第5章 微分方程习题课

1. 熟练掌握可分离变量的方程、齐次方程、可降阶的二阶方程$F(x, y', y'') = 0$, $F(y, y', y'') = 0$的解法.

2. 熟练掌握一阶线性齐次及非齐次方程的解法.

3. 熟练掌握线性齐次方程及非齐次方程的解结构.

4. 熟练掌握二阶常系数线性齐次方程的解法.

5. 熟练掌握二阶常系数线性非齐次方程：

$y'' + py' + qy = P_n(x)$, $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ux}$, $u \in \mathbf{C}$的解法. 从而会解方程

$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$, $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

6. 了解Bernoulli及Euler方程.

7. 了解常数变易法.

1. (20) (6分)求方程$y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$的通解.

2. (20) (10分)求方程$y" + 4y = 9x\sin x$的通解.

3. (19) (12分) 求初值问题$\begin{cases} xy'' + 3y' = x \\ y(2) = \dfrac{3}{2} \\ y'(2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ 的解.

4. (19) (6分)求$y'' + 2y' - 3y = e^x$的通解.

5. (18) (6分)求定解问题$y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$ 的解

6. (18) (10分)设$f(x)$ 为$\mathbb{R}$ 上的连续函数，满足: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + x^3 = \int_0^x f(x-t)tt.$$

试求出函数$f(x)$.

7. (18) (12分)设$y = f(x)$ 为以下初值问题的解：

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

求平面区域$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 的面积.

8. (17) (6分) 求解方程$y''+2y'+y=e^{-x}$.

9. (17) (12分) 求初值问题.

$$\begin{cases} yy''-(y')^2=y^4, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

10. (16) (12分) 假设$y=y(x)$ 满足微分方程$y''-3y'+2y=(3-4x)e^x$, 且其图像在点$(0,1)$ 处与曲线$y=x^2+3x+1$ 的图像相切. 试具体求出函数$y(x)$.

11. (16) (12分) 求解微分方程$y'(x)+y(x)\cot(x)=x^2\csc(x) \qquad (0<x<\pi)$.

12. (15) (10分) 求微分方程的通解$(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1$.

13. (15) (10分) 求微分方程的通解$y''-3y'+2y=2x$.

14. (14) (10分) 求方程$y''+y=\cos^2 x$的通解.

15. (13) (4分) 设$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$是二阶线性非齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个不同的非零解,则(　　)

(A) $c_1(y_2(x)-y_1(x))+c_2(y_3(x)-y_1(x))+y_1(x)$($c_1,c_2$是任意常数)是该方程的通解.

(B) $c_1(y_2(x)-y_1(x))+c_2(y_3(x)-y_1(x))+y_1(x)$($c_1,c_2$是任意常数)不是该方程的通解.

(C) $c_1(y_2(x)-y_1(x))+c_2(y_3(x)-y_1(x))+y_1(x)$($c_1,c_2$是任意常数)是该方程的解.

(D) $c_1(y_2(x)-y_1(x))+c_2(y_3(x)-y_1(x))+y_1(x)$($c_1,c_2$是任意常数)不是该方程的解.

16. (13) (10分) 求方程$y''-2y'+y=xe^x$的通解.

17. (12) 求下面微分方程的通解或初值问题

(a) (10分) $y''-3y'+2y=2x-3$. (b) (10分) $y''+(y')^2=y'$, $y(0)=y'(0)=1$.

解 (a) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x$.

(b) 令$y'=p(y)$,得$\dfrac{dp}{dy}+p=1$,解得$p=1+c_1e^{-y}$,由初始条件知$c_1=0$,从而$p=1$,于是$y=x+c_2$,再由初始条件得$c_2=1$,所以$y=x+1$.

18. (11) (4分) 设$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$线性无关,且都是二阶线性非齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解,其中$p(x), q(x), f(x)$均为连续函数,c_1, c_2为任意常数,则非齐次方程的通解为(D)

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$ (B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$ (D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

19. (11) (8分) 求定解问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2012^{x+y} \\ y(0)=1 \end{cases}$的解.

解 分离变量后解得方程的通解为$2012^x+2012^{-y}=c$,代人初始条件得$c=\dfrac{2013}{2012}$,从而方程的解为$2012^x+2012^{-y}=\dfrac{2013}{2012}$.

20. (11) (15分)求$y''+a^2y=8\cos bx$的通解,其中$a>0, b>0$为相同或不同的常数.

解 对应的齐次方程的特征方程为$\lambda^2+a^2=0$,特征根为$\pm ai$,其通解为$c_1\cos ax+c_2\sin ax$,下面考虑方程$y''+a^2y=8e^{ibx}\quad (*)$.

