多变量微积分复习

黄炳儒　邵文炳

2019 年 7 月 1 日

目录

1 多元函数微分学 **1**

1.1 基本概念 1

1.2 基本题型及经典反例 2

1.2.1 基本题型 2

1.2.2 经典反例 3

1.3 常用结论 6

1.4 经典例题 7

2 多元函数积分学 **11**

2.1 基本概念 11

2.2 基本题型及经典反例 12

2.2.1 基本题型 12

2.2.2 经典反例 13

2.3 常用结论 13

2.4 经典例题 15

3 无穷级数 **18**

3.1 基本概念 18

3.2 基本题型及经典反例 19

3.2.1 基本题型 19

3.2.2 经典反例 20

3.3 常用结论 20

3.4 经典例题 23

4 含参变量积分 **24**

4.1 基本概念 24

4.2 基本题型及经典反例 25

4.2.1 基本题型 25

4.2.2 经典反例 26

4.3 常用结论 27

4.4 经典例题 29

5 课后疑难题 **32**

6 说明和致谢 **35**

1 多元函数微分学

1.1 基本概念

1. 多元函数的极限与连续

   - 平面点集：距离，邻域，内点，外点，边界点，开集，闭集，聚点，孤立点，区域，闭区域，平面点列的极限，平面 Cauchy 点列，Cauchy 收敛准则。
   - 多元函数的极限：映射，多元函数，重极限，累次极限。
   - 多元函数的连续：多元函数的连续，有界闭集上连续函数的最值定理，一致连续。
   - 向量函数的极限与连续：向量函数，向量函数的极限，连续。

2. 多元函数的微分与偏导数

   - 多元函数的微分与偏导数：多元函数的可微，微分，**偏导数**，高阶偏导数，方向导数，梯度，复合函数，链式法则，复合函数的高阶偏导数，一阶微分形式不变性，隐函数，隐函数定理，隐函数的微分，偏导数。
   - 向量函数的微分与偏导数：向量函数的可微，微分，Jacobi 矩阵，Jacobi 行列式（特殊情况），复合映射的链式法则，隐映射，隐映射定理（取特殊情况）。

3. 多元函数的 Taylor 公式与极值

   - 多元函数的 Taylor 公式：二元函数 Taylor 公式，Maclaurin 公式，带 Peano 余项的 Taylor 公式，Hesse 矩阵，Taylor 公式的唯一性。
   - 多元函数的极值问题：极值点，取极值的必要条件，驻点，判定驻点是不是极值点的二阶充分条件，条件极值，条件极值的 Lagrange 乘子法。

4. 多元函数微分学的几何应用

   - 空间曲线的参数表示：空间曲线的参数方程，向径式方程，光滑曲线，简单曲线，切线，法平面，切向量，切线方程，法平面方程，曲线弧长，弧长微元。

- 空间曲面的参数表示：曲面的参数方程，向径式方程，u,v 曲线，光滑曲面，切平面，法方向，切向量，法向量，法线方程，切平面方程，曲面面积，面积微元。
- 空间曲线曲面的隐式表示：空间曲线的隐式方程，空间曲面的隐式方程，两个曲面相互正交，两个曲面在一点相切。

1.2　基本题型及经典反例

1.2.1　基本题型

1. 多元函数的极限与连续：
(1) 求多元函数的极限：参考教材 P_{10} 第 8 题
(2) 多元函数的重极限与累次极限的证明：参考教材 P_{11} 第 10 题
(3) 多元函数的连续性：参考教材 P_{11} 第 11，12 题

2. 多元函数的微分与偏导数：
(1) 求多元函数在定点处的偏导数：参考教材 P_{20} 第 2，5，6 题
(2) 求多元函数的偏导数（偏导函数）：参考教材 P_{20-21} 第 3，4，14，15，16，17 题
(3) 研究函数在一点处的可微性：参考教材 P_{20-21} 第 1，12，13 题
(4) 求多元函数的全微分：参考教材 P_{21} 第 9，10，11 题，P_{31} 第 15 题
(5) 求多元复合函数的偏导数：参考教材 P_{29} 第 1-14 题
(6) 求多元隐函数的偏导数：参考教材 P_{39} 第 2，3，4，7，8，9，10，11，12，13，14，16，17 题

3. 多元函数的泰勒展开与极值问题：
(1) 求多元函数在某点的泰勒展开：参考教材 P_{54-55} 第 2，3，4 题
(2) 求多元函数的极值：参考教材 P_{55} 第 6，7，8 题
(3) 求多元函数的最值：参考教材 P_{55-56} 第 9，10，11，13，14，15，16，17，18 题
(4) 有关极值点的证明：参考教材 P_{56} 第 12 题

4. 多元函数微分学的几何应用：
(1) 求空间曲线的切线方程和法平面方程：参考教材 P_{66-67} 第 4，5，6，16，17 题
(2) 求空间曲面的切平面方程和法线方程：参考教材 P_{66-67} 第 7，8，9，10，11，12，13，14，15 题

1.2.2 经典反例

1. 分别对每个变量都连续的函数不一定是连续函数。
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

容易证明对于任意 y 的固定值，$f(x,y)=g(x)$ 是 x 的连续函数，对于任意 x 的固定值，$f(x,y)=h(y)$ 是 y 的连续函数，但是 $f(x,y)$ 不是来连续函数，在 $(0,0)$ 处不连续，当然反过来一定是对的，即，一个二元函数连续函数，那么它关于每个变量都是连续函数。

2. $f(x,y)$ 沿任意一条过点 (x_0,y_0) 的射线是连续的，$f(x,y)$ 在该点处不一定连续。
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

容易证明，$f(x,y)$ 沿任意一条过原点的直线均连续（可以用过原点的直线的参数方程证明），但是 $f(x,y)$ 沿着曲线 $y=x^2$ 趋于原点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在原点处不连续。

3. 二元函数在一点可偏导，不一定在该点连续。
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\neq 0,\\ 0 & xy=0.\end{cases}$$

在这里，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

说明这个函数在原点处两个偏导数都存在，并且容易证明该函数沿着趋于原点的两个方向极限不相等，从而原点处极限不存在，从而不连续。

4. 二元函数在某点连续不一定可偏导。
反例：考察

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

在原点处，连续但是两个偏导数都不存在

5. 二元函数在一点可偏导不一定可微。
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

易知，

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y)=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

而

$$\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\neq o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

（可以选取直线 $\Delta y=m\Delta x$）因此 $f(x,y)$ 在原点处不可微。

6. 二元函数在一点沿任意方向的方向导数都存在，函数在该点不一定可微。
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

设过原点处的方向为 $\mathbf{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，这个函数在原点处的方向导数为

$$Def(0,0)=\begin{cases}\frac{2\cos^2\beta}{\cos\alpha} & \cos\alpha\neq 0,\\ 0 & \cos\alpha=0.\end{cases}$$

存在，但是该函数在原点处不连续，因而不可微。

7. 二元函数在某点处两个偏导数存在，但是在该点处任意方向的方向导数不一定存在（除了沿 x 轴方向和 y 轴方向，因为此时的方向导数就是偏导数）
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & xy=0,\\ 1 & \text{elsewhere.}\end{cases}$$

