级数复习

一、数项级数

要求掌握：

(1) 掌握正项数项级数收敛的判定方法

(2) 一般项级数收敛的判别法

....

1. (19)(6分) 讨论数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$的绝对收敛与条件收敛性.

2. (19)(10分) 证明：

   (1). 两正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的通项满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

   (2). 正项级数收敛的Gauss判别法：正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的通项满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n})(n\to+\infty)$$

   则当$\beta>1$时，级数收敛；$\beta<1$时，级数发散.

3. (19)(10分)$f_0(x)$在$[0,b]$上连续，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t(n\in\mathbb{N},x\in[0,b])$. 证明：

   (1).函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[0,b]$上一致收敛

   (2).和函数为$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f_0(t)\mathrm{d}t(x\in[0,b])$.

4. (18)(4分) 判断级数 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}+\cdots$的敛散性.

5. (18)(6分) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $(|x|<+\infty,a_n>0)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛, 证明

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\ dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!\ .$$

   (与含参变量积分有关，暂时不能做)

6. (17)(10分) 讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$ $(p>0)$的收敛性和绝对收敛性.

7. (17)(12分) (1) 设正实数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+b_n$, $n=1,2,3,\cdots$,其中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛,证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

(2) 设$p>0$,讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}$的敛散性.

8. (16)(12分) 已知级数

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$$

(1) 讨论级数的收敛域,并求出级数的和函数；

(2) 讨论级数在区间$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$上的一致收敛性.

9. (15)(4分) 判断无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$的敛散性.

10. (14)(4分) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则下列级数中必收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)$.

11. (14)(4分)下列命题中,(　　)是**正确的**.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散,且有$|a_n|\le b_n$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散

(C) 设$a_n>0$,满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ $(n=1,2,\cdots)$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(D) 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径为$R_1,R_2$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径$R=\min\{R_1,R_2\}$.

12. (14)(8分) (1) 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$绝对收敛,证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2$收敛.

(2) 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散,证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n$发散.

13. (13)(10分) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的前$n$项和为$S_n$,证明:(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$同敛散.　(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$收敛。

14. (13)(4分) 下列数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的是(　　)

(A) $a_n=\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$;　　　(B) $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

(C) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{e^n n!}{n^n}$　　　(D) $a_n=\dfrac{n}{[2+(-1)^n]^n}$

15. (13)(4分) 下列函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$(0,+\infty)$上一致收敛的是(　)

(A) $u_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$　　　(B) $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$

(C) $u_n(x)=ne^{-nx}$　　　(D) $u_n(x)=\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^n$

16. (12)(4分) 1. 下列各选项中,**正确的**是(　　).

(A) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它的一般项$a_n\to 0$ $(n\to+\infty)$.

(B) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它的部分和$S_n$当$n\to+\infty$时有有限极限.

(C) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它的一般项$a_n$当$n\to+\infty$时有有限极限.

(D) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它绝对收敛.

17. (12)(4分) 下列4个选项中,**不正确的**是(　　).

(A) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,则该级数一定是收敛的.

(B) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在集$E$中一致收敛,则该级数在集$E$中一定是收敛的.

(C) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在集$E$中绝对收敛,则该级数在集$E$中一定是一致收敛的.

(D) 若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间是$(-R,R)$,则该级数在$(-R,R)$中的任一闭区间上是一致收敛的.

18. (12)(8分) 证明无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^p}$当$p>1$时绝对收敛;当$0<p\le 1$时条件收敛;当$p\le 0$时发散.

19. (12)(4分) 设数列a_n为单调增有上界的正数数列,证明无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$收敛.

20. (11)(4分) 下列命题**正确的**的有(　　)个

i) 一个级数加若干括号后所得新级数收敛，则原来的级数也一定收敛。

ii) 若正数数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到零，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛。

iii) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列有界，数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于零，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3

21. (11)(4分) 设一般项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则下列级数**必收敛**的有(　　)

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_n}{n}$;　　ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$;　　iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$.

