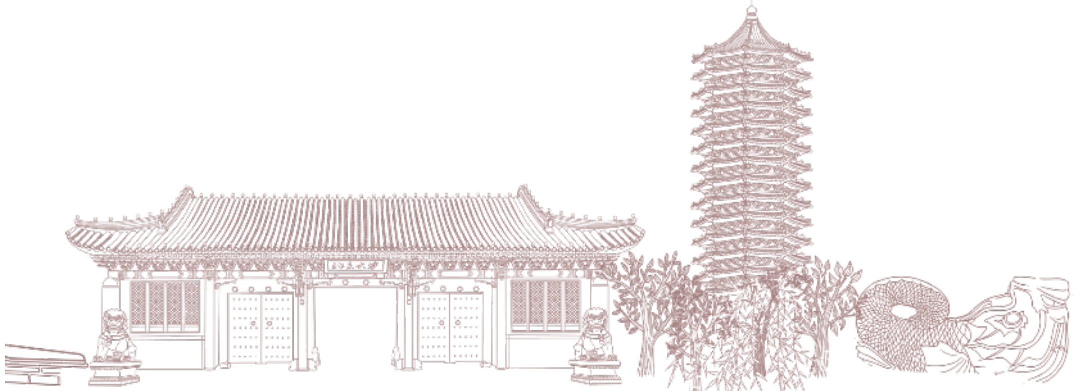
图形学中的数学

GAMES001: Mathematics in Computer Graphics

2024 年春季



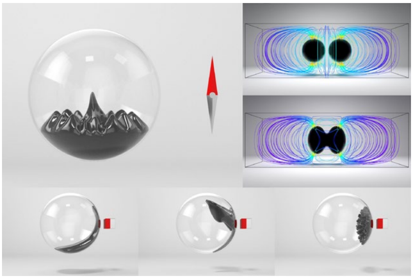
指导教师

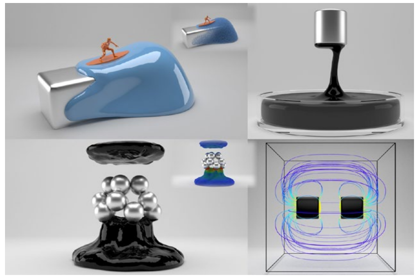
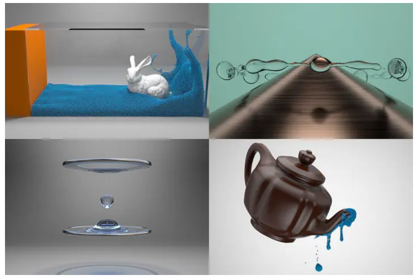
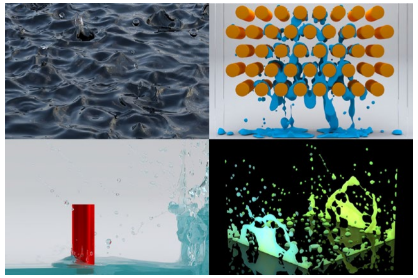
http://baoquanchen.info/

- 陈宝权 教授
  - 北京大学智能学院副院长
  - 研究领域: 计算机图形学、三维视觉与可视化
  - 中国计算机学会会士，中国图象图形学学会会士, IEEE Fellow, IEEE Visualization Academy
  - 在 ACM SIGGRAPH, IEEE VIS, ACM Transactions on Graphics (TOG), IEEE Transactions on Visualization and Graphics (TVCG) 等国际会议和期刊发表论文 200 余篇

讲者介绍

- 倪星宇
  - 北京大学四年级博士生（直博）
  - 研究方向: 物理模拟
  - 北京大学首届“图灵班” (2020) 毕业生
  - 第 32 届 NOI 金牌（国家集训队）
- 阮良旺
  - 北京大学三年级博士生（直博）
  - 研究方向: 物理模拟
  - 北京大学第二届 (2021) “图灵班”毕业生
  - 第 33 届 CPhO 金牌（国家集训队）



