线性代数

王丹阳

2020/7/22

目录

第一章 线性方程组

线性方程组是高等代数研究问题的起点

1.1 一些概念

由对 n 元线性方程组的高斯消元法求解引入矩阵及其相关基本概念

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

求解过程中不难发现方程组的解只与系数和常数项有关。为此我们从中抽象出一个数学模型，把它叫矩阵。

定义 1.1.1 由 $s \cdot n$ 个数排成 s 行，n 列的一张数表称为一个 $s \times n$ 矩阵，矩阵常用大写字母 A, B, C 表示. 若令 $A = (a_{ij})_{s\times n}$，则其第 i 行，第 j 列个元素可表示为 $A(i;j)$ 或 a_{ij}

定义 1.1.2 线性方程组系数所组成的矩阵称为系数矩阵，带上常数项后称为增广矩阵

易知，高斯消元法中所用到的变换不改变方程组的解，因此引入矩阵初等行变换的概念

定义 1.1.3 称以下三种变换为矩阵的初等行变换:

- 用一个非零数乘以一行
- 交换两行
- 用一行的倍数加到另一行

由最后的求解又引入了行阶梯型矩阵和行最简型矩阵、主元。主元反映到线性方程组中又产生了主变量和自由变量的概念。

定义 1.1.4 (行阶梯形矩阵) 一个矩阵是行阶梯型矩阵，当且仅当它满足:

- 若有零行，零行在最下方

- 对于非零行，从左到右第一个非零元称为主元，主元的列指标随着行指标的增大严格增大

定义 1.1.5 (行最简型矩阵) 一个矩阵是行最简型矩阵，当且仅当它满足：

- 是行阶梯型矩阵
- 主元都是 *1*
- 主元所在列的其它元素都是 *0*

定义 1.1.6 (主变量) 以主元为系数的便量称为主变量，其它变量称为自由变量

1.2　线性方程组的解的情形及判别准则

根据一些例子不难猜想出线性方程组的解有三种情形：

1. 当方程出现不相容时，无解
2. 有唯一解
3. 有无穷多解

现予以说明：首先将对应的增广矩阵化为行阶梯型，设变量有 n 个，此时有 r 个非零行。

- 若某行出现"$0 = d(d \neq 0)$" 时，显然无解
- 由主元的定义知有 r 个主元，故 $r \leq n$
  - 当 $r = n$ 时，继续将行阶梯型化为行最简型，可直接得到此时有唯一解
  - 当 $r < n$ 时，存在自由变量，此时有无穷多解

定理 1.2.1 (线性方程组解的情况及判定准则) n 元线性方程组的解的情形只有三种：

- 无解 $\Longleftrightarrow$ 出现"$0 = d(d \neq 0)$"
- 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n$
- 有无穷多解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n$

推论 1 n 元齐次线性方程组的解的情形有两种：

- 有唯一零解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n$
- 有无穷多解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n$

1.3 数域

之前我们对线性方程组默认是系数对加减乘除都封闭，但是有些方程组在整数范围内不一定有解，例如:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

这种情形对我们的求解造成了额外的困扰。因此，要使我们所做的初等变换是合理的，我们引入数域的概念。

定义 1.3.1 (数域) 设集合 K 是复数集的一个子集，如果 K 满足：

1. $0,1 \in K$
2. K 对加减乘除运算封闭

则称 K 是一个数域

推论 2 根据定义容易验证最小的数域是有理数域，最大的数域是复数域

以后我们讨论的线性方程组都是数域 K 上的，即它的系数、常数项都属于 K，并且在数域 K 里求它的解; 所讨论的矩阵，它的全部元素也属于 K

第二章　行列式

为了直接从线性方程组的系数出发探究线性方程组的解的情况。我们先从解剖“麻雀”—2 个未知数，2 个线性方程的方程组开始。对方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

a_{11}, a_{21} 不全为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$, 对其增广矩阵化行阶梯型有：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

不难得出以下结论：

- $a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} \neq 0$

  $$\Longleftrightarrow$$

  原方程有唯一解

- $a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} = 0$

  $$\Longleftrightarrow$$

  原方程无解或有无穷多解

由此我们给出二阶行列式的定义

定义 2.0.1 设 2 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

, 则其行列式为

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

注 1 2 阶行列式有 2! 项，每一项的元素都取自不同行不同列，每一项的正负由行指标按顺序排列后，列指标排列的逆序对个数决定

有上面的分析, 容易得到以下定理：

定理 2.0.1 对于两个方程的二元一次方程组:

- 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵的行列式不等于零
- 无解或无穷多解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵的行列式等于零

对于 n 个方程的 n 元线性方程组，能否用所谓的 n 阶行列式反应其解的情况呢？实际上是可以的。

注 2 n 阶行列式的定义方式并不自然，暂时也只能这样了。

2.1　n 元排列

由二阶行列式的定义与列指标排列的逆序对个数有关，为了给出 n 阶行列式的每一项的符号，我们需要先研究一个 n 元排列的奇偶性

定义 2.1.1 n 个不同整数的一个全排列称为一个 n 元排列

定义 2.1.2 一个 n 元排列中任意取两个数，若大的在前，小的在后，则这两个元素形成了一个逆序对。

定义 2.1.3 对一个 n 元排列，若逆序对个数为奇数个，则称其为奇排列，反之称为偶排列。

定理 2.1.1 相邻两个元素交换改变排列的奇偶性

不难推出:

定理 2.1.2 任意两个元素交换改变排列的奇偶性，即:

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_{i-1}\boldsymbol{p_i}p_{i+1}\cdots p_{j-1}\boldsymbol{p_j}p_{j+1}\cdots p_n)}=(-1)\times(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_{i-1}\boldsymbol{p_j}p_{i+1}\cdots p_{j-1}\boldsymbol{p_i}p_{j+1}\cdots p_n)}$$

2.2　n 阶行列式的定义

2.2.1　行指标有序的定义方式

仿照 2 阶行列式，n 阶行列式的每一项都是 n 个不同行不同列的元素的乘积，共有 $n!$ 项，每一项的正负由行指标按顺序排列后，列指标排列的逆序对个数决定，因而对 n 阶行列式定义如下:

定义 2.2.1 设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

定义其行列式

$$detA=|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

2.2.2　更一般的定义方式

上面每一项的行指标都是有序排列的，但每一项的 n 个元素的乘积可以按任意次序相乘。即若将每一项的行指标混排，其符号该如何确定呢？
对 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 这一项，假设经过 s 次对换变为排列 $a_{k_1p_1}a_{k_2p_2}\cdots a_{k_np_n}$, 则对于行指标排列的奇偶性和列指标排列的奇偶性分别有：

$$\begin{cases}(-1)^s(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}\\(-1)^s(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\end{cases}$$

故有

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

和

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{k_1p_1}a_{k_2p_2}\cdots a_{k_np_n}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由上面的分析，容易导出以下两条性质：

定理 2.2.1 (行列式的一般定义) 给定行指标的一个排列 $k_1k_2\cdots k_n$, n 级矩阵 A 的行列式

$$|A|=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{k_1p_1}a_{k_2p_2}\cdots a_{k_np_n}$$

若每一项按照列指标自然序排好位置，那么

定理 2.2.2

$$|A|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

注 3 上面这条定理其实已经说明行列式的行和列具有相同的地位

2.3　行列式的性质

从探究系数矩阵 A 的初等变换会对它的行列式产生什么样的影响这个问题出发我们容易探究出关于行列式的一系列性质：

1. $|A|=|A^T|$ 这一条由定义可以直接导出，说明了对行成立的性质对列也成立，故下面只注明行的性质
2. 一行的公因子可以提出
3. 互换两行行列式变号
4. 若某一行是两组数的和，则行列式可以拆成两个行列式的和，他们的这一样分别是上述两组数，其它行不变

5. 有两行相同，则行列式的值为 0
6. 行列式中有两行成比例，则行列式的值为 0
7. 把一行的倍数加到另一行上，行列式的值不变

以上性质全都可以由定义为出发点推导得来

2.4　行列式按一行/列展开

注意这样一句话：行列式的每一项都是不同行不同列的元素的乘积，因而在取定一个元素 a_{ij} 后，d 第 i 行，第 j 列的元素都不能取了。

由于 n 阶行列式可以按一行一直分解至 n 个行列式的和，不难得出行列式按一行（列）展开的定理

先铺垫如下概念：

定义 2.4.1 (（代数）余子式) n 阶行列式 $|A|$ 中，取定一个元素 a_{ij}，则划去该元素所在的第 i 行，第 j 列，剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij},$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}

定理 2.4.1 行列式的一行（列）展开对 n 阶行列式 $|A|$，

- 按第 i 行展开有：
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$
- 按第 j 列展开有：
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

容易从行列式的分解性质和交换行的性质得到，先给出按一行展开的形式化的证明

证明 1 对 n 阶行列式 $|A|$，取定第 i 行，并把每一项的元素 a_{ij} 放到第一个位置，其余 $n-1$

个元素按自然序排好位置，根据列指标 $j=1,2,\cdots,n$ 将 $|A|$ 的 $n!$ 项分成 n 组，则有：

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{\tau(i1\cdots,i-1,i+1,\cdots n)+\tau(jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}a_{ij}a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}\\
&= \sum_{jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{i-1+j-1+\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}a_{ij}a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}\\
&= \sum_{jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left[\sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}(\text{根据定义})\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}
$$

证毕

2.5　行列式按 k 行/列展开

定义 2.5.1 (k 阶子式) 对 n 级矩阵 A, 任取 k 行 $i_1,\cdots,i_k$, 其中 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, k 列 $j_1,\cdots,j_k$, 其中 $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$, 这 k 行 k 列交叉处按原来的次序形成的行列式称为 A 的 k 阶子式，记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

定义 2.5.2 (（代数）余子式) 令 $\{i_1^{'},\cdots,i_{n-k}^{'}\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i_1,\cdots,i_k\}$, 其中 $1\le i_1^{'}\le\cdots\le i_{n-k}^{'}$；$\{j_1^{'},\cdots,j_{n-k}^{'}\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{j_1,\cdots,j_k\}$, 其中 $1\le j_1^{'}\le\cdots\le j_{n-k}^{'}$, 则称

$$A\begin{pmatrix} i_1^{'} & \cdots & i_{n-k}^{'} \\ j_1^{'} & \cdots & j_{n-k}^{'} \end{pmatrix}$$

