数分（B2）第11章综合及补充题解

1、计算

$$I=\int_L z\,\mathrm{d}s,$$

其中 L 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $y^2=ax\ (a>0)$ 交线上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧段.

注: 该题的关键是选取参变量, 接着就是计算.

解 取 y 为参变量, 因此

$$x(y)=\frac{y^2}{a},\ y=y,\ z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2},\ 0\leqslant y\leqslant a.$$

因此, 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow I&=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

为了计算上述积分, 作变换

$$u=y^2+\frac{9a^2}{16},\ b^2=\frac{17a^4}{16^2}$$

$$\Longrightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^{\frac{25a^2}{16}}\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u$$

我们知道（第一册）函数 $\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数可以按如下计算. 令

$$u=b\cosh t,\ \sqrt{u^2-b^2}=b\sinh t,\ \ \mathrm{d}u=b\sinh t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u=b^2\int\sinh^2 t\,\mathrm{d}t=b^2\int\frac{1}{2}(\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sinh 2t-\frac{1}{2}t.$$

将

$$t=\cosh^{-1}\frac{u}{b}$$

代入, 就得到$\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数, 再将上下限代入即得到积分的值.

2、设 $a,b,c>0$, 求曲线

$$L:\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$$

所围成的区域 D 的面积.

注: 该题中若 $n=1$, 则曲线就是著名的Descartes 叶形线, 因此求曲线围成的面积的方法, 就是Descartes 叶形线围成面积方法的推广.

解 由 Green 公式的推论知

$$\mu(D)=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

为了计算积分, 令$y=\dfrac{b}{a}xt$, 得

$$x=x(t)=ac\frac{t^n}{1+t^{2n+1}},\ y=y(t)=bc\frac{t^{n+1}}{1+t^{2n+1}},\ 0\leqslant t<+\infty.$$

$$\Longrightarrow x'(t)=ac\frac{nt^{n-1}-(n+1)t^{3n}}{(1+t^{2n+1})^2},\ y'(t)=bc\frac{(n+1)t^n-nt^{3n+1}}{(1+t^{2n+1})^2},$$

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-y(t)x'(t)+x(t)y'(t))\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\,\mathrm{d}t=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

3、求平面上两个椭圆

$$C_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad C_2:\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>b)$$

内部公共区域的面积.

解 由对称性, 只要计算在第一象限的公共区域D的面积即可.

为此, 先求两个椭圆在第一象限的交点坐标 $P(x_0,y_0)$: 两个方程相减, 得 $x_0=y_0$. 因此

$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

解得
$$x_0=y_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
因此, 在第一象限的公共区域D是由椭圆C_1 上从$P(x_0,y_0)$ 到y 轴上点 $A(0,b)$ 的弧段 L_{PA} 和 C_2 上从x 轴上点$B(b,0)$ 到 $P(x_0,y_0)$ 的弧段 L_{BP} 以及 x 轴上线段 $\overline{OB}$和 y 轴上线段 $\overline{AO}$ 围成的. 方向逆时针.

对于 L_{PA}, 取 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0)$ 处, 有 $x_0=y_0$, 对应的 θ_0 满足
$$a\cos\theta_0=b\sin\theta_0,\Longrightarrow\tan\theta_0=\frac{a}{b},\ \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$
在$A(0,b)$, 对应的 θ_1 满足
$$a\cos\theta_1=0,\Longrightarrow\theta_1=\frac{\pi}{2}.$$
因此 L_{PA} 的参数方程表示为
$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta,\quad \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$
而且参数增加的方向正是曲线的方向.

同理, 对于 L_{BP}, 取 $x=b\cos\theta,\ y=a\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0)$ 处, 有 $x_0=y_0$, 对应的 θ_2 满足
$$b\cos\theta_2=a\sin\theta_2,\Longrightarrow\tan\theta_2=\frac{b}{a},\ \theta_2=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$
在$B(b,0)$, 对应的 θ_3 满足
$$a\sin\theta_3=0,\Longrightarrow\theta_3=0.$$
因此 L_{BP} 的参数方程表示为
$$x=b\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$
参数增加的方向正是曲线的方向. 所以面积为
$$\mu(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y).$$
分段积分, 并注意到在直线 $\overline{OB}$ 上, $y=0$, $\mathrm{d}x=0$; 在 $\overline{AO}$ 上 $x=0$, $\mathrm{d}y=0$. 所以
$$\begin{aligned}\mu(D)&=\frac{1}{2}\oint_{L_{PA}}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+\frac{1}{2}\oint_{L_{BP}}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)\\&=\frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}^{\frac{\pi}{2}}ab(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)=ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

总面积为$4ab\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4、 (Poisson公式) 设 $S: x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 连续, 求证

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t,\ \ k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

证明 令 $\vec{n}=\dfrac{1}{k}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$, 那么球面 S 是单位圆以$\vec{n}$ 为旋转轴的旋转曲面, 设 $P(x,y,z)$ 为球面上一点, 则 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ 在 $\vec{n}$ 的投影为 $t=\vec{n}\cdot\vec{r}$, 绕 $\vec{n}$ 的旋转半径为

$$\rho=\sqrt{1-t^2},\ \ \mathrm{d}\rho=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Longrightarrow f(ax+by+cz)=f(kt)$$

只与 $t=\sqrt{1-\rho^2}$有关, 类似旋转曲面的面积元的计算, 面积元为

$$\mathrm{d}S=\pi(\rho+(\rho+\ \mathrm{d}\rho))\,\mathrm{d}s=2\pi\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=2\pi\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(ax+by+cz)\ \mathrm{d}S=\iint_S f(kt)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\ \mathrm{d}t.$$

5、设 $S(t)$ 是平面 Π: $x+y+z=t$ 被球面 B: $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分,

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2),$$

求证: 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

证明 证明的过程实际上是一个计算的过程.

首先注意到平面 Π 的一个单位法向量是 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 不难计算原点到 Π 的距离为 $\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$, 所以当 $|t|>\sqrt{3}$ 时, Π 和球面 B 没有交.

其次注意到当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时, S(t) 是一个圆盘, 圆盘的圆心为 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$, 半径为

$$r_0 = \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}$$

设$S(t)$ 上任意一点 (x, y, z) 到 $S(t)$ 的圆心的距离为 r:

$$\left(x - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{t}{3}\right)^2 = r^2,$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + r^2$$

$S(t)$ 上面积元在极坐标下为

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned}
\iint_{S(t)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S &= \iint_{S(t)} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.
\end{aligned}$$

6. 设 $f(t)$ 在 $|t| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} f\left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\,\mathrm{d}t.$$

证明 令

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = \cos\theta,$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 则

$$\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) r^2 \sin\theta \\
&= \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) \sin\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) \sin\theta \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

上式中最后一步利用了第4题中的Poisson公式.

