数理方程复习参考手册

班　　级：2020 春数理方程 08 班

授课教师：谢如龙老师

课程助教：高源 张舒博

2020 春数理方程 08 班内部材料，仅供学习交流使用

目录

期末考试题目考点分析

1.1 偏微分方程通解的求解

偏微分方程通解的求解是重要考点之一，主要通过通解法求解定解问题类型题目考察，偶尔也会直接出现求解偏微分方程通解的题目. 主要掌握三类偏微分方程通解的求解方法，即掌握可直接积分类型的求解以及变量代换和函数变换方法在转化到可直接积分类型中的应用. 对应作业题目第一章第 2 题和第 6 题.

1.1.1 2014 春数理方程 B 期末第一题

求下列偏微分方程的通解 $u = u(x, y)$

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

2.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = xy$$

1.1.2 2017 春数理方程 B 期末第一题

求方程 $u_x + y u_{xy} = 0$ 的一般解.

1.2 通解法 (行波法) 求解定解问题

这类问题几乎每年都有考察，主要考察对于通解法求解定解问题的掌握. 这类题目以考察行波法为主，偶尔会涉及其他类型的偏微分方程通解的求解. 需要熟练掌握行波法的使用条件，以及通解法求解定解问题的流程. 对应于作业第一章题目的第 11 题.

1.2.1 2016 春数理方程 B 期末第三题

考虑初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + f(t, x), (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = \sin 2x \end{cases}$$

1. 如取 $f(t,x)=0$, 求此初值问题的解.
2. 如取 $f(t,x)=t^2x^2$, 求此初值问题相应的解.

1.2.2 2017 春数理方程 B 期末第二题

求解一维半无界弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}, (t>0, 0<x<+\infty) \\ u|_{x=0}=0 \\ u|_{t=0}=x, u_t|_{t=0}=2\sin x \end{cases}$$

1.2.3 2019 春数理方程 B 期末第二题

求解一维无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-4t+2x, (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u|_{t=0}=x^2, u_t|_{t=0}=\sin 3x \end{cases}$$

1.2.4 2020 春数理方程 B 毕业班期末第一题

求解下列 $Cauchy$ 问题:

1.

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, (t>0, -\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0}=x^2, u_t|_{t=0}=\cos 2x \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=20 \\ u(0,y)=y^2, u(x,0)=\sin x \end{cases}$$

1.3 求解固有值问题

这类题目在近年来考察频率也比较高，几乎每年都会有考察. 这类题目的做法核心是要认识到求解固有值问题本质上是求解带有未知参数 λ 的常微分方程问题. 所以，只需要将其当作一般的常微分方程问题来处理. 总的来讲，可能会用到的方法有：降阶法，特征根法，特殊函数法. 其中降阶法主要要求掌握可降阶类型的表达形式，以及降阶所使用的函数变换方法；特征根法主要要求掌握一般方程和特征根方程的对应关系，以及对应解的形式 (特征根法求解属于常见类型，也是重点，关于特征根法的思想阐述详见文件" 特征根法，你到底，你到底是谁")；特殊函数法是这门课程中主要学习的一种求解特殊固有值问题的方法，主要要求掌握两类方程的表达形式，以及对应方程的解. 对应于作业第二章第 1 题和第 2 题.

1.3.1 2014 春数理方程 B 期末第二题

求下列固有值问题的解, 要求明确指出固有值及其所对应的固有函数

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda x^2 y = 0, (0 < x < 2) \\ |y(0)| < +\infty, y'(2) = 0 \end{cases}$$

1.3.2 2016 春数理方程 B 期末第一题

求以下固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, (0 < x < 16) \\ Y'(0) = 0, Y'(16) = 0 \end{cases}$$

1.3.3 2016 春数理方程 B 期末第八题

考察勒让德方程对应固有值问题的求解，以及函数在勒让德多项式所构成的固有函数系上的展开.
考虑固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right) y'\right] + \lambda y = 0, (0 < x < 1) \\ y'(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

1. 求此固有值问题的固有值和固有函数.
2. 把 $f(x) = 2x + 1$ 按此固有值问题所得到的固有函数系展开.

1.3.4 2019 春数理方程 B 期末第三题

求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < 9) \\ y(0) = y(9) = 0 \end{cases}$$

1.3.5 2020 春数理方程 B 毕业班期末第二题

二. (18 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数: 1

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, (0 < x < \pi) \\ Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x^2Y''(x) + xY'(x) + \lambda Y(x) = 0, (1 < x < b) \\ Y(1) = 0, Y'(b) = 0 \end{cases}$$

1.4 分离变量法求解定解问题

分离变量法是求解定解问题的重要方法之一，也是这门课程的重点. 分离变量法求解定解问题几乎每年都会有考察. 对于这类题目，首先要选择合适的变量，进而判断是否为齐次. 对于非齐次问题，需要转化为齐次问题才能直接进行分离变量法求解. 对应于作业第二章 3-10 题和第三章 16、18、19、25、27、28、29 题.

1.4.1 2014 春数理方程 B 期末第五题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, (r < 2) \\ u|_{r=2} = \sin\theta + 2\sin 5\theta - 7\cos 4\theta \end{cases}$$

1.4.2 2014 春数理方程 B 期末第六题

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, (0 < x < 1, t > 0) \\ u(t,0) = 0, u(t,1) = 1 \\ u(0,x) = \varphi(x) + x, u_t(0,x) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

1.4.3 2014 春数理方程 B 期末第七题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = z, (x^2 + y^2 + z^2 < 1) \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0 \end{cases}$$

1.4.4 2016 春数理方程 B 期末第二题

利用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_x x, (t > 0, 0 < x < 5) \\ u(t,0) = u(t,5) = 0 \\ u(0,x) = \phi(x) \end{cases}$$

并求 $\phi(x) = \delta(x-2)$ 时此定解问题的解.

1.4.5 2016 春数理方程 B 期末第五题

求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r, (0 < r < 1) \\ |u(t,0)| < +\infty, u(t,1) = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(r) \end{cases}$$

并算出 $\phi(r) = J_0(ar) + 3J_0(br)$ 时的解，其中 $0 < a < b$，且 $J_0(a) = J_0(b) = 0$.

1.4.6 2016 春数理方程 B 期末第七题

对于三维波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, (a > 0, t > 0, -\infty < x, y, z < +\infty)$$

它的形如 $u = u(t,r) = T(t)R(r)$ 的解称为方程的可分离变量的径向对称解，求方程满足 $\lim_{t\to+\infty} u = 0$ 的可分离变量的径向对称解, 这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.4.7 2017 春数理方程 B 期末第三题

考察一维有界限振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t,x), (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin \frac{3}{2} x, u_t|_{t=0} = \sin \frac{x}{2} \end{cases}$$

1. 当 $f(t,x) = 0$ 时，求出上述定解问题的解 $u_1(x)$.
2. 当 $f(t,x) = \sin \frac{x}{2} \sin \omega t, \left(\omega \neq k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}\right)$ 时，求出上述定解问题的解 $u_2(t,x)$.
3. 指出定解问题中方程非齐次项 $f(t,x)$, 边界条件和初始条件的物理意义.

1.4.8 2017 春数理方程 B 期末第四题

求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u, (t > 0, 0 < x < 1) \\ u|_{x=0} \text{ 有界，} u_x|_{x=1} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

1.4.9 2017 春数理方程 B 期末第五题

求解如下泊松方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=z,(x^2+y^2+z^2<1) \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=0 \end{cases}$$

1.4.10 2019 春数理方程 B 期末第四题

求解一维有界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},(0<x<1,t>0) \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=1 \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

1.4.11 2019 春数理方程 B 期末第五题

求解如下泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0,(x^2+y^2<1,0<z<1) \\ u|_{x^2+y^2=1}=0 \\ u|_{z=0}=0, u|_{z=1}=1-(x^2+y^2) \end{cases}$$

1.4.12 2020 春数理方程 B 毕业班期末第三题

1. 求周期边界条件下

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},(t>0,0<x<1) \\ u(t,0)=u(t,1),u_x(t,0)=u_x(t,1) \end{cases}$$

的分离变量解 $u=T(t)X(x)$.
2. 求解

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx},(t>0,0<x<1) \\ u(t,0)=u(t,1),u_x(t,0)=u_x(t,1) \\ u(0,x)=\sin 2\pi x, u_t(0,x)=2\pi\cos 2\pi x \end{cases}$$

1.5 特殊函数的积分求解 (性质、递推公式的应用)

这类题目从 2019 春期末开始，近两年都有考察. 主要考察特殊函数的基本概念、性质以及递推公式的应用，并且考察积分求解方法，如换元法、分部积分法等. 对应作业第三章第 9、22、23 题.