为上述 k 阶子式的余子式称

$$(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}A\begin{pmatrix} i_1^{'} & \cdots & i_{n-k}^{'} \\ j_1^{'} & \cdots & j_{n-k}^{'} \end{pmatrix}$$

为上述 k 阶子式的代数余子式

定理 2.5.1 (Laplace 定理) 取定行列式 $|A|$ 的 k 行，则这 k 行形成的 k 阶子式与其对应的代数余子式乘积之和就是行列式的值, 即

$$|A|=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}A\begin{pmatrix} i_1^{'} & \cdots & i_{n-k}^{'} \\ j_1^{'} & \cdots & j_{n-k}^{'} \end{pmatrix}$$

证明 2 取定 $|A|$ 的 k 行，将这 k 行形成的 $\mathbf{C}_n^k$ 个 k 阶子式分组，并把这 k 行的 k 个元素排在最前面，则：

$$|A| = \sum_{u_1\cdots u_k v_1\cdots v_{n-k}} (-1)^{i_1+\cdots+i_k-\frac{k(k+1)}{2}\tau(u_1\cdots u_k v_1\cdots v_k)} a_{i_1u_1}\cdots a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}\cdots a_{i_{n-k}'v_{n-k}}$$

其中 $u_1\cdots u_k$ 是 $j_1,\cdots,j_k$ 的一个 k 元排列；$v_1\cdots v_{n-k}$ 是 $j_1',\cdots,j_{n-k}'$ 的一个 $n-k$ 元排列；分组思路为：

1. 先从 n 列中任取 k 列：$j_1,\cdots,j_k$
2. $u_1\cdots u_k$ 是列指标 $j_1,\cdots,j_k$ 的一个全排列
3. $v_1\cdots v_{n-k}$ 是剩下的列指标 $j_1',\cdots,j_{n-k}'$ 的一个全排列

另外，假设排列 $u_1\cdots u_k$ 经过 s 次对换变为 $j_1\cdots j_k$ 则:

$$(-1)^{\tau(u_1\cdots u_k)} = (-1)^s(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_k)} = (-1)^s$$

从而：

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(u_1\cdots u_k v_1\cdots v_{n-k})}\\
&= (-1)^s(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k v_1\cdots v_{n-k})}\\
&= (-1)^{\tau(u_1\cdots u_k)}(-1)^{j_1+\cdots+j_k-\frac{k(k+1)}{2}+\tau(v_1\cdots v_{n-k})}\\
&= (-1)^{j_1+\cdots+j_k-\frac{k(k+1)}{2}}(-1)^{\tau(u_1\cdots u_k)+\tau(v_1\cdots v_{n-k})}
\end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{u_1\cdots u_k v_1\cdots v_{n-k}} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_k i_1'\cdots i_{n-k}')+\tau(u_1\cdots u_k v_1\cdots v_k)} a_{i_1u_1}\cdots a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}\cdots a_{i_{n-k}'v_{n-k}}\\
&= \sum_{u_1\cdots u_k v_1\cdots v_{n-k}} (-1)^{i_1+\cdots+i_k-\frac{k(k+1)}{2}+\tau(u_1\cdots u_k v_1\cdots v_k)} a_{i_1u_1}\cdots a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}\cdots a_{i_{n-k}'v_{n-k}}\\
&= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k}\sum_{u_1\cdots u_k}\sum_{v_1\cdots v_{n-k}} (-1)^{i_1+\cdots+i_k-\frac{k(k+1)}{2}+j_1+\cdots+j_k-\frac{k(k+1)}{2}}(-1)^{\tau(u_1\cdots u_k)+\tau(v_1\cdots v_{n-k})}.\\
&\quad a_{i_1u_1}\cdots a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}\cdots a_{i_{n-k}'v_{n-k}}\\
&= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k} (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}\sum_{u_1\cdots u_k}(-1)^{\tau(u_1\cdots u_k)}a_{i_1u_1}\cdots a_{i_ku_k}\sum_{v_1\cdots v_{n-k}}(-1)^{\tau(v_1\cdots v_k)}a_{i_1'v_1}\cdots a_{i_{n-k}'v_{n-k}}\\
&= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}A\begin{pmatrix} i_1' & \cdots & i_{n-k}'\\ j_1' & \cdots & j_{n-k}'\end{pmatrix}\text{(根据定义)}
\end{aligned}$$

2.6　范德蒙（Vandermonde）行列式

数学归纳法易证：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

2.7　Cramer 法则及其补充

定理 2.7.1 (*n* **个方程的** *n* **元线性方程组解的行列式判定准则)** 对含 n 个方程的 n 元线性方程组，设其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $\widetilde{A}$, 对应的行阶梯型矩阵分别为 J,$\widetilde{J}$, 则 $|J| = \lambda|A|(\lambda \neq 0)$. 且有如下判定定理:

