Глава 1

Алгебра линейных операторов

Определение 1.1. V - линейное пространство над полем K. Линейный оператор на V — линейное отображение $V \to V$ (эндоморфизм линейного пространства V).

Определение 1.2. $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V, V)$ - мн-во линейных операторов.

$\mathfrak{A} \in Hom(V, W)$
$[\mathfrak{A}]_{E,F}$

Определение 1.3. Говорят, что задана алгебра над полем K, если задано множество A, бинарные операции $+$, $\times$ на нем и отбражение $K \cdot A \to A$, т.ч.:

1. $(A, +, \times)$ - кольцо
2. $(A, +, \cdot)$ - линейное пространство /R
3. $\forall \alpha \in K\ \forall a, b \in A : \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$

Пример 1.1. 1. $A = M_n(K)$

2. $A = K[x]$
3. $K \subset R$ (R - кольцо с 1, K - кольцо с 1 из R) $\implies R - K$ - алгебра
   A - алгебра с $1 (\neq 0)$ над K

   $A_0 = \{\alpha \cdot 1 | \alpha \in K\}$ $K \xrightarrow{\varphi} A_0$ $\alpha \to \alpha_1$ $\varphi(1) \neq 0 \Rightarrow Ker(\varphi) \neq K \Rightarrow Ker(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi$ изоморфна

   $A_0 = \{\alpha E_n | \alpha \in K\}$ $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \alpha \end{pmatrix}$ - подкольцо скалярной матрицы

В $End\ V$ есть сложение и композиция операторов, а также умножение на скаляр.

$(End\ V, +)$ - абелева группа

$\mathfrak{A} \circ (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}_2$

$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \circ \mathbf{B} = \mathfrak{A}_1 \circ \mathbf{B} + \mathfrak{A}_2 \circ \mathbf{B}$

$(End\ V, +, \circ)$ - линейное пространство над полем

$(\alpha \cdot \mathfrak{A}) \circ \mathbf{B} = \mathfrak{A} \circ (\alpha \cdot \mathbf{B}) = \alpha \cdot (\mathfrak{A} \circ \mathbf{B})$

Таким образом, $(End\ V, +, \circ, \cdot)$ - алгебра над полем

Предложение 1.1. Пусть $\dim V = n$ E - базис V. Тогда отображение $End\ V \to M_n(K)$ $\mathfrak{A} \mapsto [\mathfrak{A}]_E$ - изоморфизм алгебр над полем (т.е. биекция сохраняет все операции)

Знаем: λ_E - изоморфизм линейных пространств. $\lambda_E(\mathbf{B} \circ \mathfrak{A}) = [\mathbf{B}\mathfrak{A}]_E = [\mathbf{B}]_E \cdot [\mathfrak{A}]_E = \lambda_E(\mathbf{B})\lambda_E(\mathfrak{A})$

$U_E \xrightarrow{\mathfrak{A}} V_F \xrightarrow{\mathbf{B}} W_G$ $[\mathbf{B}\mathfrak{A}]_{EG} = [\mathbf{B}]_{FG}[\mathfrak{A}]_{EF}$

Следствие 1.1.1. $\dim\ End\ V = (\dim\ V)^2$

$U_{EE'} \xrightarrow{\mathfrak{A}} V_{FF'} [\mathfrak{A}]_{EF} = A$ $[\mathfrak{A}]_{EF} = ? M_{E \to E'} = C$ $M_{F \to E'} = C$

$$E' = EC \quad E = (e_1, ... e_n) \quad C = c_{ij}$$

$$EC = (c_{11}e_1 + ... + c_{m1}e_n, c_{12}e_1 + ... + c_{n2}e_n, ...)$$

$$U_E \xrightarrow{\mathfrak{A}} V_F \xrightarrow{\varepsilon_V = id_V} V'_F \xleftarrow{\mathfrak{A}} U'_E \xrightarrow{\varepsilon_V} U_E$$

$$[\mathfrak{A}]_{E'F'} = \underbrace{[\mathfrak{E}_V]_{FF'}}_{D^{-1}} \underbrace{[\mathfrak{A}]_{EF}}_{A} \underbrace{[\varepsilon'_U]_{E'E}}_{C}$$

В нашем случае $(U = V, E = F, E' = F')$

> **Предложение 1.2.** Пусть $\mathfrak{A} \in End\ V$ E, E' - базисы, $[\mathfrak{A}]_E = A_1$ $M_{E \to E'} = C$. Тогда $[\mathfrak{A}]_{E'} = C^{-1}AC$

$A' \sim A$, если $\exists\ C \in GL_n(K)$: $A' = C^{-1}AC$ $A = (C^{-1})^{-1}A'C^{-1}$

$A' = C^{-1}AC$

$A'' = D^{-1}A'D = D^{-1}C^{-1}A'CD = (DC)^{-1}A'(CD)$

§2 Инвариантные пространства

V - линейное пространство (конечномерное)

$A \in End\ V$.