1.5.1 2019 春数理方程 B 期末第八题

计算积分

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)dx$$

1.5.2 2020 春数理方程 B 毕业班期末第五题第一问

P_n 为 n 阶勒让德函数, 写出 $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$，并计算积分 $\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)\mathrm{d}x$.

1.6 积分变换法求解定解问题

这类题目几乎每年都有考察，一般为一道题目. 对应作业第四章第 1、2 题以及补充题目.

1.6.1 2014 春数理方程 B 期末第四题

月积分变换法求解

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + u, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

1.6.2 2016 春数理方程 B 期末第四题

求解以下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 5u, (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

并指出当 $\phi(x) = e^{-x^2}$ 时此定解问题的解.

1.6.3 2019 春数理方程 B 期末第六题

求解热传导问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases}$$

1.6.4 2020 春数理方程 B 毕业班期末第四题

求解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, (t > 0, \infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \delta(x+1) \end{cases}$$

1.7 求解格林函数，用基本解方法求解定解问题

这类题目几乎每年都有考察，其中格林函数的求解考察一般为镜像法 (但有时会以积分变换法求解定解问题形式呈现，比如 2020 春数理方程 B 毕业班期末第四题)，但考虑到格林函数的求解本质上是定解问题的求解，所以需要掌握使用分离变量法、积分变换法等方法求解格林函数的方法. 对应作业 5、6、7、9、10、12 题.

1.7.1 2014 春数理方程 B 期末第三题

求第一象限 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ 的第一边值问题的 $Green$ 函数.

1.7.2 2016 春数理方程 B 期末第六题

已知下半空间 $V = \{(x, y, z) \mid x < 0, -\infty < x, y < +\infty)\}$
1。求出 V 内泊松方程第一边值问题的 $Green$ 函数.
2. 求解定解问题

$$\begin{cases} 4u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, (z < 0, -\infty < x, y < +\infty) \\ u|_{z=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

1.7.3 2017 春数理方程 B 期末第六题

设区域 $\Omega = \{(x, y) \mid y \geq x\}$
1. 求区域 Ω 上的泊松方程狄利克雷边值问题的格林函数.
2. 求解如下泊松方程的狄利克雷边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, ((x, y) \in \Omega) \\ u(x, x) = \phi(x) \end{cases}$$

1.7.4 2017 春数理方程 B 期末第七题

考察定解问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 3u, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

1. 求出上述定解问题相应的基本解.
2. 当 $\varphi(x) = x$ 时，求解上述定解问题.

1.7.5 2019 春数理方程 B 期末第七题

设平面区域 $\Omega = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$

1. 求出区域 Ω 的 $Green$ 函数.
2. 求出区域 Ω 的定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, (x, y) \in \Omega \\ u(x, -x) = \varphi(x) \end{cases}$$

1.7.6 2020 春数理方程 B 毕业班期末第六题

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, y < 1\}$
1. 写出 D 内泊松方程第一边值问题的 $Green$ 函数所满足的定解问题，并求出 $Green$ 函数.
2. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + a^2 u_{yy} = 0, (-\infty < x < +\infty, y < 1) \\ u\big|_{y=1} = \varphi(x) \end{cases}$$

重要考点梳理

2.1 定解问题的书写

一均匀杆的原长为 l, 一端固定，另一端沿杆的轴线方向拉长 b 而静止，放手任其振动，试写出对应的定解问题。

解：首先按照题意建立合适的坐标系.

取杆所在直线为 x 轴，固定端为原点 $x=0$，另一端对应 $x=l$。以 $\bar{u}(x,t)$ 表示小段的质心位移, 设 S 为杆的横截面积, ρ 为杆的质量密度, $p(x,t)$ 是小段端点处所受的力. 由牛顿第二定律，有

$$[p(x+\Delta x,t)-p(x,t)]S=\rho S\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时 ,$\bar{u}\to u$, $\frac{p(x+\Delta x,t)-p(x,t)}{\Delta x}\to\frac{\partial p}{\partial x}$, 又因为 $p=E\frac{\partial u}{\partial x}$, 故有

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial p}{\partial x}=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $a^2=\frac{E}{\rho}$, 可得振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

由题意知，放手时即是振动的初始时刻，此时杆振动的速度为零，则

$$u_t|_{t=0}=0$$

而 $x=l$ 端拉离平衡位置使整个杆伸长了 b, 故初始位移为

$$u|_{t=0}=\frac{b}{l}x$$

再看边界条件，一端固定即该端位移保持为 0，即

$$u|_{x=0}=0$$

另一端未受外力，于是有

$$u_x|_{x=l}=0$$

所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0}=\frac{b}{l}x, \quad u_t|_{t=0}=0 \\ u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=l}=0 \end{cases}$$

总结：首先要选取合适的坐标系

具体操作：选择一微元利用物理定律进行分析，整理得到泛定方程，结合物理意义写出定解条件.

下面通过两道在自然语言描述上比较类似的问题说明如何进行合适的微元分析.

题一：

长为 l 的柔软均匀绳，一端固定在以角速度 ω 匀速转动的竖直轴上，由于惯性离心力的作用，这根绳的平衡位置应是水平线，试推导此绳相对于水平线的横振动方程。

解：由小量近似，$\sin\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},\cos\alpha\approx 1$, 因而从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 这段绳满足

$$T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x=\rho\mathrm{d}x\cdot u_{tt}$$

即

$$(Tu_x)|_{x+dx}-(Tu_x)|_x=\rho\mathrm{d}x\cdot u_{tt}$$

为了求出在 x 处的张力 $T(x)$, 需考虑从 x 到 l 的一段绳上的惯性离心力的作用, 设在 x 处的张力为 $T(x)$, 则

$$T(x)=\int_x^l\omega^2x\rho\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)$$

因此，

$$\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)\right]u_x\bigg|_{x+dx}-\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)\right]u_x\bigg|_x=u_{tt}\rho dx$$

即

$$\begin{aligned}\rho u_{tt}&=\frac{\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)u_x\right]\big|_{x+\mathrm{d}x}-\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)u_x\right]\big|_x}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-\omega^2\right)u_x\right]\end{aligned}$$

整理得

$$u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-\omega^2\right)u_x\right]=0$$

题二：

长为 l 的柔软均匀的重绳，上端固定在以角速度 ω 匀速转动的竖直轴上，由于重力的作用，绳的平衡位置应是竖直线。试推导此绳相对于竖直线的横振动方程.

解：在小振动的情况下，$\sin\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},\cos\alpha\approx 1,\mathrm{d}s\approx\mathrm{d}x$, 取从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 一段绳，满足

$$T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x+F=\rho\mathrm{d}x\cdot u_{tt}$$

其中 F 是 dx 段上所受的惯性离心力，$F=\rho\mathrm{d}xu\omega^2$, 在 x 端还受重力的作用, 张力 $T=\int_x^l\rho g\mathrm{d}x$. 代入上式得

$$[(l-x)\rho gu_x]|_{x+dx}-[(l-x)\rho gu_x]|_x+u\omega^2\rho\mathrm{d}x=u_{tt}\rho\mathrm{d}x$$

即

$$u_{tt}=\frac{[(l-x)gu_x]|_{x+dx}-[(l-x)gu_x]|_x}{\mathrm{d}x}+u\omega^2$$

亦即

$$u_{tt}=g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)u_x\right]=u\omega^2$$

整理得到

$$u_{tt}-g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)u_x\right]-u\omega^2=0$$

2.2 行波法求解定解问题 (并和积分变换法作比较)

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta_3u,\quad(t>0,r>0)\\u|_{r=0}\ \text{有界}\\u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=\left(1+r^2\right)^{-2}\end{cases}$$

解：

法一：使用行波法求解。观察问题为三维球对称的波动方程问题，可以通过函数变换转化为一维半无界区域问题，接着使用延拓法转化为一维无界区域的波动方程问题进而使用行波法求解。

使用球坐标表达泛定方程

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)$$

通过待定函数变换过程确定函数变换因子，令 $v=ru$, 则变为半无界弦振动定解问题

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{rr}, \quad (t>0, r>0) \\ v|_{r=0}=0 \\ v|_{t=0}=0, \quad v_t|_{t=0}=\frac{r}{(1+r^2)^2} \end{cases}$$

进一步，使用延拓法

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, \quad (t>0, -\infty<x<+\infty) \\ w|_{t=0}=0, \quad w_t|_{t=0}=\frac{x}{(1+x^2)^2} \end{cases}$$

