命题 1 $\vdash p \to p$ (同一律) 证 下面是 $p \rightarrow p$ 在L中的一个证明: $(1) p \to ((p \to p) \to p)$ (L1) $(2)\: (p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ (L2)(1), (2), MP $(3) (p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ $(4) p \to (p \to p)$ (L1) $(5) p \to p$ (3), (4), MP 同一律的直接证明 命题 2 $\vdash \neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$ (否定前件律) 下面是所要的证明: $(1) (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ (L3) $(2)\left((\neg\,p\rightarrow\neg\,q)\rightarrow(q\rightarrow p)\right)\rightarrow(\neg\,q\rightarrow((\neg\,p\rightarrow\neg\,q)\rightarrow(q\rightarrow p)))$ (L1)(1), (2), MP $(3) \neg q \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ $(4) \ (\neg \ q \rightarrow ((\neg \ p \rightarrow \neg \ q) \rightarrow (q \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg \ q \rightarrow (\neg \ p \rightarrow \neg \ q))$ (L2) $\rightarrow (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)))$

否定前件律的直接证明

 $(5) (\neg q \to (\neg p \to \neg q)) \to (\neg q \to (q \to p))$

 $(6) \neg q \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

 $(7) \neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$

(3), (4), MP

(5), (6), MP

(L1)

否定肯定律直接证明

HS直接证明

 $(1)(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ (L1) $(2)(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2) $(p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ $(4)(q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ MP(2)(3) $(5)((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to q)))$ $(p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$ $(6)((q \ \rightarrow \ r) \ \rightarrow \ (p \ \rightarrow \ (q \ \rightarrow \ r))) \ \rightarrow \ ((q \ \rightarrow \ r) \ \rightarrow \ ((p \ \rightarrow \ q) \ \rightarrow \ (p \ \rightarrow \ r))))$ MP(4)(5) $(7)(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $(8)((q\rightarrow r)\rightarrow ((p\rightarrow q)\rightarrow (p\rightarrow r))\rightarrow (((q\rightarrow r)\rightarrow (p\rightarrow q))\rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow (p\rightarrow r))\rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow (p\rightarrow q))\rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow (q\rightarrow r))\rightarrow (q\rightarrow r)\rightarrow (q\rightarrow r)\rightarrow (q\rightarrow r))\rightarrow (q\rightarrow r)\rightarrow (q\rightarrow r)$ $(9)((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ MP(7)(8) $(10)(((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))))$ $(r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ $(11)(p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(9)(10)$ $q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ r)))MP(11)(12) $(14)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q)$ (L1) $(15)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)$ MP(13)(14)

HS的直接证明

```
双否律的直接证明
(1) \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg p)
  (2)(\lnot \lnot p \to ((\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p) \to \lnot \lnot p)) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p)) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p)) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to (\lnot p \to \lnot p)))) \to ((\lnot \lnot p \to (\lnot p \to ( p \to (\lnot p \to (\lnot p \to ( p 
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 (L2)
    (3)(\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p)) \to (\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            MP(1)(2)
  (4) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (L1)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          MP(3)(4)
    (5) \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p
    (6) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (L1)
    (7)(\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (L3)
    (8)((\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot p\to\lnot\lnot p)\to(\lnot p\to\lnot\lnot\lnot p))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot p\to))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot p\to)))\to(\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot p\to)))\to((\lnot\lnot p\to))\to((\lnot\lnot p\to))\to((\lnot p\to))\to
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             (L1)
      \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)))
    (9) \lnot \lnot p \to ((\lnot \lnot \lnot \lnot p \to \lnot \lnot p) \to (\lnot p \to \lnot \lnot \lnot p))
  (10)(\lnot \lnot p \to ((\lnot \lnot \lnot \lnot p \to \lnot \lnot p) \to (\lnot p \to \lnot \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to \lnot \lnot \lnot p))) \to ((\lnot \lnot p \to \lnot \lnot \lnot p)))
    (\lnot \lnot \lnot \lnot p \to \lnot \lnot p)) \to (\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot \lnot p))) \tag{L2}
    (11)(\lnot\lnot p \to (\lnot\lnot\lnot\lnot p \to \lnot\lnot p)) \to (\lnot\lnot p \to \lnot\lnot\lnot p))MP(9)(10)
    (12) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)
    (13) \neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           MP(11)(12)
    (14)(\neg p \to \neg \neg \neg p) \to (\neg \neg p \to p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 (L3)
    (15)((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p))))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (L1)
    (16) \neg \neg p \to ((\neg p \to \neg \neg \neg p) \to (\neg \neg p \to p))
  (17)(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))  (L2)
    (18)(\lnot \lnot p \to (\lnot p \to \lnot \lnot \lnot p)) \to (\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to p)) \qquad MP(16)(17)
    (19) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        MP(13)(18)
   (20)(\lnot \lnot p \to (\lnot \lnot p \to p)) \to ((\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p) \to (\lnot \lnot p \to p))   (21)(\lnot \lnot p \to \lnot \lnot p) \to (\lnot \lnot p \to p)   MF 
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        MP(19)(20)
```

双重否定律的直接证明

MP(5)(21)

```
第二双台律的直接证明
     (1) \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg \neg p)
  (2)(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p))
       (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))
     (3)(\lnot\lnot\lnot p\to(\lnot\lnot\lnot p\to\lnot\lnot\lnot p))\to(\lnot\lnot\lnot\lnot p\to\lnot\lnot\lnot p)\quad MP(1)(2)
     (4) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)
     (5) \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         MP(3)(4)
  (7)(\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot p \to \lnot\lnot\lnot p) \to (\lnot\lnot p \to \lnot\lnot\lnot\lnot p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            (L3)
(1)(\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))
((1)(\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p \rightarrow \neg p)))
((1)(\neg p \rightarrow \neg p \rightarrow \neg p \rightarrow \neg p \rightarrow \neg p)))
((1)(\neg p \rightarrow \neg p
     (9) \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) MP(7)(8)
(10)(\lnot\lnot\lnot p\to((\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot\lnot p\to\lnot\lnot\lnot p)\to(\lnot\lnot p\to\lnot\lnot\lnot\lnot p)))\to
((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to (\neg\neg p \to (\neg (\neg p \to (\neg
(11)(\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p))
  (13) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)
(14)(\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)
(15)((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow p \rightarrow p))) \rightarrow (\neg p \rightarrow p \rightarrow p))
     \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)))
(16) \neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \hspace{0.5cm} MP(14)(15)
 \begin{array}{l} (17)(\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg p \rightarrow \neg p))) \\ (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg p))) \end{array} 
(18)(\lnot\,\lnot\,\lnot\,p\,\rightarrow\,(\lnot\,\lnot\,p\,\rightarrow\,\lnot\,\lnot\,\lnot\,p))\,\rightarrow\,(\lnot\,\lnot\,\lnot\,p\,\rightarrow\,(\lnot\,\lnot\,\lnot\,p\,\rightarrow\,
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 MP(16)(17)
(19) \neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)
(20)(\neg \neg \neg p \to (\neg \neg \neg p \to \neg p)) \to ((\neg \neg \neg p \to \neg \neg \neg p) \to (\neg \neg \neg p \to \neg \neg p))
(21)(\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 MP(19)(20)
(22) \neg \neg \neg p \rightarrow \neg p
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      MP(5)(21)
(23)(\lnot \lnot \lnot p \to \lnot p) \to (p \to \lnot \lnot p)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 MP(22)(23)
(24)p \rightarrow \neg \neg p
```

第二双重否定律的直接证明