数学分析笔记

王丹阳

2020/9/6

目录

第一章　常用不等式

1.1　Bernoulli 不等式

命题 1.1.1 (Bernoulli 不等式) 设 $h > -1$,$n \in N^+$, 则成立 $(1+h)^n \geq 1+nh$, 且当 $n > 1$ 时当且仅当 $h = 0$ 时取等号

证明 1 提供两种证明思路：

1. 数学归纳法容易证明，在此不详细叙述

2. 注意到有公式
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$
成立. 对原不等式作变形、因式分解，再对 h 分类讨论容易证明

命题 1.1.2 (推广) 设 $a_i > -1(i = 1, \cdots, n)$ 且同号，则成立
$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 时取等号

证明 2 提供两种证明思路：

1. 数学归纳法是容易证明的

2. 直接对原不等式左边进行展开有：
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2} + \cdots + \sum_{i_1 \cdots i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i_1 \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}(\text{其中 } i_1 \cdots i_k \text{ 是 } 1, 2, \cdots, n \text{ 的一个 } n \text{ 元有序排列}) \\ &\geq \text{右边}\end{aligned}$$

为了方便应用，引出 Bernoulli 不等式的双参数形式

命题 1.1.3 (Bernoulli 不等式的双参数形式) 设 $A > 0$, $A + B > 0$, 则 $1 + \frac{B}{A} > 0$, 应用 *Bernolli* 不等式有:

$$\left(1 + \frac{B}{A}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{B}{A}$$

化简得双参数形式的 *Bernoulli* 不等式:

$$(A + B)^n \geq A^n + nA^{n-1}B$$

易知当且仅当 $\frac{B}{A} = 0$ 即 $B = 0$ 时取等号

第二章　实数的连续性

整个微积分的基础建立在实数的连续性之上。但不幸的是实数的连续性是一个很显然却又比较复杂的事情（涉及到实数系的构造）。而确界存在定理又很好地反映了实数不存在空隙。为了方便直接从确界存在定理（默认对，不加证明）出发进行学习。

定理 2.0.1 (确界存在定理)

- 实数的非空子集若有上界，必有最小上界（上确界）
- 实数的非空字节若有下界，必有最大下界（下确界）

第三章　数列极限