

Алгебра и теория чисел

Курс Жукова И.Б.

Осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Алгебра линейных операторов

07.09.22

Определение 1.1 (Алгебра). V — линейное пространство над полем K . Линейный оператор на V — линейное отображение $V \rightarrow V$ (эндоморфизм линейного пространства V).

Определение 1.2. $\text{End } V = \text{Hom}(V, V)$ — множество линейных операторов.

$$\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W) \quad [\mathcal{A}]_{E,F}$$

Имея два пространства V и W , базисы E и F можно выбрать так, что матрица получится окаймленной единичной.

Теперь же мы имеем одно пространство, соответственно, и один базис и все еще хотим, чтобы матрица была наиболее простой.

Определение 1.3. Говорят, что задана алгебра над полем K , если задано множество A , бинарные операции $+$, \times на нем и отображение $K \cdot A \rightarrow A$, т.ч.:

1. $(A, +, \times)$ - кольцо
2. $(A, +, \cdot)$ - линейное пространство над полем K
3. $\forall \alpha \in K \forall a, b \in A : \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$

Пример 1.1. $A = M_n(K)$, $A_0 = \{\alpha E_n | \alpha \in K\}$ — подкольцо скалярных матриц, изоморфное полю K .

Пример 1.2. $A = K[x]$

Пример 1.3. Любая ситуация, где поле $K \subset R$ (R — кольцо) $\Rightarrow R$ — K -алгебра.

В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отождествить с полем K .

Любая ситуация, где поле $K \subset R$ (R — кольцо) $\Rightarrow R$ — K -алгебра. В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отождествить с полем K .

Почему алгебра с единицей:

Пусть A — алгебра с $1 (\neq 0)$ над полем K . Рассмотрим множество $A_0 = \{\alpha \cdot 1 | \alpha \in K\}$.

$$K \xrightarrow{\varphi} A_0 \quad \alpha \mapsto \alpha_1$$

Идеал в поле либо нулевой, либо все поле. $\varphi(1) \neq 0 \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) \neq K$. Значит, φ — изоморфизм. A_0 — подкольцо, изоморфное полю K .

Линейные операторы тоже образуют алгебру. Заметим, что в $\text{End } V$ есть сложение и композиция операторов, а также умножение на скаляр. $(\text{End } V, +)$ — абелева группа. Проверка дистрибутивности операторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) &= \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_1 + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_2 \\ (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \circ \mathcal{B} &= \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{B} + \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

$(\text{End } V, +, \circ)$ — линейное пространство над полем K . Наконец, $(\alpha \cdot \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha \cdot \mathcal{B}) = \alpha \cdot (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$.

Таким образом, $(\text{End } V, +, \circ, \cdot)$ — алгебра над полем K .

Предложение 1.1. Пусть $\dim V = n$. E — базис V . Тогда отображение $\lambda_E : \text{End } V \rightarrow M_n(K)$, $\mathcal{A} \mapsto [\mathcal{A}]_E$ — изоморфизм алгебр над полем K (т.е. биекция, сохраняющая все операции).

Доказательство. Знаем: λ_E — изоморфизм линейных пространств. $\lambda_E(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = [\mathcal{B}\mathcal{A}]_E = [\mathcal{B}]_E \cdot [\mathcal{A}]_E = \lambda_E(\mathcal{B})\lambda_E(\mathcal{A})$. ■

Следствие 1.1.1. $\dim \text{End } V = (\dim V)^2$

lil friendly reminder: $U_E \xrightarrow{\mathcal{A}} V_F \xrightarrow{\mathcal{B}} W_G$, $[\mathcal{B}\mathcal{A}]_{EG} = [\mathcal{B}]_{FG}[\mathcal{A}]_{EF}$ - стандартный случай.