点评: 本题中利用被积函数的特殊性, 通过球坐标, 以及被积函数

$$f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta),$$

不依赖于 r 的特殊性, 通过累次积分, 把三重积分化成了曲面积分.

习题11.3中第7题： 设 D 是平面上简单闭曲线 L 围成的区域, $L = \partial D$.

(1) 如果 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 证明

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

这里 $\vec{n}$ 是曲线 ∂D 的单位外法向量, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace 算子, 因此当 $f(x,y)$ 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 时, 有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = 0.$$

(2) 如果 $\vec{a}$ 是单位常向量, 证明：

$$\oint_{\partial D} \cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}s = 0.$$

(3) 如果 $u(x,y), v(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 证明下列第二Green公式:

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\mathrm{d}s=\iint_D (v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明 (1) 设平面曲线 ∂D 的外法向量为 $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$, 那么$\partial D$ 指向逆时针方向的切向量 $\vec{\tau}$ 可以通过 $\vec{n}$ 在 Oxy 平面上逆时针旋转一个直角得到（坐标旋转）. 但对于旋转直角的过程也可以按照如下方式表示：设 $\vec{k}$ 是垂直Oxy 平面, 并与 $\vec{i},\vec{j}$ 形成右手系的单位向量. 这样 $\vec{\tau}$ 可表示为

$$\vec{\tau}=\vec{k}\times\vec{n},\quad \text{或}\quad \vec{n}=\vec{\tau}\times\vec{k}.$$

且 $\vec{\tau}$ 的方向指向曲线 ∂D 的逆时针方向. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s&=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{\tau}\times\vec{k}\,\mathrm{d}s\\&=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

这里 $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, 因此

$$\vec{k}\times\nabla f=-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j}$$

所以, 利用Green 定理就有

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_D\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

点评: 本题充分利用了平面曲线的法向量和切向量之间互为旋转一个直角的关系.注意到旋转的方向, 可采取在三维空间叉乘的做法, 由 $\vec{n}$ 得到 $\vec{\tau}=\vec{k}\times\vec{n}$. 这样, 可以把下列左边的积分

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

化为右边关于向量场 $\vec{k}\times\nabla f$ 标准的曲线积分.

(2) 设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ 为平面单位常向量. 令 $f(x,y)=a_1x+a_2y$, 则

$$\nabla f=\vec{a},\quad \Delta f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}=\cos(\vec{a},\vec{n}),$$

由(1) 的结果就得到

$$\oint_{\partial D}\cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}s=0.$$

(3) 类似 (1) 中的推导, 并利用Green 定理, 有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s &= \oint_{\partial D} v\vec{k}\times\nabla u\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_{\partial D} -v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left[v\Delta u + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同理有

$$\oint_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[u\Delta v + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

两式相减得

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

7. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证:当 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时, 它在 D 上也恒为零.

点评: 本题的含义是下列微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\Delta f = 0 & (x,y)\in D \\ f\Big|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

只有零解.

证明 类似习题11.3 第7题（3）中的计算, 有

$$\oint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[f\Delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

因为 $f\Big|_{\partial D} = 0$, 所以上式左边曲线积分为零. 再由 $\Delta f = 0$, 得

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

即 f 是 D 上常值函数, 并且在边界上取值为零，因此 $f(x,y)=0$ 在 D 上成立.

8. 设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 那么有

$$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $P_0=(x_0,y_0)$, $B_r(P_0):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 令

$$g(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)ds,\quad 则\quad g(0)=f(x_0,y_0).$$

取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x=x_0+r\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\varphi\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

所以

$$\begin{aligned}
g(r)-g(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)-f(x_0,y_0)]\,\mathrm{d}\varphi.\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t\cos\varphi,y_0+t\sin\varphi)+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+t\cos\varphi,y_0+t\sin\varphi)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{r}\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

这是一个对 r 的变上限积分, 因此

$$\begin{aligned}
g'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)}-\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi r}\iint_{B_r(P_0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,
\end{aligned}$$

(**注**: 也可以在 $g(r)$ 表达式中直接对 r 求导, 得到 $g'(r)$.)

$g'(r)=0$ 说明 $g(r)$ 为常数. 所以

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}\varphi=f(P_0).$$

9. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

求证: 若 $f(x,y)$ 不是常数, 则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值只能在 D 的边界 $L=\partial D$ 上取到.

证明 假设 $f(x,y)$ 在 D 的内部一点 $P_0(x_0,y_0)$ 取到最大值. 因为 P_0 是内点, 所以存在 $r>0$, 使得 $B_r(P_0)\subset D$. 在 $B_r(P_0)$ 上, 由第8题结果, 有

$$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)}[f(x_0,y_0)-f(x,y)]\,\mathrm{d}s=0,$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi}[f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi=0,$$

这里取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x=x_0+r\cos\varphi,\ \ y=y_0+r\sin\varphi\ \ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

由于 $f(x_0,y_0)$ 是最大值, 上述积分中被积函数为非负连续，因此积分为零推出被积函数恒为零, 即

$$f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)=0,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

或

$$[f(x_0,y_0)-f(x,y)]\Big|_{\partial B_r(P_0)}=0.$$

根据第7题结果, 推出

$$f(x,y)=f(x_0,y_0),\quad (x,y)\in B_r(P_0).$$

其次在 D 的内部任意一点 $P(x,y)\in D^\circ$, 用折线连接 P_0 和 P 点, 并可用有限个圆域 $B_{r_0}(P_0)$, $B_{r_1}(P_1),\cdots,B_{r_n}(P_n)$ 覆盖该折线, 逐步递推得 $f(x_0,y_0)=f(x,y)$, 也就是 $f(x,y)$ 在 D 的内部恒为常数 $f(x_0,y_0)$, 再利用函数的连续性得 f 在$\overline{D}$ 上恒为常数:

$$f(x,y)\Big|_{\overline{D}}=f(x_0,y_0).$$

这与 f 不是常值函数的条件矛盾. 因此 f 在D 的内部不可能取到最大值. 同理可证也不可能取到最小值.

10. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(P_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, 求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $B_r(P_0)$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 类似第8题的证明, 取球面 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程表示

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=r\cos\theta,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

并记

$$\begin{aligned}g(r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

对 r 求导得

$$\begin{aligned}g'(r)&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)}\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint_{B_r(P_0)}\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0\end{aligned}$$

所以 $g(r)$ 是常值函数:

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0,y_0,z_0)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=f(P_0).$$

补充题1 (第九届全国大学生数学竞赛决赛) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{x^2+y^2\leqslant a^2\}$ $(a>0)$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2,\ \text{以及}\ \max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2.$$

证明:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$$

证明 设 $P(x,y)=-yf(x,y), Q(x,y)=xf(x,y)$. 则 P,Q 在 D 上有一阶连续偏导数. 考虑平面向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ 在曲线 $L=\partial D$ 上的曲线积分.

一方面, 由于 f 在 L 上为常数 a^2, 因此,

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=a^2\oint_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=a^2\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi a^4.$$

另一方面, 直接用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(2f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\pi a^4-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi a^4-\frac{1}{2}\iint_D\nabla f\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这里 $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

利用 Cauchy 不等式和条件

$$\max_{(x,y)\in D}|\nabla f|^2=\max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$$

得

$$\begin{aligned}\iint_D\nabla f\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&\leqslant\iint_D|\vec{r}||\nabla f|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant a\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=a\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^4.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\pi a^4+\frac{1}{3}\pi a^4=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

补充题2 计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\mathrm{e}^{x-y}\,\mathrm{d}S$$

解 分析: 如果直接用球坐标变换

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\theta,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

那么

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta \mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

积分区域简化为 $[0,2\pi]\times[0,\pi]$, 但是被积函数比较复杂.

所以要冷静分析. 作旋转变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(v+u),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(v-u),\ z=w,$$

则单位球还是单位球, 积分变换为

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S$$

这里 $\mathrm{d}S$ 仍然是球面面积元. 球面是Ouv 平面上上半圆 $v=\sqrt{1-u^2},\ -1\leqslant u\leqslant 1$ 绕u 轴的旋转曲面, 因此根据旋转曲面求侧面面积元公式

$$\mathrm{d}S=2\pi v\,\mathrm{d}s=2\pi v\sqrt{1+v'^2}\,\mathrm{d}u=2\pi\,\mathrm{d}u,\ -1\leqslant u\leqslant 1$$

所以积分为

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

补充题3 设 L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 方向为逆时针方向. $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

求 $f(x)$.

解 设 L 所围的圆为 D. 根据 Green 公式, 有

$$\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

因为 D 关于 x,y 是对称的, 所以

$$\iint_D \left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因此

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D \left(f(x)+f(y)+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因而

$$\begin{aligned}&\iint_D \left(\left(\sqrt{f(x)}-\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2+\left(\sqrt{f(y)}-\frac{1}{\sqrt{f(y)}}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\iint_D \left(f(x)+f(y)+\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}-4\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=2\int_L -\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y-4\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\end{aligned}$$

这说明 $\sqrt{f(x)}-\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}=0$, 即 $f(x)=1$.

补充题4 设 a,b,c 不全为零. L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $ax+by+cz=0$ 的交线。方向与向量 $\vec{n}_0=(a,b,c)$ 形成右手系.计算

$$\oint_L (bz+c)\,\mathrm{d}x+(cx+a)\,\mathrm{d}y+(ay+b)\,\mathrm{d}z$$

解 因平面过原点，所以与球面交线 L 是大圆, 记平面被球面所截的大圆盘为 D, L 是其边界. D 的单位法向量为 $\vec{n}=\dfrac{\vec{n}_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 根据 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_D \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ bz+c & cx+a & ay+b\end{vmatrix}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\\ &=\iint_D \vec{n}_0\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\pi R^2.\end{aligned}$$

补充题5 求

$$\iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_S (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中$\vec{v}=(by^2+cz^2)\vec{i}+(cz^2+ax^2)\vec{j}+(ax^2+by^2)\vec{k}$, $a,b,c>0$, $S: x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 上半球面, 方向指向上侧.

解 在上半球面 S 上加一个底部的圆盘 $D^-: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$, 方向朝下, 使得 $S+D^-$ 形成一个封闭的分段光滑闭曲面, 方向指向外侧.

根据Gauss 公式

$$\iint_{S+D^-} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{S+D^-}(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

用$D^+: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$ 表示方向指向上侧的圆 $x^2+y^2\leqslant 1, z=0$. 显然有向面积元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 分别在 Oyz 和 Ozx 平面上的有向投影 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$, $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0$, 再利用对称性

$$\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{y^2+x^2\leqslant 1}(ay^2+bx^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

推得

$$\begin{aligned}\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{a+b}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\,\mathrm{d}r=\frac{(a+b)\pi}{4}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\iint_{S+D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}-\iint_{D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\&=-\iint_{D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{(a+b)\pi}{4}.\end{aligned}$$

补充题6 设 $C: \{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ 是长度为 l 的简单闭曲线, $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\nabla F\neq 0$. $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为 C 围成的区域, 计算

$$\iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 首先, 等值线 C 的法向量是 $\nabla F(x,y)$. 根据 D 的定义, 对任意的 $(x,y)\in C$ 和任意方向 $\vec{e}$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)-F(x,y)}{t}=\nabla F(x,y)\cdot\vec{e}$$

若 $\vec{e}$ 指向 D 的内部, 则 $(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)\in D,\ (t>0)$, 所以

$$F(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)>0,\ F(x,y)=0,$$

由此推出

$$\nabla F(x,y)\cdot\vec{e}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)-F(x,y)}{t}\geqslant 0,$$

法向量 $\nabla F(x,y)$ 与 $\vec{e}$ 夹锐角, 也就是说 $\nabla F(x,y)$ 指向 D 的内部, 因此是等值线 C 的内法向量.

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_x\vec{i}+F'_y\vec{j})$$

是 C 的单位内法向量. 在平面上将其顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得 C 的单位切向量. 该切向量可以通过垂直 Oxy 平面并与 Oxy 上两个坐标向量 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 形成右手系的单位向量 $\vec{k}$, 通过叉乘给出:

$$\vec{\tau}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\times\vec{k}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_y\vec{i}-F'_x\vec{j}),$$

方向指向逆时针方向.因此对 $\vec{\tau}$ 在 C 上作曲线积分, 一方面

$$\oint_C\vec{\tau}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint_C\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_C\mathrm{d}s=l,$$

另一方面, 利用Green 公式得

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{\tau}\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=\iint_D\left(-\frac{\partial F'_x/|\nabla F|}{\partial x}-\frac{\partial F'_y/|\nabla F|}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-l$$

补充题6 已知 $\alpha(0)=0,\ \alpha'(0)=2,\ \beta(0)=2$, 求

(1) $\alpha(x),\beta(x)$ 使得积分 $\int P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关. 其中

$$\begin{aligned}P(x,y)&=(2x\alpha'(x)+\beta(x))y^2-2y\beta(x)\tan 2x,\\Q(x,y)&=(\alpha'(x)+4x\alpha(x))y+\beta(x).\end{aligned}$$

(2) 求 $\int_{(0,0)}^{(0,2)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$.