利用达朗贝尔公式

$$\begin{gathered} w(t,x)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}d\xi=-\frac{1}{4a}\frac{1}{(1+\xi^2)}\bigg|_{x-at}^{x+at} \\ =\frac{1}{4a}\frac{1}{(1+(x-at)^2)}-\frac{1}{4a}\frac{1}{(1+(x+at)^2)}=\frac{xt}{[1+(x-at)^2][1+(x+at)^2]} \end{gathered}$$

取 $x>0$ 部分（对应原问题的 $r>0$），得到半无界弦振动定解问题的解为

$$v(t,r)=\frac{rt}{[1+(r-at)^2)][1+(r+at)^2]}$$

相应地，此三维波动方程定解问题的解为

$$u(t,r)=\frac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

法二：使用拉普拉斯变换法求解. 对于一般的发展方程问题，时间变量 $t>0$ 为半无界区域，且初始条件往往满足拉普拉斯变换法使用条件.

$$L[u_{tt}]=p^2U-pU(0,r)-u_t(0,r)=p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}$$

那么方程变为

$$p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}=a^2\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2a^2}{r}\frac{dU}{dr}$$

求解常微分方程, 再作 Laplace 逆变换，最后得到

$$u=\frac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

比较：可以发现，行波法和积分变换法都可以应用于求解这一问题。行波法求解这一问题主要步骤为：选取合适的坐标系表达定解问题，待定函数变换寻找合适的函数变换因子，变换后的问题利用延拓法转化为可以直接使用行波法求解的问题，利用达朗贝尔公式直接得到解。拉普拉斯变换法求解这一问题的主要步骤为：选取合适的坐标系表达定

解问题，选取合适的积分变量作正变换，求解像函数满足的常微分方程，对像函数作反变换得到解。一般来讲，如果需要作函数变换才可以使用行波法发问题，需要考虑题目是否提供关于函数变换因子的提示，如果没有需要考虑是否掌握待定函数变换法。而对于拉普拉斯变换法，则要考虑像函数的求解以及反变换的过程。一般的原则是能够使用行波法求解的问题尽量使用行波法。

2.3 阻尼振动问题中的行波法使用

阻尼问题是弦振动问题中的一种特殊情形，其中阻尼项的加入会导致无法直接使用行波法处理。对于阻尼问题，有一种有效的转化方法是基于物理意义，引入阻尼因子进行函数变换。以这道题为例说明这一类问题的处理思路。

试求解一维无界区域上阻尼振动问题。

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}+2\varepsilon v_t+\varepsilon^2 v=0(-\infty<x<\infty,t>0) \\ v(x,0)=\varphi(x),v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

解：首先我们发现，问题描述的是一维无界区域的波动方程问题，从这一点上看是满足行波法的。然后我们继续观察，这个定解问题不同于一般的一维无界区域弦振动问题，其中不同在于这里多了一个阻尼项，这就导致无法直接使用行波法。这时候，有两种思路：转化为可以使用行波法的类型；使用积分变换法等其他方法。

我们遵循一个原则，在题目没有指定方法的前提下，如果能使用行波法，就不考虑使用积分变换法等方法处理。理由呢就是，如果满足行波法使用条件，那用行波法来求解是最简洁的。因此如果存在转化方法，且转化方法不是很复杂的话，我们希望能够通过转化并利用行波法求解。

考虑到这种特殊问题可以通过转化方法求解，那么我们这里说明如何将问题转化为可以使用行波法求解的问题。

令

$$v(x,t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u(x,t)(\beta>0)$$

其中 $\mathrm{e}^{-\beta t}$ 为衰减因子，且使得 $u(x,t)$ 满足一维无界区域波动方程基本型。

由上述表达式可得

$$\begin{aligned} &v_t=\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\beta u\right) \\ &v_{tt}=\mathrm{e}^{-\beta t}\left(u_{tt}-2\beta u_t+\beta^2 u\right) \\ &v_{xx}=\mathrm{e}^{-\beta t}u_{xx} \end{aligned}$$

代入泛定方程得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+2(\varepsilon-\beta)u_t+\left(\varepsilon^2-2\varepsilon\beta+\beta^2\right)u=0$$

对照一维无界区域波动方程基本型可得，取 $\beta=\varepsilon$ 即可得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

对于定解条件有

$$v(x,0)=\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot 0}u(x,0)=\varphi(x)$$
$$v_t(x,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\epsilon t}u(x,t)\right]_{t=0}=\psi(x)$$

进而得

$$u(x,0)=v(x,0)=\varphi(x)$$
$$u_t(x,0)=\psi(x)+\varepsilon\varphi(x)$$

则由行波法可得

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2\mathrm{e}^{\varepsilon t}}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\&+\frac{1}{2a\mathrm{e}^{\beta t}}\int_{x-at}^{x+at}[\psi(\xi)+\varepsilon\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

总结：
对于一维无界区域波动方程问题标准型，满足行波法使用要求，则直接使用行波法。
如果是半无界问题可以考虑使用延拓法转化为一维无界区域问题，进而使用行波法。
对于三维球对称问题，可以使用球坐标表达，利用函数变换，转化为一维半无界区域问题，延拓后使用行波法。
对于阻尼问题，可以考虑使用指数函数形式的阻尼因子项进行函数变换，进而转化为一维无界区域问题，使用行波法。

2.4 齐次化原理的应用

应用齐次化原理求解非齐次发展方程问题。

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t(0<x<l,t>0) \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

解：非齐次发展方程，可以应用齐次化原理进行转化，进而使用分离变量法求解。记

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0(0<x<l,t>\tau) \\ v_x(0,t)=v_x(l,t)=0 \\ v(x,t;\tau)|_{t=\tau}=0, v_t(x,t;\tau)|_{t=\tau}=A\cos\frac{\pi}{l}x\sin\omega\tau \end{cases}$$

的解 $v(x,t;\tau)$, 而

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

为了求解这个定解问题，我们要进行时间变量偏移。令

$$v(x,t;\tau)=X(x)T(t-\tau)$$

$$T''-\mu a^2T=0$$
$$X''-\mu X=0$$
$$X'(0)=0,X'(l)=0$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数系

$$\begin{cases} \text{固有值: } \mu_0=0,\mu_n=-\frac{n^2\pi^2}{l^2},n=1,2,\cdots \\ \text{固有函数: } X_0(x)=1,X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

将固有值代入关于时间变量 t 的常微分方程并求解得到

$$\begin{cases} T_0(t-\tau)=a_0(t-\tau)+b_0 \\ T_n(t-\tau)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) \end{cases}$$

进而得到

$$v_n(x,t;\tau)=\left[A_n\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

则形式解

$$\begin{aligned}v(x,t;\tau)=&a_0(t-\tau)+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)+\\&B_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\Big]\cos\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}$$

代入初始条件

$$\begin{cases}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x=0\\a_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x=A\cos\frac{n\pi}{l}x\sin\omega t\tau\end{cases}$$

比较等式两边对应项系数得

$$b_0=0,A_n=0$$
$$a_0=0,B_1\frac{\pi a}{l}=A\sin\omega\tau,B_n=0(n\neq1)$$

即

$$a_0=b_0=A_n=0,B_n=0(n\neq1),B_1=\frac{Al}{\pi a}\sin\omega\tau$$

代入形式解

$$\begin{aligned}v(x,t;\tau)&=B_1\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi}{l}x\\&=\frac{Al}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\cdot\cos\frac{\pi}{l}x\end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi}{l}x\end{aligned}$$

另外，这个问题属于有界区域的齐次边界非齐次方程问题，还可以使用固有函数展开法进行求解。可以在阅读时尝试利用固有函数展开法进行求解，并比较两种方法的特点。这里简单叙述固有函数展开法的操作过程。

相应的齐次问题分离变量后所得的固有值问题为

$$\begin{cases}X''(x)-\mu X(x)=0\\X'(0)=X'(l)=0\end{cases}$$

求解得到固有函数系

$$X_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi}{l}x,n=0,1,\cdots$$

进而把非齐次项在固有函数系上展开

$$\begin{cases} u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x \\ A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

并得到展开式系数

$$f_1(t)=A\sin wt, f_n(t)=0(n\neq 1)$$

进而得到关于 t 的常微分方程

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} T_1''(t)+\frac{\pi a}{l}T_1(t)=A\sin\omega t \\ T_1(0)=0, T_1'(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=0, n\neq 1 \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$$

求解得到

$$T_1(t)=\frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)$$

和

$$T_n(t)\equiv 0, n\neq 1$$

所以定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi}{l}x$$

2.5 分离变量法求解定解问题

1. 坐标系的选取

   在环形域 $a\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq b(0<a<b)$ 内求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12\left(x^2-y^2\right), \quad a<\sqrt{x^2+y^2}<b \\ u\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=b}=0 \end{cases}$$

解：由于求解区域是环形区域，所以我们选用极坐标系，利用直角坐标系与极坐标系之间的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