助教介绍

- 陶凝骁
  - 北京大学 2020 级元培学院本科生
  - 第 36 届 CPhO 金牌（国家集训队）
  - taoningxiao@gmail.com
- 王瑞诚
  - 北京大学 2020 级元培学院本科生
  - 第 33 届 CChO 金牌（国家集训队）
  - wrc0326@outlook.com
- 朱岳宸
  - 北京大学 2020 级“图灵班”本科生
  - 第 36 届 CPhO 金牌（国家集训队）
  - zhuyuechen01@gmail.com
- 于程
  - 北京大学 2020 级信息学院本科生
  - chengyupku@163.com

课程大纲

PEKING UNIVERSITY 北京大学

- Part I: 几何与代数
  - 1 线性代数基础
  - 2 计算几何
  - 3 旋转变换
  - 4 主成分分析与奇异值分解
- Part II: 数值方法
  - 5 插值、拟合与采样
  - 6 谱分析与傅里叶变换
  - 7 概率论 (I)
  - 8 概率论 (II)
- Part III: 微分方程求解
  - 9 场论初步
  - 10 古典微分几何
  - 11 微分方程
  - 12 线性系统
- Part IV: 优化与拓扑
  - 13 最优化
  - 14 机器学习 (I)
  - 15 机器学习 (II)
  - 16 拓扑

参考书目

- [1] Daniel Cohen-Or, Chen Greif, Tao Ju, Niloy J. Mitra, Ariel Shamir, Olga Sorkine-Hornung, and Hao (Richard) Zhang. 2015. A Sampler of Useful Computational Tools for Applied Geometry, Computer Graphics, and Image Processing (1st. ed.). A. K. Peters, Ltd., USA.
- [2] Eric Lengyel. 2011. Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition (3rd. ed.). Course Technology Press, Boston, MA, USA. （《3D游戏与计算机图形学中的数学方法》，詹海生译，北京：清华大学出版社，2016年。）
- [3] Avrim Blum, John Hopcroft, and Ravindran Kannan. 2020. Foundations of Data Science. Cambridge University Press, UK.

