# 矩阵理论作业

王丹阳

2020/9/9

# 目录

# 第一章　第一次作业

**习题 1** 证明下列命题：

*1.* 线性空间中的零向量唯一

*2.* 每个向量的负向量唯一

*3.* 零和任何向量的数量积为零向量

*4.* 任何数与零向量的数量积为零向量

*5.* $-1$ 和任何向量的数量积为这个向量的负向量

**证明 1** 证明：设 $V$ 是数域 $K$ 上的线性空间

*1.* 设 $0, 0^{'}$ 都是线性空间 $V$ 中的零向量，则*:*

$$0 = 0^{'} + 0 = 0 + 0^{'} = 0^{'}$$

即零向量唯一

*2.* $\forall x \in V$, 假设 $\alpha, \beta$ 都是 $x$ 的负向量，则有：

$$\begin{aligned}
\alpha + x = 0 = \beta + x \\
(\alpha + x) + (-x) = (\beta + x) + (-x) \\
\alpha + (x + (-x)) = \beta + (x + (-x)) \\
\alpha + 0 = \beta + 0 \\
\alpha = \beta
\end{aligned}$$

即负向量唯一

*3.* $\forall x \in V$, 有：

$$\begin{aligned} 0x &= (0+0)x = 0x + 0x \\ -(0x) + 0x &= -(0x) + (0x + 0x) \\ 0 &= (-(0x) + 0x) + 0x \\ 0 &= 0 + 0x \\ 0 &= 0x \end{aligned}$$

得证

*4.* $\forall a \in K$, 有：

$$\begin{aligned} a0 &= a(0+0) = a0 + a0 \\ -(a0) + a0 &= -(a0) + (a0 + a0) \\ 0 &= (-(a0) + a0) + a0 \\ 0 &= 0 + a0 \\ 0 &= a0 \end{aligned}$$

得证

*5.* $\forall x \in V$, 有：

$$-1(x) + x = -1(x) + 1x = (-1+1)x = 0x = 0 = -x + x$$

由负向量的唯一性得：$-1(x) = -x$

**习题 2** 设 $V = \{A \mid A^2 = A, A \in R^{n\times n}\}$, 在 $V$ 中定义通常的矩阵加法与数乘运算，试问 $V$ 是否构成线性空间？并说明理由。

**解 1** 显然 $E \in V$, 在加法运算下，$E + E = 2E$, 但 $(2E)^2 = 4E \neq 2E$，故 $(E+E) \notin V$, 不满足加法的封闭性。因此不构成线性空间！