解 因为积分与路径无关等价于 $Q'_x - P'_y = 0$. 因此有

$$(\alpha''(x) + 4x\alpha'(x) + 4\alpha(x))y + \beta'(x) = 2(2x\alpha'(x) + \beta(x))y - 2\beta(x)\tan 2x.$$

比较 y 的系数得两个微分方程的边值问题

$$\begin{aligned}
&\beta'(x) = -2\beta(x)\tan 2x,\ \beta(0) = 2\\
&\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 2\beta(x),\ \alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = 2.
\end{aligned}$$

从第一个方程解出

$$\beta(x) = 2\cos 2x.$$

代入第二个方程

$$\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 4\cos 2x,\ \alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = 2.$$

该方程是受迫振动方程, 对应的齐次方程 $\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 0$ 的通解为

$$C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

利用常数变易法, 令原方程的解为

$$\alpha(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

其中 $C_1(x), C_2(x)$ 待定. 求导得

$$\alpha'(x) = C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x - 2C_1(x)\sin 2x + 2C_2(x)\cos 2x.$$

根据常数变易法, 不妨设

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0$$

对 $\alpha'(x) = -2C_1(x)\sin 2x + 2C_2(x)\cos 2x$ 继续求导并代入方程 $\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 4\cos 2x$ 得

$$\begin{aligned}
\alpha''(x) + 4\alpha(x) &= -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x - (4C_1(x)\cos 2x + 4C_2(x)\sin 2x)\\
&\quad + 4(C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x)\\
&= 4\cos 2x
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow C_1'(x)\sin 2x - C_2'(x)\cos 2x = -2\cos 2x$$

从联立方程

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x &= 0 \\
C_1'(x)\sin 2x - C_2'(x)\cos 2x &= -2\cos 2x
\end{aligned}$$

分别解出 C_1' 和 C_2':

$$C_1'(x) = -\sin 4x,\ C_2'(x) = 1 + \cos 4x.$$

由 $\alpha(x)$ 满足的边界条件推出 $C_1(0) = 0,\ C_2(0) = 1$. 解得

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \frac{1}{4}(\cos 4x - 1) = -\frac{1}{2}\sin^2 2x, \\
C_2(x) &= x + 1 + \frac{1}{4}\sin 4x = x + 1 + \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x.
\end{aligned}$$

最后解得

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= -\frac{1}{2}\sin^2 2x\cos 2x + (x + 1 + \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x)\sin 2x \\
&= (x+1)\sin 2x, \\
\beta(x) &= 2\cos 2x.
\end{aligned}$$

解 (2): 因为在从 $(0,0)$ 到 $(0,2)$ 的直线段上: $Q(0,y) = 2y + 2$, 且 $\mathrm{d}x = 0$, 所以

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_0^2 Q(0,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 (2y+2)\,\mathrm{d}y = 8.$$

数分（B2）第12章综合及补充题解

1、证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积函数的 Fourier 级数.

证明 任取 $[a,b]\subset(0,2\pi)$, 则当 $x\in(a,b)$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

在$[a,b]\subset(0,2\pi)$ 上一致有界. 而 $\dfrac{1}{\ln n}$ 单调减趋于零. 根据函数项级数的Dirichlet判别法可知, 级数在$[a,b]\subset(0,2\pi)$ 上一致收敛.

若存在可积平方可积函数 $f(x)$ 使得$f(x)$ 的Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},$$

那么由Parseval等式就有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$

收敛. 然而, 根据数项级数的比较定理,

$$\frac{1}{\ln^2 n}\bigg/\frac{1}{n^\alpha}\to 0\ \ (\alpha>0),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$ 是发散的, 因此矛盾.

2、证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\ \ (-\pi<x<\pi);$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\ \ (0<x<2\pi).$$

证明 令 $f(x)=\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ $(-\pi<x<\pi)$, 它是所定义区间上连续可导的偶函数. 计算其Fourier系数得 $b_n=0$, 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=2\ln 2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

对上式右边第二个积分进行换元 $x=\pi-t$ 得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin x}{2}\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2.$$

这里用到了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

的结果（这是一个瑕积分, 具体积分见第一册例 5.4.2 ），最后得 $a_0=0$. 对其它的 $a_n\ (n\geqslant 1)$, 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

做变换 $x=\pi-t$, 则上列积分化为

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

利用下列公式

$$\sin nt\cos\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t$$

以及

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt,\quad\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kt,$$

得$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 由Dirichlet收敛定理得（1）式成立. 类似可证明（2）式.

3、设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数. 证明:

$$\text{如果 } f \text{ 在 } (0,2\pi) \text{ 上递减, 那么 } b_n\geqslant 0;$$
$$\text{如果 } f \text{ 在 } (0,2\pi) \text{ 上递增, 那么 } b_n\leqslant 0.$$

证明 设 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上递减.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^{\pi} f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\right]\sin x\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

4、设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ \ (n\to\infty).$$

证明 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x,$$

所以只要证明

$$na_n = \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x$$

有界即可. 不妨设 $f(x)$ 单调减, 令

$$x_k = -n\pi + 2k\pi,\quad k = 0,\cdots,n,\quad \Delta x_k = 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right) - f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k}{n}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos x \,\mathrm{d}x = 0$$
即上式第二项求和为零. 再利用函数单调减性质, 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时, 有
$$0 \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)$$
所以
$$\begin{aligned}\left|\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right)\right)|\cos x| \,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right) \mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)2\pi\\ &= (f(-\pi) - f(\pi))2\pi\end{aligned}$$
这样我们就证明了积分
$$\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x$$
有界, 也就是 na_n 有界, 同理可证 nb_n 有界.

本题也可以借助第二积分平均值定理, 具体证明如下：

对于可积函数, 改变有限点的值不影响可积性和积分的值, 因此不妨设 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上单调. 根据第二积分中值公式, 存在 $\xi \in [-\pi, \pi]$ 使得
$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n\pi}[f(-\pi) - f(\pi)]\sin n\xi.\end{aligned}$$
所以 $|na_n|$ 有界, 即 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n \to \infty)$.