- 无解 $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{J}$ 中出现"$0 = d(d \neq 0)$" $\underset{\text{反证法得到}}{\overset{\text{左箭头可由}}{\Longleftrightarrow}}$ J 中的有零行 $\Longleftrightarrow |J| = 0 \Longleftrightarrow |A| = 0$
- 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n \Longleftrightarrow J$ 中有 n 个主元 $\Longleftrightarrow |J| \neq 0$ $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$
- 有无穷多解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n \Longleftrightarrow J$ 中的有零行 $\Longleftrightarrow |J| = 0$ $\Longleftrightarrow |A| = 0$

推论 3 n 元齐次线性方程组的解的情形有两种：

- 有唯一零解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n \Longleftrightarrow |A| \neq 0$
- 有非零解/有无穷多解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n \Longleftrightarrow |A| = 0$

TODO: Cramer 法则后面会利用矩阵证明

第三章 线性空间

3.1 预备知识-域

运算说白了就由运算对象按照一定的运算法则生成运算结果。这样就很容易用映射来给出运算的数学定义

定义 3.1.1 对于非空集合 X, Y，我们称映射 $\varphi : X \to Y$ 为从 X 到 Y 的一元运算，当 $X = Y$ 时，称 φ 是定义在 X 上的一元（代数）运算

定义 3.1.2 对于非空集合 X, Y, Z，我们称映射 $\varphi : X \times Y \to Z$ 为从 $X \times Y$ 到 Z 的二元运算，当 $X = Y = Z$ 时，称 φ 是定义在 X 上的二元（代数）运算

类似地可定义 n 元代数运算

强调几个点：

- φ 只是一个抽象的运算符号，可以是任何东西，但数学中常用 $+, \cdot, *$ 等表示二元运算符
- 运算符的位置有前缀、中缀、后缀三种。常用的是中缀，例如将 $\circ(x, y)$ 写成 $\circ xy, x \circ y, xy\circ$
- 对于定义在非空集合 X 上的一个运算 $*$, 其封闭性显然已蕴含在定义中

在集合之上定义了运算之后，这种运算就赋予了集合元素之间一种代数结构，例如在 $\mathbb{N}$ 之上定义了加法之后，就有 $1 + 3 = 4$，这就在这三个元素之间形成了结构

定义 3.1.3 (代数系/系统/结构) 设 $*$ 是定义在非空集合 S 上的一个运算，则称二元组 $(S, *)$ 为一个（有一个代数运算的）代数系

类似的，可以定义含更多个运算的代数系

对于含一个二元代数运算的代数系，我们关注该运算的交换律和结合律

定义 3.1.4 (交换律、结合律) 设 $(X, *)$ 是一个代数系，$*$ 是二元运算

- 若 $\forall a, b \in X$，恒有 $a * b = b * a$, 则称 $*$ 满足结合律
- 若 $\forall a, b, c \in X$，恒有 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 则称 $*$ 满足结合律

同样的，二元代数运算的单位元素，以及由此引入的逆元素的概念同样很重要

定义 3.1.5 (单位元素、逆元素) 设 $(S,*)$ 是一个代数系，$*$ 是二元运算

- 若 $\exists e \in S$，使得 $\forall a \in S$, 恒成立 $e*a = a*e = a$, 则称 e 为 $*$ 的单位元素（也叫幺元，其中幺有数目中的一的含义）。类似地可以定义左单位元素和右单位元素的概念。
- 若 $\forall a \in S\ \exists b \in S$，使得 $a*b = b*a = e$ 则称 b 是 a 在运算 e 下的逆元（加法中通常叫反元素，乘法中通常叫逆元素）。

当一个代数系有两个二元代数运算时，这两个运算的交互能否满足分配律是我们关注的

定义 3.1.6 设 $(S,*,+)$ 是一个代数系，$*,+$ 是二元运算，若 $\forall a,b,c \in S$，恒有 $a*(b+c) = a*b+a*c$, 则称 $*$ 对 $+$ 满足左分配律，类似地可以定义右分配律，左右分配律都满足则称 $*$ 对 $+$ 满足分配律

有了上面的准备，我们可以着手定义**域**

定义 3.1.7 设 $(S,+,\cdot)$ 是一个代数系统，$+,\cdot$ 是二元运算（不妨分别称之为加法和乘法），则 $(S,+,\cdot)$ 是一个域当且仅当满足以下五个条件:

1. $+,\cdot$ 满足交换律
2. $+,\cdot$ 满足结合律
3. $+,\cdot$ 有单位元（不妨分别记作 0，1）
4. $\forall x \in S$, 存在加法逆元；$x \neq 0$ 时，存在乘法逆元
5. $\cdot$ 对 $+$ 有分配律

进一步地，不妨将 a 的加法逆元记为 $-a$, 乘法逆元记为 a^{-1}，将减法 $-$ 和除法 $\div$ 分别定义为

$$a-b = a+(-b); a \div b = a \cdot b^{-1}$$

定理 3.1.1 由 a 是 $-a$ 的加法逆元，是 a^{-1} 的乘法逆元立即可得

- $a = -(-a)$
- $a = (a^{-1})^{-1}$

定理 3.1.2 (消去律) $(F,+,\cdot)$ 是一个域，$\forall a,b \in F$，有

- 若 $a+b = a+c$，则 $b = c$
- 若 $a \cdot b = a \cdot c$ 且 $a \neq 0$，则 $b = c$

推论 4 域中的单位元、逆元都唯一

定理 3.1.3 $(F,+,\cdot)$ 是一个域，$\forall a,b\in F$，有

- $a\cdot 0=0$
- $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$
- $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

