思考题1-2 同一律证明是否一定要用（L1）

一定要用

定义特征函数$\delta(p) \in S$.设:

(1)$\delta(L2) \in S$

(2)$\delta(L3) \in S$

(3)MP可以保持这个特征:即$\delta(p) \in S$且$\delta(p \to q) \in S \Rightarrow \delta(q) \in S$

$\implies \{L2, L3, MP\} \vdash r \Rightarrow \delta(r) \in S$

若$\delta(r) \notin S$,说明$\delta(r)$ 不能由$L2, L3, MP$推出

$\delta(p) \in S$是一个三值函数，定义一个三值真值表

证明$\delta(p \to p) \notin S$即可

(附：特征函数的定义)

k元关系$R(\subseteq N^k)$的特征函数$C_R : N^k \to \{0,1\}$是用下式定义的

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n1, \ldots, n_k) \in R \\ 0 & (n1, \ldots, n_k) \notin R \end{cases}$$

同一律的证明是否一定用(L1)

1.3 你以前理解的严格证明与命题演算L中的形式证明有何异同？L中的形式证明/推理有什么必要性？

严格证明和命题演算中的形式证明有一些异同之处。

相似之处：

1. 形式化表示：无论是严格证明还是命题演算中的形式证明，它们都采用了形式化的表示方式。通过符号系统、公理和推理规则来表示逻辑推理过程，以确保推理的准确性和一致性。
2. 逻辑推理：严格证明和命题演算中的形式证明都依赖于逻辑推理规则进行推导。推理规则用于根据已有的命题或公式推导出新的命题或公式，从而建立推理链条。
3. 结构化证明：在严格证明和命题演算中的形式证明中，推理步骤是有条理地组织和展示的。证明过程一般以序列的形式呈现，每一步都有明确的推理规则或转换规则支持。

异同之处：

1. 表示形式：严格证明通常采用自然语言或数学符号来表达推理过程，更接近人类日常思维和表达方式。而命题演算中的形式证明使用严格的符号系统来表示推理步骤，更注重形式化的精确性。
2. 推理规则：命题演算中的形式证明通常基于命题逻辑的推理规则，例如引入规则、消去规则和假言推理规则等。而严格证明可以使用更广泛的推理规则，包括数学中的定理和推导规则。
3. 上下文：严格证明通常在特定的数学理论或领域中进行，涉及更复杂的数学结构和概念。而命题演算中的形式证明更多地关注于逻辑推理本身，不依赖于具体的领域知识。

总的来说，严格证明和命题演算中的形式证明在表达方式和应用背景上存在一些差异，但它们都追求严谨的逻辑推理和准确的结果。

命题演算中的形式证明或推理具有以下几个重要性：

1. 精确性和准确性：形式证明或推理是一种精确的逻辑分析方法，它确保推理过程的准确性和一致性。通过严格的推理规则和符号系统，可以消除语义模糊性和歧义，使得推理过程更加明确和可靠。
2. 逻辑演绎：形式证明是逻辑演绎的基础。它通过逻辑规则和转换规则来推导新的命题或公式，从已知的前提得出合乎逻辑的结论。这种演绎过程可以帮助我们发现和验证命题之间的逻辑关系，揭示隐藏的推理规律。
3. 深化理解：通过进行形式证明，我们可以更深入地理解和掌握逻辑结构和推理原理。形式证明要求我们进行逐步推导和分析，逐层拆解命题，这种过程可以帮助我们捕捉问题的本质，揭示其逻辑结构和内在关系。
4. 检验推理过程：形式证明可以用作推理过程的检验工具。通过对推理步骤的严格描述和规则的遵循，我们可以验证推理的正确性，并排除潜在的逻辑错误和谬误。这有助于提高推理的可靠性和质量，避免逻辑漏洞和推理误区。
5. 基础研究和应用：形式证明在数学、计算机科学、哲学和人工智能等领域具有重要的应用价值。它为数学定理的证明提供了一种系统化的方法，为逻辑推理的机器化和自动化提供了基础。形式证明也是形式化验证和证明正确性的基础，有助于构建可靠的计算系统和软件工程。