$\mathcal{A} : U_{EE'} \rightarrow V_{FF'}$. Как связаны матрицы этого линейного отображения в двух базисах? $[\mathcal{A}]_{EF} = A$ - знаем, $[\mathcal{A}]_{E'F'} = ?$ Нужны матрицы перехода: $M_{E \rightarrow E'} = C$, $M_{F \rightarrow F'} = D$. Можем записать: $E' = EC$, $E = (e_1, \dots, e_n)$, $C = c_{ij}$ (E - вектор, C - квадратная матрица). Тогда $EC = (c_{11}e_1 + \dots + c_{m1}e_n, c_{12}e_1 + \dots + c_{n2}e_n, \dots)$. Что происходит с матрицей при такой замене базиса?

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$, E и E' — базисы, $[\mathcal{A}]_E = A$, $M_{E \rightarrow E'} = C$, тогда $[\mathcal{A}]_{E'} = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U_E & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V_F \\ \varepsilon_U \uparrow & & \downarrow \varepsilon_V = id_V \\ U_{E'} & \xleftarrow{\mathcal{A}} & V_{F'} \end{array}$$

$$[\mathcal{A}]_{E'F'} = \underbrace{[\varepsilon_V]_{FF'}}_{D^{-1}} \underbrace{[\mathcal{A}]_{EF}}_A \underbrace{[\varepsilon_U]_{E'E}}_C$$

В нашем случае ($U = V, E = F, E' = F'$). ■

Определение 1.4 (Алгебра). Пусть A' эквивалентно A , если $\exists C \in \text{GL}_n(K)$: $A' = C^{-1}AC$. Проверка симметричности и транзитивности:

$$A = (C^{-1})^{-1}A'C^{-1}$$

$$A'' = D^{-1}A'D = D^{-1}C^{-1}A'CD = (DC)^{-1}A'(CD)$$

Глава 2

Инвариантные подпространства

Определение 2.1. V — линейное конечномерное пространство, $A \in \text{End } V$. Пусть $W \subset V$ — линейное подпространство. W — называется инвариантным относительно A , если $\forall w \in W : A(w) \in W$.

Свойства.

1. $0, W$ — A -инвариантны
2. $\text{Ker } A$ — A -инвариантно
3. $\text{Im } A$ — A -инвариантен

Пусть W — A -инвариант. Следовательно, $A|_W$ можно рассматривать как элемент $\text{End } W$. Более формально, $\exists A_1 \in \text{End } W \forall w \in W : A_1 w = Aw$

$$W \xrightarrow{A} W \quad w \mapsto Aw$$

A_1 — оператор индуцированный оператором A на инвариантном подпространстве W .

$W \subset V$, $V/W = \{v + w | v \in V\}$ — фактор-пространство. W — A -инвариант. Определим A_2 .

$$\mathcal{A}_2 : V/W \rightarrow V/W \quad v + W \mapsto \mathcal{A}v + W$$

Проверка корректности: пусть $v_1 + W = v_2 + W$, нужно проверить, что $\mathcal{A}v_1 + W = \mathcal{A}v_2 + W$. Так, $\mathcal{A}v_2 = \mathcal{A}(v_1 + (v_2 - v_1)) = \mathcal{A}v_1 + \underbrace{\mathcal{A}(v_2 - v_1)}_{\in W} \Rightarrow \mathcal{A}v_2 + W = \mathcal{A}v_1 + W$.

Предложение 2.1. $\mathcal{A}_2 \in \text{End } V/W$

Доказательство. Проверка линейности:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2((v_1 + W) + (v_2 + W)) &= \mathcal{A}_2((v_1 + v_2) + W) = \\ &= \mathcal{A}(v_1 + v_2) + W = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}v_2 + W = \\ &= (\mathcal{A}v_1 + W) + (\mathcal{A}v_2 + W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\alpha(v + w)) &= \mathcal{A}_2(\alpha v + W) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha v) + W = \alpha \mathcal{A}v + W = \\ &= \alpha(\mathcal{A}v + W) = \alpha \mathcal{A}_2(v + W) \end{aligned}$$

■

\mathcal{A}_2 — индуцированный оператор на фактор-пространстве.

