数学分析笔记

王丹阳

2020/9/6

目录

第一章　常用不等式

1.1　Bernoulli 不等式

命题 1.1.1 (Bernoulli 不等式) 设 $h > -1$,$n \in N^+$, 则成立 $(1+h)^n \geq 1 + nh$, 且当 $n > 1$ 时当且仅当 $h = 0$ 时取等号

证明 1 提供两种证明思路:

1. 数学归纳法容易证明，在此不详细叙述
2. 注意到有公式
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$
成立. 对原不等式作变形、因式分解，再对 h 分类讨论容易证明

命题 1.1.2 (推广) 设 $a_i > -1(i = 1, \cdots, n)$ 且同号，则成立
$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 时取等号

证明 2 提供两种证明思路:

1. 数学归纳法是容易证明的
2. 直接对原不等式左边进行展开有:
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2} + \cdots + \sum_{i_1 \cdots i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i_1 \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k} (\text{其中 } i_1 \cdots i_k \text{ 是 } 1,2,\cdots,n \text{ 的一个 } n \text{ 元有序排列}) \\ &\geq \text{右边}\end{aligned}$$

为了方便应用，引出 Bernoulli 不等式的双参数形式

命题 1.1.3 (Bernoulli 不等式的双参数形式) 设 $A > 0$, $A + B > 0$, 则 $1 + \frac{B}{A} > 0$, 应用 *Bernolli* 不等式有：

$$\left(1 + \frac{B}{A}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{B}{A}$$

化简得双参数形式的 *Bernoulli* 不等式：

$$(A + B)^n \geq A^n + nA^{n-1}B$$

易知当且仅当 $\frac{B}{A} = 0$ 即 $B = 0$ 时取等号

1.2 Cauchy-Schwarz 不等式与三角不等式

Cauchy-Schwarz 不等式

命题 1.2.1 *Cauchy-Schwarz* 不等式有多种形式，在此先弄懂在欧氏空间 R^n 中的形式。它的几何含义是：$\forall a, b \in R^n$, 都有 $|a \cdot b| \leq |a||b|$. 若设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n)$, 则有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

这个不等式的证明有点神来之笔的意思，暂且看懂就好

证明 3 引入变量 λ, 注意到：

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i - b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

这是一个关于变量 λ 的一元二次不等式，根据其根的判别式可直接得到待证不等式。

三角不等式

这个不等式不仅在实数范围内成立，在复数范围和欧式空间中也成立。在欧式空间中两个不等号的含义分别是：

- 三角形两边之差小于第三边
- 三角形两边之和大于第三边

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

在复数范围和欧式空间中的证明都只要借助 Cauchy-Schwarz 不等式即可

1.3　均值不等式

设 $a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$, 则有算数平均值不小于几何平均值不小于调和平均值，即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_1}}$$

证明思路如下：

- 第二个不等式可由第一个不等式证明
- 第一个不等式由 Cauchy 向前向后证明法证明

1.4　排序不等式

设有两个有序实数组：$a_1 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq \cdots \leq b_n$, $c_1, \cdots, c_n$ 是 $b_1, \cdots, b_n$ 的任一排列，则有

$$\text{顺序和} \geq \text{乱序和} \geq \text{逆序和}$$

其中：

- 顺序和：$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
- 乱序和：$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i$
- 逆序和：$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$

注 1 这是一种贪心的算法思想：要使结果最大，每一步都选出两个序列中最大的数相乘

证明 4 *TODO*: 结论显然，证明以后有时间再添加

1.5　重要的三角不等式

这个不等式是重要极限的基础

命题 1.5.1 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $sin\, x < x < tan\, x$

证明 5 证明要点：

- 直角三角形的直角边小于斜边
- 单位圆面积法

1.6　$n!$ 的估计

$n!$ 的常见估计很有用，在此先介绍几个简单的估计方式：

命题 1.6.1 $n > 1$ 时，有*:*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

这由算数-几何均值不等式可立即得到

更精确的上界的估计：注意到：

$$(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdots (1 \cdot n)$$

对上述等式右边的 n 项应用算数-几何均值不等式容易得到：

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$$

后面还会介绍 Wallis 公式和 Stirling 公式来估计 $n!$

第二章　实数的连续性

整个微积分的基础建立在实数的连续性之上。但不幸的是实数的连续性是一个很显然却又比较复杂的事情（涉及到实数系的构造）。而确界存在定理又很好地反映了实数不存在空隙。为了方便直接从确界存在定理（默认对，不加证明）出发进行学习。

定理 2.0.1 (确界存在定理)

- 实数的非空子集若有上界，必有最小上界（上确界）
- 实数的非空字节若有下界，必有最大下界（下确界）

第三章　数列极限