22. (11)(4分) 下列级数**收敛**的有(　　)个。

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$;　　ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}$;　　iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n})$.

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3

23. (11)(4分) 设$x>0$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{\ln n}}$的收敛域为__________.

24. (11)(8分) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的通项满足:对所有正数$n$,有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ \geq\ 1-\dfrac{1}{n}$,试证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

二、函数项级数、幂级数

要求掌握：

(1) 掌握函数项级数的收敛性、一致收敛性、一致收敛级数的性质.

(2) 掌握Abel定理,掌握幂级数的收敛半径的求法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛域之间的关系.

(3) 掌握幂级数的性质，会用性质求幂级数的和函数，并利用幂级数的和函数求一些数项级数的和.

(4) 熟记常用简单函数的幂级数展开式,并掌握函数的幂级数展开方法.

....

1. (20) (6分) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$的收敛点集及其和函数$S(x)$.

2. (20) (10分) 求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^{nx}}$在区间$J=(0,+\infty)$中是否逐点收敛?是否一致收敛?要提供相应的证明.

3. (20) (10分) 设$a_n=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^{2n}}dt$,讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的敛散性,若收敛,是条件收敛还是绝对收敛?提供相应证明.

4. (20) (10分) 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$在点$x_0=-4$处展成Taylor级数,并指出使展开式成立的x范围.

5. (19) (10分) 将$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$在$x=0$处展开成幂级数，并确定其收敛域.

6. (18)(8分) 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$在$x_0=5$处展开成幂级数, 并求出收敛区间及导数值$f^{(4)}(5)$.

7. (18)(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数$S(x)$.

8. (17)(10分) 将$y=\frac{1}{x^2-5x+6}$展成$x-1$的幂级数,并指出收敛域.

9. (16)(16分) 判断下列级数的收敛区间

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

10. (15)(8分) 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$展成x的幂级数,并指出其收敛域.

11. (15)(10分) 将函数$f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}$展成$x$的幂级数,并求$f^{(7)}(0),f^{(8)}(0)$的值.

12. (15)(6分) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$的收敛区间与和函数$S(x)$.

13. (15)(4分) 证明：$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{dx}=\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{n}^{-\mathrm{n}}$.

14. (14)(4分) 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x = 4$处条件收敛,则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x+2)^n$在$x=0$处,(　　).

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 敛散性要看具体的$\{a_n\}$.

15. (14)(8分) 将函数$f(x)=\ln(x^2+3x+2)$展成x的幂级数,并指出收敛半径.

16. (14)(8分) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!2^n}x^n$的收敛域与和函数$S(x)$,并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$的和.

17. (14)(8分) 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(|x|<R)$, $g(x)=f(x^2)$,证明:对每个n有

$$g^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k-1,\quad k=1,2,\cdots \\ 2^k(2k-1)!!f^{(k)}(0), & n=2k,\quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

18. (13)(8分)求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$的和.

19. (13)(8分) 求函数$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x (\frac{\sin t}{t})^2 dt, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处展开为幂级数，并求出收敛半径和收敛域.

20. (13)(8分)设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (-\infty,+\infty)$的系数满足：$a_0 = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=e^x$,求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数.

21. (13)(4分) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=3$处条件收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^n$在$x=3$处(　　)

(A) 条件收敛　(B) 绝对收敛　(C) 发散　(D) 收敛性无法确定

22. (12)(8分) 求函数$f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$展成x的幂级数,并且求出$f^{(5)}(0)$的值.

23. (12)(8分) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{n}x^n$的收敛区间与和函数$S(x)$.

24. (11)(4分) 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$e$,则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x+\pi)^n$的收敛区间为__________.

25. (11)(8分) 将函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$x=0$处展开为幂级数，并求出其收敛半径。

26. (11)(8分) 求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$的收敛域，并且在其收敛域内求和函数。