8. 并不是所有二元复合函数求导时链式法则均可用

反例：设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点处，容易求得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，而 $f(x,y)$ 在原点处不可微，若以 $f(x,y)$ 为外函数，$x=t,y=t$ 为内函数，构造一个以 t 为自变量的复合函数作为反例

$$F(t)=f(t,t)=\frac{t}{2}$$

显然，在 $t=0$ 处，$\frac{dF(t)}{dt}=\frac{1}{2}$，但是如果用复合函数的链式法则可求得

$$\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$$

显然得到结果不对，这说明复合函数求导使用链式法则的时候，在该点处可微这个条件非常重要！

9. 二元函数在一点处偏导数不存在，有可能在该点取到极值。

反例：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处偏导数不存在，但是在该点处取到极小值 0。

10. 二元函数在通过一个点的任意一条直线上取极值，但是该函数在该点可能不取极值。

反例：$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$，容易求得原点是该函数的稳定点，沿着原点的任意一条直线 $y=mx$，$f(x,y)=f(x,mx)=x^2(1-m^2x)(2-m^2x)$，容易知道在原点附近满足 $0<|x|<\frac{1}{m^2}$ 的所有 x 均有 $f(x,y)>0$，而在原点 $f(x,y)=0$，知 $f(x,y)$ 在原点处沿着任意一条直线都是极小值点（斜率不存在的情况也成立，自行验证），但是显然有下面的式子成立，从而说明原点不是极小值点

$$f(a,\sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0\quad(a>0)$$

11. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，则函数 $f(x_0,y)$ 和函数 $f(x,y_0)$ 均在 (x_0,y_0) 处取得极值，但是反过来则不然

反例：$f(x,y)=x^2-y^2$ 当 $x=0$ 时，$f(0,y)=-y^2$，在 $(0,0)$ 处取得极大值，当 $y=0$ 时，$f(x,0)=x^2$，在 $(0,0)$ 处取得极小值，但是 $f(x,y)$ 在原点处不取极值（用二阶充分条件判断）

12. 有无穷个极大值而无极小值的函数。

例：$f(x,y)=(1+e^y)cosx-ye^y$ 由 $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 可以解出 $x=k\pi,y=(-1)^k-1$ 于是驻点分为两类，当 $k=2n+1$ 为奇数时驻点为 $((2n+1)\pi,-2)$，当 $k=2n$ 为偶数时驻点为 $(2n\pi,0)$ 利用二阶充分条件（Hesse 矩阵）容易知，$(2n\pi,0)$ 为极大值点，$((2n+1)\pi,-2)$ 不是极值点。

1.3 常用结论

1. 求一点处的偏导数：求函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 一般来说有两种做法，第一先求偏导函数 $f_x(x,y)$，再带值，第二种就是先代 $y=y_0$ 得到一个一元函数，用一元函数的导数来得到偏导数，这实质上是利用了偏导数的定义，根据函数的不同，选择适当的方法可以很快简化运算提高效率。

例如：求函数 $z=x^2e^y+(x-1)\arctan(\frac{y}{x})$ 在点 $(1,0)$ 处的偏导 $z_x(1,1)$
方法一：$z_x(x,y)=2xe^y+\arctan(\frac{y}{x})+\frac{y(1-x)}{x^2+y^2}$，所以 $z_x(1,0)=2$。
方法二：$z(x,0)=x^2$，所以 $z_x(x,y)=\frac{dz(x,0)}{dx}=2x$，从而 $z_x(1,0)=2$。
在这里，用方法二显然比方法一简便许多。

2. 利用对称性求偏导数：若函数 $z=f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=f(y,x)$，说明 x,y 在 f 的表达式中处于对称的位置（数学上称为轮换对称），那么它们的偏导数存在如下关系，若已知 $f_x(x,y)$，则 $f_y(x,y)$ 只需将函数 $f_x(x,y)$ 中的 x,y 对换得到一个新函数即可。

例如：课本习题 6.2 15 题 (5) $z=y^{\ln x}$ 求二阶偏导，这里只说一下利用对称性求一阶偏导数

首先在这里，$f(x,y)=y^{\ln x}$,$f(y,x)=x^{\ln y}$ 而根据等式 $y^{\ln x}=(e^{\ln y})^{\ln x}=(e^{\ln x})^{\ln y}=x^{\ln y}$ 可知 $f(x,y)=f(y,x)$ 说明这个函数关于 x,y 对称，由于幂函数求导较为简单，先求 $f_y(x,y)=\ln xy^{\ln x-1}$，于是 $f_x(x,y)=\ln yx^{\ln y-1}$。

3. 齐次函数的性质（齐次函数定义见习题 6.3 11 题，这里以二元函数为例）：
(1) 习题 6.3 11 题（齐次函数的欧拉定理）：可微函数 $f(x,y)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y)$$

(2) 设 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数，则

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2f(x,y)=n(n-1)f(x,y)$$

这里 $(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2=x^2(\frac{\partial}{\partial x})^2+2xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+y^2(\frac{\partial}{\partial y})^2$ 是一种缩写，类似二项式展开

(3) 若 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数，则 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 是 $(n-1)$ 次齐次函数

4. 行列式函数的导数：设

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

则 $\frac{d\Delta(t)}{dt}$ 等于把 $\Delta(t)$ 内的第一行直到第 n 行的元素依次换成它们的导数而得出的 n 个行列式之和

5. 泰勒公式唯一性及应用：泰勒公式具有唯一性，相关说明和例子在群文件里查询（见 3 月 24 日习题课笔记）。

1.4 经典例题

1. 计算极限：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

解：令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，并且 $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$，带入原表达式有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{r\to 0}r^{2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0}e^{2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r}=e^{\lim\limits_{r\to 0}2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r}$$

而

$$e^{\lim\limits_{r\to 0}2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r}=e^0=1$$

故原极限为 1

2. 连续性，可微性的判别：

设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

求证：

(1)$f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在

(2)$f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续
(3)$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

证明：
(1) 因为 $f(x,0)\equiv 0$，所以 $f_x(0,0)=0$；同样因 $f(0,y)\equiv 0$，得 $f_y(0,0)=0$
(2) 容易求出

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

令 $y=x$
$f_x(x,x)=x\sin\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}$ 当 x 趋于 0 时并不趋于 0
故 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续，同理可以证明 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续
(3) 由于 $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 当 $x^2+y^2\to 0$ 时是有界变量，当 $x^2+y^2\to 0$ 时 x 是无穷小量，所以

$$f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

按照微分的定义，函数在 $(0,0)$ 点可微，并且由此可见，偏导数连续是可微的充分不必要条件

3. 偏导数的计算：（思考题）
设

$$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

证明：
(1)$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$;
(2)$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{n(n-1)}{2}u$;

4. 方向导数的计算：

设函数 $u=u(x,y)$ 在 $x^2+y^2>1$ 上可微，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$。在 (x,y) 点处作单位向量 $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta$，向量 $\mathbf{e_r}$ 表示 θ 固定沿 r 增加的方向，$\mathbf{e}_\theta$ 表示 r 固定沿 θ 增加的方向，证明：

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r}=\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证明：由题目可知：$\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{e}_\theta = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}))$ 故

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r} = \nabla u \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \nabla u \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial u}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta$$

由复合函数的偏导数可知

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta$$

从而可知

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

5. 与微分方程相关的题目：

设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，若 u 满足调和方程:

$$\Delta u = 0$$

求出函数 u

解：由复合函数的求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}$$

由于 r 关于 x, y, z 轮换对称，同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}, \frac{\partial u}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}$$

进一步可以求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2 + z^2}{r^3}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2 + z^2}{r^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2 + y^2}{r^3}$$

由条件

$$\Delta u = 0$$

可知

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$$

这等价于 $[r^2f'(r)]'=0$，解出 $f'(r)=\frac{C}{r^2}$，进一步有 $f(r)=-\frac{C}{r}+C_11$，其中 C,C_1 为任意常数。

6. 极值问题：

设 $A>0, AC-B^2>0$，求平面曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 所围的图形面积