可将上述定解问题用极坐标 ρ, θ 表示

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 12\rho^2\cos 2\theta, \quad a < \rho < b \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=b} = 0 \end{cases}$$

这是一个非齐次方程齐次边界条件的定解问题. 使用固有函数展开法，并注意到圆域内 Laplace 方程所对应的固有函数为 $\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, n = 0, 1, 2, \cdots$

进而可得形式解

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=0}\left[A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta\right]$$

代入泛定方程并整理得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[A_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}A_n'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2}A_n(\rho)\right]\cos n\theta + \left[B_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}B_n'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2}B_n(\rho)\right]\sin n\theta\right\} = 12\rho^2\cos 2\theta$$

比较两端关于 $\mathrm{cosn}\,\theta, \sin n\theta$ 的系数，可得

$$\begin{aligned} &A_2''(\rho) + \frac{1}{\rho}A_2'(\rho) - \frac{4}{\rho^2}A_2(\rho) = 12\rho^2 \\ &A_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}\Lambda_n'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2}A_n(\rho) = 0 \quad (n \neq 2) \\ &B_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}B_n'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2}B_n(\rho) = 0 \end{aligned}$$

再由边界条件得

$$\begin{aligned} A_n(a) = A_n'(b) = 0 \\ B_n(a) = B_n'(b) = 0 \end{aligned}$$

系数递推公式的通解为

$$\begin{aligned} A_n(\rho) = c_n\rho^n + d_n\rho^{-n} \\ B_n(\rho) = c_n'\rho^n + d_n'\rho^{-n} \end{aligned}$$

其中 c_n, d_n, c_n', d_n' 都是任意常数. 由系数满足的条件得

$$\begin{aligned} &A_n(\rho) \equiv 0 \quad (n \neq 2) \\ &B_n(\rho) \equiv 0 \end{aligned}$$

下面的任务就是要确定 $A_2(\rho)$
其满足非齐次的欧拉方程，利用待定系数法可求得它的一个特解

$$A_2^*(\rho)=\rho^4$$

所以，它的通解为

$$A_2(\rho)=C_1\rho^2+C_2\rho^{-2}+\rho^4$$

由条件 (6) 确定 C_1, C_2, 得

$$\begin{aligned}C_1&=-\tfrac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}\\C_2&=-\tfrac{a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}\end{aligned}$$

因此

$$A_2(\rho)=-\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}\rho^2-\frac{a^+b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}\rho^{-2}+\rho^4$$

原定解问题的解为

$$u(\rho,\theta)=-\frac{1}{a^4+b^4}\left[\left(a^6+2b^6\right)\rho^2+a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)\rho^{-2}-\left(a^4+b^4\right)\rho^4\right]\cos 2\theta$$

2. 高维问题
求解高维分离变量问题

$$\begin{cases}u_{tt}=k^2\nabla^2u=k^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b, \quad 0<z<c, \quad t>0\\u(0,y,z,t)=u(a,y,z,t)=0, \quad u(x,0,z,t)=u(x,b,z,t)=0\\u(x,y,0,t)=u(x,y,c,t)=0\\u(x,y,z,0)=f(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)\end{cases}$$

解：令 $u(x,y,z,t)=v(x,y,z)T(t)$, 代入方程得

$$T''+\lambda k^2T=0$$

及

$$\nabla^2v+\lambda v=0$$

设 $v(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$，代入 $v(x,y,z)$ 得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}+\lambda=0$$

令 $X''(x)=\mu X(x), Y''(y)=\nu Y(y)$, 代入上式得

$$Z''+(\lambda+\mu+\nu)Z=0$$

由于关于 x 的边界条件是齐次的, 令 $\mu=-\alpha^2$, 得

$$X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$$

及

$$X_l(x)=B_l\sin\frac{l\pi x}{a},\quad l=1,2,3,\cdots$$

同样, 令 $\nu=-\beta^2$, 得

$$Y(y)=C\cos\beta y+D\sin\beta y$$

及

$$Y_m(y)=D_m\sin\frac{m\pi y}{b},\quad m=1,2,3,\cdots$$

令 $q^2=\lambda+\mu+_\nu=\lambda-a^2-\beta^2$, 得到 $Z(z)=E\cos qz+F\sin qz$. 再利用关于 z 的齐次边界条件，可得

$$Z_n(z)=F_m\sin\frac{n\pi z}{c},\quad n=1,2,3,\cdots$$

将固有值代入关于 t 的常微分方程得

$$T_{lmn}=G_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}kt}+H_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}kt}$$

进而可得形式解

$$u(x,y,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}kt}+b_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}}kt\right)\\ \times\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}$$

其中 a_{lmn},b_{lmn} 为任意常数。由 $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$, 得

$$f(x,y,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{lmn}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}$$

右端即为 $f(x,y,z)$ 的三重 $Fourier$ 级数，其中

$$a_{lmn}=\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由 $u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)$, 有

$$b_{lmn}=\frac{8}{\sqrt{\lambda_{lmn}}kabc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c g(x,y,z)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中

$$\lambda_{lmn}=\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2$$

3. 非齐次边界问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=\sin\omega t \\ u|_{t=0}=0, \qquad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解：对于非齐次边界问题，一般的处理方法是基于叠加原理的特解法。其核心在于特解的选取。这道题目通过不同的特解选取展示相应的求解过程，说明选取合适特解的重要性及一些关于选取原则的建议。

法一：令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, 取

$$w(x,t)=\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l}x+\mu_1(t)=\frac{x}{l}\sin\omega t$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} v_{ut}-a^2v_{xx}=\frac{\omega^2}{l}x\sin\omega t \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \\ v(x,0)=0, \quad v_t(x,0)=-\frac{\omega}{l}x \end{cases}$$

进而求解这一非齐次方程齐次边界问题即可得到结果。

法二：令

$$v(t,x)=X(x)\sin\omega t$$

由边界条件，可知 $X(0)=0, X(l)=1$. 把 $v(t,x)$ 代入泛定方程消去 $\sin\omega t$, 得

$$X''+\frac{\omega^2}{a^2}X=0$$

所以

$$X(x)=C_1\cos\frac{\omega x}{a}+C_2\sin\frac{\omega x}{a}$$

由 $X(0)=0$, 得 $C_1=0$; 再由 $X(l)=1$, 得

$$C_2=\frac{1}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

于是

$$X(x) = \frac{1}{\sin\frac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega x}{a}$$

从而

$$v(t,x) = \frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}} \sin\omega t$$

再令

$$u = w(t,x) + v(t,x)$$

代入原定解问题, 就得到关于 w 的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(t,0) = w(t,l) = 0 \\ w(0,x) = 0, w_t(0,x) = -\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}} \end{cases}$$

利用分离变量法处理这一齐次方程齐次边界问题得到解

$$w(t,x) = 2\omega al \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2 - (n\pi a)^2} \sin\frac{n\pi at}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后，把 $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 加起来, 就得到原定解问题的解。

4. 将一般方程化为施刘方程标准型

将方程化为施刘方程的标准形式.

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

解：

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

于是 $p(x) = \frac{1-x}{x}$, 故

$$k(x) = \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] = \exp\left[\int \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x\right] = x\mathrm{e}^{-x}$$

对照施刘方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] - g(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

可知该方程对应的施刘方程标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\mathrm{e}^{-x}y=0$$

注意：这里首先求解 $k(x)$，本质上和教材方法是一样的。

2.6 积分变换法求解定解问题

求解有界弦的振动问题。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad 0<x<l\\ u(t,0)=0, \quad u_x(t,l)=A\sin\omega t, \quad \omega\neq\frac{2k-1}{2l}\pi a, k=1,2,\cdots\\ u(0,x)=u_t(0,x)=0\end{cases}$$

解：由题意知，可以采用拉普拉斯变换法求解。
记 $\bar{u}(p,x)=L[u(t,x)]$, 定解问题作拉普拉斯变换得到

$$\begin{cases}p^2\bar{u}=a^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}, \quad 0<x<l\\ \bar{u}\big|_{x=0}=0, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\big|_{x=l}=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\end{cases}$$

常微分方程的通解

$$\bar{u}=C\operatorname{ch}\frac{p}{a}x+D\operatorname{sh}\frac{p}{a}x$$

由边界条件定出特解

$$\bar{u}=\frac{Aa\omega}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p}\operatorname{sh}\frac{x}{a}p$$

利用拉普拉斯变换反演公式和留数定理

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\sum\operatorname{Res}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]$$

