Сходимость рядов. Пономарев 144

2633. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}}-1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1$$

т.к. $\frac{\ln n}{n^2+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, значит

$$e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim 1+\frac{\ln n}{n^2+1}-1=\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{n^2}.$$

Пусть $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot n^{3/2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$$

Отсюда $b_n\geqslant a_n$, степень $\frac{1}{n^p}$ в b_n равна $3/2>1$, по эталонному ряду ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, значит и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

2635. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$

$$a_n=\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}\sim\frac{1}{\ln^2\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\ln^2 n}$$

Пусть $b_n=\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln^2 n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$$

$\Longrightarrow$ $b_n\leqslant a_n$, степень равна 1, b_n расходится и вместе с ним расходится a_n.

2636. (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$. По признаку Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\exp\lim_{n\to+\infty}n^2\ln\left(\cos\frac{a}{n}\right)=$$

$$\exp\lim_{n\to+\infty}n^2\ln\left(1-\frac{a^2}{2n^2}\right)=\exp\lim_{n\to+\infty}n^2\left(-\frac{a^2}{2n^2}\right)=e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Для любого a выполнено $-\frac{a^2}{2} \leqslant 0$, значит $e^{-\frac{a^2}{2}} \leqslant 1$. Отсюда если $a \neq 0$, то ряд сходится.

2638. (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. По формуле Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \implies n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty$$

$$a_n = \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}\left(\frac{n}{e}\right)^n = b_n$$

по признаку Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\sqrt{n}}}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e} \cdot n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e} = +\infty$$

Значит b_n расходится, a_n тоже.

2639. (5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

$$a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{\ln^2 n}}{e^{n \ln n}} = e^{\ln n(\ln n - n)} =$$
$$= e^{\ln n \cdot n\left(\frac{\ln n}{n} - 1\right)} = e^{-n \ln n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} \sim e^{-n \ln n}$$

По признаку Коши

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(e^{-\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$0 < 1$ – ряд сходится.

2642. (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$

Если $\alpha \leqslant 0$, то $a_n \to +\infty$, ряд не сходится.

Пусть $\alpha > 0$

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{n^\alpha}}\right) = -\ln\left(n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim$$
$$\sim -\ln\left[n^\alpha\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}}\right)\right] \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^{2\alpha}}\right) \sim -\left(-\frac{1}{6n^{2\alpha}}\right) = \frac{1}{6n^{2\alpha}}$$

$$a_n \sim \frac{1}{6n^{2\alpha}}$$

Для сходимости необходимо $2\alpha > 1$, значит ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$.

2644. (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \qquad (a > 0,\ b > 0)$

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{n^{2n}}{n^{n+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} n^{n+a}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} =$$

$$= \frac{n^{2n}}{n^{2n}n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n}} \sim \frac{1}{n^{a+b}e^{a+b}}$$

Вывод: ряд сходится, если $a + b > 1$.