5、设 f 在 $[-a, a]$ 上连续, 且在 $x = 0$ 处可导. 求证:
$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1 - \cos \lambda x}{x} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x) - f(-x)}{x} \,\mathrm{d}x.$$

说明: 本题要用到Riemann-Lebesgue引理（第三册将讨论）:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0,$$

但是在第二册中, 对可积且平方可积函数 $f(x)$,我们实际上已经得到了离散的Riemann-Lebesgue引理（Bessel不等式的推论）:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

因此，将本题中的λ 换成离散变量 n, 即在条件不变情况下，要证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明 作变换 $x=-t$, 因此

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{1-\cos nx}{x}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos nt}{t}\,f(-t)\,\mathrm{d}t,$$

原积分化为

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}\,f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}(1-\cos nx)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} & x\neq 0,\\ 2f'(0) & x=0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 在 $x=0$ 可导, 所以 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 因此可积且平方可积, 由Bessel 的推论（即离散的 Riemann-Lebesgue引理）得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

所以原式成立.

与第5题类似, 书中第6题改为如下题目

6、设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\sin nx|\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x,$$

证明: 根据书中§ 12.3 习题中第5题的结果, 对任意实数 x, 有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}\cos 2mx,$$
$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx,$$

因此

$$f(x)|\cos nx|=\frac{2}{\pi}f(x)+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}f(x)\cos 2mnx,$$

由于 $f(x)$ 可积, 所以有界. 推出上式右端无穷级数关于 x 一致收敛, 因此可逐项积分:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\ \mathrm{d}x&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2mnx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}a_{2mn}.\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\to 0\ (n\to 0).$$

因此, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|<\frac{\pi\varepsilon}{4A}.$$

这里记

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}=A.$$

显然, 对 $m \geqslant 1$, 仍然有 $2mn > N$, 所以

$$|a_{2mn}| < \frac{\pi\varepsilon}{4A}.$$

推出当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}|a_{2mn}| < \varepsilon.$$

这样就证明了第一个式子. 类似可证明第二个式子.

7、设 f 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

用 a_n, b_n 和 A_n, B_n 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2,\ A_n = a_n^2 + b_n^2,\ B_n = 0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明 这里只对逐段可微（又称逐段光滑）的连续函数讨论,一般情况要用到Fourier级数均值收敛的Fejer定理.

不难证明 $F(x)$ 也是连续的分段可微、周期函数（可借用第13章结果，也可直接证明）, 而且还满足

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)f(-x+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u)\,\mathrm{d}u = F(x),$$

第一步用到了被积函数的周期性, 第二步用到了积分换元 $-x+t=u$.

因此 $F(x)$ 是周期 2π 的偶函数, 且是连续且分段可微函数. 由此推出它

的Fourier系数 $B_n=0$,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)\cos n(u-t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} a_n^2+b_n^2 & n\geqslant 1 \\ a_0^2 & n=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

对 $F(x)$ 应用 Dirichlet 定理得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

令 $x=0$ 得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t=F(0)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

8、设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

证明 把 $f(x)$, $f'(x)$ 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上. 分别记 $f(x)$ 的Fourier系数为 a_n, b_n, $f'(x)$ 的Fourier系数为 a_n', b_n'. 由条件得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = nb_n, \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = -na_n,
\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$, $f'(x)$ 都是可积且平方可积函数, 因此Parseval等式对两者都成立：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}((a_n')^2 + (b_n')^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2),
\end{aligned}$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $a_n = b_n = 0$ $(n = 2, 3, \cdots$, 也就是 $f(x)$ 和三角函数系中 $\cos nx, \sin nx$, $n \geqslant 2$ 都正交. 这样的连续函数（且满足$f(-\pi) = f(\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$）只能是

$$f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

补充习题：等周问题（Hurwitz） 在给定长度为 L 的一切平面曲线中, 什么样的曲线围成的面积最大? 或：设 ℓ 是平面上长度为 L 的简单光滑闭曲线, S 是 ℓ 围成平面区域的面积, 证明：

$$S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

并问等号成立时, 曲线的具体形状.

说明：等周问题是一个古老的几何问题. 早在古代, 人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周. 但是严格的数学证明却是近代才出现的. 在19世纪, Steiner(施泰纳 1796-1863) 曾经用几何方法证明了：除圆周外，任何封闭曲线都不可能是当周问题的解. 这里, 借助Fourier展开和封闭曲线围成面积的计算公式（Green定理的推论）, 给出了另一种证明.

证明 从曲线 ℓ 上某点开始逆时针计算弧长 s 并作为参数, 因此

$$
\begin{aligned}
&x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant L),\\
&x(0) = x(L),\ y(0) = y(L).
\end{aligned}
$$

根据弧长参数曲线的性质, 有

$$
\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \quad \text{或} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.
$$

作变换

$$
t = \frac{2\pi s}{L} - \pi, \quad \text{或} \quad s = \frac{L}{2\pi}(t + \pi)
$$

使 ℓ 的参数方程表示为如下形式

$$
\begin{cases}
x = x(s) = x\left(\frac{L}{2\pi}(t+\pi)\right) = \varphi(t), \\
y = y(s) = y\left(\frac{L}{2\pi}(t+\pi)\right) = \psi(t),
\end{cases} \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi),
$$

$$
\varphi(-\pi) = \varphi(\pi),\ \psi(-\pi) = \psi(\pi),
$$

并且参数 t 增加的方向是曲线的逆时针方向. 因为

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{2\pi}{L}
$$

$$
\Longrightarrow (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.
$$

分别对 $\varphi(t),\ \psi(t)$ 作Fourier 展开

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,\\
\psi(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt.
\end{aligned}
$$

不难算出, $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ 的Fourier 展开为

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt,\\
\psi'(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} nd_n \cos nt - nc_n \sin nt.
\end{aligned}
$$

这是因为

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t) \cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\varphi(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \,\mathrm{d}t = nb_n
$$

其他系数的计算类似. 根据Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\psi'(t))^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(c_n^2+d_n^2).$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2),$$

