Математический анализ

Курс Широкова Н.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Норма линейного отображения

Определение 0.1 (Линейный оператор). $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, если $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A(px_1 qx_2) = pA(x_1) + qA(x_2)$

Замечание. $A \leftrightarrow \tilde{A}_{m\times n}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$A(x) = \tilde{A}_{m\times n}X$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & ... & a_{2m} \\ \vdots & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$

Определение 0.2 (Норма линейного отображения). $||A|| \overset{def}{=} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m, ||X|_{\mathbb{R}^m \leq 1}} ||AX||_{\mathbb{R}^n}$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... a_{1n}x_m \\ a_{21}x_1 + ... a_{2n}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

$$||AX||^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}x_1 + ... a_{km}x_n)^2 \le \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}^2 + ... + a_{km}^2)\underbrace{(x_1^2 + ... x_m^2)}_{=||X||^2_{\mathbb{R}^n}} \le \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}^2 + ... + a_{km}^2) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}a_{kl}^2 = ||A||_2 \tag{2}$$

$(2) \Rightarrow ||A|| \le ||A||_2 \ge 0$

Свойства нормы линейного отображения

1. .

Теорема 0.1. $||A|| \ge 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{0}$

Доказательство. Пусть $||A|| = 0$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$

$1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ не зависят друг от друга.

$e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i}, ... 0)$ $f_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$||A|| = 0 \Rightarrow Af_j = \mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}$. $Af_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ Теперь рассмотрим

$e_i \underbrace{(Af_j)}_{\mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}} = (0 \dots 1 \dots) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij} = 0$ ■

2. $A, c \in \mathbb{R}, (cA(x)) \overset{def}{=} c(A(x))$

Теорема 0.2. $||cA|| = |c| \cdot ||A||$

Доказательство.

$$||cA|| = \sup_{X\in\mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n}\le 1} ||cA(X)||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$\sup_{X\in\mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n}\le 1} ||c(AX)||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{X\in\mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n}\le 1} |c|\cdot||AX||_{\mathbb{R}^n}$$

■

3. $A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Теорема 0.3. $||A+B|| \le ||A|| + ||B||$

Доказательство.

$$||A+B|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m}\le 1} ||(A+B)X||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\dots} ||AX+BX||_{\mathbb{R}^n} \le$$

$$\le \underbrace{\sup(\underbrace{||AX||}_{\le ||A||_2} + \underbrace{||BX||}_{\le ||B||_2})}_{M} \le \sup_{\dots} ||AX||_{\mathbb{R}^n} + \sup_{\dots} ||BX||_{\mathbb{R}^n}$$

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^m, ||x_1||_{\mathbb{R}^m} \le 1 \text{и} ||Ax_1|| + ||Bx_1|| > M - \varepsilon \qquad (3)$$

$(3) \Rightarrow M - \varepsilon < ||A|| + ||B| \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m}\le 1} (||AX||_{\mathbb{R}^n} + ||BX||_{\mathbb{R}^n}) \le ||A|| + ||B||$ ■

4. .

Теорема 0.4. $||AX||_{\mathbb{R}^n} \le ||A|| \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m}$

Доказательство.

$$X \ne \mathbb{0}^m \Leftrightarrow ||X||_{\mathbb{R}^m} \overset{def}{=} t > 0$$
$$x_0 = \frac{1}{t}x$$
$$||x_0||_{\mathbb{R}^m} = ||\frac{1}{t}x||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t}||X||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t}\cdot t = 1 \Rightarrow ||Ax_0||_{\mathbb{R}^n} \le ||A|| \qquad (5)$$

$(5) \Rightarrow ||Ax_0||_{\mathbb{R}^n} = ||A\left(\frac{1}{t}x\right)||_{\mathbb{R}^n} \le ||A|| \Rightarrow 4.$ ■

5. .

Теорема 0.5.

$$c > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c||X||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

$$\Rightarrow ||A|| \leq c \tag{6'}$$

Доказательство.

$$(6) \Rightarrow \text{при } ||X||_{\mathbb{R}^m} < 1 \text{ имеем}$$
$$||AX||_{\mathbb{R}^n} \leq c \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \leq c \Rightarrow \sup_{||X|| \leq 1} ||AX|| \leq c \Rightarrow (6')$$

■

6. .

Теорема 0.6.

$$E = \{c \in \mathbb{R}, > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ имеем } ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq C||X||_{\mathbb{R}^m}\} \tag{7}$$

В случае $A \neq 0$
$||A|| = \inf E$, $||A||_2 \in E$, $\inf E \overset{def}{=} m$

$$||A|| = \inf E \tag{8}$$

Доказательство. a) $m = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_1 \in E : {}_1 < \varepsilon$$
$$(7) \Rightarrow ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c_1||x||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow ||A|| \leq c_1 < \varepsilon$$
$$\Rightarrow ||A|| = 0$$

b) $m > 0$

$$||A|| \in E, m \leq ||A||$$
$$\text{пусть } m < ||A|| \Rightarrow \exists c_2 : m < c_2 < ||A|| \tag{9}$$
$$(7) \Rightarrow ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c_2||x||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$(9) \Rightarrow ||A|| \leq c_2 \text{ противоречие}$$

■

7. .