总的来说，形式证明或推理在保证逻辑准确性、深化理解和应用研究等方面具有重要作用。它是逻辑学和相关学科的核心方法之一，对于推理和知识的建立具有重要意义。

形式化证明与严格证明

1.4 演绎定理说明了什么？

在命题演算中，演绎定理（Deduction Theorem）是一个重要的结果，它说明了命题逻辑中蕴含关系（implication）与推导规则之间的等价性。

具体而言，演绎定理表明对于任意的命题P、Q和R，如果我们可以通过一系列的推导规则从前提P推导出命题Q，那么在前提P成立的条件下，蕴含关系P→Q成立。换句话说，演绎定理允许我们将推导过程中的前提转化为蕴含式。

符号化表示为：

若 P ⊢ Q，则 ⊢ P→Q

这里 ⊢ 表示推导关系，P 和 Q 是命题。

演绎定理的重要性在于它建立了推导规则和蕴含关系之间的联系。它允许我们在进行推理时，可以在每一步中使用蕴含关系，将前提和结论之间的关系表达为蕴含式。这样，我们可以更方便地应用逻辑规则和推导步骤来推导新的命题，从而构建更复杂的推理链条。

思考题1-3 演绎定理说明了什么

蕴含词的解释：蕴含词（→）必须被解释（或者说赋值）为实质蕴含(真值表表示的蕴含)。否则，三个公理不成立，以及语义语法之间可能出现不一致

可以简化证明

演绎定理说明了什么

性质（语义解释的良定义性） 对命题演算L的任何公式p和任何解释$I=(v_0, v)$，存在唯一的$u \in \{t, f\}$，使得$I(p)=u$。

语义解释的良定义性

思考题1-6

1° 语义后承与重言式有何关系

2° 论断是否成立：任给$\Gamma \subseteq L(X)$和$p \in L(X)$，存在$q \in L(X)$使$\Gamma \vDash p$ 当且仅当$\vDash q$

p为重言式为语义后承$\Gamma \vDash p$的特例$(\Gamma = \Phi)$

1° $\Gamma = \{p_1 ... p_n\}$有限

$q = p_1 \to (p_2 \to ...(p_n \to p)...)$

则由语义的演绎定理可得$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \vDash q$

2° Γ无限

利用紧致性，得到$\Gamma \vDash p \Rightarrow$有限子集$\Gamma' \vDash p$,转为1°

语义推论与永真式的关系

无限集$L(X_n)$只有有限多个语义不同的公式。

L的语法描述比语义描述的粒度更细。

判断题

判定问题 称一类问题是可判定的，如果：(1)该类问题的每一个实例只有“是”与“否”两种回答；(2)存在一个“能行”方法/过程A，使得对该类问题的每一个实例，A都在有限时间内给出正确的回答。

定理（命题演算的可判定性） 存在一个能行方法A，对任何L公式p，当$\vdash p$成立时，A在有效时间内回答“是”；当$\vdash p$不成立时，A在有效时间内回答“否”。

可判定性

思考题1-7 $\Gamma \vdash p$是否是可判定的

一类问题可判定的标准：

(1) 该类问题中的每一个问题实例只有“是”或“否”两种回答

(2) 存在一个“能行”方法A，使得对该类问题的每一实例，A都可以在有限时间内给出正确答案

命题逻辑的可判定性 存在一个能行方法A,对$P \in L(X)$，当$\vdash P$时，A回答yes，当$\nvdash P$时A回答no.

利用L的可靠性和完全性：$\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p$

因此可以通过真值表来进行判定

首先要做的就是指派和赋值（赋值此处不需要），对于指派，这里要求是对变元的任意指派

(1)Γ集有限

(2)Γ集无穷

外延：一阶逻辑的判定问题

1° 任给符号是否是K的公理 √

2° 任给公式p, q, r,是否从p, q用MP规则推出r √

3° 任给公式p, q,q是否从p中用Gen规则推出 √

4° 任给公式序列，是否是K的一个形式证明 √

5° 任给公式p是否是K的内定理 ×

可判定性

注释 经过语义解释，一个闭公式表达一个命题；一个非闭公式表达一个命题函数，例如$\forall x(P(x, a)\rightarrow\forall y Q(y, z))$的真值与$z$所指的个体有关，这样的公式代表一个从个体到真值的映射。