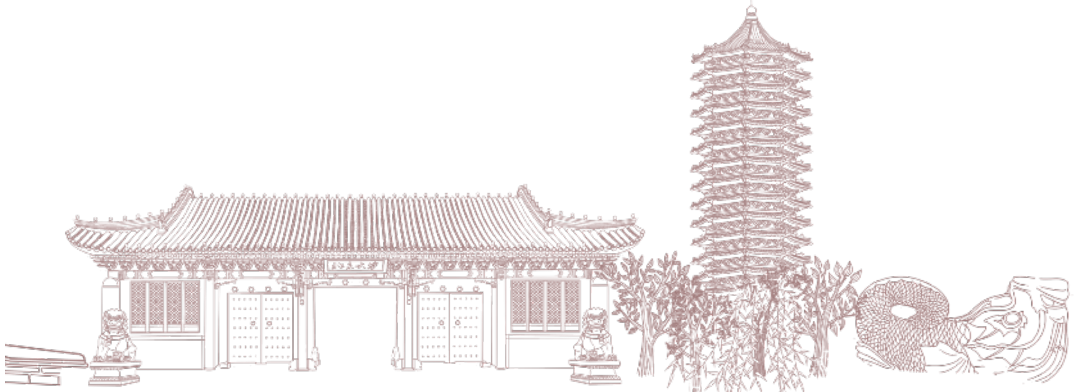
北京大學
PEKING UNIVERSITY

线性代数基础

Fundamentals of Linear Algebra

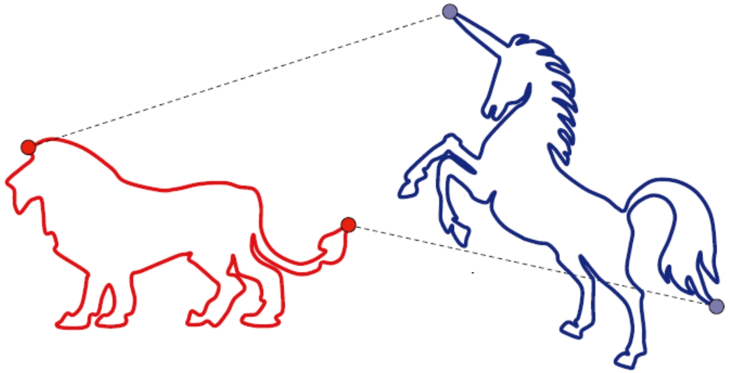
本章主讲：倪星宇

2024 年 3 月 4 日

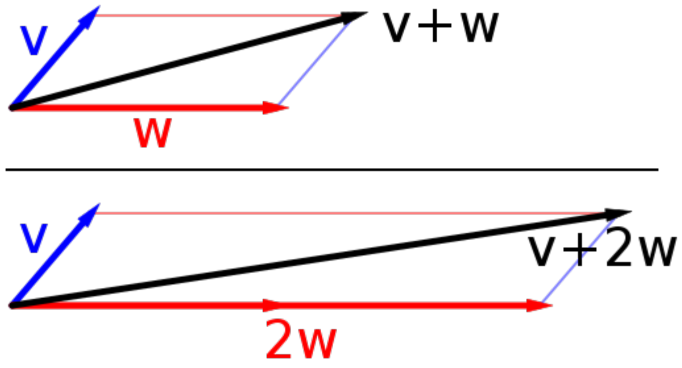


向量 (Vector)

- 图形学的基本研究对象：点的位置、法向……
  - 从本质上说，均为向量



- 什么是向量
  - 中学数学/物理：既有大小又有方向的量
    - 运算满足平行四边形法则
  - 线性代数：向量空间（线性空间）的元素
    - 运算满足公理化定义



向量空间 (Vector Space)

- 数域 F 上的向量空间：带有向量加法和标量乘法的非空集合 V
  - 向量加法结合律：$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
  - 向量加法交换律：$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
  - 向量加法单位元：$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}$
  - 向量加法逆元：$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$
  - 标量乘法与数域乘法的结合律：$a(b\boldsymbol{v})=(ab)\boldsymbol{v}$
  - 标量乘法单位元：$1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$
  - 标量乘法对向量加法的分配律：$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$
  - 标量乘法对数域加法的分配律：$(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$
- 在图形学应用中，数域 F 一般取为实数域 $\mathbb{R}$，其它选择包括复数域 $\mathbb{C}$ 等

线性组合 (Linear Combination)

- 线性相关/无关 (Linearly dependent/independent)
  - 定义在向量集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ 上
  - 线性相关：数域 F 中存在不全为 0 的一组数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 使得
    - $a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = 0$
    - $\boldsymbol{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\boldsymbol{u}_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\boldsymbol{u}_n$ $(a_1 \neq 0)$ 说明 $\boldsymbol{u}_1$ 是 $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u}_n$ 的线性组合
  - 线性无关：数域 F 中不存在不全为 0 的这样一组数
- 向量空间的维度
  - 空间内能找出的线性无关的向量的个数的最大值，记为 $\dim V$
  - $\dim V$ 个线性无关的向量构成空间的一组基矢 (basis vectors)
    - 任意空间中的向量可以**唯一**表示为这组基矢的线性组合（反证法给出唯一性）
    - 线性组合的系数 (coefficients) 被称为该矢量在这组基下的坐标 (coordinates)

图形学研究的维度

- 低维向量和向量空间（2D~4D）
  - 物理空间：Mesh、曲线、点云的坐标及导数
    - 欧几里得空间 (x, y, z)
    - 闵可夫斯基空间 (x, y, z, ict)
  - 颜色空间：RGB, CMYK
    - 作业：为什么颜色空间可以构成向量空间?
- 高维向量和向量空间
  - 灰度数字图像上所有像素值组成的向量
    - 1920×1080 的灰度数字图像维度达到 200 万
  - 二维或三维图形的所有自由度组成的向量
    - 《原神》中纳西妲运动的顶点自由度数为 45459
    - SIGGRAPH 水体模拟求解的向量维度一般在 10^6 至 10^7

线性映射 (Linear Mapping)

- $f: V \rightarrow W$
  - V, W 均为向量空间
  - $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
  - $f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$
  - 推论（如何证明?）
    - $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
    - $f(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v})$
- 低维空间的线性映射
  - 缩放、旋转是线性映射
  - 平移不是线性映射
  - ** 仿射变换 (affine transformation) = 缩放、旋转 + 平移

