1 多变量微积分期末试题2009-2010

一、 填空题（每小题4分，共20分）

1. 数量场$u=3x^2+xy-y^2$在点$M(1,-1)$沿方向$\overrightarrow{l}=(-3,4)$的方向导数是____________.
2. 设$u=u(x,y,z)$有二阶连续偏导数，则$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=$____________.
3. 设$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$, 则$F'(\alpha)=$____________.
4. 改变累次积分的次序$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$____________.
5. 设L为圆周曲线$x^2+y^2=R^2$, $(R>0)$, 取逆时针方向，则$\int_L\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$____________.

二、 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 设$f(x,y)$为连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$__________

   (A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$; (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

   (C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$; (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

2. 设曲线积分$\int_L(f(x)-e^x)\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$与路径无关，其中$f(x)=$__________

   (A) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$; (B) $1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

   (C) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$; (D) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. 设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，S^+是球面的外侧，则下列式子中正确的是__________.

   (A) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{S^+}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$; (B) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{S^+}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$;

   (C) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{S^+}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$; (D) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{S^+}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$.

4. 设函数$f(x)=x^2$, $(x\in[0,1])$, 而$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x)$, $(-\infty<x<+\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$, 则$S(-\frac{1}{2})=$__________.

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $-\frac{1}{2}$.

5. 下列结论中错误的是__________.

(A) 保守场必是有势场; (B) 有势场必是保守场;
(C) 保守场必是无旋场; (D) 无旋场必是保守场.

三、 （10分）计算二重积分$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $(a>0)$所围成的区域。

四、 （10分）计算三重积分$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$V$是球面$x^2+y^2+z^2=z$围成的区域。

五、 （10分）设向量场$\overrightarrow{v}(x,y,z)=(yz,zx,2)$, 计算$\iint\limits_{\Sigma^+}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma^+$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$, $(z\geqslant 0)$的上侧，$\overrightarrow{n}$是向上的单位法向量。

六、 （10分）$\overrightarrow{F}=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\ \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},\ -\frac{xy}{z^2}\right)$, $(y>0,z>0)$是否是有势场？若是，请说明理由并求出一个势函数，若不是，请证明。

七、 （10分）设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$, 试将$f(x)$展开成以$2\pi$为周期的Fourier级数，并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和。

八、 （10分）设函数$f(x,y)$是在整个平面上有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任意x,y,t, 有$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$成立。
(1)证明：$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$;

(2)设D是由圆周L：$x^2+y^2=4$所围区域，证明：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2　多变量微积分期末试题2010-2011

一、　计算题（每小题5分，共15分）

1. 设$u = e^{xyz}$, 求$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$.
2. 设$F(\alpha) = \int_0^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 求$F'(\alpha)$.
3. 利用欧拉积分，计算$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-at}\mathrm{d}t$, 其中$a > 0$.

二、　（15分）求由曲面$z = x^2 + y^2$和$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$所围成的立体的体积和表面积。

三、　（10分）设含参变量积分$I(x) = \int_x^1 e^{y^2}]dfy$, 求$\int_0^1 I(x)\mathrm{d}x$.

四、　（10分）计算三重积分$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$V$是锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$和球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$围成的区域。

五、　（10分）计算第一型曲线积分$\int_L (x^2 + x\cos x)\mathrm{d}l$, 其中$L$是单位圆周$x^2 + y^2 = 1$。

六、　（10分）设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上可微函数，$f(0) = 1$, 向量场$\overrightarrow{F} = (yf(x), f(x) + ze^y, e^y)$是整个空间区域上的保守场，求向量场$\overrightarrow{F}$的势函数。

七、　（10分）js第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$S^+$是光滑封闭曲面的外侧，原点不在曲面$S$上。

八、　（10分）将函数$f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$展开成以2π为周期的余弦函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$的和。

九、（10分）设函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导数，对任意围绕原点，且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线C^+，曲线积分$\int_{C^+}\dfrac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$的值相同。

(1) 设L^+是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，证明：$\int_{L^+}\dfrac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0.$

(2) 求函数$\varphi(x)$.

(3) C^+是围绕原点，且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，求$\int_{C^+}\dfrac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$。

3 多变量微积分期末试题2011-2012

一、 填空题（每空3分，共21分）

1. 设有三元函数$u=x^2+y^2+z^2$,点$M(1,1,1)$,方向$\overrightarrow{n}=(-3,0,4)$
   $\mathrm{grad}u\Big|_M=$ ________，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\right|_M=$ ________，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$ ________.
2. 设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，则$\displaystyle\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____________.
3. 设球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，$f(t)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续正值函数，a,b为实常数，则曲面积分$\displaystyle\iint\limits_S\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____________.
4. 已知在$[-\pi,\pi]$上，有$\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos nx$，
   则$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=$ ____________.
5. $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=$ ____________.