Теорема 0.7.

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$
$$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$
$$Lx = B(A(x))$$
каждая норма соответствует своей паре пространств!
$$||L|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \tag{10}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^m \ ||LX||_{\mathbb{R}^k} = ||B(AX)||_{\mathbb{R}^k} \leq ||B|| \cdot ||AX||_{\mathbb{R}^n} \\ \leq \underbrace{||B|| \cdot ||A||}_{c} \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \end{aligned} \tag{11}$$

по свойству 5 (11) $\Rightarrow$ (10) ■

Дифференцируемость суперпозиции линейных отображений

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$$
$$X_o \in \Omega - \text{ внутрення точка}$$
$$G \in \mathbb{R}^n, Y_0 \in G, Y_0 - \text{ внутренняя точка в } G$$
$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n \ \forall x \in \Omega \ F(x) \in G, F(X_0) = Y_0$$
$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_k(y) \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^{\Bbbk}$$
$$\exists P : \Omega \to \mathbb{R}^k, P(x) \stackrel{def}{=} \Phi(F(x)) eqno(15)$$

Теорема 0.8.

$$F \text{ дифференцируема в } X_0, \Phi \text{ дифференцируема в } X_0$$
$$\Rightarrow P \text{ дифференцируема в } X_0 \text{ и} \tag{16}$$
$$DP(X_0) = D\Phi(X_0) \cdot DF(X_0)(\text{ это матрицы Якоби})$$

Доказательство.

$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) = B\lambda + \rho(\lambda) \tag{17}$$

$$B = D\Phi(Y_0), \rho(\lambda) \in \mathbb{R}^k \text{ и } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} \underset{\lambda \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} 0 \tag{18}$$

$$\lambda = \mathbb{0}_n, \Phi(Y_0) - \Phi(Y_0) = \mathbb{0}_k + \rho(\mathbb{0}_n) \Rightarrow \rho(\mathbb{0}_n) = \mathbb{0}_k$$
$$\forall \eta > 0 \exists \delta_1 > 0 :$$
$$(18) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq \mathbb{0}_n \text{ и } ||\lambda||_{\mathbb{R}_n} < \delta_1 \text{ будет } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}_k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} < \eta \tag{19}$$

и

$$||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \tag{20}$$

$$(19) \Rightarrow ||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \tag{19'}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall H \in \mathbb{R}^m, ||H||_{\mathbb{R}^m} \delta_2 \text{ имеем}$$
$$||r(H)||_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \tag{21}$$

$$H \in \mathbb{R}^m, x_0 + H \in \Omega \text{ возможно т.к. внутрення точка}$$
$$F(X_0) = Y_0$$
$$\text{определим } F(x_0 + H) - F(x_0) = \lambda \tag{22}$$

$$F(x_0 + H) - Y_0 = \lambda \tag{22'}$$

$$P(x_0 + H) - P(x_0) = \Phi(F(x_0 + H)) - \Phi(F(x_0)) \overset{(22')}{=}$$
$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0)$$
$$\overset{(17)}{=} B\lambda + \rho(\lambda) \overset{(12),(22)}{=} \tag{23'}$$
$$B(AH + r(H)) + \rho(AH + r(H)) =$$

$$= \overbrace{(BA)}^{P(x_0+H)-P(x_0)} H + \overbrace{Br(H) + \rho(AH + r(H))}^{r_1(H)} \qquad (23')$$

$$||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_2 \Rightarrow ||r(H)||_{\mathbb{R}^m} \le \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad 23$$

$$\delta = \varepsilon \ \exists \delta_1 : \text{ выполнено (20) при } ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \delta_1$$

$$||\lambda||_{\mathbb{R}^n} = ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n} \le ||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}$$

$$\overset{(22)}{\le} ||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} = (||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_1 ||H||_{\mathbb{R}^m} \le \frac{\delta_1}{||A||+\varepsilon} \qquad (24)$$

$$\delta_0 = \min(\delta_2, \frac{\delta_1}{||A|| + \varepsilon}) \qquad (25)$$

и полагаем $||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_0$

$$\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_0 (26) \Rightarrow ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k}$$
$$\le ||Br(H)||_{\mathbb{R}^k} + ||\rho(AH + r(H))||_{\mathbb{R}^k}$$
$$\le ||B|| \cdot ||r(H)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n}$$
$$\overset{(20),(23)}{\le} ||B|| \cdot \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}) \le$$
$$\le ||B||\varepsilon||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon||H||_{\mathbb{R}^m}) = \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (22)$$

$$P(x_0) + H - P(X_0) = (BA)H + r_1(H) \qquad (27')$$

$$\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_0 \text{ имеем} ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k} \le \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \qquad (27'')$$

$$(27'') \Rightarrow \frac{||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k}}{||H||_{\mathbb{R}^m}} \underset{H \to \mathbb{0}_m}{\longrightarrow} 0 \qquad (28)$$

$(23'), (27'), (28) \Rightarrow (16)$ ■