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V, W \subset V, e_1, \dots, e_m$ — базис W , e_{m+1}, \dots, e_n — дополнение до базиса V . Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. W — \mathcal{A} -инвариант
2. $[\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right), A_1 \in M_m(K)$

При этом $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_m}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W, \dots, e_n+W}$, где \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — соответствующие индуцированные операторы.

Доказательство. 1 \Rightarrow 2: векторы $e_1, \dots, e_n \in W \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W = \text{Lin}(e_1, \dots, e_m) \Rightarrow [\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$
Очевидно, $[\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_m} = A_1$.

Пусть $[\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = (a_{ij})$.

$$\mathcal{A}e_j = \underbrace{a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m}_{\in W} + a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n, \quad j \geq m+1$$

$$\underbrace{\mathcal{A}e_j + W}_{= \mathcal{A}_2(e_j + W)} = \underbrace{a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n + W}_{= a_{m+1j}(e_{m+1} + W) + \dots + a_{nj}(e_n + W)} \quad (\text{первые } m \text{ элементов})$$

станут нулевым классом). Таким образом, $[\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W, \dots, e_n+W} =$

$$\begin{pmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_2$$

$$2 \Rightarrow 1: [\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_m} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in$$

$$\text{Lin}(e_1, \dots, e_m) \in W. \text{ Пусть } w \in W \Rightarrow w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m \Rightarrow \mathcal{A}w = \beta_1 \underbrace{\mathcal{A}_1 e_1}_{\in W} + \dots + \beta_m \underbrace{\mathcal{A}_m e_m}_{\in W} \in W. \quad \blacksquare$$

Итак, мы выяснили, что если в нашем подпространстве V есть инвариантное подпространство меньшей размерности (ненулевое) $W \subset V$, то это позволяет нам составить блочно-треугольную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$, где A_1, A_2 - квадратные матрицы, $A_1 \in M_m(K)$, $m = \dim W$.

14.09.22

В ситуации $V = W_1 \oplus W_2$, можно получить $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$.

Предложение 2.3. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$, $V = W_1 \oplus W_2$, $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{E_1}$ — базис W_1 , $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E_2}$ — базис W_2 , $E = E_1 + E_2$. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. W_1, W_2 — \mathcal{A} -инвариантны

2. $[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$, $A_1 \in M_m(K)$, $A_2 \in M_{n-m}(K)$. При этом $A_1 = [\mathcal{A}|_{W_1}]_{E_1}$, $A_2 = [\mathcal{A}|_{W_2}]_{E_2}$

Доказательство. Аналогично предыдущему предположению.

$$1 \Rightarrow 2: \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right), \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in W_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right).$$

$$\begin{array}{l}
 2 \Rightarrow 1: \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \text{Lin}(e_1, \dots, e_m) = W_1 \Rightarrow \forall w \in \\
 W_1, \mathcal{A}w \in W_1, W_1 - \mathcal{A}\text{-инвариант.} \\
 \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in \text{Lin}(e_{m+1}, \dots, e_n) = W_2 \Rightarrow \forall w \in \\
 W_2, \mathcal{A}w \in W_2, W_2 - \mathcal{A}\text{-инвариант.} \quad \blacksquare
 \end{array}$$

Что означает в терминах оператора, что матрица получилась диагональной? Например, образ первого базисного вектора будет прямо пропорционален первому базисному вектору: $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1$, $\mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2$ и т.д.

Глава 3

Собственные значения и собственные векторы

Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$. Скаляр $\lambda \in K$ называется собственным значением оператора \mathcal{A} , если $\exists v \in V, v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v$. Можно написать иначе: $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - (\lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon), \varepsilon = \text{id}$.

Определение 3.1. Таким образом, λ — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0$. Если K — числовое поле, то «собственное число = собственное значение».

Определение 3.2. Пусть $v \in V, \lambda$ — собственное значение \mathcal{A} . Говорят, что v — собственный вектор \mathcal{A} , принадлежащий собственному значению λ , если $v \neq 0$ и $\mathcal{A}v = \lambda v$, т.е. $v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \setminus \{0\}$.

Определение 3.3. $V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$ — собственное подпространство, принадлежащее собственному значению λ .