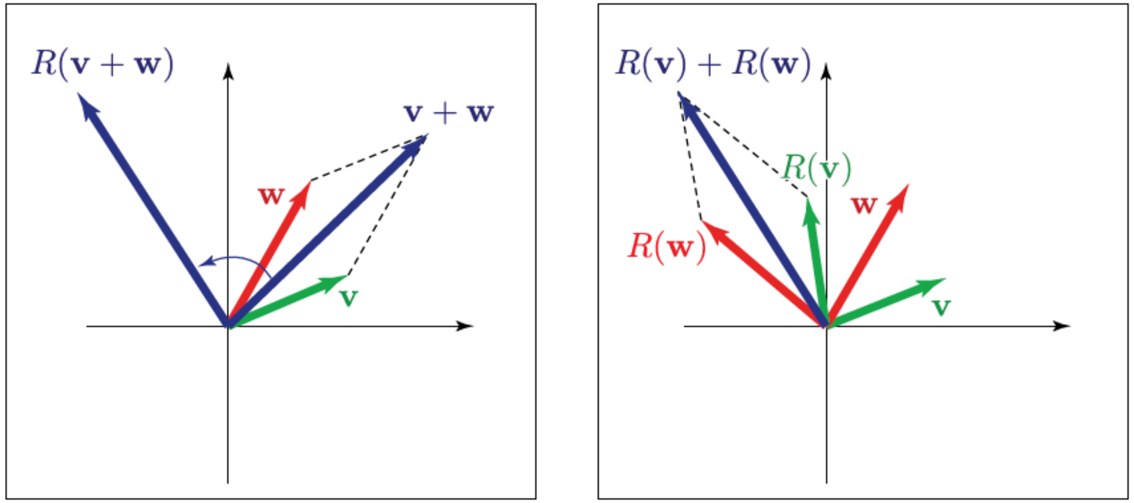


Figure 2.10: Rotation is a linear operator.

矩阵 (Matrix)

- 什么是矩阵
  - ✗ 二维数字阵列 (2D array)
  - ✓ 对线性映射的一种表示
    - https://www.bilibili.com/video/BV1ys411472E/ （** 强烈推荐）
- 矩阵运算的意义
  - 矩阵与向量的乘法
    - 给出向量在新的空间（经过矩阵对应的线性变换后的空间）里的坐标
  - 矩阵的乘法
    - 对空间的多次相继变换的合成
- 方阵
  - $n \times n$ 的矩阵，暗示变换前与变换后的空间有相同的维度；单位矩阵 $\boldsymbol{E}$

矩阵单目运算

- 转置 (Transpose) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$：$\boldsymbol{A}$ 的所有元素的下标行、列互换
  - 意义：矩阵对应的线性变换在对偶空间里的逆变换对应的矩阵
  - 性质：$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

复数域上的共轭矩阵：转置 + 共轭
记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$

- 行列式 (Determinant) $\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$
  - 意义：矩阵对应的线性变换对空间的拉伸程度的度量（物体经过变换前后的体积比）
  - 定义：在 n 阶方阵中选 n 个元素使得每行每列各有一个元素被选出，求其乘积
    - 再将不同选择方案的乘积乘以正负 1（由选择方法的奇偶性决定）加和
  - 计算方法
    - 低维矩阵：n 条主对角线分别计算乘积的和，减去 n 条次对角线分别计算乘积的和
    - 高维矩阵：高斯消元后取对角线元素的积
  - 性质：转置不变；交换行（列）取反

矩阵单目运算

- 迹 (Trace) $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$：矩阵的对角线元素之和
  - 意义：矩阵的特征值之和
  - 性质：$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$；$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$；$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$
- 逆 (Inversed) $\boldsymbol{A}^{-1}$：满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵
  - 意义：矩阵对应的线性变换的逆变换的矩阵；矩阵的特征值之积
  - 求解：伴随矩阵法；高斯消元法
  - 性质：$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$
- 伴随 (Adjugated) $\boldsymbol{A}^{*}$：由 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵
  - 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$；M_{ij} 为余子式，即删去第 i 行第 j 列后的行列式值
  - 性质：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

特征值 (Eigenvalue)