推论 5 域中的加法单位元没有乘法逆元

3.2　线性空间的定义、例子、性质

3.2.1　线性空间的研究引入

上一章中，我们用行列式的理论直接从线性方程组的系数和常数项出发判断出含 n 个方程的 n 元线性方程组的解的情况。但这一工具具有如下限制：

- 只适用于方程个数和未知数个数相等的情况
- 无法分辨出无解还是无穷多解
- 有无穷多解时如何求出这无穷多个解，即解集的结构

基于这种考虑，就引入了数域 K 上的 n 维向量空间这一理论工具，再与几何空间做对比继续抽象，就有了线性空间这一更抽象的理论工具。

3.2.2　n 维向量空间 K^n

线性方程组对应增广矩阵的初等行变换可以归纳为两个更基本的操作

- 用数域 K 中的一个数乘以某一行
- 将某一行加到另一行上

例如对增广矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & -2 & -5\\ 3 & -4 & -9\end{bmatrix}$$

第一行的 -3 倍可以写成

$$-3(1,-1,-2)=(-3,3,6)$$

把它加到第三行上可以写成

$$(-3,3,6)+(3,-4,-9)=(0,-1,-3)$$

从上述例子收到启发，为了研究从线性方程组的系数和常数项直接出发研究其解，我们需要在所有 n 元有序数组组成的集合中规定像上述两个算式那样的加法运算和数乘运算

取定一个数域 K,n 是一个正整数，记

$$K^N := \{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K, i=1,2,\cdots,n\}$$

规定 K^n 中两个元素相等当且仅当这两个元素的每个分量都相等

规定 K^n 上的加法运算如下：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

规定 K 与 K^n 上的数乘运算如下：

$$k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

容易验证加法和数量乘法运算满足以下 8 条运算法则：
对于 $\forall\alpha,\beta,\gamma\in K^n,k,l\in K$，有：

1. 加法满足交换律
2. 加法满足结合律
3. 加法有单位元 $(0,0,\cdots,0)$, 把它记为 0，也称为零元素
4. K^n 中每一个元素 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在加法运算下具有反元素 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$，记为 $-\alpha$
5. 数域 K 中的 1 是数量乘法的单位元
6. 数域乘法一致于数量乘法:$(kl)\alpha=k(l\alpha)$
7. 数量乘法对 K^n 加法满足分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
8. 数量乘法对数域中加法满足分配律 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

我们把 K^n 称为数域 K 上的一个 n 维向量空间

3.2.3　几何空间

我们生活在几何空间之中。一方面，几何空间可以看成空间中所有点组成的集合，但点的表示需要取定仿射标架/仿射坐标系，这就需要取定空间中的一个点 O 作为原点，以 O 为起点的向量与空间中的点一一对应；因而另一方面几何空间 V 也可以看作是由以 O 为起点的所有三维向量构成的集合，V 中的向量有加法和数量乘法运算且各自满足 4 条性质 (详见丘维声解析几何第三版 $P_{3,4}$)。因而几何空间是实数域 R 上的三维向量空间 R^3

3.2.4　线性空间

容易归纳出前面的几何空间和 n 维向量空间有如下共同点：

- 有一个域 F
- 有一个非空集合 V
- 定义了 V 上的一个加法运算
- 定义了从 $F \times V$ 到 V 的一个标量乘法运算
- 加法和标量乘法分别满足 4 条运算法则，共 8 条运算法则

由此，抽象出线性空间的模型

定义 3.2.1 设 F 是一个域，V 是一个非空集合。
定义了 V 上的一个加法：$V \times V \to V$
以及 $F \times V$ 到 V 的标量乘法（当 F 是数域时，也叫做数量乘法）若加法和标量乘法满足以下 8 条运算法则：对于 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, k, l \in F$，有：

1. 加法满足交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. 加法满足结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. 加法有单位元, 把它记为 0，也称为零元素: $0 + \alpha = \alpha$
4. V 中每一个元素 α 在加法运算下具有反元素，记为 $-\alpha$
5. 域 K 中的 1 是数量乘法的单位元: $1\alpha = \alpha$
6. 域乘法一致于数量乘法:$(kl)\alpha = k(l\alpha)$
7. 数量乘法对 V 中加法满足分配律：$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
8. 数量乘法对数域中加法满足分配律 $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

则称 V 是域 F 上的一个**线性空间**，有时也称向量空间. 并借用几何的语言将线性空间中的元素称为向量. 这里的加法和标量乘法统称为线性运算.