解: 首先这个给的的平面曲线是二次曲线，并且可以求面积，必然是椭圆（有相关定理可以说明，这里只作分析），其次不含有 x,y 的一次项说明椭圆没有经过平移，只是经过绕原点的旋转，为了求椭圆的面积，必须求出椭圆的长短半轴，而长短半轴对应椭圆上的两个点是距离椭圆中心最远和最近的两个点，于是考虑将这个问题转化为条件极值问题，即，在满足椭圆方程的点中选取到原点距离最长和最短的点作为所求。

设所给的椭圆上任意一点 (x,y) 到原点的距离为 d，则 $d^2=x^2+y^2$，定义 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1)$，由 Lagrange 乘子法可知，上述极值问题的解满足方程组：

$$\begin{cases} F_x=(2+2A\lambda)x+2B\lambda y=0 & (1) \\ F_y=2B\lambda x+(2+2C\lambda)y=0 & (2) \\ F_\lambda=Ax^2+2Bxy+Cy^2-1=0 & (3) \end{cases}$$

首先，由方程 $(1)\cdot x+(2)\cdot y$ 可以得到

$$x^2+y^2+\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2)=0$$

结合方程 (3) 可知，$x^2+y^2+\lambda=0$，于是可以得到 $d=\sqrt{-\lambda}$，这里将目标函数直接用变量 λ 表示出来，而由 Lagrange 乘子法理论可知，这里满足方程 (1)(2)(3) 的 λ 是使得目标函数 d 取得极值的 λ ，为此只需要解出 λ 和参数 A,B,C 的关系即可观察式子 (1),(2) 将其看作关于 x,y 的齐次线性方程组，那么它必然有非零解，那么系数行列式为 0，可以得到

$$(AC-B)\lambda^2+(A+C)\lambda+1=0$$

于是由根与系数的关系可知 $\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{AC-B^2}$，其中 λ_1,λ_2 一个使得目标函数最大一个使得目标函数最小。于是，根据 $d=\sqrt{-\lambda}$ 可知，$\max\{d\}\cdot\min\{d\}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$，从而椭圆的面积为 $S=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$

注：该题解法许多，这里利用 Lagrange 乘子法大大减少复杂的推导步骤。

2 多元函数积分学

2.1 基本概念

1. 二重积分
    - 二重积分相关的基本概念：被积函数，积分区间，被积表达式，有界集的面积，可积的必要条件。
    - 二重积分的性质：线性性，乘性，保序性，可积性，绝对可积性，对区域的可加性，积分中值定理，二重积分无向性（对比第一型曲面积分）。
    - 二重积分的计算：二重积分化为累次积分（Fubini 定理），二重积分交换积分次序，X 型区域，Y 型区域，变量代换（极坐标变换），变量代换的雅各比行列式。
2. 三重积分
    - 三重积分计算的累次积分法：投影，先一后二，先二后一。
    - 三重积分计算的变量替换法：变量代换（球坐标代换，柱坐标代换），变量代换的雅各比行列式。
3. 第一型曲线积分，第二型曲线积分
    - 第一型曲线积分：曲线的弧长，弧长微分，第一型曲线积分的定义及几何意义，用参数方程求第一型曲线积分化为定积分的计算公式。
    - 第二型曲线积分：参数曲线的向，封闭曲线的向，第二型曲线积分的定义及物理意义，向量场沿回路的环量，有向弧长微元，第二型曲线积分和第一型曲线积分的关系，第二型曲线积分的性质，Green 公式（化环量为二重积分，注意定理的三个条件），用第二型曲线积分计算平面闭区域的面积。
4. 第一型曲面积分，第二型曲面积分
    - 第一型曲面积分：曲面面积，面积微元，第一型曲面积分的定义，用参数方程求第一型曲面积分化为二重积分的计算公式。
    - 第二型曲面积分：曲面的侧，封闭曲面的侧，第二型曲面积分的定义及物理意义，第二型曲面积分的性质，有向面积元，外微分形式，第二型曲面积分和第一型曲面积分的关系，Gauss 公

式（封闭曲面的第二型曲面积分化为三重积分，注意定理两个条件），Stokes 公式（第二型曲面积分化为第二型曲线积分）。

5. 积分的应用
   - 应用：重心公式，转动惯量公式，引力公式。
6. 场论
   - 数量场：梯度，梯度的运算法则及意义，方向导数，方向导数的计算（用梯度）及意义。
   - 向量场：向量场的散度，散度的运算法则，散度定理，旋度，旋度的运算法则。
   - 几类场：保守场，有势场（其中势函数怎么求最关键），无旋场，三类场的关系。

2.2 基本题型及经典反例

2.2.1 基本题型

1. 二重积分：
(1) 交换积分次序：参考教材 P_{93} 第 2，3 题
(2) 利用 Fubini 定理求二重积分：参考教材 P_{94} 第 5 题
(3) 利用变量代换求二重积分：参考教材 P_{94} 第 6,7,9 题
(4) 有关二重积分证明不等式和等式：参考教材 P_{94} 第 10,11,12 题
(5) 广义二重积分：参考教材 P_{94} 第 13 题

2. 三重积分：三重积分的计算：参考教材 P_{108} 第 1,2,3,4 题

3. 第一型曲线积分，第二型曲线积分：
(1) 计算曲线的弧长：参考教材 P_{122} 第 1 题
(2) 计算第一型曲线积分：参考教材 $\mathrm{P}_{122-123}$ 第 2,3 题
(3) 计算第二型曲线积分：参考教材 $\mathrm{P}_{141-142}$ 第 1,2,3,4,5,6,7,8,9 题
(4) 格林公式及应用：参考教材 P_{142} 第 10,11 题

4. 第一型曲面积分，第二型曲面积分
(1) 计算曲面的面积：参考教材 P_{123} 第 4,5,6 题
(2) 计算第一型曲面积分：参考教材 $\mathrm{P}_{123-124}$ 第 7,8 题
(3) 计算第二型曲面积分：参考教材 P_{159} 第 1,2 题

(4) 高斯公式及应用：参考教材 $P_{159-160}$ 第 3,4,5,6,7 题
(5) 斯托克斯公式及应用：参考教材 P_{160} 第 8,9,10,11 题

5. 场论 (1) 计算散度，旋度：参考教材 P_{183} 第 2,3,4,5,6 题
(2) 计算势函数：参考教材 P_{183} 第 9,10,11,17,18,19,20 题
(3) 积分与路径无关：参考教材 P_{183} 第 12,13,15,16, 题

2.2.2 经典反例

关于积分的反例一般多涉及积分的可积性，在这里不展开，关键在于应用和计算各类积分以及证明一些不等式。关于各类积分的联系，参见 5 月 10 日习题课笔记（二重积分是核心，弄清楚各种类型的积分及联系）。

2.3 常用结论

1. 二重积分及各种类型积分的对称性（见 4 月 14 日习题课笔记）

2. Fubini 定理的特殊情况：设 $f(x,y)=g(x)h(y)$ 定义在矩形 $[a,b]\times[c,d]$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\int_c^d h(y)\mathrm{d}y$$

相关应用（计算一些二重积分以及证明积分不等式）见 4 月 14 习题课笔记

3. Cauchy 不等式：$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$

4.(群文件重积分复习 2 题，21 题总结)：设方程 $f(r,\theta)=0$ 确定了函数 $r=r(\theta)$，其中 $\theta\in[\alpha,\beta]$，平面区域 D 在极坐标下由 $\theta=\alpha,\theta=\beta,f(r,\theta)=0,f(2r,\theta)=0$ 围成，那么有

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\beta-\alpha)\ln 2$$

5. 格林公式带外法线方向的表达式：

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{\partial D}-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y=\oint\limits_{\partial D}[Q\sin(x,\mathbf{n})+P\cos(x,\mathbf{n})]\mathrm{d}s$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 ∂D 的外法线方向