这里, $\sum$ 是对 $\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}$ 的所有孤立奇点的留数求和. 由于 $\bar{u}(p,x)$ 在 p 平面上有可去奇点 $p=0$，一级极点 $p=\pm\mathrm{i}\omega$ 和 $p=\pm\mathrm{i}\omega_k$, 其中, $\omega_k=\frac{(2k-1)\pi a}{2l}(k=1,2,3,\cdots)$ 。所以可得

$$\begin{aligned}u_0(t,x)&=\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega}+\operatorname*{Res}_{p=-i\omega}\right)\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]=2\operatorname{Re}\left\{\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]\right\}\\&=2\operatorname{Re}\left[\frac{Aaw\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}p\right)\mathrm{e}^{pt}}{p(p+\mathrm{i}\omega)\operatorname{ch}\left(\frac{l}{a}p\right)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega}=\frac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega_k} + \operatorname*{Res}_{p=-i\omega_k}\right)\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\operatorname*{Res}_{p=i\omega_k}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]\right\} \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{Aaw\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}p\right)\mathrm{e}^{pt}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{l}{a}p\right)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega_k} \\ &= 16Aawl^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(2k-1)\pi\left[4l^2\omega^2-(2k-1)^2\pi^2a^2\right]} \end{aligned}$$

所以定解问题的解为：$u(t,x)=u_0(t,x)+v(t,x)$

注意反演公式在使用拉普拉斯变换法的反变换步骤中的重要应用。

2.7 δ 函数的性质

试证明 $x\delta'(x)=-\delta(x)$

证明：对于这类关于 δ 函数的等式的证明问题，要利用 δ 函数最根本的性质，即筛选性质，进行证明。

首先任选一检验函数 $\varphi(x)$，并得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = -\left.(x\varphi(x))'\right|_{x=0} = -\varphi(x)-\left.x\varphi'(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

而根据 δ 函数的筛选性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx = -\left.\varphi(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

比较得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx$$

因此有：

$$x\delta'(x)=-\delta(x)$$

2.8 基本解方法求解定解问题

$$
\begin{cases}
\Delta u=0(x>0,y>0)\\
u(0,y)=f(y)\\
u(x,0)=0
\end{cases}
$$

解：格林函数满足的定解问题为

$$
\begin{cases}
\Delta G=\delta\left(x-x_0,y-y_0\right)(x>0,y>0)\\
\left.G\right|_{x=0}=\left.G\right|_{y=0}=0
\end{cases}
$$

利用镜像法可得格林函数

$$
G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left[\left(x+x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2\right]}{\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\left[\left(x+x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2\right]}
$$

积分公式为

$$
\begin{aligned}
u(M)&=-\textstyle\int_l f\left(M_0\right)\frac{\partial}{\partial n_0}G\left(M,M_0\right)\mathrm{d}l_0\\
&=-\textstyle\int_0^{\infty}f\left(y_0\right)\frac{\partial G}{\partial\left(-x_0\right)}\mathrm{d}y_0+0=\int_0^{\infty}f\left(y_0\right)\frac{\partial G}{\partial x_0}\mathrm{d}y_0
\end{aligned}
$$

计算方向导数

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_l=&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2\left(x+x_0\right)}{\left(x+x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}+\frac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}\right.\\
&\left.-\frac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{2\left(x+x_0\right)}{\left(x+x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]_{x=0}\\
=&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{4x_0}{x_0^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{4x_0}{x_0^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]\\
=&\frac{x_0}{\pi}\left[\frac{1}{x_0^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{1}{x_0^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]
\end{aligned}
$$

进而得到解

$$
u(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{x^2+\left(y_0-y\right)^2}-\frac{1}{x^2+\left(y_0+y\right)^2}\right]f\left(y_0\right)\mathrm{d}y_0
$$

经典问题专题复习

3.1 简介

在本学期的课程学习中，经常和同学们针对一些疑难问题进行深入讨论，共同解决一些困难. 经总结归纳，整理得到这些经典问题，以专题形式进行复习讨论.

3.2 函数变换法的应用

数理方程课程主要研究线性偏微分方程和定解条件所组成的定解问题的求解，课程的核心思想是转化的思想，其中通解法是一种借鉴常微分方程定值问题的求解思路转化而来的求解方法。通解法的求解步骤为：求解偏微分方程的通解，代入定解条件构建已知函数和未知函数之间的联系，用已知函数表达未知函数代入形式通解得到定解问题的解。其中重要步骤为，求解偏微分方程的通解。虽然这种方法思路很清晰，但往往偏微分方程的通解求解是比较复杂的。我们常见的求解类型主要分为三种，分别是可直接积分求解类型，可通过变量代换化为可直接积分求解类型，可通过函数变换化为可直接积分求解类型。这一专题通过分析一道作业题目来阐述函数变换法的求解思路。这一道题目虽然实际上变成求解常微分方程的通解，但其中函数变换法的思想是一致的，这里函数变换法是将一般的二阶常微分方程转化为二阶常系数微分方程求解。

在球坐标系下，求方程 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$(k 为正常数) 的形如 $u = u(r)$ 的解.
提示: $\Delta_3 u$ 在球坐标系下的形式为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

解：由题意知，需要求得形如 $u = u(r)$ 的解。则设 $u = u(r)$，并代入方程整理得到

$$\Delta_3 u + k^2 u = \frac{2}{r}\frac{\partial u}{dr} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 u = 0$$

可以发现，这个方程不是二阶常系数线性微分方程，并且直观上不容易看出一个解，所

以采用函数变换法，通过构造函数变换将其转化为我们熟悉的类型，即二阶常系数线性微分方程。(对比偏微分方程通解法中，通过函数变换将一般的偏微分方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程，进而实现求解) 设 $u(r)=v(r)w(r)$，并代入方程得

$$v''w+2v'w'+vw''+\frac{2}{r}\left(v'w+vw'\right)+k^2vw=0$$

进一步整理得到关于 $w(r)$ 的微分方程

$$w''+\frac{2v'+\frac{2}{r}v}{v}w'+\frac{v''+\frac{2}{r}v'+k^2v}{v}w=0$$

考虑到我们的目标是将其转化为二阶常系数线性微分方程，即要求 w 及其各阶导数的系数为常数，即

$$\frac{2v'+\frac{2}{r}v}{v}=C_1' \quad \frac{v''+\frac{2}{r}v'+k^2v}{v}=C_2'$$

亦即

$$\frac{v'+\frac{1}{r}v}{v}=C_1 \quad \frac{v''+\frac{2}{r}v'}{v}=C_2$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。

则我们只需要求解上述常微分方程组的一个解即可 (往往我们希望这个解尽可能简单)。注意到第一个方程是一阶方程而第二个是二阶方程，则我们首先要求解第一个方程，然后代入第二个方程验证即可 (要注意我们使用函数变换法是要解决一般的非常系数二阶线性常微分方程的求解，这种类型方程不易直接求解，所以我们选择通过函数变换法将其转化为容易求解的类型，即二阶常系数线性常微分方程。第二个方程也属于这种类型，同样不易直接求解。而第一个方程是一阶方程，一般一阶方程求解相对容易，所以我们的一般做法是，先求解转化得到的一阶方程得到通解，代入二阶方程验证)。

另外注意到 C_1,C_2 为任意常数，即我们只需要找到一组合适的 C_1,C_2 使得方程组有解即可。

第一个方程属于可分离变量类型，分离变量得到

$$\frac{dv}{v}=\left(C_1-\frac{1}{r}\right)dr$$

解得

$$v=C_3\frac{e^{C_1r}}{r}$$

将 v 代入第二个方程得

$$C_1^2C_3\frac{e^{C_1r}}{r}=C_2C_3\frac{e^{C_1r}}{r}$$

则当 $C_2=C_1^2$ 时上述方程组有解。考虑到使得解尽可能简单，我们取 $C_1=0,C_3=1$.

则得到解

$$v = \frac{1}{r}$$

代入关于 w 的方程得

$$w'' + k^2 w = 0$$

对于这一二阶常系数线性常微分方程，可以直接通过特征根法求解。

$$w = A\cos kr + B\sin kr$$

进而由 $u(r) = v(r)w(r)$ 得方程的解为

$$u = vw = \frac{1}{r}(A\cos kr + B\sin kr)$$

其中 A, B 为任意常数。

总结：转化思想是这门课程中的核心思想，通过转化我们可以将不熟悉的问题变成熟悉的问题进而实现求解。转化思想应用时首先要考虑的问题是转化的目标和转化的方法，并且要在求解过程中时刻记得。这个专题通过一道作业题目的分析过程展示转化的一个具体手段——函数变换法，在求解一般的二阶非常系数线性常微分方程中的应用。而在这门课程中，除了需要掌握这一应用，还需要掌握函数变换法在求解偏微分方程通解中的应用。这一问题在习题课和总结材料中有所阐述，另外建议读者通过比较函数变换法在这两个场景中的应用，思考函数变换法的核心思想，并通过和这门课程中所讲述的各种求解定解问题的方法中蕴含的转化思想作比较，体会转化思想的精神。

3.3 重要的物理学定律

数学物理方程主要研究物理问题的数学模型建立以及对应的求解. 其中数学模型建立的过程可以总结为：选取合适的微元，根据物理学定律进行分析建立关系式，利用小量近似方法和数量关系、几何关系整理关系式建立方程，根据物理意义书写定解条件. 建立过程中一个重要的依据是物理学定律，这一专题重点总结这门课程中涉及的重要物理学定律.