注 4 一个线性空间是由三部组成：数域 K, 非空集合 V, 以及定义的加法和数乘。即：

$$\text{线性空间} = (V, K, +, \cdot)$$

注 5 验证是否是线性空间主要是三部分：

1. 得是非空集合

2. 加法、数乘要封闭

3. 定义的加法和数乘运算分别要满足 4 条性质

例 1 设 X 是非空集合，F 是一个域，从 X 到 F 的每一个映射称为 X 上的 F 值函数，X 上的所有 F 值函数记作 F^X.
在 F^X 中定义加法和标量乘法如下:$\forall f, g \in F^X, k \in F$

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in X$
- $(kf)(x) := k(f(x)), \forall x \in X$

容易验证满足 8 条运算法则，即 F^X 是域 F 上的一个线性空间（由于 F^X 里的每个元素都是一个函数，所以 F^X 也可以叫做函数空间）。

例 2 数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x] := \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots \mid x \in K, a_i \in K, i = 0, 1, 2, \cdots\}$，它对于多项式的加法，$K$ 中元素与多项式的乘法，成为 K 上的一个线性空间 *(多项式空间)*

例 3 数域 K 上所有次数小于 n 的一元多项式组成的集合 $K[x]_n := \{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1} \mid x \in K, a_i \in K, i = 0, 1, \cdots, n-1\}$，它对于多项式的加法，$K$ 中元素与多项式的乘法，成为 K 上的一个线性空间 *(多项式空间)*

例 4 记数域 P 上的所有 $m \times n$ 矩阵组成的集合为 $P^{m\times n}$, 则 $P^{m\times n}$ 对于通常的矩阵的加法和数乘构成 P 上的线性空间（矩阵空间）

例 5 复数域 C 可以看成是实数域 R 上的一个线性空间。其加法是复数的加法，数量乘法是实数与复数相乘

例 6 作为 K^n 是数域 K 上的 n 维线性空间的特例。数域 K 可以看成是自身上的一个线性空间。其加法是数域 K 中的加法，数量乘法是数域 K 中的乘法

3.2.5　线性空间的性质

设 V 是 F 上的任一线性空间. 直接从线性空间的定义出发，容易推导出如下性质：

1. V 中的零元（加法单位元）唯一
2. V 中任一元素 α 的加法逆元唯一
3. $0\alpha = 0, \forall \alpha \in V$
4. $k0 = 0, \forall k \in F$
5. $k\alpha = 0 \Rightarrow k = 0$或者$\alpha = 0$
6. $(-1)\alpha = -\alpha$

注 6 思路：观察要证的性质是什么运算，再从域和线性空间的相应运算规则出发容易证明

3.3　线性空间的子空间

顾名思义，子空间有两个要点：

- 是子集
- 是线性空间

定义 3.3.1 (子空间) 设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的非空子集。若 U 对于 V 的加法和数乘也是数域 K 上的一个线性空间，则称 U 是 V 的一个（线性）子空间

若直接按照定义来判断 V 的一个非空子集能否是子空间太麻烦，不过我们有如下判定定理

定理 3.3.1 (子空间判定定理) 设 U 是 V 的非空子集，则：
U 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ U 对于 V 的数乘和加法封闭

证明 3 分析如下：

1. U 中存在加法的单位元零元素

$$U \neq \varnothing \Rightarrow \exists \alpha \in U \Rightarrow \vec{0} = \vec{0}\alpha \in U$$

2. U 中任意向量存在相应的负向量

$$\forall \alpha \in U, -\alpha = (-1)\alpha \in U$$

3. 有了以上两条的基础，其它性质非常容易证明

易知 $\{0\}$ 是 V 的子空间，我们叫它零子空间。V 也是 V 的一个自空间。这两个称为 V 的平凡子空间，其它子空间都是非平凡的。

例 7 容易验证：$K[x]_n$ 是 $K[x]$ 的一个子空间

3.4　线性组合与线性表示

定义 3.4.1 (向量组) 线性空间 V 的有限子集称为一个向量组

定义 3.4.2 设 V 是数域 K 上的线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中一组向量（即向量组）。

1. $k_1, \cdots, k_s$ 是 K 中的一组数。则称

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合

2. 令 $W=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1,\cdots,k_s\in K\}$, 容易验证 W 是 V 的子空间。称它是由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间，记为 $<\alpha_1,\cdots,\alpha_s>$ 或 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

3.

$$\text{若}\beta\in<\alpha_1,\cdots,\alpha_s>\Leftrightarrow\exists k_1,\cdots,k_s\in K,\text{使得}\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$$

此时称 β 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

与线性方程组的联系

考虑数域 K 上的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}$$

记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{s1}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{sn}\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix}$$

则原方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ 有解
$\Leftrightarrow\beta$ 可由列向量组线性表示
$\Leftrightarrow\beta\in<\alpha_1,\cdots,\alpha_n>$

此时我们就把线性方程组有无解的问题转化成了常数向量是否在列向量组生成的子空间内。这就需要研究线性空间和它的子空间的结构！

3.5　线性相关与线性无关的向量组

定义 3.5.1 (线性相关，无关) 设 V 是数域 K 上的线性空间。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中的向量组，若存在 K 中不全为 0 的一组数 $k_1,\cdots,k_n$，使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=\vec{0}$, 则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关（反之，线性无关）