另一方面

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{L^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}t=\frac{L^2}{2\pi^2},$$

$$\Longrightarrow L^2=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

下面计算曲线 ℓ 围成的面积, 根据 Green 定理的推论, 该面积为

$$S=\oint_{\ell}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),$$

其中我们利用了Parseval 等式的推论（两个函数乘积的积分等于对应Fourier系数乘积求和）. 最终, 我们有

$$\begin{aligned}L^2-4\pi S&=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n)\right)\\&=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}((na_n-d_n)^2+(nc_n+b_n)^2)+\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(b_n^2+d_n^2)\right)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$L^2-4\pi S\geqslant 0,\quad 或\quad S\leqslant\frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当求和项中所有项均为零, 即

$$na_n=d_n,\ nc_n=-b_n,\ n\geqslant 1;\ b_n=d_n=0,\ n\geqslant 2.$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1=d_1,c_1=-b_1,\ a_n=b_n=c_n=d_n=0\ n\geqslant 2.$$

这样的曲线为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y(t) &= \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t, \end{aligned}$$

这个曲线不是别的正是圆

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

第13章综合习题以及其它补充习题

以下是第13章综合习题

1. 设 $f(x)\geqslant 0$ 并在 $[0,+\infty)$ 的任何有限区间上可积, 数列 $\{a_n\}$ 单调增且 $a_0=0$, $a_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$. 证明积分 $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l. (**注意, 书上题目存在输入错误: 应该是"**$\{a_n\}$ **单调增且** $a_0=0, a_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$**"** .)

证明 因为 $f(x)\geqslant 0$, 所以可利用非负函数积分和正项级数有界性即可, 或利用收敛性的Cauchy收敛准则

对任意的 $A>0$, 因 $a_n\to\infty$, 所以存在 a_n 使得 $a_{n-1}\leqslant A\leqslant a_n$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以任何有限区间上积分有界当且仅当级数部分和有界. 即可证得结果.

2. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛.

该题提供了一个 $[0,+\infty)$ **上非负、连续、无界、** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$ **, 但是收敛的例子.**

证明 取 $a_n=n\pi$, $n=0,1,\cdots$, 因此 a_n 满足上题条件, 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$. 利用 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数这个条件,其通项满足

$$\begin{aligned}
0\leqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} &\leqslant (n+1)\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 u}\\
&= 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 u}\\
&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 u+n^6\pi^6\sin^2 u}\\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3\pi^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(n^3\pi^3\tan u)}{1+(n^3\pi^3\tan u)^2}\\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^2\pi^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leqslant\frac{n+1}{n^3\pi}.
\end{aligned}$$

因此级数收敛, 根据上题结果, 得积分收敛.

综合习题第 3 题直接求导即可.

4. 证明n 阶Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

满足下列Bessel 方程：

$$x^2 J_n''(x) + J_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

证明 二元函数 $f(\varphi, x) = \cos(n\varphi - x\sin\varphi)$ 关于 x 的一阶和二阶偏导数

$$f_x'(\varphi, x) = \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi;\ \ f_{xx}''(\varphi, x) = -\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\sin^2\varphi$$

连续. 因此可在积分号下对 x 求导. 利用分部积分得

$$\begin{aligned}
J_n'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{\pi}\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \\
J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) &= \frac{nx}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \frac{x^2}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \\
&= \frac{nx}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - x^2 J_n(x).
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial\sin(n\varphi - x\sin\varphi)}{\partial\varphi}d\varphi = 0$$

所以

$$\frac{nx}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{n^2}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = n^2 J_n(x)$$

因此有

$$x^2 J_n''(x) + J_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

5. 证明: 对任意值 u, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明 令 $\psi(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + x)\,\mathrm{d}x \\
\psi''(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + 2x)\,\mathrm{d}x \\
\psi^{(n)}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + nx)\,\mathrm{d}x \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

显然每一步求导都是合理的, 同时对于任意给定的 u , 存在 M, 使得 $|u| \leqslant M$, $|\psi^{(n)}(u)| \leqslant \mathrm{e}^M$, 所以$\psi(u)$ 在$[-M, M]$ 中可以展开成Taylor 级数.

注意到 $\psi(0) = 1,\ \psi^{(n)}(0) = 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 所以对任意的 u, 有

$$\psi(u) = \psi(0) = 1.$$

该题有一种更巧妙的证明, 将积分化为曲线积分并利用Green公式.

视 x 为角度, 令 $\xi = \cos x, \eta = \sin x, \Longrightarrow\ \mathrm{d}\xi = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}\eta = \cos x\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\xi^2+\eta^2=1} e^{u\xi}(\cos(u\eta)\,\mathrm{d}\eta + \sin(u\eta)\,\mathrm{d}\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\left(\frac{\partial(e^{u\xi}\cos(u\eta))}{\partial\xi} - \frac{\partial(\mathrm{e}^{u\xi}\sin(u\eta))}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0
\end{aligned}$$

所以 $\psi(u) = \psi(0) = 1$.

6. 证明积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 利用Dirichlet 判别法, 不难验证在任何有限区间上

$$\left|\int_a^b \sin 3x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{3}$$

对 u 一致有界. 关键是要验证 $f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-ux}\left(\frac{u(x+u)+1}{(x+u)^2}\right)\leqslant 0\ (x\geqslant 0,u\geqslant 0)$$

因此 $f(x,u)$ 是 x 的单调函数.

对任何 $u\geqslant 0$,

$$|f(x,u)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}\right|\leqslant\frac{1}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$$

所以$f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

7. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

证明不一致收敛往往比证明一致收敛还要困难, 只有对一致收敛性概念很好的理解, 才能根据题意解决问题.

证明 假如积分在 $u\geqslant 0$ 一致收敛, 那么根据一致收敛的Cauchy收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $M>0$, 使得对任意的 $A>M$, $A'>M$, 有

$$\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对任何 $u\geqslant 0$ 成立, 因此

$$\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon.$$

对任意的 $A>M$, 取 $A'=\alpha A$, $u=\dfrac{1}{A}$,其中 $1<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\begin{aligned}\varepsilon&\geqslant\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\\&\geqslant\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|_{u=1/A}=\left|\int_A^{\alpha A}\frac{x\cos\frac{x}{A}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\\&=\int_1^{\alpha}\frac{A^2t\cos t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\geqslant\cos\alpha\int_1^{\alpha}\frac{A^2t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\cos\alpha\ln\frac{A^2\alpha^2+a^2}{A^2+a^2}\end{aligned}$$

令 $A \to +\infty$, 就有

$$\varepsilon \geqslant \cos\alpha \ln\alpha > 0.$$

这里用到了$\cos t$ 在 $[1,\alpha] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减. 上述结论与 ε 是任意整数矛盾, 因此积分在 $u \geqslant 0$ 不一致收敛. 在 $u \geqslant \delta > 0$ 上的一致收敛性可仿照书上例13.4.3的方法证明.

