}{a-b}<\frac{e^a+e^b}{2}\quad(a\neq b).$$
(2015六10分
5. 设$e^2<a<b<e^3$, 证明 $\dfrac{6}{e^3}(b-a)<\ln^2 b-\ln^2 a<\dfrac{2}{e}(b-a)$.(2014五8分)
6. 求证$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$, $(n=1,2,\cdots)$. (2012)
7. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上二阶可导,满足$f(0)=0,f''(0)<0$,证明当$b>x>a>0$时,$bf(x)>xf(b)$成立. (2011)

六. 应用

1. 试证：方程$x^2 = x\sin x + \cos x - \dfrac{1}{2}$恰好只有两个不同的实根. (20)

2. 设n 为正整数, $f(x)$ 为$\mathbb{R}$ 上n 阶可导函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$.

   1.证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}} = 0$.

   2. 证明: 存在实数L, 使得$f(x)+x^{n+1}$ 在区间$(L, +\infty)$ 上为递增函数. (2018五、10分)

3. 证明方程$x^2 = x\sin x + \cos x$ 仅有两个实根.(2015五10分)

4. 设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上二阶连续可微,且满足$f(a) < 0, f(b) > 0$,对任意的$x \in [a, b], f'(x) > 0, f''(x) > 0$, (1) 证明方程$f(x) = 0$在区间$(a, b)$有且仅有一个根$\xi$; (2) 取$x_0 = b$,由递推公式$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 得到数列$\{x_n\}$,证明该数列在区间$[a, b]$严格单调减； (3) 证明数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. (2011)

5. 三次多项式$x^3 - 3x + 5$具有几个实根？ (2010)

6. 求出曲线$x = \ln\tan\frac{t}{2} + \cos t$, $y = \sin t$ $(0 < t < \pi)$的每一条切线上从切点到与x轴交点的距离. (2010)

7. 证明曲线$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$有位于同一直线上的三个拐点. (2010)

8. 证曲线$y = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ $(n > 1$自然数$)$,与x轴在区间$(0, 1)$中有唯一交点$(x_n, 0)$,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (2009)

七. 选择题

1. 已知函数$f(x)$在x=0的某个邻域内连续, 且$f(0) = 0$,又$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sin^2 x} = 2$, 则在点$x = 0$ 处$f(x)$ (　　　)(2015)

   A: 不可导.　B:可导, 且$f'(0) \neq 0$.　C: 取得极大值.　D: 取得极小值.

2. 设$f(x)$在$[a, b]$上可导, 且$f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是(　　　)(2015)

   A:至少存在一点$x_0 \in (a, b)$, 使得$f(x_0) > f(a)$.

   B:至少存在一点$x_0 \in (a, b)$, 使得$f(x_0) > f(b)$.

   C:至少存在一点$x_0 \in (a, b)$, 使得$f(x_0) = 0$.

   D:至少存在一点$x_0 \in (a, b)$, 使得$f'(x_0) = 0$.

3. (　　)不一定正确.

A：$f(x)$在$x=x_0$处可导, 则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{2h}=-f'(x_0)$;

B：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, 则$f(x)$在$x=x_0$处可微;

C：$f(x_0+0)=f(x_0-0)$, 则$f(x)$在$x=x_0$处连续;

D：$f(x)$在$x=x_0$处可微, 则$f(x)$在$x=x_0$处连续.(2014)

4. (　　)一定正确.

A：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, 则$\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)\geqslant g(x)$.

B：若$f'(x)$在$(0,1)$内有界, 则$f(x)$在$(0,1)$内有界.

C：若$f'(x_0)=0$, 则x_0是$f(x)$的极值点.

D：若$f(x)$在区间I上连续, 则$f(x)$在区间I上一致连续.(2014)

5. 若$f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, Δx为自变量在x_0点的增量, 则当$\Delta x\to0$时, $\mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}$是(　　).

A：与Δx同阶的无穷小量　　B：与Δx等价无穷小量

C：比Δx高阶的无穷小量　　D：比Δx低阶的无穷小量.(2014)

6. 下述数列中(　　)是单调的，(　　)是有界的。$A:0,1,0,2,...,0,n,...$　　$B:1,1,2,2,...,n,n,...$

$C:1,-1,2,-2,...,n,-n,...$　　$D:1,1,1,\frac{1}{2},...,1,\frac{1}{n},...$ (2013)

7. 假设$f(x)$在零的去心邻域中有定义，且$x\to0$时$f(x)$发散，则下述说法中仅有(　　)是正确的，而(　　)必然是错误的。(2013)

A：单侧极限$f(0+0)=f(0-0)$；　　B：$f(x)$ 在零点局部无界；

C：在零点处$f(x)$不满足柯西收敛准则的条件；D：$f(x)$在零点局部有界.

8. 假设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是有界数列，如果数列$\{x_{n+1}-x_n\}_{n=1}^{\infty}$发散，则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (　　)是发散的；如果$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$(　　)是收敛的。

A：一定；　　B：不一定；　　C：一定不. (2013)

9. 假设函数$f(x)$在半开半闭区间$(0,1]$中一致连续，则$f(x)$在零点的右极限(　　)存在；若假设函数$g(x)$在区间I中可导并具有有界导函数，则$g(x)$在I中(　　)是一致连续的。

A：一定；　　B：不一定；　　C：一定不. (2013)

10. 设函数$f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$,则$f(x)$在下列哪个区间内有界(　　)

$A:(0,1)$；　　$B:(1,2)$；　　$C:(2,3)$　　$D:(3,4)$. (2012)

11. 设$x_n \le a_n \le y_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, $\{x_n\},\{a_n\},\{y_n\}$都是数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ (　　)(2012)

(A) 一定不存在; (B) 存在且等于0; (C) 存在但不一定等于0; (D) 不一定存在.

12. 设函数$f(x)$满足关系式$f''(x) + [f'(x)]^2 = x - 1$,且$f'(0) = 0$,则(　　)

(A) $f(0)$是$f(x)$的极大值; (B) 点$(0, f(0))$是曲线$y = f(x)$的拐点;

(C) $f(0)$是$f(x)$的极小值; (D) $f(0)$不是$f(x)$的极值.点$(0, f(0))$也不是曲线$y = f(x)$的拐点. (2012)

13. 曲线$y = \dfrac{x^2}{1+x}$的渐近线有(　　)条.

(A) 1条; (B) 2条; (C) 3条; (D) 4条.

14. 设$f(x)$在点$x = a$处可导,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$等于(　　)

(A) $f'(a)$; (B) $2f'(a)$; (C) 0; (D) $f'(2a)$.