Пономарев, 144

Задача 1

Дано:

$$\alpha : 2x - y - 3z + 14 = 0 \qquad A(1,2,3) \qquad B(1,-3,0)$$

Выяснить лежат ли точки с одной стороны плоскости.

Для этого необходимо подставить координаты точек в левую часть уравнение плоскости, если полученное число 0, то точка принадлежит плоскости, если число > 0, то точка лежит по одну стороны плоскости, если < 0, то точка лежит по другую сторону плоскости.

Подставим A:

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 14 = 2 - 2 - 9 + 14 = 5$$

Подставим B:

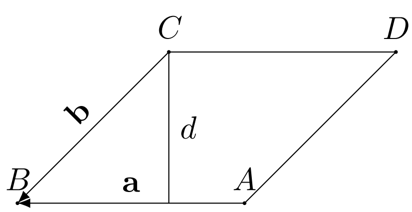
$$2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) - 3 \cdot 0 + 14 = 2 + 3 + 14 = 19$$

В обоих случаях числа одного знака и $\neq 0$, значит точки лежат по одну сторону плоскости.

Задача 2

Даны точки A, B, C, и векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Доказать, что

$$\mathrm{dist}(AB; C) = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \right| = d$$



$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| d$$

$$d = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|} \right| \qquad (1)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a||b| \sin\alpha \qquad d = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) |\mathbf{a}| \sin\alpha}{|\mathbf{a}|^2} \right|$$

$$\text{Но } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \qquad d = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|} \right| \qquad (2)$$

(1) = (2) ■

Задача 3

Дано:

$$A(1,4,-2) \qquad l: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z+2}{-3} \qquad \gamma: 2x+y+z=0$$

Найти α, т.ч. $A \in \alpha, \alpha \parallel l, \alpha \perp \gamma$.

Пусть $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{cases} A \in \alpha \implies A + 4B - 2C + D = 0 \\ \alpha \parallel l \implies 2A + 7B - 3C = 0 \\ \alpha \perp \gamma \implies 2A + B + C = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} C = -2A - B \\ A + 4B + 4A + 2B + D = 0 \\ 2A + 7B + 6A + 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -2A - B \\ 5A + 6B + D = 0 \\ 8A + 10B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{5}{4}B \\ C = 2 \cdot \frac{5}{4}B - B \\ D = 5 \cdot \frac{5}{4}B - 6B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{4}B \\ C = \frac{5}{2}B - \frac{2}{2}B \\ D = \frac{25}{4}B - \frac{24}{4}B \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{4}B \\ C = \frac{3}{2}B \\ D = \frac{1}{4}B \end{cases}$$

Для удобства возьмем $B = 4$

$$\alpha: -5x + 4y + 6z + 1 = 0$$

Задача 4

Дано:

$$\beta: x - 3y + z + 5 = 0 \qquad \gamma: -2x + z - 2 = 0 \qquad \delta: x - y + 2 = 0$$

Надо: построить α, через прямую пересечения β и γ, т.ч. $\alpha \perp \delta$

Найдем прямую пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} x-3y+z+5=0 \\ -2x+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+2 \\ x-3y+2x+2+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=2x+2 \\ 3x-3y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+2 \\ y=x+\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{z-2}{2} \\ x=y-\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-\frac{7}{3}}{1}=\frac{z-2}{2} : l$$

Найдем направляющий вектор l и вектор нормали δ:

$$\mathbf{v}_l=\{1,1,2\} \qquad \mathbf{n}_\delta=\{1,-1,0\}$$

Их векторное произведение будет вектором нормали α, найдем его:

$$\mathbf{v}_l \times \mathbf{n}_\delta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}=\{2,2,-2\} \parallel \{1,1,-1\}=\mathbf{n}_\alpha$$

Тогда $\alpha : x+y-z+D=0$, найдем D, для этого подставим в уравнение точку принадлежащую плоскости α и прямой l, например $(1;\frac{10}{3};4)$

$$1+\frac{10}{3}-4+D=0 \Leftrightarrow D=-\frac{1}{3}$$

Вернемся к α

$$x+y-z-\frac{1}{3}=0 \quad | \cdot 3$$
$$\alpha : 3x+3y-3z-1=0$$

Задача 5

Дано:

$$A(-2,-1,3) \qquad l : \frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z+2}{-3}$$

Найти $\operatorname{dist}(A,l)$

Найдем направляющий вектор и точку лежащую на прямой

$$\mathbf{v}_l = \{2, 7, -3\} \qquad B(6, 6, -5)$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \{8, 7, -8\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}_l = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 7 & -8 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 35\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 42\mathbf{k} = \{35, 8, 42\}$$

$$\operatorname{dist}(A, l) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}_l\right|}{|\mathbf{v}_l|} = \frac{\sqrt{35^2 + 8^2 + 42^2}}{\sqrt{2^2 + 7^2 + (-3)^2}} = \sqrt{\frac{3053}{62}}$$