判断题

思考题2-1 （K4）（K5）限制条件有何意义？举例

限制条件的意义在于保证K4，K5在任何解释域M下均恒真，即有效式

(K4) 为一个由多到一的推论，限制条件保证了不再有更多的约束条件出现

无限制的反例：$M\{R, \Phi, >\}$

$$\boxed{\forall x \exists y R_1^2(x,y) \rightarrow \exists y R_1^2(y,y)}$$

(K5) 为一个由一到多的推论，限制条件保证了不会有约束条件被忽略

无限制的反例：

反例：$\boxed{\forall x\left(R_1^2(x,c_1)\rightarrow R_1^2(x,c_2)\right)\rightarrow\left(R_1^2(x,c_1)\rightarrow\forall x\, R_1^2(x,c_2)\right)}$

取解释域使得N={0, 1, 2, ⋯}, R_1^2为大于, c_1为0, c_2为1

(K4)、(K5)限制条件

定理(一阶解释的良定义性) 对任何一阶解释I和K(Y)公式p，存在唯一的$u\in\{t, f\}$，使得$I(p)=u$。

一阶解释的良定义性

思考题2-4 若$\Gamma \vDash p$,则对一切解释I，若$\forall q \in \Gamma$有$I(q)=t$.则$I(p)=t$?

不正确。

$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \forall M \vDash \Gamma$ 则$M \vDash p$

换成一切解释，可能其一阶结构M不再是Γ的模型，则⊨约束不再存在

模型

思考题2-3 真在一阶逻辑里有那几个层次？它们的关系

三层
- M可满足:在一个M中，在一种项解释φ下，p是真的
- M有效：在一个M中，在任一项解释φ下，p是真的
- (模型类有效：$\Gamma \vDash p$ 在任一使Γ中公式为真的M中，在任一项解释φ下，p是真的)
- M逻辑有效：在任何M中,在任一项解释φ下，p是真的

M可满足：设$I=\{M,V,v\}$是$K(Y)$的一阶解释，$p \in K(Y)$,若$I(p)=t$，则称p在I下为真，又称p在M下可满足

M有效：设M为任一一阶结构，$p \in K(Y)$,若对一切V，p在$I\{M,V,v\}$下为真，则称p在M中有效（p是M有效的，M是p的一个模型，记为$M \vDash p$）

逻辑有效：设$p \in K(Y)$,若对一切一阶结构M，若$M \vDash p$，则称p为逻辑有效的，记为$\vDash p$

真在谓词演算中的层次

半可判定 称一类问题是半可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定两种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A可以不回答。

❖ **一阶逻辑中的半可判定问题** 下列问题是半可判定的：

5. 任给公式p是不是K的内定理($\vdash p$是否成立)？

◆ **证明** 以适当次序，逐一枚举以p结尾的公式序列$p_1, \cdots, p_n=p$，对每次枚举的公式序列，调用问题4的判定程序，如果是一个p的证明，则输出yes并终止，否则枚举下一个公式序列。如果p是K的内定理，则必经有限次枚举，生成p的一个形式证明。

❖ **对比** 任给公式$p\in$L(X)，p是一个重言式当且仅当所有指派都是p的成真指派。

◆ **观察** 任给公式$p\in$L(X)，存在X_n使得$p\in L(X_n)$。因此，p是重言式当且仅当X_n上的所有2^n个指派都是p的成真指派。

❖ **对比(K的逻辑有效式)** 设$p\in$K(Y)。p是K的一个逻辑有效式，记为$\vDash p$，当且仅当对任何一阶结构M，有M $\vDash p$。

◆ **观察** 一般情况下，验证一个一阶公式是不是K的逻辑有效式涉及无穷多个一阶结构。

可判定问题

补充：∃1 中的约束条件有什么意义？举例说明如果没有约束条件会有什么问题。

反例：$\forall y R_1^2(y,y)\rightarrow\exists x\,\forall y\, R_1^2(x,y)$ 取解释域使得N={0, 1, 2, ⋯}, R_1^2为等于

