

线性代数

王丹阳

2020/7/22

目录

第一章 线性方程组	2
1.1 一些概念	2
1.2 线性方程组的解的情形及判别准则	3
1.3 数域	4
第二章 行列式	5
2.1 n 元排列	6
2.2 n 阶行列式的定义	6
第三章 向量空间	7
3.1 预备知识-域	7

第一章 线性方程组

线性方程组是高等代数研究问题的起点

1.1 一些概念

由对 n 元线性方程组的高斯消元法求解引入矩阵及其相关基本概念

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

求解过程中不难发现方程组的解只与系数和常数项有关。为此我们从中抽象出一个数学模型，把它叫矩阵。

定义 1.1.1 由 $s \cdot n$ 个数排成 s 行， n 列的一张数表称为一个 $s \times n$ 矩阵，矩阵常用大写字母 A, B, C 表示. 若令 $A = (a_{ij})_{s \times n}$ ，则其第 i 行，第 j 列个元素可表示为 $A(i; j)$ 或 a_{ij}

定义 1.1.2 线性方程组系数所组成的矩阵称为系数矩阵，带上常数项后称为增广矩阵

易知，高斯消元法中所用到的变换不改变方程组的解，因此引入矩阵初等行变换的概念

定义 1.1.3 称以下三种变换为矩阵的初等行变换：

- 用一个非零数乘以一行
- 交换两行
- 用一行的倍数加到另一行

由最后的求解又引入了行阶梯型矩阵和行最简型矩阵、主元。主元反映到线性方程组中又产生了主变量和自由变量的概念。

定义 1.1.4 (行阶梯形矩阵) 一个矩阵是行阶梯型矩阵，当且仅当它满足：

- 若有零行，零行在最下方

- 对于非零行，从左到右第一个非零元称为主元，主元的列指标随着行指标的增大严格增大

定义 1.1.5 (行最简型矩阵) 一个矩阵是行最简型矩阵，当且仅当它满足：

- 是行阶梯型矩阵
- 主元都是 1
- 主元所在列的其它元素都是 0

定义 1.1.6 (主变量) 以主元为系数的变量称为主变量，其它变量称为自由变量

1.2 线性方程组的解的情形及判别准则

根据一些例子不难猜想出线性方程组的解有三种情形：

1. 当方程出现不相容时，无解
2. 有唯一解
3. 有无穷多解

现予以说明：首先将对应的增广矩阵化为行阶梯型，设变量有 n 个，此时有 r 个非零行。

- 若某行出现“ $0 = d(d \neq 0)$ ”时，显然无解
- 由主元的定义知有 r 个主元，故 $r \leq n$
 - 当 $r = n$ 时，继续将行阶梯型化为行最简型，可直接得到此时有唯一解
 - 当 $r < n$ 时，存在自由变量，此时有无穷多解

定理 1.2.1 (线性方程组解的情况及判定准则) n 元线性方程组的解的情形只有三种：

- 无解 \iff 出现“ $0 = d(d \neq 0)$ ”
- 有唯一解 \iff 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n$
- 有无穷多解 \iff 增广矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n$

推论 1.2.1 n 元齐次线性方程组的解的情形有两种：

- 有唯一零解 \iff 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r = n$
- 有无穷多解 \iff 系数矩阵化行阶梯型非零行行数 $r < n$

1.3 数域

之前我们对线性方程组默认是系数对加减乘除都封闭，但是有些方程组在整数范围内不一定有解，例如：

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

这种情形对我们的求解造成了额外的困扰。因此，要使我们所做的初等变换是合理的，我们引入数域的概念。

定义 1.3.1 (数域) 设集合 K 是复数集的一个子集，如果 K 满足：

1. $0, 1 \in K$
2. K 对加减乘除运算封闭

则称 K 是一个数域

推论 1.3.1 根据定义容易验证最小的数域是有理数域，最大的数域是复数域

第二章 行列式

为了直接从线性方程组的系数出发探究线性方程组的解的情况。我们先从解剖“麻雀”—2 个未知数，2 个线性方程的方程组开始。对方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

a_{11}, a_{21} 不全为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$ ，对其增广矩阵化行阶梯型有：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

不难得出以下结论：

- $a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} \neq 0 \Leftrightarrow$ 原方程有唯一解
- $a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} = 0 \Leftrightarrow$ 原方程无解或有无穷多解