二、 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 设$I_1=\displaystyle\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\displaystyle\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\displaystyle\iint\limits_{D_3}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，其中
   $D_1: x^2+y^2\leqslant R^2$, $D_2: x^2+y^2\leqslant 2R^2$, $D_3: |x|\leqslant R, |y|\leqslant R$,则________
   (A) $I_1<I_2<I_3$; (B) $I_1<I_3<I_2$; (C) $I_2<I_1<I_3$; (D) $I_3<I_2<I_1$.
2. 设Ω为单位球：$x^2+y^2+z^2=1$,则三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{5}+z^2y\right)\mathrm{d}V=$ ________
   (A) $\dfrac{\pi}{15}$; (B) $\dfrac{2\pi}{15}$; (C) $\dfrac{4\pi}{15}$; (D) $\dfrac{8\pi}{15}$.
3. 设为$x^2+y^2=R^2,(R>0)$,则$\displaystyle\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l=$ ________.
   (A) $\displaystyle\int_0^{2\pi}r^2\mathrm{d}r$; (B) $2\pi R^2$; (C) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r$; (D) πR^3.

4. 设曲面S是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$，$(z\geqslant 0)$的上侧，则下列积分为零的是_________

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$;　(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　(D) $\iint\limits_S z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

三、（10分）设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x$，$(t>1)$，求$F'(2)$。

四、（10分）(1)证明曲线积分$\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$与路径无关；

(2)求$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$。

五、（12分）设曲线L是以$(1,0)$为圆心，半径为R的圆周$(R>1)$，取逆时针方向，计算积分$\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$。

六、（12分）设S为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的下侧，求

$$\iint\limits_S \frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

七、（12分）设函数$f(x)$是以2为周期的周期函数，在区间$[1,3]$上函数取值为$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\leqslant 2\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$,

(1)试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$上的草图，将$f(x)$展开成Fourier级数，

(2)试画出Fourier级数的和函数在区间$[-3,3]$上的草图

(3)求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

八、（7分）设$\overrightarrow{V}(x,y)=P(x,y)\overrightarrow{i}+Q(x,y)\overrightarrow{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上,有$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}l=0$，其中$\overrightarrow{n}$是圆周外法线单位向量，试证在$D$内恒有$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$.

4　多变量微积分期末试题2012-2013

一、　计算题（共44分）

1. 计算$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y$.　　(5分)
2. 计算$\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$V$是由平面$z=0$和椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上半部分$(z>0)$围成区域，$a,b,c>0$.　　(6分)
3. 计算$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$满足$0\leqslant z\leqslant a$的部分.　　(6分)
4. 计算$\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2,(a>0)$与平面$x+y+z=0$的交线，$L$的方向与z轴正向成右手系.　　(8分)
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, $(\alpha>0)$.　　(7分)
6. 利用$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.　　(5分)
7. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$展开成余弦级数（需讨论收敛性）. (7分)

二、　（10分）计算曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2,(z>0,R>0)$上侧.

三、　（10分）设设$f(z)$是$(-\infty,+\infty)$上可微函数，$f(0)=0$, 且向量场$\overrightarrow{v}=(2xz,2yf(z),x^2+2y^2z-1)$是整个空间区域上的保守场，求向量场$\overrightarrow{v}$的一个势函数.

四、　（共8分）设D是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域，$u(x,y)$在D内有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

(1)证明：$\int_L \frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}\mathrm{d}l=0$, 其中$L$区域$D$中简单光滑闭曲线，$\overrightarrow{n}$是$L$的外法向单位向量，$\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}$是沿方向$\overrightarrow{n}$的方向导数；　　(3分)

(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时，$u(x,y)=A$(A为常数),证明$u(x,y)\equiv A$. (5分)

五、 （每小题4分，共28分）填空题。（所得结果需化简）

(1) $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$, 设$f(x)$的$Fourier$级数是$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=$__________.

(2) 积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=$__________.

(3) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0, & 其他\end{cases}$, 则$f(x)$的$Fourier$变换是__________.

(4) 函数$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$的连续域是__________.

(5) 令$I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}e^{x^2+xu}\mathrm{d}x$, 则$I'(0)=$__________.

(6) 设f为连续函数，则$\lim\limits_{r\to0^+}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=r^2}f(x,y,z)\mathrm{d}S=$__________.