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{\partial D}[P\cos(x,\mathbf{n})+Q\cos(y,\mathbf{n})]\mathrm{d}s$$

6. 格林公式解决含有奇点区域的曲线积分：

$$\oint\limits_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

在格林公式中，遇到要积分的曲线所包含的区域 D 含有奇点的这种情况，一般的做法是在奇点处挖掉一个半径为 ε 的圆，在该圆外，区域内，应用格林公式，再让 $\varepsilon \to 0$。

特别地，若被积函数满足 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，由格林公式可知，$\oint\limits_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint\limits_{C_\varepsilon} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，其中 C_ε 表示挖掉的圆的边界，这个结论可以推广到任意一条闭曲线，说明被积函数对任意一条闭曲线的积分等于对一个半径为 ε 的圆的积分，那么为了计算简单，可以选择特殊的闭曲线将被积函数化为更简单的形式进行计算。

例：设 $A > 0, AC - B^2 > 0$，求积分

$$\oint\limits_{L} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

其中 $L : x^2 + y^2 = R^2$ $(0, 0)$ 显然是奇点，被包含在 L 所在的区域内，故挖去一个半径为 ε 的圆 C，计算易知，被积函数满足 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，从而可知对任意一条包含原点的闭曲线，所对应的曲线积分相等，显然可以选取曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 作为积分曲线，被积函数变为 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 几何意义是该曲线围成的面积的 2 倍，由上面习题知，该曲线是一个椭圆，面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$，故原积分的值为 $\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$

7. 设 L 是一闭曲线，D 是 L 围成的区域，$u(x, y) \in C^2(D)$

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = \oint\limits_{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\langle n, \mathbf{i}\rangle + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\langle n, \mathbf{j}\rangle \right) \mathrm{d}s = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 L 的外法线方向

8.Laplace 算子的一些简单性质：

(1) 极坐标表示：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

(2) 平移旋转不变性：

Laplace 算子再坐标平移和旋转情形下保持不变，即若有自变量的旋转或平移变换 $\Phi : (x, y) \to (u, v)$，将一个函数 $f(x, y)$ 变为 $f(u, v)$，那么 $\Delta f(x, y) = \Delta f(u, v)$

(3) （第一格林恒等式）
设 S 是区域 D 的边界曲面，分片光滑，求 u, v 再 D 上二姐连续可微，则有

$$\iiint_D \Delta u \cdot v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}S$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 S 上的单位外法向量，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 $\mathbf{n}$ 方向上的方向导数。

2.4 经典例题

1. 利用 Beta 函数和 Gamma 函数计算重积分：
设 $p, q, s \geq 0$，求积分

$$I = \iint\limits_{\substack{x\geq 0, y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^p y^q (1-x-y)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解: 令 $x = r\cos^2\theta, y = r\sin^2\theta$，变换的 Jacobi 行列式为：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & 2r\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 2r\sin\theta\cos\theta$$

所以有

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}\theta \sin^{2q+1}\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^{p+q+1}(1-r)^s \mathrm{d}r = B(p+1, q+1)B(p+q+2, s+1)$$

另外

$$B(p+1, q+1)B(p+q+2, s+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \cdot \frac{\Gamma(p+q+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+s+3)}$$

所以

$$I = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \cdot \frac{\Gamma(p+q+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+s+3)}$$

2. 求空间曲线的线积分：求

$$I = \int_\Gamma y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

其中 Γ 为曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \qquad (a > 0) \end{cases}$$

上 $z \geq 0$ 的部分，且从 x 轴正方向看 Γ 是逆时针方向。

解：求空间曲线的线积分，最开始要看清楚是第几型曲线积分，带 ds 是第一型，带 dx 是第二型然后看该曲线能否参数化，曲线的参数方程只有一个变量，所以要得到参数化的曲线方程，必须弄清楚哪个参数是变量，该曲线是由一个球和一个柱面交成，而这个柱面在柱坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ 的情形下有简单的方程 $r=a\cos\theta$，这里 (r,θ) 是变量，那么此时的柱面方程可以表示为 $x=a\cos^2\theta, y=a\cos\theta\sin\theta, z=z$ 这里 (θ,z) 是参数，为了得到交线的参数方程，考虑在这个基础上消去 z，将柱坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ 带入第一个方程中有 $r^2+z^2=a^2$，这里变量是 (r,z)，而柱面方程给出了 r 和 θ 的关系，故 $z=\sqrt{a^2-r^2}=a|\sin\theta|, \theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

故 Γ 的参数方程为

$$x=a\cos^2\theta, y=a\cos\theta\sin\theta, z=a|\sin\theta|$$

根据曲线的定向，有

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot 2a\cos\theta(-\sin\theta)+a^2\sin^2\theta\cdot a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+a^2\cos^4\theta\cdot z'(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

上式中，第一项是奇函数，且 $z(\theta)$ 是偶函数，故 $z'(\theta)$ 是奇函数，从而

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-2\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a^3$$

注：有时候空间曲线的参数方程不易求出，或者求出来很复杂，可以考虑用投影法，将空间曲线的线积分转化为平面曲线的线积分。

3. 格林公式（结论 6 的应用）计算积分

$$I=\oint_C\frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$$

其中 $C: x^2+y^2=1$，取逆时针方向

解：令 $P(x,y)=\frac{e^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x), Q(x,y)=\frac{e^y}{x^2+y^2}(y\sin x+x\cos x)$ 计算易知，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，从而利用结论 6 可知，选取 ε 为半径的圆后，原积分等于 $I=\oint_{C_\varepsilon}\frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$ 而后者在圆上计算可得 $\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}e^y[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$，记 C_ε 围成的区域为 D_ε，再用一次格林公式有

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}-2e^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

应用积分中值定理，$I=\frac{1}{\varepsilon^2}(-2\pi\varepsilon^2e^\eta\cos\xi)=-2\pi e^\eta\cos\xi$，其中 $(\xi,\eta)\in D_\varepsilon$，这个等式对 $\varepsilon>0$ 都成立，令 $\varepsilon\to 0$ 有

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-2\pi e^\eta\cos\xi)=-2\pi$$

注：Gauss 公式也有类似的应用，例如计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧 $(a>0,b>0,c>0)$

解：记 $P(x,y,z)=\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},Q(x,y,z)=\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},R(x,y,z)=\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$，则在不包含原点的任何区域上有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

为了利用 Gauss 公式，对充分小的 $\varepsilon>0$，作闭曲面 $S_\varepsilon: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2$ 取外侧，由 Gauss 公式

$$I=\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint\limits_{S_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上述积分在 S_ε 的外侧，再一次用 Gauss 公式，则

$$I=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

4. 格林公式的应用（重积分复习题 20 题，结论 7 的应用）：

设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 上二次可微，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$$

证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$$

证：首先分析被积表达式 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$，这个式子可以看作是梯度 $\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ 与点 (x,y) 的内积，得到的是 $f(x,y)$ 沿着 (x,y) 方向的方向导数的 $\sqrt{x^2+y^2}$ 倍，而 (x,y) 方向可以看作是以原点为圆心 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为半径的圆的外法线方向，从而把这个积分转化为外法线导数的积分，这个过程实质是做了一个极坐标代换。

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$，因此有 $r\frac{\partial f}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$，所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r\frac{\partial f}{\partial r}\cdot r\mathrm{d}\theta$$

正如前面分析的那样，$\frac{\partial f}{\partial r}$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 的外法线方向，从而上面的积分中较难处理的一项可化为 $\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial r}r\mathrm{d}\theta=\int_{x^2+y^2=r^2}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$

