Лекции по математическому анализу

редактор Колесников Михаил

Глава 1

Исследование функций

1.1 Критерий постоянства функции

Теорема 1.1.
Пусть f определена на (a,b) $\forall$x $\in$ (a,b) $\exists$ f'(x) для того, чтобы f была постоянной ($f(x) \equiv c_0$) необходимо и достаточно, чтобы $\forall$x $\in$ (a,b), f'(x)=0

Доказательство. $x_0 \in (a,b), x \neq x_0$ Применим к промежуткам с концами x, x_0 теорему Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0 f(x) = f(x_0)$ □

Следствие 1.1.1.
На (a,b) определены функции g, h $\forall x_0 \in$ (a,b) $\exists$ g'(x_0) = h'(x_0) $\exists$ c: $\forall$x $\in$ (a,b) g(x) = h(x) + c_0

Доказательство. Пусть f(x) = g(x) - h(x) $\forall$x $\in$ (a,b) f'(x) = g'(x) - h'(x) = 0
пр Предыдущей теореме f(x) $\equiv$ c_0 $\forall$x $\in$ (a,b) □

1.2 Критерий возрастания и убывания функции

Теорема 1.2.
Пусть f,g - определены на (a,b) $\forall$x $\in$ (a,b) $\exists$ f'(x), g'(x)
I. 1) Для того, чтобы f была монотонной возрастающей на (a,b) $\Leftrightarrow$ $\forall$x $\in$ (a,b) f'(x) $\geq$ 0 (1)
2) Для того, чтобы g была монотонной убывающей на (a,b) $\Leftrightarrow$ $\forall$x $\in$ (a,b) g'(x) $\leq$ 0 (2)
II. 3) Для того, чтобы f строго возр. $\Leftrightarrow$ выполнялось св-во (1) и $\nexists$ $(\alpha, \beta) \subset$ (a,b) : $\forall$x $\in$ (α, β), f'(x) = 0 (3)
4) Для того, чтобы g была строго убыв. $\Leftrightarrow$ выполнялось (2) и $\nexists(\gamma, \delta) \subset$ (a,b) : $\forall$x $\in(\gamma, \delta)$ g'(x) = 0 (4)

Доказательство. I
(Необх) $x_0 \in (a,b)$ Пусть h > 0 тогда f($x_0 + h$ - $f(x_0)$ ≥ 0 $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ (5)
Переходя к пределу: $\lim\limits_{h \to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ или $f'(x_0) \geq 0$
(Достаточность.) Пусть выполнено (1) Пусть$x_1, x_2 : b > x_1 > x_2 > a$ по теореме Лагранжа $\exists$ c $\in$ $(x_2, x_1) : f(x_1) - f(x_2) = f(c)(x_1 - x_2)$ □

Доказательство. II
(Необх) ¿ Если бы $\exists$ (α, β) на котором выполн (3)
Применяя критерий пост. ф−ций $\forall$x $\in (\alpha, \beta)$ f(x) = f($\frac{\alpha+\beta}{2}$) α, β ?!
(Достаточность) Пусть $\nexists(\alpha, \beta) \subset (a, b) : \forall x \ \in (\alpha, \beta)$ f'(x) = 0
Пусит функция НЕ строго возрастает $\Rightarrow \exists x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b \ f(x_1 = f(x_2)$ (6)
$\forall x \in (x_1, x_2) \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ (7)
(6),(7) $\Rightarrow \forall x \in (x_1, x_2) \ f(x) \equiv f(x_1) \Rightarrow f'(x) = 0$?! □

1.3 Приложение доказанных теорем

Известно: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (0<x<$\frac{\pi}{2}$)
Можно доказать: $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ (8)

Доказательство. Пусть g(x) = $\frac{\sin x}{x}$, g'(x) = $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0 \Rightarrow g(x)$ строго монотонно убывает на $(0, \frac{\pi}{2})$
$\forall x_0 \ \in (0, \frac{\pi}{2})$ Пусть $x_1, x_2 : x_0 < x_1 < x_2 < x_2 < \frac{\pi}{2}$
$\frac{\sin x_0}{x_0} > \frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin x_2}{x_2}$ (9)
x $\rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$
$\frac{\sin x_0}{x_0} > \frac{\sin x_1}{x_1} \geq \lim\limits_{x_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{sinx_2}{x_2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$ (8) □

1.4 Нахождение локальных экстремумов

Определение 1.1. Опр. E$\subset \mathbb{R}$ и $x_0 \ \in$ E, x_0 - точка сгущения E, f,g определены на E(a)
а) x_0 называется точкой локального максимума для f если $\exists$ окрестность $\omega_1 \ni x_0 : \forall x \in \omega_1 \cap \ E \ f(x) \leq f(x_0)$
б) x_0 называется точкой локального минимума для g, если $\exists$ окрестность $\omega_2 \ni x_0 : \forall x \in \omega_2 \cap \ E \ g(x) \leq g(x_0)$
в) x_0 называется точкой экстремума, если она либо локальный максимум, либо локальный минимум
г) x_0 называется точкой строго локального максимума для f, если $\exists$ окрестность $\omega_1 \ni x_0 : \forall x \in \omega_1 \cap \ E, \ x \neq x_0 : \ f(x) < f(x_0)$
д)называется точкой строго локального минимума для g, если $\exists$ окрестность $\omega_2 \ni x_0 : \forall x \in \omega_2 \cap E, \ x \neq x_0 : \ g(x) < g(x_0)$
е) x_0 - точка строго локального экстремума функции, если она либо строго локальный минимум, либо максимум