令$\tilde{y}=ze^{ibx}$代人(*),得方程$z''+2biz'+(a^2-b^2)z=8$.

(1) 当$a\neq b$时,取$z=\dfrac{8}{a^2-b^2}$,此时(*)方程有特解$\dfrac{8}{a^2-b^2}e^{ibx}$,则原方程有特解$\dfrac{8}{a^2-b^2}\cos bx$,原方程的通解为$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\dfrac{8}{a^2-b^2}\cos bx$, c_1, c_2为任意常数.

(2) 当$a=b$时,设$z=Ax$,则$A=\dfrac{4}{ib}$,此时(*)有特解$\dfrac{4}{ib}xe^{ibx}$,则原方程有特解$\dfrac{4x}{b}\sin bx$,所以原方程的通解为$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\dfrac{4x}{b}\sin bx$, c_1, c_2为任意常数.

21. (10) (9分)求解初值问题$2yy''=1+y'^2$, $y(0)=1, y'(0)=1$,要求把解$y(x)$表示成x的显函数.

答案:$y=\dfrac{x^2}{2}+x+1$.

22. (10) (9分)求微分方程$y''+y=e^{2x}$的通解.

答案:$y=\dfrac{e^{2x}}{5}+c_1\cos x+c_2\sin x$.

23. (10) (4分)已知方程$xy''-y'=x^2$的解为多项式形式,其通解为$\underline{y=c_1+c_2x^2+x^3/3}$.

24. (09) (4分)设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+e^{\sin y}=0$的一个解,且$f'(x_0)=0$,则$y=f(x)$在x_0处(A)

(A) 取极大值 (B) 取极小值 (C) 某邻域内单调增 (D) 某邻域内单调减

25. (09) (4分)设$y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$, $(c_1,c_2$为任意常数)为某二阶常系数线性齐次方程的通解,则该方程为__________.(化为二阶导数前的系数为1).

26. (09) (12分)求方程$y''+2x(y')^2=0$,满足初始条件$y(0)=1,y'(0)=-\dfrac{1}{2}$的特解.

27. (09) (12分)求微分方程$y''+4y'+4y=e^{ax}$的通解,其中a为常数.

28. (08) 设$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且反函数为$g(x)$.已知$\int_0^x tf(t)dt+\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$.

求(1) $y=f(x)$满足的方程. (2) 求$y=f(x)$的表达式.

29. (08) 已知$y=\dfrac{1}{x}$是$x^2y''+xy'-y=0$的一个解,则$x^2y''+xy'-y=3x^2$的通解为__________.

30. (07) 设y_1,y_2,y_3为微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个不同的解,且$\dfrac{y_1-y_2}{y_2-y_3}$不是常数,则方程的通解为__________.

31. (07) 求$y''-3y'+2y'=xe^x$的通解.

32. (06) 设$y=y(x)$具有直到22阶的连续导数,$z=(x^2y)^{(20)}$

(1) 试用y的各阶导数来表示z与z''.

(2) 设y满足方程$x^2y^{(22)}+44xy^{(21)}+(462+x^2)y^{(20)}+40xy^{(19)}+380y^{(18)}+x=0$.试写出$z$所满足的二阶微分方程,并求出通解.

33. (05) 求$y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{1+x^2}$.的通解.

34. (05) 求$y''-3y'+2y=2x^2e^{-x}$的通解.

35. (04) 求$y''-y'+y=xe^x$的通解.

36. (04) 设$f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$,其中$f(x)$为连续函数,求$f(x)$.

37. (03)求$y''+y=e^{-x}$的通解.

38. (02) 求$x^3y'+xy=1$的通解.

39. (02) 求$y''+y=xe^x$的通解.

40. (02) 求$(x+1)y''+xy'-y=1$的通解,($y=e^{-x}$是对应的齐次方程的一个解).

以上是历年的期末考试题,下面再补充几题.

1. 用变量代换$x=\cos t$, $(0<t<\pi)$,化简方程$(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$的解.

2. 设位于第一象限的曲线$y=f(x)$过点$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2})$,其上任意一点$P(x,y)$处的法线与$y$轴的交点为$Q$,且线段$PQ$被$x$轴平分.

   (1) 求$y=f(x)$的方程.

   (2) 已知曲线$y=\sin x$在$[0,\pi]$上的弧长为l,试用l表示曲线$y=f(x)$的弧长S.

3. 函数$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有二阶导数,且$y'\neq 0, x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数.

   (1) 试将$x=x(y)$所满足的方程$\dfrac{d^2x}{dx^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$,变换为$y=y(x)$的方程.

   (2) 求变换后的微分方程满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$的解.