由结论 7 可知，$\int_{x^2+y^2=r^2}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$，结合题目条件可以计算出这个积分为 $\pi(1-e^{-r^2}),(0<r<1)$ 带入原积分式有 $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi(1-e^{-r^2})r\mathrm{d}r$，计算得 $\int_0^1\pi(1-e^{-r^2})r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(e^{-1}-1)=\frac{\pi}{2e}$

注：从这个证明方法可以看出，若 $f(x,y)$ 是调和函数，则积分 $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

5. 设 D 为平面区域，$u(x,y)\in C^2(D)$，则 $u(x,y)$ 为调和函数（即满足调和方程的函数）的充要条件是：对 D 内任意一个圆周 L，且 L 所围圆属于 D，都有

$$\int_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$$

证：

“$\Rightarrow$”显然成立。

“$\Leftarrow$”设 $\oint_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$，要证明 $\Delta u\equiv 0$，采用反证法，假设 Δu 不恒为 0，则它在某一点 $(x_0,y_0)\in D$ 不为零，不妨设它的值 $a>0$，由连续性可知，$\exists\delta>0$，使得 Δu 在 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\delta^2$ 上的值大于等于 $\frac{a}{2}$（必要时可以缩小 δ 使得圆包含在 D 内）。对 D 内任意圆周均有 $\oint_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$，在这里取圆周 $L:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2$ 则

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\delta^2}(\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\frac{a}{2}\cdot\pi\delta^2>0$$

与上面的条件矛盾，故 $u(x,y)$ 为调和函数。

3 无穷级数

3.1 基本概念

1. 数项级数

- 级数的基本概念：数项级数，通项，第 n 个部分和，级数收敛，发散，级数收敛的 $\varepsilon-N$ 语言，收敛数列的性质（线性性，有限不变性，结合律）。
- 正项级数：正项级数，有界判别法，比较判别法，Cauchy 判别法，D'Alembert 判别法，Cauchy 积分判别法，p 级数。

- 交错级数：交错级数，Leibniz 判别法，Leibniz 级数。
- 一般项级数：Cauchy 收敛准则（充要条件），Weierstrass 判别法（一般项级数收敛的充分条件），Abel 部分和公式，Abel 判别法（乘积级数充分条件），Dirichlet 判别法，绝对收敛，条件收敛，黎曼重排定理，绝对收敛级数的分配律。

2. 函数项级数

- 函数列：函数列，收敛点，收敛域，极限函数，逐点收敛，函数列逐点收敛的 $\varepsilon - N$ 语言，函数列一致收敛及几何意义。
- 函数项级数：函数项级数，部分和函数列，函数项级数的收敛域，函数项级数的逐点收敛，函数项级数的一致收敛，柯西收敛准则（一致收敛的充要条件），Weierstrass 判别法（一致收敛的充分条件），Abel 判别法（乘积级数一致收敛充分条件），Dirichlet 判别法（乘积级数一致收敛充分条件）
- 一致收敛级数和函数的性质：逐项求极限，逐项求积分，逐项求导。（这三条定理记清楚条件和结论）
- 幂级数：幂级数，收敛半径，收敛区间，内闭一致收敛，和函数的三条性质，幂级数的四则运算，和函数的单侧连续性，泰勒级数。

3.2 基本题型及经典反例

3.2.1 基本题型

1. 数项级数：
(1) 判断具体的数项级数的敛散性：参考教材 $P_{212-214}$ 第 2，5，10，13，16 题
(2) 给定条件判断满足某些条件的数项级数的收敛性：参考教材 P_{213} 第 6，7，8 题

2. 函数项级数：
(1) 求函数项列的收敛域以及极限函数：参考教材 P_{227} 第 2 题
(2) 求函数项级数的收敛域：参考教材 P_{227} 第 3 题
(3) 判断函数项级数在给定区间上的一致收敛性：参考教材 $P_{227-228}$ 第 4，6，7，8 题
(4) 利用函数项级数的一致收敛的性质做一些计算：参考教材 P_{228} 第 9，

10，11 题

3. 幂级数：
(1) 求幂级数的收敛半径与和函数：参考教材 P_{240} 第 1，2，4 题
(2) 将函数表示为幂级数：参考教材 P_{241} 第 5，6 题

3.2.2 经典反例

1. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 不一定收敛
反例：$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

2. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且满足对 $\forall n$，$a_n \geq b_n$，b_n 不一定收敛
反例：$a_n = 0, b_n = -\frac{1}{n}$
这个反例说明了，比较判别法只适用与正项级数

3. 关于 D'Alembert 判别法和 Cauchy 判别法：
若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ 其中 $a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$，反之不对
反例：$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

4. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不一定收敛
反例:$a_n = \frac{1}{n}$

5. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 不一定收敛
反例：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1$ 但是 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ 发散

6. 若 $\{f_n(x)\}$ 在点集 D 上一致有界，则对 $\forall x_0 \in D$，数列 $\{f_n(x_0)\}$ 都有界，反之不真
反例：$\{f_n(x)\} = \frac{nx}{n+1}$

这一节相关反例很多，可以参考

3.3 常用结论

1. 数项比较判别法中常用的比较关系

$$\ln n \ll n^{\varepsilon} \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$(a > 1, \varepsilon > 0)$

2. 数项级数中一个重要恒等式的应用

$$a^{\ln b} = (e^{\ln a})^{\ln b} = e^{\ln a \ln b} = (e^{\ln b})^{\ln a} = b^{\ln a}$$

例如：判断级数的敛散性

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

利用恒等式有

$$(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln \ln n}$$

当 n 充分大的时候有 $n^{\ln \ln n} > n^2$，于是可以用 $\frac{1}{n^2}$ 为比较级数而知该级数收敛

3. 关于三角函数的一些处理

(1) 利用恒等式 $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin(\alpha)$ 等等将带三角函数的表达式化简

(2) 利用特殊角 $\cos(k\pi) = (-1)^k, \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k$ 将 $(-1)^k$ 化为三角函数

4.Wallis 公式和 Stirling 公式

Wallis 公式：

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}$$

Stirling 公式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

例如：判断级数的敛散性

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^k$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

这里 $a > 0$

解：

(1) 由 Wallis 公式知，该级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{\frac{k}{2}}}$ 通项为等价无穷小，从而可知当 $k \leq 2$ 时级数发散，当 $k > 2$ 时级数收敛

(2) 由 Stirling 公式知，该级数通项 $a_n = n! \left(\frac{a}{n}\right)^n \sim \left(\frac{a}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$，若 $a \geq e$，

则可看出 $\{b_n\}$ 不是无穷小量，因此此时 $\sum b_n$ 以及 $\sum a_n$ 均发散，否则，当 $0 < a < e$ 时，可以取 $r \in \left(\frac{a}{e}, 1\right)$，并且由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r^n} = 0$$

可知，$\sum a_n$ 收敛

5. 可以做为比较对象的特殊级数:
(1)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

利用积分判别法，相当于判断 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} \mathrm{d}x$ 的敛散性，显然有 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} \mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^p} \mathrm{d}t$，转化为 p 级数的敛散性，由后面反常积分结论知
1)$p > 1$ 级数收敛
2)$p \leq 1$ 级数发散
(2)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q \ln^p n}$$