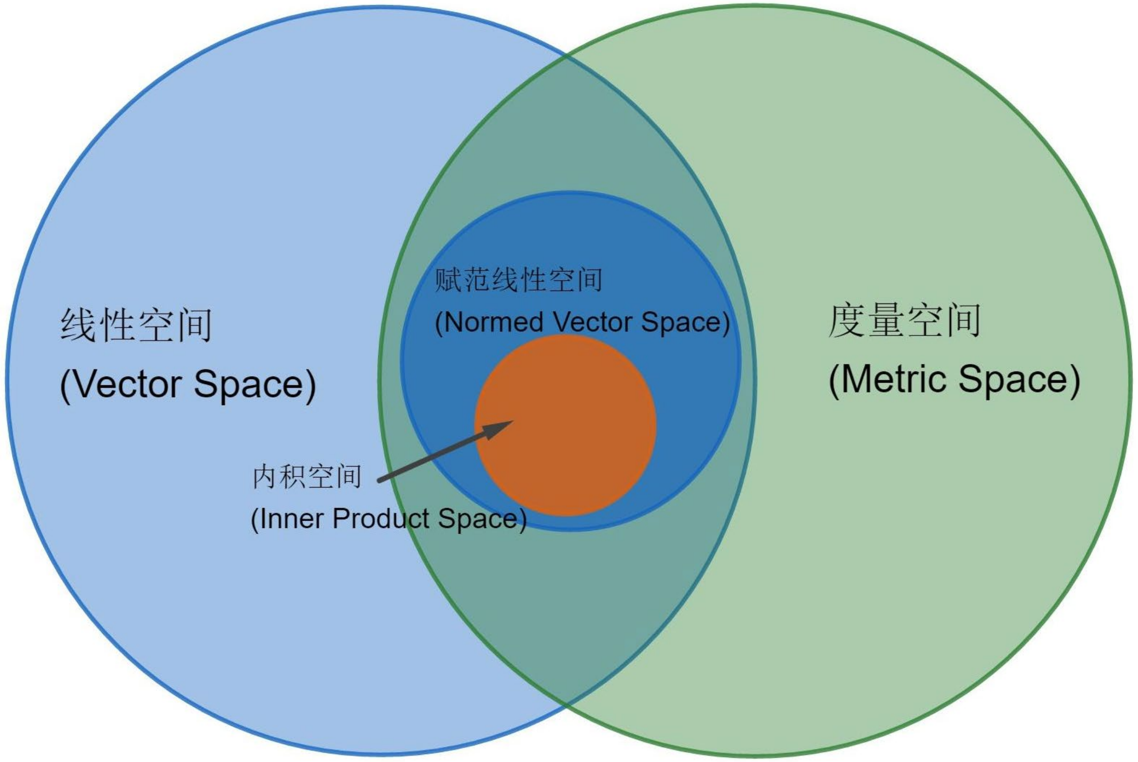
- 对于某些向量 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 的数 λ 称为特征值（$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵）
  - 这些向量 $\boldsymbol{u}$ 称为特征向量，每个特征值对应的特征向量构成向量子空间
    - $\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \Rightarrow \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$
  - 求解特征值：$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = 0$
    - 想得到关于 $\boldsymbol{u}$ 的非零解，则 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，该行列式对应于一元 n 次方程组
  - 特征值的意义：对于某些向量，特定线性变换的作用效果与数乘等价
- 矩阵多项式的特征值
  - $f(\boldsymbol{A}) = c_k\boldsymbol{A}^k + c_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{E}$
    - 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 必为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值
    - 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$；则 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值由 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 给出
  - 重要应用：最大特征值称为谱半径 (spectral radius)；最大最小特征值之比称为条件数

赋范 (Normed) 向量空间

- 度量空间 vs. 向量空间
  - 向量空间中的元素不能比大小
  - 对于集合 V，定义度量函数 $d: V \times V \to \mathbb{R}$，设 $x, y, z \in V$
    - $d(x, y) \geq 0$（非负性）
    - $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（不可区分者的同一性）
    - $d(x, y) = d(y, x)$（对称性）
    - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$（三角不等式）
  - 定义了度量函数的集合 V 称为度量空间 (metric space)，度量函数 d 又称为“距离”
- 赋范向量空间 = 向量空间 + 度量函数（$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$）
  - 定义范数 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$
    - $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$, $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (正定性)；$\|a\boldsymbol{u}\| = |a|\|\boldsymbol{u}\|$ $(a \in \mathbb{R})$ (正齐次性)
    - $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (次可加性, 三角不等式)

