线性代数

王丹阳

2020/7/22

目录

第一章　线性方程组

线性方程组是高等代数研究问题的起点

由对 n 元线性方程组的高斯消元法求解引入矩阵及其相关基本概念

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

第二章　向量空间

2.1　预备知识-域

运算说白了就由运算对象按照一定的运算法则生成运算结果。这样就很容易用映射来给出运算的数学定义

定义 2.1.1 对于非空集合 X,Y，我们称映射 $\varphi: X \to Y$ 为从 X 到 Y 的一元运算，当 $X=Y$ 时，称 φ 是定义在 X 上的一元（代数）运算

定义 2.1.2 对于非空集合 X,Y,Z，我们称映射 $\varphi: X\times Y \to Z$ 为从 $X\times Y$ 到 Z 的二元运算，当 $X=Y=Z$ 时，称 φ 是定义在 X 上的二元（代数）运算

类似地可定义 n 元代数运算

强调几个点：

- φ 只是一个抽象的运算符号，可以是任何东西，但数学中常用 $+,\cdot,*$ 等表示二元运算符
- 运算符的位置有前缀、中缀、后缀三种。常用的是中缀，例如将 $\circ(x,y)$ 写成 $\circ xy, x\circ y, xy\circ$
- 对于定义在非空集合 X 上的一个运算 $*$, 其封闭性显然已蕴含在定义中

在集合之上定义了运算之后，这种运算就赋予了集合元素之间一种代数结构，例如在 $\mathbb{N}$ 之上定义了加法之后，就有 $1+3=4$，这就在这三个元素之间形成了结构

定义 2.1.3 设 $*$ 是定义在非空集合 S 上的一个运算，则称二元组 $(S,*)$ 为一个（有一个代数运算的）代数系

类似的，可以定义含更多个运算的代数系

对于含一个二元代数运算的代数系，我们关注该运算的交换律和结合律

定义 2.1.4 (交换律、结合律) 设 $(X,*)$ 是一个代数系，$*$ 是二元运算

- 若 $\forall a,b\in X$，恒有 $a*b=b*a$, 则称 $*$ 满足结合律
- 若 $\forall a,b,c\in X$，恒有 $(a*b)*c=a*(b*c)$, 则称 $*$ 满足结合律

同样的，二元代数运算的单位元素，以及由此引入的逆元素的概念同样很重要

定义 2.1.5 (单位元素、逆元素) 设 $(S,*)$ 是一个代数系，$*$ 是二元运算

- 若 $\exists e\in S$，使得 $\forall a\in S$, 恒成立 $e*a=a*e=a$, 则称 e 为 $*$ 的单位元素（也叫幺元，其中幺有数目中的一的含义）。类似地可以定义左单位元素和右单位元素的概念。
- 若 $\forall a\in S\ \exists b\in S$，使得 $a*b=b*a=e$ 则称 b 是 a 在运算 e 下的逆元。

当一个代数系有两个二元代数运算时，这两个运算的交互能否满足分配律是我们关注的

定义 2.1.6 设 $(S,*,+)$ 是一个代数系，$*,+$ 是二元运算，若 $\forall a,b,c\in S$，恒有 $a*(b+c)=a*b+a*c$, 则称 $*$ 对 $+$ 满足左分配律，类似地可以定义右分配律，左右分配律都满足则称 $*$ 对 $+$ 满足分配律

有了上面的准备，我们可以着手定义**域**

定义 2.1.7 设 $(S,+,\cdot)$ 是一个代数系统，$+,\cdot$ 是二元运算（不妨分别称之为加法和乘法)，则 $(S,+,\cdot)$ 是一个域当且仅当满足以下五个条件:

1. $+,\cdot$ 满足交换律
2. $+,\cdot$ 满足结合律
3. $+,\cdot$ 有单位元（不妨分别记作 0，1）
4. $\forall x\in S$, 存在加法逆元；$x\neq 0$ 时，存在乘法逆元
5. $\cdot$ 对 $+$ 有分配律

进一步地，不妨将 a 的加法逆元记为 $-a$, 乘法逆元记为 a^{-1}，将减法 $-$ 和除法 $\div$ 分别定义为

$$a-b=a+(-b);a\div b=a\cdot b^{-1}$$

定理 2.1.1 由 a 是 $-a$ 的加法逆元，是 a^{-1} 的乘法逆元立即可得

- $a=-(-a)$
- $a=(a^{-1})^{-1}$

定理 2.1.2 (消去律) $(F,+,\cdot)$ 是一个域，$\forall a,b\in F$，有

- 若 $a+b=a+c$，则 $b=c$
- 若 $a\cdot b=a\cdot c$ 且 $a\neq 0$，则 $b=c$

推论 2.1.1 域中的单位元、逆元都唯一

定理 2.1.3 $(F,+,\cdot)$ 是一个域，$\forall a,b\in F$，有

- $a \cdot 0 = 0$
- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

推论 2.1.2 域中的加法单位元没有乘法逆元