8. 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明方法与上题一样, 只是注意到$\sin x$**在** $[1,\alpha] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **上单调增即可.**

9. 设 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

本题要证明函数 $\varphi(u)$ **在** $|u| < \infty$ **上一致连续, 即对任意的** $\varepsilon > 0$, **要找到这样的** $\delta > 0$, **使得对任何** u, u', **只要** $|u-u'| < \delta$, **就有** $|\varphi(u) - \varphi(u')| < \varepsilon$.

证明 因 $|f(x)\cos ux| \leqslant |f(x)|$, 所以积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$ 关于 $|u|<\infty$ 一致收敛. 所以函数 $\varphi(u)$ 在 $|u|<\infty$ 有定义且连续. 下面要证 $\varphi(u)$ 是 $|u|<\infty$ 上一致连续函数.

$\forall\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{M} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \int_{-\infty}^{-M} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{5},$$

记 $A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, 取

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{5M(A+1)},$$

则对于任意的u, u', 当 $|u-u'|<\delta$ 时, 就有

$$
\begin{aligned}
|\varphi(u)-\varphi(u')| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u'x\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{-\infty}^{-M} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x + \int_{M}^{+\infty} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||x||u-u'|\,\mathrm{d}x + 2\int_{-\infty}^{-M} |f(x)|\,\mathrm{d}x + 2\int_{M}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant MA|u-u'| + \frac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这样就证明了 $\varphi(u)$ 的一致连续性.

该题的证明方法是利用条件, 将无穷远的尾巴砍掉, 然后在有限区间$[-M, M]$ **上估计**.

10. 证明函数

$$
f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t
$$

在 $[0,1)$ 上连续.

证明 注意该题积分在 $t=n\pi$ 都是瑕点, 因此需要分段考虑.利用第 1 题结果, 取 $a_n=n\pi$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u-n\pi}}{|\sin u|^x}\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\right) \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{|\sin u|^x}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

因此, 只要证明瑕积分 $\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u$ 在 $0 \leqslant x < 1$ 收敛且连续即可. 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u} &\sim \frac{1}{u^x} \quad u \to 0^+ \\
\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u} &\sim \frac{1}{(\pi-u)^x} \quad u \to \pi^-
\end{aligned}
$$

所以瑕积分

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u$$

在 $0 \leqslant x < 1$ 收敛.

$\forall x_0 \in [0,1)$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 \leqslant x_0 < 1-\delta$, 且

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}} \sim \frac{1}{t^{1-\delta}} \quad (t \to 0^+)$$

在 $x \in [0, 1-\delta]$ 上, 有

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}},$$

所以由 Weierstrass 定理, $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛, 被积函数显然是x 的连续函数, 这样就得到 $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 同理可证 $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上也连续, 因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 推出在 x_0 连续, 由于 $0 \leqslant x_0 < 1$ 的任意性, 得 $f(x)$ 在$[0,1)$ 上连续.

11. 证明

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{2\pi}.$$

证明 对 $0 < x < 1$, 在余元公式两边取对数并积分

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$

对左边第二个积分换元:

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

下面计算右边的积分

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

因此得

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = -\pi\ln 2$$

最后得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln\pi + \ln 2) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

12. 证明

$$\int_0^1 \sin\pi x \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

证明 类似第11题, 有

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\pi x\ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \sin\pi x\ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x..$$

$$\Longrightarrow 2\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x.$$

下面计算右边的积分.

$$\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

令 $\sin\frac{x}{2} = u$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^1 u\ln(2u\sqrt{1-u^2})\,\mathrm{d}u \\ &= 4\int_0^1 u\left(\ln 2 + \ln u + \frac{1}{2}\ln(1-u^2)\right)\,\mathrm{d}u \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

这里要注意积分

$$\int_0^1 u\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u^2)\,\mathrm{d}(1-u^2) = -\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}.$$

将上列结果代入即可得

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

13. 证明

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

证明 利用三角函数半角公式$\cos x = 1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, 得 $3-\cos x = 2\left(1+\sin^2\frac{x}{2}\right)$. 令

$$u=\sin^2\frac{x}{2}, \Longrightarrow \mathrm{d}u=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{u(1-u)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(1+u)u(1-u)}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2u(1-u^2)}}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/4}(1-t)^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{1/2-1}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2^{1/2-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\\ &=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

这里, 作了换元 $t=u^2$ 以及利用了加倍公式.

14. 设 $\varphi(x)$ 是$(0,+\infty)$ 上正的、严格递减的连续函数, 且

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty,\quad \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

又设 $x=\psi(y)$ 是 $y=\varphi(x)$ 的反函数. 求证:存在 $p\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^p\psi(y)\,\mathrm{d}y=1+p^2$$

证明 分如下步骤:

(1). 因为积分 $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\varphi(x)$ 严格递减, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0,$$

否则, 必存在 $\alpha>0$, 使得 $\varphi(x)\geqslant\alpha$ $(0<x<+\infty)$, 这样

$$\int_0^A\varphi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha A\to+\infty.$$

推得积分发散, 因此矛盾.

(2). 因为 $\varphi(x)$ 连续, 严格递减, 所以

$$\lim_{x\to 0^+}(\varphi(x)-x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)-x)=-\infty$$

因此在$(0,+\infty)$ 上存在唯一的不动点 $\varphi(p)=p$. 且在 $0<x<p$ 上有 $\varphi(x)>p$, 在 $x>p$ 上有 $\varphi(x)<p$. 该不动点也是反函数$x=\psi(y)$的不动点 $p=\psi(p)$.

(3). 因为

$$1>\int_0^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^p p\,\mathrm{d}x=p^2$$

所以 $p\in(0,1)$.