(7) 下述命题正确的是__________.

(A) 无穷积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$;

(B) 周期函数$f(x)$在任何有界区间上逐段光滑，则其$Fourier$级数收敛于$f(x)$;

(C) 无旋场必是有势场;

(D) 设$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续，且含参量广义积分$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$关于$u$在$[\alpha,\beta]$一致收敛，则$\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$连续.

5 多变量微积分期末试题2013-2014

一、 （10分）计算二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D是第一象限中由x轴和上半圆周$y^2+x^2-2x=0$围成。

二、 （10分）计算三重积分$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中积分区域$V$由曲面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$与平面$z=8$围成。

三、 （10分）设S为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分，求曲面积分$\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$

四、 （12分）计算曲面积分$\iint\limits_{S^+} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}, (0\leqslant z\leqslant 1)$的下侧。

五、 （10分）将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$展开成以2π为周期的余弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$的和。

六、 （8分）设$f(u,v)$在整个平面上有连续偏导数，设$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$, 求$F'(\alpha)$.

七、 （10分）设$f(x),g(x)$在$(-\infty,+\infty)$有连续导数，$f(0)=g(0)=1$, 且第二型曲线积分$\int_{L_{AB}} yf(x)\mathrm{d}x+(f(x)+zg(y))\mathrm{d}y+g(y)\mathrm{d}z$与路径无关，只与起点$A$和终点$B$有关，求向量场$(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$的势函数。

八、 （8分）设$f(x,y),g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上有一阶连续偏导数，并且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$.证明：在单位圆周上存在一点$(\xi,\eta)$, 使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

九、 （6分）设$f(x)$在$[0,1]$连续, 且满足$f(x)=1+\alpha\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$, 证明$a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

十、 单项选择题（每小题4分，共16分）

1. 设$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$黎曼可积，则_________

(A) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$黎曼可积；

(B) $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上关于$y$连续；

(C) 对固定的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$不一定可积;

(D) $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上关于$y$不连续.

2. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$非负，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，$(a>0)$,则_________

(A) $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,+\infty)$上是无界函数；

(B) $\int_a^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x$条件收敛；

(C) $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$发散;

(D) 当$x\to+\infty$时，$f(x)$不一定有极限.

3. 设$\vec{v}$是区域V中的连续向量场，$\vec{v}$在区域V中第二型曲线积分与路径无关，则_________

(A) $\vec{v}$是V中的无旋场 (B) $\vec{v}$不一定是V中的无旋场

(C) $\vec{v}$在区域V中不一定是保守场 (D) $\vec{v}$在区域V中不一定是有势场.

4. 设$f(x)$是在$[a,b]$可积且平方可积的函数，且$[a,b]$导出相同的Fourier级数，则_________

(A) 在$[a,b]$上，$f(x)\equiv g(x)$；

(B) 在$[a,b]$上，$f(x)$不一定恒等于$g(x)$；

(C) 在$[a,b]$上，$f(x)\equiv g(x)+C$，C是某个常数；

(D) 选项(A),(B),(C)都不正确.

6 多变量微积分期末试题2014-2015

一. 计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left(3x^2+5y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.(8分)

二. 计算第一型曲线积分和曲面积分（每题8分，共16分）

(1)$\int\limits_L(2x+y)^5\mathrm{d}s$,其中$L$是连接$(0,0),(1,0),(0,1)$的三角形。

(2)$\iint x^2y^3z\mathrm{d}S$, 其中S是平面$x+y+z=1$在第一卦限的部分。

三. 计算第二型曲面积分（10分）

$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1(z>0)$上侧。

四. 计算含参量积分（10分）

$$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\mathrm{d}x,\quad (u>0)$$

五. 设$f(x)$是以2π为周期的函数且$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \pi-x, & 0<x<\pi\end{cases}$,求$f(x)$的Fourier级数，讨论其收敛性并利用所得结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

六. 填空题（每空3分，共15分）

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$__________.

(2) 设$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ (z\leqslant 0)$,则$\iiint\limits_{\Omega}2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$__________.

(3) $\int_{(0,0,2)}^{(2,3,-2)}x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$__________.

(4) 设函数$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1), S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x,\ (-\infty<x<+\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$,则$S(-\frac{1}{2})=$__________,

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$__________.

七. (10分) 求函数$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\geqslant 0\\ e^{2x}, & x<0\end{cases}$的Fourier变换。

八. (10分)设函数$\varphi(x)$具有连续导数，在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线上，曲线积分$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$.

(1)求函数$\varphi(x)$;

(2)设C是围绕原点的简单光滑闭曲线，求$\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$.