Определение 3.4. $\mathcal{A} \in \text{End } V$ называется диагонализируемым, если в V существует базис E , такой что $[\mathcal{A}]_E$ диагональна.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$. Тогда: \mathcal{A} диагоназируем \Leftrightarrow в V существует базис из собственных векторов \mathcal{A} .

Доказательство. « \lll » < HEAD \Rightarrow : ===== \Rightarrow : \ggg » >
45f530186e3cc2911570fe969b623a5e90d14f96

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$E = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, $e_i \neq 0$, так как входит в базис $\Rightarrow e_i$ — собственный.

\Leftarrow : Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ — базис из собственных векторов. $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ для некоторых $\lambda_i \in K$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow [\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$. Тогда: 0 — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \text{GL}(V)$.

Доказательство. 0 — собственное значение оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - 0\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \text{GL}(V)$. \blacksquare

Определение 3.5. Пусть λ — собственное значение \mathcal{A} . Его геометрической кратностью называется $g_\lambda = \dim \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)$, $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $g_\lambda \leq n = \dim V$.

Предложение 3.3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где k — конечное число, — различные собственные значения \mathcal{A} . v_1, \dots, v_k — принадлежащие им собственные векторы. Тогда v_1, \dots, v_k — ЛНЗ.

Доказательство. Индукция по k .
База: $k = 1$. по определению $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$ — ЛНЗ.
Переход: $k - 1 \rightarrow k$. Пусть v_1, \dots, v_k — собственные векторы принадлежащие $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Предположим, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0(*)$. $\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$. Из $(*)$ следует, что $\alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$. Вычтем: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$
По индукционному предположению: v_1, \dots, v_{k-1} — ЛНС \Rightarrow

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = \dots = \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k - \text{ЛНЗ}. \quad \blacksquare$$

Следствие 3.3.1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные собственные значения \mathcal{A} . Тогда $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.

Доказательство. Нужно доказать: если $v_1 + \dots + v_k = v'_1 + \dots + v'_k$ (где $v_i, v'_i \in V_{\lambda_i}, i = 1, \dots, k$). Таким образом, $v_1 = v'_1, \dots, v_k = v'_k$.

$$(v_1 - v'_1) + \dots + (v_k - v'_k) = 0 \quad (**)$$

Предположим, $\exists i : v_i = v'_i$. Тогда в $(**)$ есть ненулевое слагаемое: $v_i - v'_i \in V_{\lambda_i}$. Оставим в $(**)$ только ненулевые слагаемые — противоречие с линейной независимостью. \blacksquare

Следствие 3.3.2. Пусть $\dim V = n, \mathcal{A} \in \text{End } V$. Тогда у $\mathcal{A} \leq n$ собственных значений.

Следствие 3.3.3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все собственные значения \mathcal{A} . Тогда $g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} \leq n = \dim V$.

Доказательство. $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m} \subset V \Rightarrow \dim(\underbrace{V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}}_{g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m}}) \leq n. \quad \blacksquare$

Предложение 3.4. Критерий диагональности оператора в терминах геометрических кратностей.

Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все его собственные значения, $\dim V = n$. Тогда \mathcal{A} диагонализируем $\Leftrightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$.

Доказательство. \Rightarrow : найдется базис E такой что: $[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m}), c_1, \dots, c_m \geq 0$. Первые c_1 векторов — собственные, принадлежащие собственным значениям λ_1 . Они ЛНЗ $\Rightarrow c_1 \leq g_{\lambda_1}$. Аналогично, $c_i \leq g_{\lambda_i}, m \leq i \leq 2$. $n = c_1 + \dots + c_m \leq g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$

\Leftarrow : $\dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}) = g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$.
 E_1 — любой базис V_{λ_1} , E_m — любой базис V_{λ_m} . E — диагонализующий базис для \mathcal{A} . ■

Замечание. При этом получили, если

$$[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m}),$$

то $c_1 = g_{\lambda_1}, \dots, c_m = g_{\lambda_m}$.