Пусть $W \subset\ V$ - линейное подпространство

W - называется инвариантным подпространством относительно A, если $\forall\ w \in W$ $\mathfrak{A}(w) = W$

Свойства

1. $0, W$ - A-инвариантны
2. $Ker\ \mathfrak{A}$ - A-инвариантны
3. $Im\ \mathfrak{A}$ - A-инвариантны

$A|_W$: $W \to V$

W - A-инвариант. $A|_W$ можно рассматривать как элемент $End\ W$. $\exists\ \mathfrak{A}_1 \in End\ W\ \forall\ w \in W$ $\mathfrak{A}_1 w = \mathfrak{A}w$

$$W \xrightarrow{\mathfrak{A}} W$$

$$w \mapsto \mathfrak{A}w$$

$\mathfrak{A}_1$ - индуцированный оператор $V\,W \subset V\,V/W = v + w|v \in V$

W - A-инвариант.

$$\mathfrak{A}_2 : V/W \to V/W$$

$$v + W \mapsto \mathfrak{A}v + W$$

Проверка корректности: пусть $v_1 + W = v_2 + W$, нужно $\mathfrak{A}v_1 + W = \mathfrak{A}v_2 + W$. $\mathfrak{A}v_2 = \mathfrak{A}((v_1 + (v_2 - v_1)) = \mathfrak{A}v_1 + \underbrace{\mathfrak{A}\underbrace{(v_2 - v_1)}_{\in W}}_{\in W} \Rightarrow \mathfrak{A}v_2 + W =$

$\mathfrak{A}v_1 + W$

Предложение 1.3. $\mathfrak{A}_2 \in End\ V/W$

$\mathfrak{A}((v_1 + W) + (v_2 + W)) = \mathfrak{A}_2((v_1 + v_2) + W) = \mathfrak{A}(v_1 + v_2) + W = \mathfrak{A}v_1 + \mathfrak{A}v_2 + W = (\mathfrak{A}v_1 + W) + (\mathfrak{A}v_2 + W)$

$\mathfrak{A}_2(\alpha(v+w)) = \mathfrak{A}_2(\alpha v+W) = \mathfrak{A}(\alpha v)+W = \alpha\mathfrak{A}v+W = \alpha(\mathfrak{A}v+W) = \alpha\mathfrak{A}_2(v+W)$

Предложение 1.4. Пусть $\mathfrak{A} \in End\ V, e_1, \dots e_m$ - базис W, $e_m + 1, \dots e_n$ - дополнение до базиса V. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. W - A-инвариант
2. $[\mathfrak{A}]_{e_1,\dots e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ $A_1 \in M_m(K)$

При этом $A_1 = [\mathfrak{A}_1]_{e_1,\dots e_m}$ $A_2 = [\mathfrak{A}_2]_{e_{m+1}+W,\dots e_n+W}$, где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ соответствуют индуцированные операторы.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ $e_1, \dots e_n \in W \Rightarrow \mathfrak{A}_{e_1}, \dots \mathfrak{A}_{e_m} \in W = Lin(e_1, \dots e_m) \Rightarrow [\mathfrak{A}]_{e_1,\dots e_m} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$

Очевидно, $[\mathfrak{A}_1]_{e_1,\dots e_m} = A_1$ $[\mathfrak{A}]_{e_1,\dots e_n} = (a_{ij})$ $j \geqslant m+1$

$\mathfrak{A}e_j = \underbrace{a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m}_{\in W} + a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n$

$\underbrace{\mathfrak{A}e_j + W}_{=\mathfrak{A}_2(e_j+W)} = \underbrace{a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n + W}_{a_{m+1j}(e_{m+1}+W)+\dots+a_{nj}(e_n+W)}$

Т.о. $[\mathfrak{A}_2]_{e_1,\dots e_m} = \begin{pmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_2$

$2 \Rightarrow 1$ $\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow \mathfrak{A}_{e_1}, \dots \mathfrak{A}_{e_m} \in Lin\ [\mathfrak{A}_1]_{e_1,\dots e_m} = \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}$

$\Rightarrow \mathfrak{A}_{e_1}, \dots \mathfrak{A}_{e_m} \in Lin(e_1, \dots e_m) \in W$

Пусть $w \in W \Rightarrow w = \mathbf{B}_1 e_1 + \dots + \mathbf{B}_m e_m \Rightarrow \mathfrak{A}w = \mathbf{B}_1 \underbrace{\mathfrak{A}_1 e_1}_{\in W} + \dots + \mathbf{B}_m \underbrace{\mathfrak{A}_m e_m}_{\in W} \in W$ ■