九. 设$f(x)$是以2π为周期的函数且满足α阶Lipschitz条件。

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}.$$

记$a_0,a_n,b_n,n=1,2,\cdots$是$f(x)$的Fourier系数，求证：

$$|a_n|\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha},\quad |b_n|\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

7 多变量微积分期末试题2015-2016

一、 计算下列积分 (共 30 分)

1.(7分) 设a, b, R为已知常数，且$R > 0$，计算曲线积分$\oint\limits_C (-ay)\mathrm{d}x + (bx)\mathrm{d}y$ ，其中积分曲线C是圆周$x^2+y^2=R^2$，沿逆时针方向. 2.(7分) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$\Sigma$ 是由上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 以及xoy平面围成的立体的全表面的外侧.

3.(8分) 计算曲线积分$\int\limits_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (2z^2-x^2)\mathrm{d}y + (3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z轴正向来看，C沿逆时针方向.

4.(8分) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,
其中Σ是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

二、 (本题 8分) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 展成x的幂级数，并指出其收敛域.

三、 (本题 8分)设 $g(x)=\displaystyle\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} e^{-t^2+xt}\mathrm{d}t$, 求$g'(x)$, $g'(0)$.

四、 (本题 10 分) 已知向量场$\overrightarrow{v}(x,y,z) = (x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 证明:$\overrightarrow{v}(x,y,z)$是有势场，并求全体势函数.

五、 (本题 10 分) 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 展成x的幂级数,
并求$f^{(7)}(0)$, $f^{(8)}(0)$的值.

六、 (本题 6 分)
求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛区间与和函数$S(x)$.

七、 (本题 20 分)

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

(1) 将$f(x)$展成傅里叶级数，并指出该傅里叶级数的收敛性;

(2) 写出相应的Parseval等式；

(3) 根据$f(x)$的傅里叶级数，分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和;

(4) 根据上述的Parseval等式分别求出数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$的和.

八、 (本题 4 分)证明：$\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

九、 (本题 4 分)判断无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$的敛散性.

8 多变量微积分期末试题2016-2017

一、 (本题 12 分)$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是上半球体$0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的表面外侧.

二、 (本题 16 分)判断下列级数的收敛区域

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

三、 (本题 12 分)计算$\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$，$(A,C,AC-B^2>0)$，其中$L$为平面上围绕原点的封闭曲线，逆时针方向.

四、 (本题 12 分)求积分$\displaystyle\int_L xz\mathrm{d}y-yz\mathrm{d}x$, 其中$L$为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$与柱面$x^2+y^2=x$的交线，从$z$轴正向看为逆时针方向.

五、 (本题 12 分函数$F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x)|y-x|\mathrm{d}x,\quad b>a$, 求$F''(y)$.

六、 (本题 12 分)含参量积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x+\alpha}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$在$\alpha\in[b,B]$, $0<b<B$上是否一致收敛？并说明理由.

七、 (本题 12 分)已知级数$x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$

(1)讨论级数的收敛区域，并求出级数的和函数;

(2)讨论级数在区间$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$上的一致收敛性.

八、 (本题 12 分)设以2π为周期的函数$f(x)$连续，$f'(x)$分段连续，证明$f(x)$的Fourier级数一致收敛。

9 多变量微积分期末试题2017-2018

一、 (本题 10分) 将$y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 展成$x-1$的幂级数,并指出收敛域.

二、 (本题 14分)将函数$y=|x|$在$[-\pi,\pi]$上展开成Fourier级数，利用其结果分别求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$的和.

三、 (本题 18分)

(1)计算$\int_C (y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$, 其中$C$是$x^4+y^2=4x$的上半圆周，由$(4,0)$到$(0,0)$.

(2)设$u(x,y)$在单位圆盘$x^2+y^2\le 1$上有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$, 求积分$\int_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\mathrm{d}s$, 其中$\overrightarrow{n}$为外法向量.

四、 (本题 12 分) 求曲面积分$\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$是曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$外侧.

五、 讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$, $(p>0)$的收敛性和绝对收敛性.

六、 (本题 8分)讨论$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$在以下区间的一致收敛性.

(1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$,其中$\alpha_0>0$; (2)$\alpha\in[0,+\infty)$.

七、 (本题 16 分)求积分：

$$(1)\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(9+x^2)^5}\mathrm{d}x,\qquad (2)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$$

八、 (本题 12分)(1)设正实数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+b_n,\ n=1,2,3\cdots,$ 其中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

(2)设$p>0$, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}$的敛散性.