代数结构 2019.9 考试试卷

by MacGuffin

1. 【9 分】已知存在一些正整数 n，满足：
   (1)$2^n - n$ 是 3 的整数倍；
   (2)$3^n - n$ 是 5 的整数倍；
   (3)$5^n - n$ 是 2 的整数倍。
   求同时满足条件 (1)(2)(3) 的 n 的最小值？

2. 【10 分】证明：若两个正整数 a,b 互素，则存在正整数 m,n，使得 $a^m + b^n \equiv 1 (mod\, ab)$。

3. 【9 分】计算下列置换的运算：
   (1)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (2)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3$$

4. 【11 分】设 N 是正整数集，定义 N 上的二元关系 $R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in N \wedge x + y \text{是偶数}\}$
   (1) 证明 R 是 N 上的一个等价关系
   (2) 求该等价关系确定的等价类集合

5. 【12 分】设 $A = \{a, b, c, d\}$,A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：
   $$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$
   $$R_2 = I_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$
   其中 I_A 为 A 上的恒等关系
   (1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性，不自反性，对称性，反对称性和传递性)；
   (2) 试求出 $R_1 \circ R_2, R_1^+ \text{和} R_2^+$(传递闭包)

6.【13 分】集合 S 上运算 * 满足结合律，H 和 K 为 S 的非空子集，$< H, * >$ 和 $< K, * >$ 为群, 且群 H,K 除了单位元以外无相同元素，对于群 H,K 内的任意元素 $h \in H$和$k \in K$有$h * k = k * h$. 若 $HK = \{h * k | h \in H, k \in K\}$ 是 S 的子集

(1) 证明 G=HK 关于乘法 * 构成一个群。

(2) 证明 H,K 都是 G 的正规子群。

(3) 证明商群 G/H 与 K 同构。

7.【12 分】设 $< G, * >$ 是一个群，

$$H = \{a | a \in G\text{且对于所有}b \in G, a * b = b * a\}$$

证明 $< H, * >$ 是正规子群。

8.【13 分】已知实数集 R 对于普通的加法和乘法是一个含幺环 (乘法存在单位元)，对于任意 $a, b \in R$，定义 $(1) a \oplus b = a + b - 1 (2) a \otimes b = a + b - ab$ 证明 R 关于 $\oplus$和$\otimes$ 也构成一个含幺环。

9.【11 分】$Q[x]$ 是有理数集 Q 上多项式全体，Δ 为正整数，$S = \{a + b\sqrt{\Delta} | a \in Q, b \in Q\}$，定义 $\Psi : Q[x] \to S, \Psi(f(x)) = f(\sqrt{\Delta})$, 证明 Ψ 为满环同态映射，求 $Ker\Psi$。