利用积分判别法，相当于判断 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^q \ln^p x} \mathrm{d}x$ 的敛散性，当 $q = 1$ 时同 (1) 的结果，下面分两种情况讨论 q
1) 若 $q > 1$，由 $x \to +\infty$，$\ln x$ 与 x^ε 的关系有，可以选取充分小的正数 ε，使得 $q - \varepsilon > 1$，记 $g(x) = \frac{1}{x^q \ln^p x}$
若 $p \geq 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{q-\varepsilon} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\varepsilon (\ln^p x)} = 0$ 可知无穷积分收敛，从而级数收敛
若 $p < 0$，记 $r = -q$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{q-\varepsilon} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^\varepsilon}$ 利用洛必达法则知后面极限为 0，从而无穷积分收敛，级数收敛
2) 若 $q < 1$，选取充分小的正数 ε，使得 $p + \varepsilon < 1$ 若 $p \geq 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{q+\varepsilon} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\varepsilon}{\ln^p x}$ 利用洛必达法则知后面极限为 $+\infty$
若 $p < 0$，记 $r = -q$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{q+\varepsilon} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\varepsilon \ln^r t = +\infty$
这两种情形下，无穷级数发散，从而级数发散
综上所述
(1)$q > 1$，级数收敛
(2)$q = 1$，当 $p > 1$ 级数收敛，当 $p \leq 1$ 级数发散
(3)$q < 1$，级数发散

6. 函数项级数一致收敛的充要条件：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x \in I$

上一致收敛到 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|=0$$

3.4 经典例题

1. 利用泰勒展开判断数项级数的敛散性性：
判断级数的敛散性

$$\sum_{0}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

这里 $a>0$

解:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

而根据泰勒展开有

$$e^{\frac{1}{n}\ln a}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})-\left[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

合并有

$$\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left[\frac{(\ln a)^2}{2}+\frac{1}{8}\right]\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

那么

当 $a\neq e^{\frac{1}{2}}$ 时，$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sim\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}$，该级数发散

当 $a=e^{\frac{1}{2}}$ 时，$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{4n^2}$，该级数收敛

2. 利用等价无穷小判断级数敛散性：
判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$$

解：

$$\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n\ln(n+1)}\sim\frac{1}{n\ln n}$$

因此由结论 5(1) 知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，从而原级数发散

3. 含三角函数级数的处理：
判断级数的敛散性 (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

解：

(1) 通项 $(-1)^n\frac{\sin n}{n}=\frac{\cos(n\pi)\sin n}{n}=\frac{\sin n(1+\pi)-\sin n(\pi-1)}{2n}$，由于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n(1+\pi)}{2n}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n(\pi-1)}{2n}$ 都收敛，所以原级数收敛

(2) 利用 $\sin(\alpha+k\pi)=(-1)^k\sin(\alpha)$ 将通项化为 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)+n\pi)=(-1)^n\sin(\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right))$ 于是有 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n})$

当 $n\to+\infty$ 时 $\sin(\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n})\to\frac{\pi}{2n}$ 于是原级数满足 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\sim(-1)^n\frac{\pi}{2n}$，后者由交错级数的 Leibniz 判别法知其收敛

4. 利用一致收敛的充要条件证明函数列和函数项级数的一致收敛性：

判断函数项列的一致收敛性

(1)$f_n(x)=\frac{n+x^2}{nx},I=(0,1)$

(2)$f_n(x)=\frac{1}{1+nx},I=(0,1)$

解：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+x^2}{nx}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{x^2}{n}}{x}=\frac{1}{x}$ 所以 $E_n=\sup\limits_{0<x<1}\left(\frac{n+x^2}{nx}-\frac{1}{x}\right)=\sup\limits_{0<x<1}\left(\frac{x}{n}\right)\le\frac{1}{n}$，可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=0$ 故，函数列 $f_n(x)=\frac{n+x^2}{nx}$ 在 $I=(0,1)$ 上一致收敛到无界函数 $\frac{1}{x}$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0$，所以 $E_n=\sup\limits_{0<x<1}\left(\frac{1}{1+nx}\right)\ge\frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$，故原函数列不一致收敛

5. 求函数的幂级数展开：

求 $\int_0^x e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 得幂级数展开

解:

$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\cdot+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdot$ 于是有

$$\int_0^x e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

4 含参变量积分

4.1 基本概念

广义积分（类比数项级数）

- 无穷积分：无穷积分，无穷积分的收敛，无穷积分收敛的 Cauchy 准则，绝对收敛，条件收敛，有界判别法，比较判别法，p 积分，

Cauchy 判别法，第二积分中值定理，Abel 判别法（乘积积分收敛的充分条件），Dirichlet 判别法（乘积积分收敛的充分条件）。

- 瑕积分：瑕点，瑕积分，瑕积分的收敛，瑕积分收敛的 Cauchy 准则，瑕积分与无穷积分的相互转化。

含参变量积分（类比函数项级数）

- 含参变量常义积分：参变量（和参数的区别与联系），含参变量的常义积分，含参变量的常义积分三条重要的分析性质（积分极限换序，两个积分换序，积分求导换序），积分限依赖于参变量积分的求导（三条分析性质同上，这条最重要）。
- 含参变量广义积分：含参变量的广义积分，一致收敛，Cauchy 准则，Weierstrass 判别法，Abel 判别法，Dirichlet 判别法。
- 一致收敛含参变量广义积分的性质：连续性，有限可积性，无穷可积性，可导性。
- Beta 函数与 Gamma 函数：Beta 函数，Beta 函数的性质（对称性，连续性，递推公式），Beta 函数其他等价表达形式，Gamma 函数，Gamma 函数的性质（连续性，严格下凸性，递推公式），Gamma 函数与 Beta 函数的关系，余元公式，Legendre 加倍公式，

4.2 基本题型及经典反例

4.2.1 基本题型

1. 广义积分：
(1) 判断广义积分的收敛性：参考教材 $P_{262-263}$ 第 4，6，7 题
(2) 在广义积分收敛的情况下，求出该广义积分：参考教材 P_{263} 第 8 题

2. 含参变量常义积分：
(1) 积分限依赖与参变量积分的求导：参考教材 P_{269} 第 2 题
(2) 利用含参变量常义积分的性质计算积分：参考教材 $P_{269-270}$ 第 1，3 题

3. 含参变量广义积分：
(1) 求含参变量广义积分的收敛域：参考教材 P_{280} 第 1 题
(2) 判断含参变量广义积分在给定区间上的一致收敛性：参考教材 P_{280} 第 2，4 题

(3) 利用含参变量广义积分的一致收敛性计算积分：参考教材 P_{281} 第 5 题

4.Beta 函数与 Gamma 函数利用 Beta 函数与 Gamma 函数求积分：参考教材 P_{290} 第 6 题

4.2.2 经典反例

1. 若 $f(x)\geq 0$，且 $f(x)$ 连续，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}1-n^2|x-n| & n-\frac{1}{n^2}\leq x\leq n+\frac{1}{n^2},\\ 0 & n+\frac{1}{n^2}\leq x\leq n+1-\frac{1}{(n+1)^2}.\end{cases}$$

其中 $n=2,3,\cdot$ 则，$f(x)\geq 0$ 且 $f(x)$ 在 $[2-\frac{1}{4}+\infty)$ 上连续，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

收敛但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$

2.$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，函数 $g(x)$ 有界，但积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛
反例：令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, g(x)=\sin x$，显然 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 有界，但是

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

发散

3.$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 一定收敛，反之不一定。
反例：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

4.$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛
反例：

$$f(x,y)=\begin{cases}n^2 & n\leq x<n+\frac{1}{n^4},\\ 0 & n+\frac{1}{n^4}\leq x<n+1.\end{cases}$$

其中 $n=1,2,\cdot$ 显然，$\int_1^{N+1} f(x)\mathrm{d}x=\sum_1^N n^2\cdot\frac{1}{n^4}=\sum_1^N\frac{1}{n^2}$ 当 $N\to+\infty$ 时收敛，从而 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，因为 $f(x)\geq 0$，也即 $\int_1^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛
但是，$\int_1^{N+1} f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_1^N n^4\cdot\frac{1}{n^4}=N$，当 $N\to+\infty$ 时无极限，也即