Глава 4

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \text{End } V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение \mathcal{A} . λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow |A - \lambda E_n| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ , при которых определитель матрицы равен нулю. $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого уравнения.

Определение 4.1. Пусть $A \in M_n(K)$. Есть характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{Tr } A} x^{n-1} + \dots + |A|, \text{ где } A = (a_{ij}), \deg G \leq n-2, \text{ Tr } A - \text{след матрицы.}$$

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$. Его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ называют $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E — любой базис V .

Проверка корректности: пусть $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}, C = M_{E \rightarrow E_1}$.
Нужно: $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= C^{-1}AC \\ \chi_{\mathcal{A}_1} &= |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = \\ &= |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n| |C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом, λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$ - корень $\chi_{\mathcal{A}}$.

Определение 4.3. Кратная копия λ у многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ называется собственной алгебраической кратностью собственного значения λ .

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$.

1. Пусть \mathcal{A} - инвариантное подпространство V ; $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_W \in W$.
Тогда $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$.
2. Пусть $V = W_1 \oplus W_2$; W_1, W_2 - \mathcal{A} -инвариант.

Определение 4.4. 1. 1

2. Аналогично: в подходящем E , $[\mathcal{A}]'_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right); A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1} \chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} \chi_{\mathcal{A}_2}$.

Следствие 4.1.1. Пусть λ - собственное значение \mathcal{A} . Тогда $g_\lambda \leq \dim V_\lambda$. Применим предложение к $W = V_\lambda$. Очевидно, W - \mathcal{A} -инвариант $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$.

Теорема 4.2.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: Существует базис E , такой что: $[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{g_{\lambda_1}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{g_{\lambda_k}})$. $c_{\lambda_1} = g_{\lambda_1}$; $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные значения. $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = (\lambda_1 - X)^{g_{\lambda_1}} (\lambda_2 - X)^{g_{\lambda_2}} \dots (\lambda_k - X)^{g_{\lambda_k}}$. ■

Пример 4.1. 1.

Глава 5

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \text{End } V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение \mathcal{A} . λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow |A - \lambda E_n| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ , при которых определитель матрицы равен нулю. $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого уравнения.

Определение 5.1. Пусть $A \in M_n(K)$. Есть характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{Tr } A} x^{n-1} + \dots + |A|, \text{ где } A = (a_{ij}), \deg G \leq n-2, \text{ Tr } A - \text{след матрицы.}$$

Определение 5.2. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$. Его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ называют $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E — любой базис V .

Проверка корректности: пусть $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}, C = M_{E \rightarrow E_1}$.
Нужно: $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= C^{-1}AC \\ \chi_{\mathcal{A}_1} &= |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = \\ &= |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n| |C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом, λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$ - корень $\chi_{\mathcal{A}}$.

Определение 5.3. Кратная копия λ у многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ называется собственной алгебраической кратностью собственного значения λ .

Предложение 5.1. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End } V$.

1. Пусть \mathcal{A} - инвариантное подпространство V ; $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_W \in W$.
Тогда $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$.
2. Пусть $V = W_1 \oplus W_2$; W_1, W_2 - \mathcal{A} -инвариант.

Определение 5.4. 1. 1

2. Аналогично: в подходящем E , $[\mathcal{A}]'_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right); A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1} \chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} \chi_{\mathcal{A}_2}$.

Следствие 5.1.1. Пусть λ - собственное значение \mathcal{A} . Тогда $g_\lambda \leq \dim V_\lambda$. Применим предложение к $W = V_\lambda$. Очевидно, W - \mathcal{A} -инвариант $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$.

Теорема 5.2.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: Существует базис E , такой что: $[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{g_{\lambda_1}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{g_{\lambda_k}})$. $c_{\lambda_1} = g_{\lambda_1}$; $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные значения. $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = (\lambda_1 - X)^{g_{\lambda_1}} (\lambda_2 - X)^{g_{\lambda_2}} \dots (\lambda_k - X)^{g_{\lambda_k}}$. ■

Пример 5.1. 1.