1. 牛顿第二定律 $F = m \cdot a$

2. 傅里叶热传导定律

   在无穷小时间段 $(t, t + \mathrm{d}t)$ 内, 沿点 M 处的面积元素 $\mathrm{d}S$ 的法向 n 流过 $\mathrm{d}S$

的热量与温度的下降率成正比，即

$$\mathrm{d}Q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

这里, $k(x,y,z)$ 称为物体在 M 点处的热传导系数, 它应取正值; 负号表示热流指向温度下降的方向. 上式可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q &= -k(x,y,z)\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\ &= \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这里, $\boldsymbol{n}$ 是法向方向的单位向量 ; $\boldsymbol{q} = -k(x,y,z)\nabla u$, 称为在点 M 处的热流密度向量，其方向与温度梯度的方向相反。

3. 牛顿冷却定律

    从物体流向外部介质的热流密度 q 跟物体与介质在表面处的温度差成正比, 即

$$q = h(u-\theta)$$

式中, u 和 $\theta = \theta(t,x,y,z)$ 分别表示物体和介质在表面处的温度 $h = h(x,y,z)$ 称为热交换系数，它也取正值. 一般对应第三类边界条件

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_s = h\theta$$

4. 扩散定律

    当物体内浓度分布不均匀时会引起物质的扩散运动。粒子流强度 q(即, 单位时间内流过单位面积的粒子数) 与浓度的下降率成正比。即

$$\boldsymbol{q} = -D\nabla u$$

其中,D 为扩散系数, 负号表浓度减小的方向。写成分量式即

$$q_x = -D\frac{\partial u}{\partial x}, q_y = -D\frac{\partial u}{\partial y}, q_z = -D\frac{\partial u}{\partial z}$$

5. 胡克定律

    常见的表达形式是关于弹性力和弹性体伸长之间的线性关系，具体描述为：在弹性限度内，弹性体受到的弹力和其形变量成正比，即

$$f = -kx$$

其中，k 为弹性体的劲度系数。负号表示弹力的方向和形变量的方向相反。

另一种表述是：在物体的弹性限度内，应力与应变成正比，其比例系数称为杨氏模量 E. 其中应力指单位面积上所受到的力 F/A, 应变指在外力作用下的相对形变 $\Delta L/L$. 公式表达为

$$E = (F \cdot L)/(A \cdot \Delta L)$$

6. 麦克斯韦方程组

假设空间中没有电荷，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示电场强度和磁场强度.

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon E}) = 0 \\ \nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0 \end{cases}$$

总结：在数理方程的建立过程中主要依据是物理学定律，在这门课程中我们会遇到的主要是这些物理学定律，对应我们研究的三类方程. 其中麦克斯韦方程组并不属于常见类型，但由于其重要性，以及通过这样一个自由电磁波的方程在一定条件下作近似可以得到波动方程或者热传导方程这样两类重要的方程，所以在这里列出并希望读者注意这一问题. 在熟练掌握这些重要的物理学定律并理解微元法的基础上，就可以顺利地完成这门课程中的数理方程的建立过程.

3.4 微元法分析书写定解问题

数理方程主要研究由物理问题抽象得到的数学模型，其中一个重要问题在于建模的过程。一般来讲，在这门课程的考核过程中，对于这一考点，主要是考察对于数理方程的基本概念的理解以及对于三类重要方程的掌握，即大多数情况下，掌握三类重要方程的书写及其物理意义即可。但是从根本上讲，建模的过程涉及微元法的应用，其具体操作可以概况为：选择合适的坐标系，选取微元结合物理学定律进行分析，结合小量近似方法构造方程，结合物理意义书写定解条件。这里通过一道例题说明其中微元法分析的过程。

试推导均匀弹性杆的微小纵振动方程，设杆的杨氏模量为 E，密度为 ρ, 作用于单位长度杆上的外力为 $F(x,t)$ 。

解：**首先选取合适的坐标系**

一维问题，取 x 轴沿杆的轴线方向，以 $u(x,t)$ 表示 x 点, t 时刻的纵向位移。

选取合适的微元，利用物理学定律进行分析，建立等式

考虑杆上的一小段 $[x, x+\Delta x]$ 的运动情况. 以 $\sigma(x,t)$ 记杆上 x 点、t 时刻的应力 (杆在

伸缩过程中各点相互之间单位截面上的作用力）, 其方向沿 x 轴，现在求杆上 x 点,t 时刻的应变 (相对伸长)。
如图所示，$A'B'$ 表示 AB 段 (平衡位置) 在 t 时刻所处的位置，则 AB 段的相对伸长是

$$\frac{A'B'-AB}{AB}=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$$

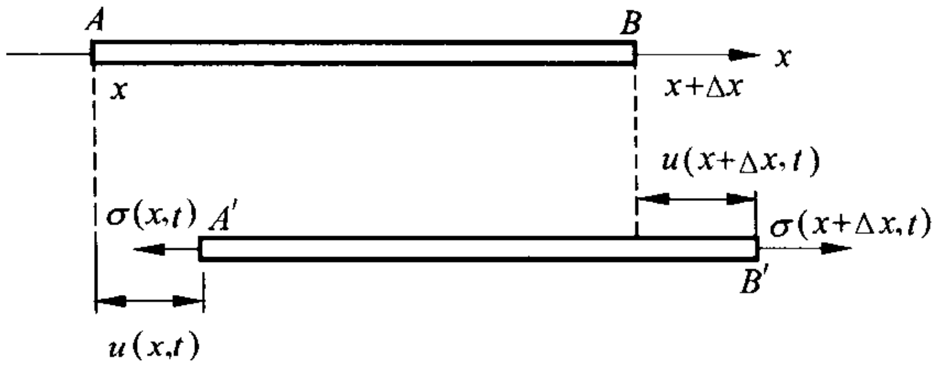

图 3.1: 微元法分析

而 x 点的应变则是

$$\lim_{ax-0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

由于振动是微小的 (不超过杆的弹性限度)，由 $Hooke$ 定律有

$$\sigma(x,t)=E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

整理等式建立方程

设杆的横截面面积为 S(设为常数)，则由 $Newton$ 第二定律可知, $[x,x+\Delta x]$ 段的运动方程是

$$\begin{aligned}
\rho S\Delta x\left.\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial^2 t}\right|_{\xi=x+\theta_1\Delta x} &=\sigma(x+\Delta x,t)S-\sigma(x,t)S+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x\\
&=ES\left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=x+\Delta x}-ES\left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\varepsilon=x}+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x\\
&\approx ES\left.\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=x}\Delta x+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x
\end{aligned}$$

其中常数 θ_1,θ_2 满足 $0\le\theta_i\le 1\quad(i=1,2)$. 这里利用了 Hooke 定律式，而且将函数 $\left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+\Delta x}$ 在 $\xi=x$ 处展开为泰勒级数并取了前两项. 以 $S\Delta x$ 除上式的两端后，令

$\Delta x \to 0$ 取极限，得到

$$\rho u_{tt}(x,t) = E u_{xx}(x,t) + F(x,t)$$

记

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$$

整理得到方程

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$$

3.5　施刘定理相关问题

分离变量法是一种求解数学物理方程定解问题的重要方法. 其核心思想是转化的思想，目的是通过将偏微分方程问题转化为常微分方程问题进而简化问题求解. 转化的方法是将解和定解条件在固有函数系上展开. 在学习这一方法时，经常会遇到的问题是：为什么可以分离变量，分离变量得到的形式解一定收敛吗，这类定解问题一定存在级数形式的解吗，等等. 这些问题可以总结为，分离变量法是否有坚实的理论基础. 这个问题的答案是肯定的，分离变量法的理论基础就是施刘定理.

在初学分离变量法这一章节的时候，很可能忽略施刘定理的重要作用，不清楚这一节到底有什么用. 在了解了以上观点后应该会消除部分疑问.

