

中国科学技术大学

2020—2021 学年第 2 学期考试试卷

考试科目: 代数结构得分: \_\_\_\_\_

学生所在系: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

1. (16 分) (1) 求解下列同余方程组

$$\begin{cases} x = 1 \pmod{5} \\ x = 5 \pmod{6} \\ x = 4 \pmod{7} \\ x = 10 \pmod{11} \end{cases}$$

(2) 计算  $\phi(7800)$

2. (12 分) 设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R$  是集合  $A$  上的关系,  $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ , 求  $R$  的传递闭包和  $R^2$ .

3. (15 分)  $R^*$  是非零实数集合,  $x, y \in R^*$ , 定义  $R^*$  上的关系  $S: xSy \Leftrightarrow x \cdot y > 0$ ,

(1) 证明:  $S$  是  $R^*$  上的等价关系, 并写出所有等价类;

(2) 如果将  $R^*$  改为实数集合  $R$ , 那么  $S$  还是  $R$  上的等价关系吗? 为什么?

4. (15 分) 对部分序集  $\langle \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, | \rangle$ , 回答以下问题:

(1) 画出 Hasse 图, 求极大元和极小元, 存在最大元和最小元吗?

(2) 找出  $\{3, 5\}$  的所有上界, 如果存在, 求  $\{3, 5\}$  的最小上界;

(3) 找出  $\{15, 45\}$  的所有下界, 如果存在, 求  $\{15, 45\}$  的最大下界。

5. (11 分) 设  $H$  是群  $G$  的非空子集。证明:  $H$  是  $G$  的子群的充分必要条件是: 对任意的  $a, b \in H$ , 有  $a^{-1}b \in H$ 。

6. (11 分) 设  $f$  是群  $G$  到  $G'$  的同构映射,  $b \in G$ 。证明:  $b$  与  $f(b)$  的阶相同。

7. (10 分) 试证明: 具有 3 个或更多元素的链 (线性序集) 不是有补格。

8. (10 分) 设  $f$  是环  $R$  到环  $R'$  的同态满射,  $I$  是  $R$  的理想, 证明:  $f(I) = R' \Leftrightarrow I + \text{Ker} f = R$ 。