由此我们给出二阶行列式的定义

定义 2.0.1 设 2 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

，则其行列式记为

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

注 1 2 阶行列式有 $2!$ 项，每一项的元素都取自不同行不同列，每一项的正负由行指标按顺序排列后，列指标排列的逆序对个数决定

有上面的分析，容易得到以下定理：

定理 2.0.1 对于两个方程的二元一次方程组：

- 有唯一解 \Leftrightarrow 系数矩阵的行列式不等于零
- 无解或无穷多解 \Leftrightarrow 系数矩阵的行列式等于零

对于 n 个方程的 n 元线性方程组，能否用所谓的 n 阶行列式反应其解的情况呢？实际上是可以的。

注 2 n 阶行列式的定义方式并不自然，暂时也只能这样了。

2.1 n 元排列

由二阶行列式的定义与列指标排列的逆序对个数有关，为了给出 n 阶行列式的每一项的符号，我们需要先研究一个 n 元排列的奇偶性

定义 2.1.1 n 个不同整数的一个全排列称为一个 n 元排列

定义 2.1.2 一个 n 元排列中任意取两个数，若大的在前，小的在后，则这两个元素形成了一个逆序对。

定义 2.1.3 对一个 n 元排列，若逆序对个数为奇数个，则称其为奇排列，反之称为偶排列。

定理 2.1.1 相邻两个元素交换改变排列的奇偶性

不难推出：

定理 2.1.2 任意两个元素交换改变排列的奇偶性

2.2 n 阶行列式的定义

第三章 向量空间

3.1 预备知识-域

运算说白了就由运算对象按照一定的运算法则生成运算结果。这样就很容易用映射来给出运算的数学定义

定义 3.1.1 对于非空集合 X, Y , 我们称映射 $\varphi: X \rightarrow Y$ 为从 X 到 Y 的一元运算, 当 $X = Y$ 时, 称 φ 是定义在 X 上的一元 (代数) 运算

定义 3.1.2 对于非空集合 X, Y, Z , 我们称映射 $\varphi: X \times Y \rightarrow Z$ 为从 $X \times Y$ 到 Z 的二元运算, 当 $X = Y = Z$ 时, 称 φ 是定义在 X 上的二元 (代数) 运算

类似地可定义 n 元代数运算

强调几个点:

- φ 只是一个抽象的运算符号, 可以是任何东西, 但数学中常用 $+, \cdot, *$ 等表示二元运算符
- 运算符的位置有前缀、中缀、后缀三种。常用的是中缀, 例如将 $\circ(x, y)$ 写成 $\circ xy, x \circ y, xy \circ$
- 对于定义在非空集合 X 上的一个运算 $*$, 其封闭性显然已蕴含在定义中

在集合之上定义了运算之后, 这种运算就赋予了集合元素之间一种代数结构, 例如在 \mathbb{N} 之上定义了加法之后, 就有 $1 + 3 = 4$, 这就在这三个元素之间形成了结构

定义 3.1.3 设 $*$ 是定义在非空集合 S 上的一个运算, 则称二元组 $(S, *)$ 为一个 (有一个代数运算的) 代数系

类似的, 可以定义含更多个运算的代数系

对于含一个二元代数运算的代数系, 我们关注该运算的交换律和结合律

定义 3.1.4 (交换律、结合律) 设 $(X, *)$ 是一个代数系, $*$ 是二元运算

- 若 $\forall a, b \in X$, 恒有 $a * b = b * a$, 则称 $*$ 满足结合律
- 若 $\forall a, b, c \in X$, 恒有 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 则称 $*$ 满足结合律

同样的, 二元代数运算的单位元素, 以及由此引入的逆元素的概念同样很重要

定义 3.1.5 (单位元素、逆元素) 设 $(S, *)$ 是一个代数系, $*$ 是二元运算

- 若 $\exists e \in S$, 使得 $\forall a \in S$, 恒成立 $e * a = a * e = a$, 则称 e 为 $*$ 的单位元素 (也叫幺元, 其中幺有数目中的一的含义)。类似地可以定义左单位元素和右单位元素的概念。
- 若 $\forall a \in S \exists b \in S$, 使得 $a * b = b * a = e$ 则称 b 是 a 在运算 e 下的逆元。

当一个代数系有两个二元代数运算时, 这两个运算的交互能否满足分配律是我们关注的

定义 3.1.6 设 $(S, *, +)$ 是一个代数系, $*, +$ 是二元运算, 若 $\forall a, b, c \in S$, 恒有 $a * (b + c) = a * b + a * c$, 则称 $*$ 对 $+$ 满足左分配律, 类似地可以定义右分配律, 左右分配律都满足则称 $*$ 对 $+$ 满足分配律

有了上面的准备, 我们可以着手定义域

定义 3.1.7 设 $(S, +, \cdot)$ 是一个代数系统, $+, \cdot$ 是二元运算 (不妨分别称之为加法和乘法), 则 $(S, +, \cdot)$ 是一个域当且仅当满足以下五个条件:

1. $+, \cdot$ 满足交换律
2. $+, \cdot$ 满足结合律
3. $+, \cdot$ 有单位元 (不妨分别记作 $0, 1$)
4. $\forall x \in S$, 存在加法逆元; $x \neq 0$ 时, 存在乘法逆元
5. \cdot 对 $+$ 有分配律

进一步地, 不妨将 a 的加法逆元记为 $-a$, 乘法逆元记为 a^{-1} , 将减法 $-$ 和除法 \div 分别定义为

$$a - b = a + (-b); a \div b = a \cdot b^{-1}$$

定理 3.1.1 由 a 是 $-a$ 的加法逆元, 是 a^{-1} 的乘法逆元立即可得

- $a = -(-a)$
- $a = (a^{-1})^{-1}$

定理 3.1.2 (消去律) $(F, +, \cdot)$ 是一个域, $\forall a, b \in F$, 有

- 若 $a + b = a + c$, 则 $b = c$
- 若 $a \cdot b = a \cdot c$ 且 $a \neq 0$, 则 $b = c$

推论 3.1.1 域中的单位元、逆元都唯一

定理 3.1.3 $(F, +, \cdot)$ 是一个域, $\forall a, b \in F$, 有

- $a \cdot 0 = 0$
- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

推论 3.1.2 域中的加法单位元没有乘法逆元