但仍然存在一些问题，比如施刘定理是有成立条件的，定解问题对应的固有值问题只有满足施刘定理的条件，才可以应用施刘定理来保证求解的有意义. 那么，我们可以确定，掌握施刘类型方程的形式以及一般方程转化为施刘方程的方法是必要的. 但是，这种转化是必要的吗，为什么在教材例题中很少看到使用分离变量法的时候首先把固有值问题作转化并且说明满足施刘定理呢，以及求解固有值问题的时候为什么不转化后再求解呢. 这一专题主要阐述这些问题的答案.

解固有值问题

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0 (1 < x < \mathrm{e}) \\ y(1) = y(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$$

解：题中方程不是施刘型的, 利用教材公式

$$\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)} \exp\left\{\int \frac{b_1(x)}{b_0(x)} \mathrm{d}x\right\}$$

先求出

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{x^2} \exp\left\{\int \frac{x}{x^2} \mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

把方程两端乘以 $\rho(x)$, 即化成施刘型方程

$$\frac{d}{dx}\left(xy'\right)+\frac{\lambda}{x}y=0$$

系数 $k(x)=x, q(x)=0, \rho(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,e]$ 上满足施-刘定理的条件，且两端的边界条件都是第一类, 故 $\lambda>0$. 记 $\lambda=\mu^2(\mu>0)$ 题中的方程为欧拉方程, 作替换 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$, 即可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\mu^2y(t)=0$$

因而

$$\begin{aligned} y&=A\cos\mu t+B\sin\mu t\\ &=A\cos(\mu\ln x)+B\sin(\mu\ln x)\end{aligned}$$

由 $y(1)=0$, 有 $A=0$; 由 $y(\mathrm{e})=0$, 有 $B\sin\mu=0$, 因 B 不能再为零, 于是

$$\mu_n=n\pi(n=1,2,\cdots)$$

故

$$\lambda_n=\mu_n^2=n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$$

相应的固有函数为

$$y_n=\sin(n\pi\ln x)$$

总结：施刘定理是分离变量法的重要理论基础. 施刘定理告诉我们：固有函数系存在且完备——解可以在固有函数系上展开 (存在级数形式解且级数收敛)；固有函数系是正交函数系——定解条件可以在固有函数系上展开 (可以通过积分提取级数的某一项系数从而实现形式解的系数求解). 而这一切，都是建立在施刘定理基础上，所以首先需要固有值问题满足施刘定理成立条件，其中一个重要问题是固有值问题的方程等价的施刘方程的系数满足施刘定理要求. 我们要注意到：把一般方程转化为施刘方程的过程是必要的 (平时遇到的问题固有值问题方程本身就是施刘方程，所以不需要转化)；把一般方程转化为施刘方程只是为了验证是否符合施刘定理要求，而不是为了求解，在求解的时候仍然是对于原始方程，利用求解常微分方程的方法进行求解 (转化为施刘方程并不是一种求解固有值问题的方法，或者说不是一种求解常微分方程的方法).

3.6 勒让德多项式的递推公式推导

在求解关于特殊函数的积分时，经常会用递推公式。对于勒让德多项式的递推公式来讲，其推导思路主要是分别看作变量 x 和变量 t 的函数并进行求导，比较级数表达的对应项系数，进而得到最基本的递推公式，然后基于此进行恒等变形，得到其他需要的递推公式。那么，一个自然的问题是，我们需要什么样子的递推公式。要回答这个

问题，我们就要思考，我们用递推公式来做什么。我们知道，我们利用递推公式来求解含有特殊函数的积分，而求解积分的方法一般包括：换元法，分部积分法。特别地，有时候我们会利用分部积分法构造积分递推公式得到积分表达式的值。那么，自然地，我们知道，我们需要思考在求解积分的时候需要什么样子的递推公式来方便我们求解。例如对于换元法来说，我们可能需要凑出某函数的导函数形式，那么我们可能需要用导函数表达原函数的递推公式。这一专题主要分析递推公式推导过程。

基于勒让德多项式母函数和级数表达形式推导递推公式。

$$w(t,x)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(x)t^n$$

解：将 $w(t,x)$ 看作 t 的函数进行求导，得到式一

$$(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0$$

将 $w(t,x)$ 看作 x 的函数进行求导，得到式二

$$p'_{n+1}(x)+p'_{n-1}(x)=2xp'_n(x)+p_n(x)$$

式一对 x 求导，得到式三

$$(n+1)p'_{n+1}(x)-(2n+1)p'_n\left(x_1\right)+np'_{n-1}(x)=0$$

式二乘以 $(n+1)$ 与式三做差，得到式四

$$p'_{n-1}(x)=xp'_n(x)-np_n(x)$$

式二与式四做差得

$$p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x)$$

整理上述等式得

$$\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x)-x(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0\\
&p'_{n-1}(x)=xp'_n(x)-np_n(x)\\
&p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x)
\end{aligned}$$

考虑到我们在使用换元法求解积分时需要用导函数表达原函数的递推公式，所以从初

始的递推式中的两项进行作差，得到

$$p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$$

综上所述，可以得到勒让德多项式的递推公式

$$\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0 \\
&np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0 \\
&np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x) = 0 \\
&p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)
\end{aligned}$$

总结：特殊函数的递推公式在处理这门课程中的一些题目时有着重要的作用，其中主要用于处理特殊函数的积分运算。从直观上看，递推公式数量比较多，而且看着规律性并不明显，从而给记忆带来一定困难。虽然在参考公式中可能会提供递推公式，但是掌握重要的递推公式是有必要的。那么，我们应该如何记住这些公式呢。一个自然的想法是，我们考虑这些公式是如何推导出来的。上述推导过程以一种相对清晰的思路展示了推导的过程。而要注意的一点是，其实这一思路的核心在于，我们要明确我们的目标是什么。在明确了我们要利用递推公式求解积分表达式，以及在求解积分表达式的常用方法中如何应用递推公式之后，我们就知道我们需要什么形式的递推公式。进而，根据分别对 t 和 x 求导得到的最基本的递推公式，按照我们的目标对这些基本的递推公式进行变形，进而可以得到我们需要的递推公式。

3.7 一类重要的函数的傅里叶变换求解的特殊方法

积分变换是一种常用的求解数理方程的方法，其核心思想是通过积分变换将偏微分方程转化为常微分方程从而求解。积分变换法的流程可以总结为：利用积分变换的性质将偏微分方程转化为常微分方程，求解像函数满足的常微分方程得到像函数，反变换得到原问题的解。其中变换过程可能会涉及复杂的运算，一般情况下，对于傅里叶变换和拉普拉斯变换，可能会需要用到留数定理求解积分。留数定理虽然有着强大的能力，但是有时候围道的构造是有一定难度的。对于本文提到的这类重要的函数，在教材上有介绍如何构造围道。这里介绍一种相对简单的想法，更容易理解和记忆这一重要的傅里叶变换对。

求解 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的傅里叶变换。

解：记 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F[f(x)] = F(\lambda)$$

对 $f(x)$ 求导可得

$$f'(x) = -x \cdot f(x)$$

由傅里叶变换的性质可知

$$F\left[f'(x)\right] = i\lambda F(\lambda)$$

$$F[-xf(x)] = -iF'(\lambda)$$

代入上式可得

$$i\lambda F(\lambda) = -iF'(\lambda)$$

整理可得

$$\begin{cases} F'(\lambda) + \lambda F(\lambda) = 0 \\ f'(x) + xf(x) = 0 \end{cases}$$

由 $f'(x) + xf(x) = 0$ 有解 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 可知，$F(\lambda)$ 有形如

$$F(\lambda) = k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

的解. 又由

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$$

可知，$k = \sqrt{2\pi}$. 所以

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

一般地，对于

$$g(x) = e^{-ax^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}(a > 0)$$

有傅里叶变换公式

$$F\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

一般地，使用留数定理求解积分时，围道的构造没有固定的方法，需要根据问题进行分析，往往难度较大。对于这类特殊的函数，存在这样一种简洁的方法进行拉普拉斯变换求解。这类函数也是一类重要的函数，在使用积分变换法的时候可能会用到，所以以专题形式特别分享这样一种求解思路。

3.8 分离变量法求解基本解

基本解方法是一种基于转化思想的数理方程求解方法。其本质想法为，将一般的定解问题转化为（特殊的）基本解满足的定解问题，通过求解基本解满足的定解问题得到基本解，进而利用积分公式得到原定解问题的解。所以，总的来讲，基本解方法求

解定解问题的流程为：根据定解问题的类型写出基本解满足的定解问题，求解得到基本解，利用积分公式得到原定解问题的解。其中，由定解问题得到基本解满足的定解问题和由基本解得到元定金问题的解这两个步骤是转化的过程，有着固定的方法。而求解基本解满足的定解问题，本质上是求解定解问题，所以，仍然可以使用所学的求解定解问题的方法求解。除此以外，由于问题的特殊性，经常会选择使用镜像法求解。但同时也要注意，有些时候会需要使用例如分离变量法求解。