存在1规则的约束条件

(1) 命题演算L的三条公理模式是相互独立的. ✓

(2) 已知Γ和Σ都是相容公式集, 若$\Gamma\cup\Sigma$是不相容公式集, 则存在公式q使得$\Gamma\vdash q$且$\Sigma\vdash\neg q$. ✓

(3) 不含否定词的命题公式都是可满足公式. ✓

(4) K_N的所有模型中, 等词一定解释为论域上的相等关系. ✗

(5) $\forall x\forall y(R(x,y)\rightarrow R(y,x))\rightarrow\forall x\exists y R(x,y)$是逻辑有效式. ✗

(6) 重言式集合是命题语言范围内逻辑推理规律的形式化表达. ✓

(7) 哥德尔不完备性定理证明中的不可判定命题是一个真命题. ✓

- (1) 正确，因为已知任两条 L 中的公理都无法推出第三条.
- (2) 正确，由相容的定义可知.
- (3) 正确，可以归纳证明.
- (4) 错误，E 的任何相容扩充（包括 K_N）仍然有非正规模型
- (5) 错误， 取解释域 $M=\{\mathbb{N},\emptyset,\overline{R}\}$.其中，$\mathbb{N}$ 为自然数集，$(\overline{x},\overline{y})\in\overline{R}$ 当且仅当 $\overline{x}>1$ 且 $\overline{y}>1$. 显然 M 不是原公式的模型.
- (6) 正确
- (7) 正确，定理证明中构造的 p 为“p 在 K_N 中不可证”.最后得出 p 是真命题.

2020春季判断题

(1) 简述关于逻辑研究内容的三种主要观点. "公设"在应用逻辑系统中的作用是什么. 并举例说明.

(2) 严格地说, 什么是"证明". 关于"证明"与"计算"之间关系已得到一些严格证明结果. 描述一个一阶逻辑中的, 得到严格证明的结果.

❖ 一种形式逻辑通常包含三个方面/部分:

1. 形式逻辑的语法学(演算): 不带直观含义的公理系统, 系统内进行不依赖于任何应用领域具体内容的纯形式化推理。
2. 形式逻辑的语义学: 给演算赋予含义、使形式公理系统与现实世界相互关联的理论方法。
3. 形式逻辑的元理论: 研究形式公理系统的语法学与语义学之间关系的理论方法。

在应用逻辑系统中，公设（Axioms）是起始点或基础命题，作为逻辑推理的起点。它们是被认为是真实或不争议的命题，不需要经过证明而被接受。公设为逻辑系统建立了一组基本的前提或规则，用于进行推理和证明其他命题。

公设在应用逻辑系统中的作用如下：

1. 建立逻辑体系的基础：公设提供了逻辑体系的起点，为整个逻辑系统奠定了基础。它们定义了逻辑系统中的基本概念和关系，为后续推理和证明提供了框架和规则。
2. 提供推理的前提：公设作为推理的前提，可以被用来推导和证明其他命题。通过应用逻辑规则和推理步骤，可以从公设出发，逐步推导出更复杂的命题。
3. 保持逻辑的一致性：公设确保逻辑系统的一致性和内在的逻辑关系。它们为逻辑规则和推理提供了可靠的基础，使得逻辑推论的过程合乎逻辑原则。

在数理逻辑中，公设的作用可以通过谓词逻辑（Predicate Logic）的公理系统来说明。公理系统是逻辑中用来描述命题关系和推理规则的基本框架，其中公设扮演着重要的角色。