内积空间 (Inner Product Space)

- 内积：$V \times V \to \mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的内积记作 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$
  - $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$
  - $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$
  - $\langle \boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v} \rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$
  - $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$
- 赋范线性空间 vs. 内积空间
  - $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$
  - 范数只给出了向量的长度
  - 内积还给出了向量的夹角



内积与正交

- 正交 (orthogonal) 与单位正交基底
  - 定义两向量的夹角 $\theta_{uv} = \arccos\frac{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}}$，当 $\cos\theta_{uv} = 0$ 时称为两向量正交
  - 正交基底：一组两两之间互相正交的向量基底；单位基底：模长均为 1 的向量基底
    - 通过施密特正交化加规范化可以使任意一组基底成为单位正交基底
  - 单位正交基底的性质（设 $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$）
    - $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \langle u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3, v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- 单位正交变换：不改变任意两个向量的内积的变换（保持单位正交基底）
  - 单位正交矩阵：变换对应的矩阵 $\boldsymbol{R}$，满足 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}$；对应于旋转与镜像空间内的旋转
- 笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinates)
  - 一组 $\mathbb{R}^n$ 中的单位正交基底加上原点构成的坐标系；成立 $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$

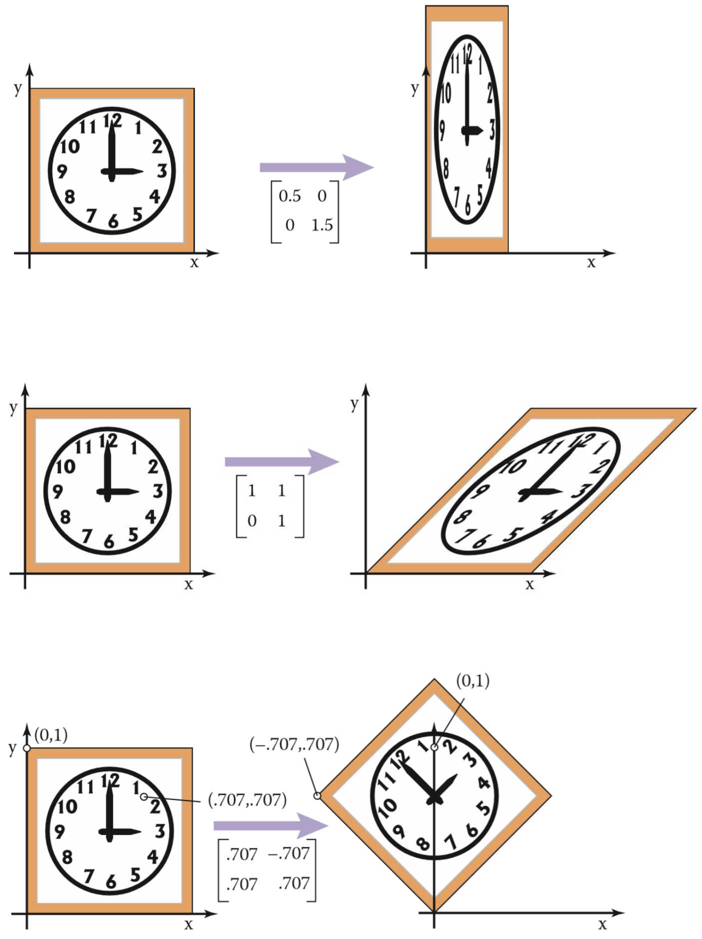
幺正空间与幺正变换

- 幺正 (unitary) 空间，数学上又译为酉空间
  - 定义了内积的复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，内积通过埃尔米特 (Hermite) 函数给出
- 幺正变换，数学上又译为酉变换
  - 将幺正空间中的单位正交基底变换为单位正交基底的变换
    - 单位正交基：亦称为规范正交基、标准正交基
  - 单位正交变换可视为幺正变换在实数域 $\mathbb{R}$ 上的特例
- 幺正空间/变换的应用
  - 量子力学：波函数在复数域上定义
  - 幺正性：算子 (operator) 保内积
  - 线性算子：无限维空间（函数空间）上的线性变换，也存在特征值、内积等概念