求解半条形区域 $D: 0<x<a, y>0$ 内 $Poisson$ 方程第一边值问题的格林函数。

解：由题意知，要求解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta) \quad (0<x,\xi<a, \quad y,\eta>0) \\ G|_{x=0} = G|_{x=a} = G|_{y=0} = 0 \\ G|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

分析定解问题的类型知道，可以选择分离变量法求解。由于是非齐次方程，采用利用固有函数展开法求解。首先求解齐次方程得到固有值和固有函数系。对于这类问题，即求解拉普拉斯算子的固有值问题，对应的定解问题可写为

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0 \quad (0<x<a, y>0) \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

令 $v = X(x)Y(y)$, 得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \quad (0<x<a) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0 \quad (y>0) \\ Y(0) = 0, \quad Y(+\infty) \text{ 有界} \end{cases}$$

其中, $\mu + \nu = \lambda$. 分别解得

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$
$$\nu = \omega^2, Y(y,\omega) = \sin\omega y, \quad \omega > 0$$

进而得到原定解问题对应的固有值和固有函数

$$\lambda_{n\omega} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2, \quad v_n(x,y,\omega) = \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\omega y$$

将非齐次项在固有函数系上展开

记 $G=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\sin\omega y\mathrm{d}\omega\sin\frac{n\pi}{a}x$, 代入 G 的方程, 得

$$\begin{aligned}-\Delta_2 G&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\\&=\delta(x-\xi,y-\eta)\end{aligned}$$

这是 $\delta(x-\xi,y-\eta)$ 关于 $\left\{\sin\frac{n\pi}{a}x\right\}$ 的正弦展开, 展开系数

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega&=\frac{2}{a}\int_0^a\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\end{aligned}$$

此式又可看成是 $C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]$ 的正弦变换, 由反变换公式求出

$$\begin{aligned}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\right]\sin\omega y\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{a\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta\end{aligned}$$

故

$$C_n(\omega)=\frac{4a}{\pi\left[(n\pi)^2+(a\omega)^2\right]}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta$$

所以, 格林函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\eta\sin\omega y}{(n\pi)^2+(a\omega)^2}\mathrm{d}\omega\right]\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{a}x$$

3.9 方向导数

基本解方法求解定解问题的核心思想是转化思想。通过将一般的定解问题转化为特殊的定解问题，即基本解满足的定解问题，从而实现求解。对于应用转化思想求解问题，一个关键问题在于，转化的目标和方法。我们明确，转化目标就是基本解满足的定解问题，方法则是一般定解问题和基本解满足的定解问题之间存在的对应关系和基本解与原问题的解之间的对应关系——积分公式。在积分公式中，可能会涉及方向导数的计算。这个专题主要讲述方向导数相关的基本概念。

方向导数定义：设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 及其附近有定义，$l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 是一

单位向量. 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-f(a,b)}{t}$$

存在，则称其值为 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 沿方 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，记作 $\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}$. 特别地，方向导数的最大值称为梯度。

方向导数计算：若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 可微，则其在点 (a,b) 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\sin\alpha$$

而当函数不可微的时候，要按照定义进行计算。

例：求函数数 $f(x,y)=x^2y+xy$ 在点 (1,1) 沿方向

$$I_1=(3,2),I_2=(1,5),I_3=(-2,3)$$

的方向导数.

解：因为函数 $f(x,y)=x^2y+xy$ 在点 (1,1) 可微, 且

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=3,\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=2$$

$$l_1=(3,2)//\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2),\quad l_2=(1,5)//\frac{1}{\sqrt{26}}(1,5),\quad l_3=(-2,3)//\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$$

所以

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_1}=\frac{1}{\sqrt{13}}(3\times 3+2\times 2)=\sqrt{13}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_2}=\frac{1}{\sqrt{26}}(3\times 1+2\times 5)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_3}=\frac{1}{\sqrt{13}}[3\times(-2)+2\times 3]=0$$

梯度定义：设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 及其附近有定义，若单位向量 $\boldsymbol{l}_0$ 满足

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}=\max_{\|\boldsymbol{l}\|=1}\left\{\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}\right\}$$

则称向量

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}\boldsymbol{l}_0$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的梯度向量. 记作 $\operatorname{grad} f(a,b)$ 或 $\nabla f(a,b)$.

梯度计算：若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 可微，则向量

$$\left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}, \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)$$

是 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的梯度向量，即

$$\operatorname{grad} f(a,b) = \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}, \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)$$

例：求单位向量 l, 使得 $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ 在点 (1,0,-1) 沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数最小，并求此最小值。

解：因为 $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ 在点 (1,0,-1) 可微，且

$$f_x(1,0,-1) = -1, f_y(1,0,-1) = 0, f_z(1,0,-1) = 1$$

所以

$$\boldsymbol{l} = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f(1,0,-1)|} \operatorname{grad} f(1,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

最小方向导数值为 $-|\operatorname{grad} f(1,0,-1)| = -\sqrt{2}$

3.10 变量代换的定义域问题

在这门课程中，经常会涉及利用留数定理求解复变函数积分，其中关于复变函数积分的一个易错问题在于变量代换时的定义域变化问题。这里以一道教材例题中的积分求解问题为例说明定义域变化这一问题。

求解积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (a > 0, b \in R, b \neq 0)$$

解：做变量代换，令

$$z = e^{i\theta}$$

则原积分可化为

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a^2 + b^2 \cdot \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z}{a^2 - b^2 \cdot \frac{z^2 + z^{-2} - 2}{4}} \frac{dz}{iz^2} \\ &= \frac{-4}{b^2 i} \int_{|z|=1} \frac{z}{z^4 - \left(2 + \frac{4}{b^2} a^2\right) z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{b^2 i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^4 - \left(2 + \frac{4}{b^2} a^2\right) z^2 + 1} \frac{dz^2}{2}$$

做变量代换，令

$$\omega = z^2$$

由于 $z = e^{i\theta}$，沿着环路 $|z| = 1$ 积分的时候，θ 走过 2π，则 2θ 走过 4π，即原积分等价于沿着环路 $|\omega| = 1$ 走过两圈，即

$$\int_{|z|=1} f\left(z^2\right) dz^2 = 2 \int_{|\omega|=1} f(\omega) d\omega$$

被积函数分母共有两个零点，分别为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 + \tfrac{2a^2}{b^2} + \tfrac{2a}{b^2}\sqrt{a^2+b^2} \\ \omega_2 &= 1 + \tfrac{2a^2}{b^2} - \tfrac{2a}{b^2}\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

其中

$$\omega_1 > 1, \quad 0 < \omega_2 < 1$$

所以由留数定理可得，原积分

$$I = -\frac{4}{b^2 \cdot i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{b^2}{-4a \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

总结：在使用变量代换法求解积分时，注意定义域的变化。

课程作业易错题总结

一、求解下列 $Cauchy$ 问题。

（1）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u_t|_{t=0} = \phi(r) \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x)(-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 $a \neq 0$，且 a 为常数。

二、求解下列固有值问题

（1）

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0(0 < x < 1, a \text{ 为常数}) \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0(0 < r < a) \\ |R(0)| < +\infty, R(a) = 0 \end{cases}$$

提示：令 $y = rR.$

三、求解圆内狄氏问题的解

（1）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(r < a) \\ u|_{r=a} = A\sin^2\theta + B\cos^2\theta \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(r < a) \\ u_r(a,\theta) - hu(a,\theta) = f(\theta)(h > 0) \end{cases}$$

四、利用分离变量法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0 < x < l, t > 0) \\ u(0,x) = x(l-x), u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(a < r < b) \\ u(a,\theta) = u_1, \frac{\partial u(b,\theta)}{\partial n} = u_2 \end{cases}$$

（3）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x(0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

五、设圆柱的半径为 R, 高为 h, 侧面在温度为零的空气中自由冷却，下底温度恒为零，上底温度为 $f(r)$, 求柱内温度分布。

六、特殊函数的性质应用

（1）计算积分

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)\left[p_{n}'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x$$

（2）把函数 $f(x)=|x|$ 按勒让德函数系展开

七、利用积分变换法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(-\infty < x < +\infty, y > 0) \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当} x^2 + y^2 \to +\infty \text{ 时}, u(x,y) \to 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad x > 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x), \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u(x,y) \text{ 有界}. \end{cases}$$

提示：利用余弦变换。

八、利用拉普拉斯方程的基本解求解下列方程的基本解

（1）

$$u_{xx} + \beta^2 u_{yy} = 0(\beta > 0, \beta \text{ 为常数})$$

（2）

$$\Delta_2 \Delta_2 u = 0$$