线性相关、无关与齐次线性方程组的联系

不难得出如下结论：

1. **命题 1** K^s 中，列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow K$ 上含 s 个方程的 n 元线性方程组：$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 有非零解（只有零解）

2. **命题 2** K^n 中，列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关（无关）
   $\Leftrightarrow$ 对应的齐次线性方程组有非零解（只有零解）
   $\Leftrightarrow$ 系数矩阵行列式 $|A|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|=0(\neq 0)$

缩短组、延伸组与原组的线性相关性

考虑一个有非零解齐次线性方程组，则取出其中部分方程组成的新的方程组也有非零解。这种现象对应到各自的列向量组就有结论：

1. 原组线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组线性相关
2. (**逆否命题**) 原组线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组线性无关

线性相关、无关的重要结论

命题 3 含有 $\vec{0}$ 的向量组线性相关

命题 4 含单个向量的向量组:α 线性相关 $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$ 使得 $k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

命题 5 (部分组与全组的线性相关性的联系) 部分组相关 $\Leftrightarrow$ 全组相关
从而：全组无关 $\Leftrightarrow$ 部分组无关

命题 6 (线性相关与线性表示的联系)

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)\text{线性相关} \Leftrightarrow \text{其中至少有一个向量可由其余向量线性表示}$$

从而:

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)\text{线性无关} \Leftrightarrow \text{其中任意一个向量都不可由其余向量线性表示}$$

当一个向量能由一个向量组线性表示时，为了处理问题的方便性，我们当然希望这种表示是唯一的。下面这个命题给出了表示方式唯一的充要条件

命题 7 已知 β 能由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则：

$$\text{表示方式唯一} \Leftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_s\text{线性无关}$$

证明 4 ”$\Leftarrow$”：反证法结合线性无关的定义易证
”$\Rightarrow$”：反证法：假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则存在数域 K 中一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

又由已知得存在数域 K 中一组不全为 0 的数 $c_1, \cdots, c_s$ 使得

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_s\alpha_s = \beta$$

两式相加后易知 β 的表示方式不唯一，矛盾！故 β 的表示方式唯一

在几何空间中，若 α_1, α_2 不共线（即线性无关），则 β 可由 α_1, α_2 线性表示的重要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 共面（即 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$）线性相关
那么对于一般的线性无关的向量组，我们该如何判断另一个向量能否由其线性表示呢？下面的命题给出了判断方法

命题 8 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则：

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta \text{线性相关} \Leftrightarrow \beta \text{能由} \alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{唯一线性表示}$$

即只需判断加上这个向量后是否线性相关即可！

进一步地，在几何空间中，我们可以用三个向量来表示其它任一向量。推广到一般的向量组，便引出了极大线性无关组和向量组的秩以及线性空间的基和维数的概念

3.6　极大线性无关组与向量组的秩

提出目标：对于一个向量组，希望找到它的一个部分组，使得：这个向量组中的任一向量都可由这个部分组唯一线性表示且这个部分组所含向量的个数尽可能少

定义 3.6.1 (极大线性无关组) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个部分组称为其极大线性无关组，如果满足：

1. 这个部分组线性无关
2. 从剩余向量（如果有的话）任取一个添加到这个部分组中，形成的新的部分组线性相关（这便是" 极大" 的含义）

定义 3.6.2 (极大无关组的等价定义-1) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个部分组称为其极大线性无关组，如果满足：

1. 这个部分组线性无关
2. 向量组中的任一一个向量都可以由这个部分组线性表示

定义 3.6.3 (向量组的线性表出) 若向量组 A 中的每一个向量都可由向量组 B 线性表示，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表出

定义 3.6.4 (向量组等价) 两个向量组 A, B 等价当且仅当可相互线性表出，记为 $A \cong B$

容易证明：

定理 3.6.1 向量组和它的极大无关组等价

可以证明我们定义的向量组的等价是一种等价关系，即满足

1.（反身性）$A \cong A$

2.（对称性）$A \cong B \wedge A \neq B \Rightarrow B \cong A$

3.（传递性）$A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$

反身性和对称性都是显然。传递性虽然也容易看出来，但在这里严格证明一下。

引理 3.6.1 (双重连加号的可交换性) 对：

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_n+\\&a_2b_1+a_2b_2+\cdots+a_2b_n+\\&\cdots+\\&a_mb_1+a_mb_2+\cdots+a_mb_n\end{aligned}$$

分别先行后列加和先列后行加得到

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_ib_j\right)$$

证明 5 (传递性的证明) 设 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$, $C:\gamma_1,\cdots,\gamma_s$
由 $A\cong B, B\cong C$, 设 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\beta_j, 1\le i\le m$, $\beta_j=\sum_{k=1}^{s}b_{jk}\gamma_k, 1\le j\le n$，代入得：

$$\begin{aligned}\alpha_i&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{s}b_{jk}\gamma_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ij}b_{jk}\gamma_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\gamma_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)\gamma_k\end{aligned}$$