低维变换矩阵

北京大學 PEKING UNIVERSITY

- 2D 线性变换
  - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$
  - $\mathrm{scale}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
  - $\mathrm{shear}_x(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{shear}_y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$
  - $\mathrm{rotate}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

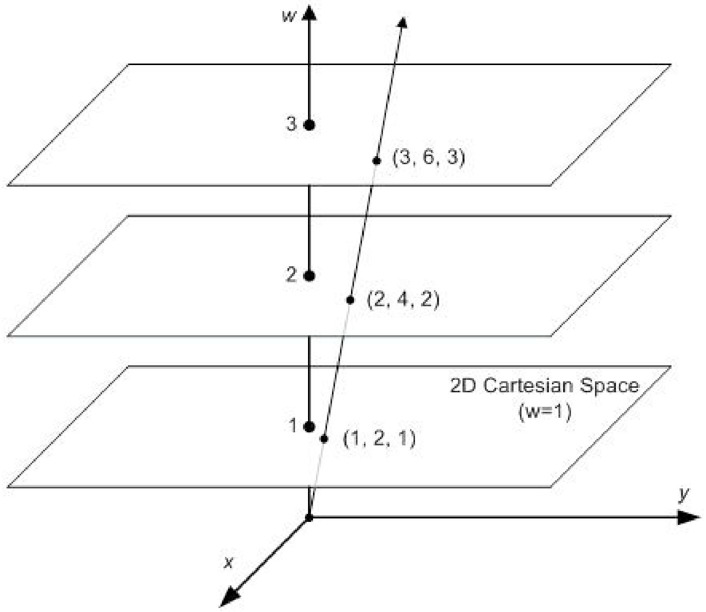


低维变换矩阵

- 3D 线性变换
  - $\mathrm{scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$
  - $\mathrm{shear}_x(s_y, s_z) = \begin{pmatrix} 1 & s_y & s_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\mathrm{rotate}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 绕任意轴旋转
  - $\boldsymbol{R}^T \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{R}$
  - $\boldsymbol{R}$ 为将旋转轴转为 z 轴的变换矩阵
  - 参见第三讲

齐次 (Homogeneous) 坐标

- 实质：用 $n+1$ 个数表示 n 维坐标
  - 二维：$(x, y, w) \to \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)$
  - 三维：$(x, y, z, w) \to \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$
  - 齐次坐标等比例放缩不影响其表示的 n 维坐标
  - 二维仿射变换
    - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + t_x \\ a_{21}x + a_{22}y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$
    - 平移变换是线性变换完成后进行的
  - 默认顺序 (Houdini、Blender 等)：缩放 -> 旋转 -> 平移



矩阵的变换

- 矩阵的变换 vs. 线性变换
  - 矩阵就是线性变换的表示，所以矩阵的变换其实是线性变换的“变换”
- 相似变换
  - 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$
  - 意义：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以看作同一个线性变换在不同基底下的表象
  - 相似对角化：当存在 n 个线性无关的特征向量时，可以将矩阵相似为一个对角矩阵
    - 在某个特殊的基底下，矩阵对应的线性变换等价于纯缩放变换
- 合同变换
  - 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同，记作 $\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}$
  - 意义：A 与 B 可以看作同一个二次型在不同基底下的表象

二次型

- 二次型 (quadratic form)： n 个变量的二次多项式
  - 示例： 圆锥曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$
    - 矩阵表示 $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
  - 一般形式： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$
  - 合同变换后： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) = 0$
    - 意义： 变换基底后的二次型系数
  - 应用
    - 将某任意朝向的椭圆方程转换为标准形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
      - $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

正定矩阵与对称矩阵

- 正定 (positive definite) 矩阵
  - 定义：满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0\ (x \neq 0)$ 的矩阵
  - 意义：可以构建恒取正值的二次型
    - 二元可微函数 $f(x,y)$，其二阶微分 $(\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$ 给出沿任意方向的二阶导数
  - 性质：正定矩阵的特征值全为正数（逆命题不成立）
  - 半正定矩阵：满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0\ (x \neq 0)$ 的矩阵
- 实对称矩阵
  - 定义：实数域上的对称矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$）
  - 性质：可以被正交矩阵对角化；只要特征值全为正数就是正定的

复数域上的埃尔米特 (Hermitian) 矩阵
满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$