$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 不收敛

5.$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 不一定收敛
反例：$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

6.$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 一致收敛，则必然内闭一致收敛，但反之则不然。
反例：$\int_0^{+\infty} te^{-tx}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛于 1，但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛

7.$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 一致收敛，则必然收敛，但反之则不然。
反例：$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 收敛于 $\frac{t}{1+t}$，但不一致收敛

8.$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 一致收敛，但不一定绝对收敛。
反例：$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{x^t}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[c,1], c\in(0,1)$ 上一致收敛，但在 $[c,1]$ 上每一点都不绝对收敛

9.$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，但不一定一致收敛。
反例：$\int_a^{+\infty} \frac{t}{x^2}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 绝对收敛但不一致收敛

4.3 常用结论

1.p 积分：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$$

$p>1$ 收敛，$p\leq 1$ 发散。

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}$$

$p\geq 1$ 发散，$p<1$ 收敛。

2. 常用含参数的积分的收敛性：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}$$

$0<p<1$ 积分条件收敛。
$1<p<2$ 积分绝对收敛。
$0<p<2$ 积分收敛。

3. 两个重要的反常积分：

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

4. 含有 $\ln x$ 的反常积分处理方法

(1) 当 $x\to+\infty$ 时 $\ln x < x^{\varepsilon}$ 对 $\forall\varepsilon>0$ 都成立

(2) 当 $x\to 0^+$ 时 $-\ln x$

5.Froullani 积分：

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义且连续，且当 $x\to+\infty$ 时有有限极限 $f(+\infty)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义且连续，又当 $x\to+\infty$ 时极限不存在，且对 $\forall A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义且连续，且当 $x\to+\infty$ 时有有限极限 $f(+\infty)$, 对 $\forall A>0$，积分 $\int_0^{A}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(\infty)\ln\frac{a}{b}$$

例如：计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x$$

解：在该题的情形下，$f(x)=\cos x, f(0)=1$，但是 $f(+\infty)$ 不存在，不过对 $\forall A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在，满足 Froullani 积分 (2) 的条件故，原积分可计算如下：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$$

6.Beta 函数的其他形式：

设 Beta 函数 $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$

(1) 在 Beta 函数中，令 $t=\frac{x}{1+x}$

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}\mathrm{d}x$$

(2) 在 Beta 函数中，令 $t=\cos^2\theta$

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

(3) 在 Beta 函数中，令 $t=\frac{x-a}{b-a}$

$$B(p,q)=\frac{\int_a^b(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\mathrm{d}x}{(b-a)^{p+q-1}}$$

特别地，当 $a=-1,b=1$ 时有

$$B(p,q)=\frac{\int_{-1}^1(x+1)^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x}{2^{p+q-1}}$$

4.4 经典例题

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内单调减少，且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to 0$，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 同时收敛或发散

证明：

由题意可知，对 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\geq 0$，又由单调减有，对 $\forall k\in\mathbb{N}$

$$f(k)\geq f(x)\geq f(k+1)$$

其中 $x\in[k,k+1]$

从而

$$f(k)\geq\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geq f(k+1)$$

于是有：

$$\sum_{k=1}^n f(k)\geq\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geq\sum_{k=1}^n f(k+1)$$

设 $S_n=\sum_{k=1}^n f(k)$，则有

$$S_n\geq\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geq S_{n+1}-f(1)$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则 $\{S_n\}$ 有界，从而 $\int_1^{n+1}f(x)$ 有界，数列 $\{\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\}$ 单调增，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，即无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$，即无穷积分发散

2. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内连续，单调，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

证明：

不妨设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调减，则 $\forall x\in[a,+\infty)$，有 $f(x)\geq 0$，否则，$\exists c\geq a$，使得 $f(c)<0$，则 $\forall x\geq c$，有 $f(x)\leq f(c)$

从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_c^{+\infty} f(c)\mathrm{d}x = -\infty$$

即与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾。

已知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由上面一题知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$，又由函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续单调，且 $f(x)\geq 0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3. 利用 Froullani 积分：

计算积分：

$$\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}\mathrm{d}x$$

解：设法将被积函数变为 Froullani 积分，利用分部积分有

$\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(b\sin ax - a\sin bx)\mathrm{d}(-\frac{1}{x}) = ab\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x = ab\ln\frac{b}{a}$

4. 有关参变量常义积分的证明

证明：

$$\int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

证：注意到，上式中左边是含参变量 t 的积分，设

$$f(t) = \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

要证明 $f(t)=2\pi$，只需要说明 $f'(t)\equiv 0$ 且在某一点处 $f(t)$ 的函数值等于 2π

首先，显然有 $f(0) = 2\pi$ 只需证明 $f'(t)\equiv 0$，由求导性质 $f'(t) = \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+\theta)\mathrm{d}\theta$ 发现证明 $f'(t)\equiv 0$ 较难，因为需要对 $\forall t$ 验证这个式子为 0，这并不容易，但是验证特殊点（例如:$f'(0)=0$）为 0 却是一件容易的事，这只需

要计算一个定积分，并且求导之后与原式相比有一个特点就是求一次导数 cos 里面加了一个 θ 角，那么容易证明

$$f^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+n\theta)\mathrm{d}\theta$$

于是 $f^{(n)}(0)=0$ 对 $\forall n=1,2,\cdot$ 得到这些结论之后，为了证明 $f(t)$ 是一个常数，将其与在 0 处的各阶导数值相联系，马上想到的只有 Taylor 公式用 Taylor 展开式得到：

$$f(t)=f(0)+0\cdot t+\cdot+0\cdot t^{n-1}+\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

其中 $\xi\in(0,t)$ 这样一来我们的目标变为直接验证 $f(t)=f(0)=2\pi$，这只需要对上式两边取极限 $n\to\infty$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi)=0$ 这可以通过下面的估计得到

$$|f^{(n)}(\xi)|=|\int_0^{2\pi}e^{\xi\cos\theta}\cos(\xi\sin\theta+n\theta)\mathrm{d}\theta|\le\int_0^{2\pi}e^{|\xi|}\mathrm{d}\theta\le 2\pi e^{|t|}$$

从而乘 $\frac{t^n}{n!}$ 两边去极限对于每一个固定的 t，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi)=0$$

注: 这道题还可以利用 Green 公式直接证明 $f'(t)\equiv 0$，证明如下

$$f'(t)=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

而

$$\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\oint\limits_{x^2+y^2=1}e^{tx}[\cos(ty)\mathrm{d}y+\sin(ty)\mathrm{d}x]$$

其中单位圆取逆时针方向，用 Green 公式得

$$f'(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{\partial}{\partial x}[e^{tx}\cos(ty)]-\frac{\partial}{\partial y}[e^{tx}\sin(ty)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

5. 有关含参变量广义积分一致收敛的证明

讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 中的一致收敛性

解法一: 利用 Abel 判别法证明一致收敛，这里关键是把哪个变量当作原变量，哪个变量当作参变量，结合 Abel 判别法的条件发现 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 是收敛的，且与 y 无关，于是这个积分显然是关于 y 一致收敛的，那么可以将 y 看作参变量，x 看作原变量应用 Abel 判别法上述分析可知 Abel 判

别法第一个条件已经满足，而对任意固定的 y，$\frac{1}{1+x^y}$ 是原变量 x 的单调函数，且 $\left|\frac{1}{1+x^y}\right|<1$，由 Abel 判别法知原参变量广义积分一致收敛