(4). 注意到 $y=\varphi(x)$ 和反函数 $x=\psi(y)$ 分别在$0<x<+\infty$ 和 $0<y<+\infty$ 上的积分是同一条曲线在Oxy 第一象限与 x 轴和 y 轴围成的开口曲边三角形面积, 因此

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^{+\infty}\psi(y)\,\mathrm{d}y=1$$

且 $\int\limits_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 是y 轴、x 轴上 $[0,p]$、直线 $x=p$ 以及函数 $y=\varphi(x)$ 围成的面积. 这块面积等于$[0,p]\times[0,p]$ 的面积与 $\psi(y)$ 在y 轴上 $[p,+\infty)$ 上覆盖的面积, 即

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x=p^2+\int_p^{+\infty}\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

由此推出

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^p\psi(y)\,\mathrm{d}y=1+p^2.$$

15. 设 $f\Big|_{[0,+\infty)}$ 连续, 且$\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$g(x)=f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\quad(x\geqslant 0)$$

满足

$$\int_0^{+\infty}g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $h(x)=\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\quad(x\geqslant 0),\quad h(0)=0$ 则

$$g(x)-f(x)=-2\mathrm{e}^{-x}h(x),$$
$$g(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{-x}(h'(x)-h(x)),$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow g^2(x)-f^2(x)&=-4\mathrm{e}^{-2x}h(x)(h'(x)-h(x))\\&=-2\left(\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\right)'\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^X g^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^X f^2(x)\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\Big|_0^X$$

下面的问题是如何证明

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

因为$\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $X>A$ 时, 有

$$\int_A^X f^2(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}\left(e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2&\leqslant \mathrm{e}^{-2X}\int_A^X \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\int_A^X f^2(t)\,\mathrm{d}t\\&<\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2(X-A)})\varepsilon^2<\varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

记 $M=\int_0^A \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$, 则存在 $B>0$ 使得当 $X>B$ 时有$|\mathrm{e}^{-X}M|<\varepsilon$, 因此当 $X>B$ 时有

$$\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\mathrm{e}^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<2\varepsilon.$$

以下是部分补充题目

1. 求下列积分的值:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}.$$

解 做变换 $u=x^8$, 或 $x=u^{1/8}$, 因此 $\mathrm{d}x=\frac{1}{8}u^{1/8-1}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}&=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/8-1}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{8},\frac{15}{8}\right)=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}{\Gamma(2)}\\&=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+1\right)=\frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\\&=\frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

这里用到了B 函数的另一种表示：

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u.$$

这个表示如果记不住, 可通过变换

$$t=\frac{1}{1+u},\Longrightarrow 1-t=\frac{u}{1+u},\quad \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2},$$

直接推导出来. 最后, 通过

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

算出

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

代入,即可的最后结果.

2. 设 p,q 都是正数，求 $I=\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x$

解 做变换 $x=\mathrm{e}^{-t}$,

$$\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty t^p\mathrm{e}^{-(q+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $(q+1)t=u$

$$I=\frac{1}{(q+1)^{p+1}}\int_0^\infty u^p\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}$$

3. 证明下列积分收敛，定义的含参变量函数在$(0,+\infty)$ 上可导

$$F(t)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$$

证明：该题的关键是在应用 Dirichlet 定理判别收敛时, 如何拆分被积函数.

把积分写成

$$F(t)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

这样可以看出 $F(t)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，$\frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}$ 当 x 充分大时对 x 单调减趋于零。

被积函数 $f(x,t)=\frac{\sin x}{x}\ln(1+tx)$ 对 t 有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sin x}{1+tx}$, $(x\geqslant 0,t>0)$.

在 t 的任何闭子区间 $[\alpha,\beta]$ 上，根据 Dirichlet 判别法 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{1+tx}$ 关于 t 在$[\alpha,\beta]$ 一致收敛，因此得到 $F(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上可导，由$[\alpha,\beta]$ 的任意性，得到在 $t>0$ 可导.

4. 设 $f(x):(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 上单调减有界的连续函数。求

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\quad(0<a<b).$$

解 注意到该题没有假设积分收敛, 也没有假设函数可导, 因此无法将 $f(ax)-f(bx)$ 表示为

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x}=\int_a^b f'(ux)\,\mathrm{d}u$$

具体做法如下：设

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\alpha,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\beta.$$

对任意小的 $\varepsilon>0$ 和任意大的 $A>0$, 在$[\varepsilon,A]$ 上 $f(ax),f(bx)$ 单调减有界, 因此可积，$\dfrac{1}{x}$ 可积，所以

$$\frac{f(ax)}{x},\ \frac{f(bx)}{x}$$

可积.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}f(b\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\leqslant\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant f(a\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\\ f(bA)\ln\frac{b}{a}\leqslant\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant f(aA)\ln\frac{b}{a}\end{cases}$$

令 $\varepsilon\to0^+$, $A\to+\infty$, 得积分收敛且

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(\alpha-\beta)(\ln b-\ln a).$$

以下给出几个与凸性相关的不等式证明

1. Jensen 不等式（第一册习题3.5第一题），设 $f(x)$ 是区间 I 上二阶可导的凸函数, $x_1,\cdots,x_n\in I$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1,\alpha_k>0$, 则

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

证明 因为 $f'' \geqslant 0$, 令 $\overline{x} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, 在 $\overline{x}$ 作Taylor展开

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x_k - \overline{x}) + \frac{f''(\xi_k)}{2!}(x_k - \overline{x})^2 \\ &\geqslant f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x_k - \overline{x}),\ k = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

两边乘以α_k 并求和得

$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\overline{x} - \overline{x}) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

2. Hölder 不等式（第一册第3章综合习题第20题），设 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 非负; $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$（共轭条件），则

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 令 $f(u) = u^p,\ u \geqslant 0$. $f''(u) = p(p-1)u^{p-2} \geqslant 0$, 因此 $f(u)$ 是凸函数. 取

$$\alpha_k = \frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q},\ u_k = x_k y_k^{1-q},\ k = 1, \cdots, n$$

代入Jensen 不等式

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) \leqslant \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) \\ \Longrightarrow & \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q} \right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q} (x_k y_k^{1-q})^p \right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}. \end{aligned}$$

这里我们用到了 $p + q - pq = 0$. 两边开 p 次根即得结果.

3. 积分形式的 Hölder 不等式, 设 $f(x), g(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, p, q 满足 $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 做分割 $T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||g(\xi_k)|\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{p}} |g(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |g(\xi_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

令$|T| \to 0$ 即可得积分形式的Hölder 不等式.

4. 习题13.5, 第 6 题: 证明$\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明 首先回顾关于凸函数的定义: 设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2, 以及任意 $\alpha \in (0,1)$ 有

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

那么称函数是区间 I 上的凸函数.

设 $p>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 取 $\alpha=\frac{1}{p}$, 因此 $1-\alpha=\frac{1}{q}$. 这样, 凸函数定义的等价形式为: 对任意 $x_1, x_2 \in I$ 有

$$f\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{p}+\frac{f(x_2)}{q}.$$

为了证明 $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 首先有对任意 $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x_1-1}{p}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{x_2-1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\right)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{x_2-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\Gamma(x_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Gamma(x_2)\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

这里用到了积分形式的 Hölder 不等式（见第 3 题）

$$\Longrightarrow \ln\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p}\ln\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\Gamma(x_2),$$

即, $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.