这表明向量组 A 可由向量组 C 线性表出，同理可证向量组 C 可由向量组 A 线性表出, 即 $A\cong C$

由向量组等价得传递性立即可得

定理 3.6.2 向量组的任意两个极大线性无关组等价

观察几何空间中的向量组不难发现：一个向量组的几个极大线性无关组所含向量的个数相同。不禁发问：一般线性空间中的向量组的两个极大线性无关组所含向量的个数相同吗?。为此，我们需要研究当一个向量组能由另一个向量组线性表出时，他们所含向量的个数之间有什么联系？

我们先从解剖麻雀开始。考虑几何空间中，向量组 β_1,β_2,β_3 可由向量组 α_1,α_2 线性表出，容易发现：无论 α_1,α_2 是否共线（即线性相关），β_1,β_2,β_3 都会共面/共线（即线性相关）

由上面的考虑我们猜想出下面引理

引理 3.6.2 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。则有若 $r>s$, 那么 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关

证明 6 根据定义，设 $x_1\beta_1+\cdots x_r\beta_r=\vec{0}$，则只需证其有非零解即可
由已知，设

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{s1}\alpha_s\\ \cdots\\ \beta_r=a_{1r}\alpha_1+\cdots+a_{sr}\alpha_s\end{cases}$$

代入得

$$(a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r)\alpha_1+\cdots+(a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r)\alpha_s=0$$

要使上式成立，只需令

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=0\\ \cdots\\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r=0\end{cases}$$

又由已知 $r>s$，则上述其次线性方程组有非零解，即 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关

考虑其逆否命题，则有：

推论 6 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。则有若 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关，那么 $r\leq s$

由此立即可得

定理 3.6.3 向量组的极大线性无关组所含的向量个数是一定的

这个向量的个数是十分重要的，为此我们引出如下定义

定义 3.6.5 向量组:$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组所含的向量个数称为这个向量组的秩 *(rank)*, 记为 $rank\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$

线性相关性与秩的关系

由向量组秩的定义易得：

1. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow rank\,\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=s$
2. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow rank\,\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}<s$

向量组的线性表示与秩的关系

由线性表示的传递性和相关引理易得：

1. 向量组 A 能由向量组 B 线性表示 $\Rightarrow rank\,A\leq rank\,B$
2. 等价的向量组秩相等

3.7　线性空间的结构

引入

对于含有限个向量的向量组，我们已经通过：

- 极大线性无关组
- 秩

这两大工具分析出了它的结构

相似地，对于含无限个向量的线性空间，我们引入：

- 基
- 维数

这两大工具来分析线性空间的结构！

线性空间的子集的线性相关性

定义 3.7.1 设 V 是数域 K 上的任一线性空间，则：

- V 的一个有限子集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ 线性相关（无关），当满足向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ 线性相关（无关）
- V 的一个无限子集 S 线性相关，当满足 S 有一个有限子集是线性相关的
- V 的一个无限子集 S 线性无关，当满足 S 的任一有限子集线性无关

注 7 (无限子集线性相关性的说明)

- 目前线性空间中还未定义距离的概念 $\Rightarrow$ 无法定义无限个向量之和的极限 $\Rightarrow$ 不能按和的方式来定义无限个向量的线性相关性
- 对于向量组有：部分相关 $\Rightarrow$ 全组相关

线性空间的基

定义 3.7.2 设 V 是数域 K 上的任一线性空间，S 是 V 的一个子集。若满足：

- S 线性无关
- V 中任一向量都可由 S 中的有限个向量线性表出

则称 S 是 V 的一个基

规定只含零向量的线性空间的基为空集

定理 3.7.1 (基存在定理) 数域 K 上的任一线性空间都存在基

证明超出课程范围，记住结论即可

线性空间的维数

定义 3.7.3 (有限维、无限维) 若 V 有一个基是有限子集，则称 V 为有限维的; 否则 V 是无限维的

同向量组的秩一样，有限维的线性空间的基所含向量的个数是一定的

定理 3.7.2 设 V 是有限维的，则 V 的任意两个基所含的向量个数相同

证明 7 V 是有限维的 $\Rightarrow V$ 有一个有限子集 S_1, 取 V 的另一个基 S_2. 若:

1. $|S_2| < |S_1| \Rightarrow S_1$ 线性相关，矛盾!
2. $|S_2| > |S_1| \Rightarrow S_2$ 线性相关，矛盾!

故 $|S_2| = |S_1|$

定义 3.7.4 (维数) 设有限维线性空间 V 的任意一个基中所含向量的个数称为 V 的维数，记为 $dim V$

若 V 是无限维的，则把 V 的维数记为 $dim V = \infty$. 特别的 $\{0\}$ 的维数是 0

基的判定定理

直接从定义判断一组向量是否是线性空间的基是麻烦的，下面的定理在给出维数的情况下，指明了只需定义中的一个条件就可判定为基

引理 3.7.1 设 $dim V = n$, 则 V 中任意 $n+1$ 个向量线性相关

定理 3.7.3 基的判定定理

- 设 $dim V = n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量构成 V 的一个基
- 设 $dim V = n$, 若 V 中任一向量都可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基

证明:

1. 添加一个就线性相关，这个添加的可由这 n 个向量线性表示。根据定义得证
2. 取 V 的一个基:$\beta_1, \cdots, \beta_n$, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。
   故 $n = rank\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \leq rank\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \leq n \Rightarrow rank\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = n$