举例来说，以下是经典的谓词逻辑中常见的公设：

1. 量词公设：包括全称量化和存在量化的公设。例如，全称引入公设（∀-Introduction）和存在消去公设（∃-Elimination）。
   - 全称引入公设（∀-Introduction）：如果我们证明了一个命题在任意个体上都成立，那么我们可以引入一个全称量词，表示该命题对于所有个体都成立。
   - 存在消去公设（∃-Elimination）：如果我们证明了一个存在命题对于某个特定的个体成立，那么我们可以引入一个存在量词，表示存在该个体使得该命题成立。
2. 等价公设：包括等价引入和等价消去的公设。例如，双向等价引入公设（↔-Introduction）和双向等价消去公设（↔-Elimination）。
   - 双向等价引入公设（↔-Introduction）：如果我们可以证明两个命题互相等价，那么我们可以引入双向等价符号，表示两个命题是等价的。
   - 双向等价消去公设（↔-Elimination）：如果我们已知两个命题是等价的，那么我们可以使用双向等价消去公设，根据一个命题推导出另一个命题。

这些公设在谓词逻辑中起着基础性的作用。它们为推理提供了基本的规则和操作，使我们能够在谓词逻辑的推导中应用量词和等价关系。通过使用这些公设和其他推理规则，我们可以推导出更复杂的命题和逻辑关系。

公设的选择和使用在不同的数理逻辑系统中可能会有所不同，根据研究领域和推理目标的不同而定。公设的作用是确保逻辑系统的一致性和正确性，并为后续的推理和证明提供了基础。

Regenerate response

在数理逻辑中，"证明"是指通过一系列逻辑推理步骤和规则来验证一个命题或命题集的正确性。一个严格的证明是一个形式化的推导过程，其中每一步都是根据预先定义的推理规则进行的，并且最终推导出目标命题的真值。严格证明通过逻辑规则和推理步骤来确保其正确性，不依赖于主观判断或直觉。

关于"证明"与"计算"之间的关系，一些严格的证明结果表明它们之间存在紧密的联系。其中一个重要的结果是丘奇-图灵论题（Church-Turing Thesis），它指出任何有效的计算过程都可以用图灵机（Turing Machine）进行模拟。这意味着通过一系列的计算步骤可以模拟出一个严格的证明过程。

在一阶逻辑（First-order Logic）中，也存在严格的证明结果，其中最著名的是哥德尔完全性定理（Gödel's Completeness Theorem）。该定理表明，如果一个命题在某个模型中是真的，那么它在一阶逻辑中就有一个严格的证明。换句话说，如果一个命题在某个模型中是真的，那么可以通过一系列的推理步骤在一阶逻辑中严格证明它。这个定理将数理逻辑的语义（模型论）和语法（证明论）联系起来，确立了一阶逻辑的严格性和完备性。

这些严格证明结果在数理逻辑和计算理论中具有重要意义。它们帮助我们理解证明的本质，揭示了证明和计算之间的关系，并确保了逻辑系统的一致性和正确性。通过应用严格的证明方法，我们可以对逻辑命题进行严谨的推理和分析，以推导出正确的结论。

2020春季简答题

(1) $(p\to q)\to((r\to\neg p)\to(r\to\neg q))$是重言式. [x]

(2) 所有的自然数是整数不能在L中表达, 但能在K中较好地表达. [✓]

(3) Γ的一个正规模型不一定把$\approx$解释为相等. [x]

(4) $f(a,x_2)$对$R_1^2(b,x_1)\to\forall x_1 R_2^2(x_1,x_2)$中的$x_2$是自由的. [✓]

(5) 递归函数是K_N可表示的. [✓]

(6) $\vdash p$的判定可以用真值表的方法. [x]

(7) $\Gamma\vDash p$, 则p的每个模型也是Γ的模型. [x]

(8)

2018春季判断题

(1) 本学期你学习数理逻辑的最大收获是什么?
最大的收获是让自己一定程度上克服了对直觉的依赖, 转而借助逻辑来考虑事情. 这种品质是十分重要的. 在数学发展的历史上, 就有很多克服直觉而获得的新创造, 甚至是推翻了原有不合理的理论. 比如哥德尔就能够在大家都在依照自己的直觉, 想要尝试去证明完备的大势之下, 毅然证明出了哥德尔不完备性定理.

(2) 直观地解释"模型"的含义. 模型相当于一个给定的问题的讨论域, 在这个讨论域下, 前提集的内容都是成立的, 那么也就能够以此为基础去进行推导, 进而得到其他命题的真伪.

2018春季简答题