解法二：利用 Dirichlet 判别法，将原式子变为 $\int_0^{+\infty} x\sin x^2\cdot\frac{1}{x(1+x^y)}\mathrm{d}x$ 由于 $\left|\int_0^A x\sin x^2\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{2}\cos x^2|_0^A\right|\le 1$，对 $\forall y\in[0,+\infty)$ 都成立，对每一个固定的 $y\in[0,+\infty)$，$\frac{1}{x(1+x^y)}$ 对 x 单调，且

$$\left|\frac{1}{x(1+x^y)}\right|\le\frac{1}{x}\to 0$$

故，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x(1+x^y)}$ 关于 y 一致收敛于 0，由 Dirichlet 判别法知原广义积分对 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛

6. 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 (1)$\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$ 其中 $\alpha_0>0$ (2)$\alpha\in(0,+\infty)$ 中的一致收敛性

解：

(1) 由于 $\forall A>1$ 有

$$\int_1^A\sin x\mathrm{d}x$$

即关于 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$ 上述积分一致有界，又对每一个 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$，$\frac{1}{x^\alpha}$ 对 x 单调，且 $\left|\frac{1}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^{\alpha_0}}\to 0$，即当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$ 一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知上述反常积分在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛

(2)$\frac{\sin x}{x^\alpha}$ 在 $[1,+\infty)\times(0,+\infty)$ 中连续，对每一个 $\alpha\in(0,+\infty)$，广义积分时收敛的，$\alpha=0$ 是 $(0,+\infty)$ 的聚点，因此由积分 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散，知广义积分在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛

5 课后疑难题

这一节有关课后作业题中同学们提出的疑难题目的详细解答

1.P_{160} 第 7 题（题目太长就不抄了）

解：这道题目主要是告诉我们 Green 公式可以看作 Gauss 公式得特殊情况，也就是说把 Gauss 公式作用在一个特殊得柱面上可以得到 Green 公式，具体证明如下（一定要熟悉外法线方向情形下的 Gauss 公式和 Green 公式）

对于题目所给的柱面 V 应用 Gauss 公式有

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial V^+}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

其中 ∂V^+ 表示柱面 V 的外侧，包括三部分：柱面的上下底面 D_1,D_2，柱面的侧面 S，$\mathbf{n}$ 表示外侧的外法线方向由于向量场 $\mathbf{v}$ 是平面向量场，与上

下底面的外法线方向垂直，故有

$$\iint\limits_{D_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = 0$$

于是右边式子变为

$$\iint\limits_{\partial V^+} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial S} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

按照第二型曲面积分的计算可以得到：$\iint\limits_{\partial S} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \left[\int_{\partial D_2} \left(P\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle + Q\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle\right)\mathrm{d}s\right]\cdot 1 = \int_{\partial D_2} \left(P\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle + Q\cos\langle n,\mathbf{j}\rangle\right)\mathrm{d}s$

而左边的式子利用投影法有

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

综上所述

$$\int_{\partial D_2} \left(P\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle + Q\cos\langle n,\mathbf{j}\rangle\right)\mathrm{d}s = \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即为带外法线方向的 Green 公式

2.P_{250} 第 3 题（题目太长就不抄了）

解：这个题目主要找到数列 $\{a_n\}$ 的规律，粗略看 $\{a_n\}$ 中第一个 2 后面一个减号，其余的都是加号，所以可以将加号单独拎出来作为一个新数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_1 = 0, b_2 = \sqrt{2}, b_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdot$$

显然有这样两件事满足：

(1)$b_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$

(2)$a_n = \sqrt{2-b_n}$

对于第一个递推式，我们不陌生，令 $d_n = \frac{b_n}{2}$，可以将递推式化为 $d_{n+1} = \sqrt{\frac{1+d_n}{2}}$，这是三角函数的倍角公式，结合数列的第一项容易得到

$$c_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

从而

$$a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

，这个级数显然收敛，因为 $2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$ 3.P_{251} 第 7 题

解：注意几个概念：绝对收敛，在函数项级数中绝对收敛指的是绝对值点点收敛；一致收敛，只有函数项级数和含参变量广义积分有一致收敛

的概念，绝对值级数一致收敛，指一个函数项级数每一项取了绝对值后得到的级数一致收敛。

(1) 首先看绝对收敛，这个级数取绝对值之后变为 $\frac{x}{(1+x)^n}$，对每一个固定的 $x \in (0,+\infty)$，作为数项级数，这是一个等比数列，公比小于 1，故收敛，由 x 的任意性可知这个级数绝对收敛
(2) 再看一致收敛，想到利用一致收敛的充分条件判别，数项级数 $(-1)^n$ 部分和有界，并且由

$$\frac{x}{(1+x)^n} < \frac{1}{n}$$

可以推知 $\{\frac{x}{(1+x)^n}\}$ 单调有界且一致趋于 0 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{(1+x)^n}$ 一致收敛
(3) 判断绝对值级数的不一致收敛计算前 n 项部分和数列可知 $S_n(x) = (1+x)\left[1-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right]$（等比数列前 n 项和公式）从而极限函数为 $S(x) = 1+x$ 故利用充要条件 $|S_n(x)-S(x)| = \frac{1}{(1+x)^n}$，要证明不一致收敛，只需说明这个式子的上确界极限不收敛到 0 即可，由

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)| \geq |S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})| = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

右边的当 $n\to\infty$ 时不为 0，说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|S_n(x)-S(x)|$ 不等于 0，从而绝对值级数不一致收敛

4.P_{251} 第 2 题 (2)(4) 问
解：
(2)
(a) 证明一致收敛可以考虑用一致收敛充分条件 $|e^{-\alpha x}\sin\beta x| \leq e^{-\alpha x} \leq e^{-\alpha_0 x}$，魏尔斯特拉斯判别法可知由后者的收敛性可以推知前者的一致收敛性 (b) 遇到这种问题时有一个一般的判别不一致收敛的定理介绍一下：
若 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times T$ 上连续，t_0 为 T 的一个聚点，$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $T\setminus t_0$ 上收敛，而 $\int_a^{+\infty} f(x,t_0)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 T 上必定不一致收敛
有了这个定理这种类型的题目做法很方便，比如这个题目，显然 0 是 $(0,+\infty)$ 的一个聚点（开区间的端点都是聚点），并且 $\alpha = 0$ 代进去后的积分为 $\int_1^{\infty}\sin\beta x\mathrm{d}x$ 显然发散，所以这个题目为不一致收敛
(4)
考虑到 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x$ 是发散的（对充分大的 x，$\frac{\ln(1+x^2)}{x} > \frac{1}{x}$），尝试证明这个含参变量广义积分不一致收敛，这里采用反证法

假设该级数在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 是一致收敛的，那么再考虑所有的 $\alpha \in [0,1)$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}$$

这个级数根据 Abel 判别法可知是一致收敛的，从而必定点点收敛但是 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x$ 是发散的，矛盾，故原积分在给定区间上不一致收敛

5.P_{292} 第 3 题

解: 这个题目不好处理的点在于三角函数在分母，导致放缩的时候容易放大，所以这里采用分区间的方法，将这个积分转化到每一个周期里面，处理如下

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

下面要做的是对右边那一个积分式进行估计，最好能够估计成一个数项级数（只含有 n 的式子）估计如下

首先做变量代换变上下限得：

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(x+n\pi)}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

而

$$\int_0^{\pi} \frac{(x+n\pi)}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x < \int_0^{\pi} \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(n+1)\pi}{1+[1+(n\pi)^6]\tan^2 x}\mathrm{d}\tan x$$

后者可以积出来是一个关于 $\frac{1}{n^3}$ 形式的级数，是收敛的

6 说明和致谢

- 感谢劭文炳同学在 latex 和绘图上给予的帮助!
- 感谢李娟老师提供的复习题为本讲义提供素材!

如有问题, 联系 QQ 或者发邮件:

- hbr666@mail.ustc.edu.cn
- shaowb@mail.ustc.edu.cn