1.5 Необходимый признак локального экстремума. Теорема Ферма

Теорема 1.3. f определена на (a,b) $\forall x_0 \in (a, b) \ \exists f'(x_0)$ Если в точке x_0 локальный экстремум, то f'(x_0) = 0

1.6 Достаточный признак локального экстремума

Теорема 1.4. f определена на (a,b)
I На (a,b) $\exists$ производные порядка до 2n-1(включительно) n $\geq$ 1 и для $x_0 \in$ (a,b) $\exists f^{(2n)}(x_0)$
$f'(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0 \quad (10)$
$f^{(2n)}(x_0) \neq 0 \quad (11)$
Тогда в точке x_0 достигается строгий локальный экстремум. При этом если $f^{(2n)}(x) > 0$, то достигается строгий локальный максимум, а если $f^{(2n)}(x) < 0$ - строгий локальный минмиум

II $\forall 1 \leq k \leq 2n\ \forall x \in (a,b) \exists f^n(x),\ \exists f^(2n+1)(x_0)$
$f'(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0 \quad (12)$
$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \quad (13)$
Тогда в точке x_0 экстремумов нет

Доказательство. I
Применим формулу тейлора с остатком Пеано:
$x \neq x_0$
$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{f^n(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r(x) \quad (14)$
$\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad (15)$
$$(10),(14) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + r(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}\underbrace{(1 + \frac{(2n)!}{f^{(2n)}(x)} \cdot \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}})}_{t(x)}$$
(15) $\Rightarrow \exists$ окрестность $\omega \ni x_0 : \forall x \in \omega\ t(x) > \frac{1}{2} \quad (16)$
Знак f(x) - $f(x_0)$ зависит только от знака производной $f^{(2n)(x_0)}$ $\square$

Доказательство. II
Применим формулу Тейлора порядка 2n+1 :
$$\text{f(x)=f}(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1} + r_1(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)(x_0)}}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}\underbrace{(1 + \frac{(2n+1)!}{f^{(2n+1)}(x_0)} \cdot \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n+1}})}_{t_1(x)}$$
(18) $\frac{r_1(x)}{(x-x_0)^{2n+1}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad (17)$
(17) $\Rightarrow \exists \omega_1 \ni x_0 : \forall x \in \omega_1\ t_1(x) > \frac{1}{2} \quad (19)$
если $x_1 < x_0 < x_2\ x_1, x_2 \in \omega$, то $f^{(2n+1)}(x_0)(x_1 - x_2)^{2n+1}$ и
$f^{(2n+1)}(x_0)(x_2 - x_0)^{2n+1}$ имеют разные знаки $\square$

1.7 Исследвание выпуклости и вогнутости функций

Через I будем обозначать любое из множеств: [a,b], [a,b), (a,b], (a,b), a<b, (a,∞), [a,∞), (-∞,b), (-∞,b], (-∞,∞)При чем, если x_1, $...x_n \in I$ n$\geq$ 2 (1)
$p_1, ...p_n : p_j > 0, p_1 + ... + p_n = 1 \quad (3)$
(1),(3) $\Rightarrow p_1x_1 + ... + p_nx_n \in I$ - Важное замечание!

Определение 1.2. I-множество, f $\in C(I)$ функция f выпукла, если $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$
$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$ (5)
Пусть h $\in C(I)$
вогнута на I, если при тех же обозначениях $h(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1h(x_1) + p_2h(x_1)$

1.8 Свойства выпуклых и вогнутых функций

Обозначения:
выпуклость f $\in$ cnv (I)
вогнутость f $\in$ cnc (I)

Свойство 1.1.

1. f $\in$ cnv(I) $\Rightarrow$ (-f) $\in$ cnc(I)
   h $\in$ cnc(I) $\Rightarrow$ (-h) $\in$ cnv(I)

2. c_0 >0
   f $\in$ cnv(I) $\Rightarrow c_0f \in cnv(I)$
   h $\in$ cnc(I) $\Rightarrow c_0h \in cnc(I)$

3. $f_1, ..., f_m \ \in \ cnv(I) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} f_i \in cnv(I)$
   $h_1, ..., h_n \ \in \ cnc(I) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i \in cnc(I)$

1.9 Неравенство Йенсена

Теорема 1.5. Пусть $f \in cnv(I)$,
$n \geq 2$,
$x_1, ..., x_n \in I$,
$p_1, ..., p_n > 0$,
$p_1, ..., p_n = 1$
$f(p_1x_1 + ... + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + ... + p_nf(x_n)$ (6)
Пусть $h \in cnc(I)$ При тех же обозначенияъ $h(p_1x_1 + ... + p_nx_n) \geq p_1h(x_1) + ... + p_nh(x_n)$ (7)

Доказательство. Докажем ждя cnv-функций(см свойство 1)
Доказательство проведем индукцией по n, если n = 2 - тривиально. Пусть верно для $n \geq 2$ докажем для n+1 точек $x_1, ...x_{n+1} \in I$
$p_1, ..., p_{n+1} > 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$
Пусть $\widetilde{p_n} = p_n + p_{n+1} > 0$
$p_1 + ... + p_{n-1} + \widetilde{p_n} = p_n + p_{n+1} > 0 = p_1 + ... + p_{n+1} = 1$ (8)
Пусть $\widetilde{x_n} = \frac{1}{\widetilde{p_n}}(p_nx_n + p_{n+1}x_{n+1})$ (9)
$\widetilde{x_n} = \frac{p_n}{\widetilde{p_n}}x_n + \frac{p_{n+1}}{\widetilde{p_n}}x_{n+1}$, но $\frac{p_n}{\widetilde{p_n}} + \frac{p_{n+1}}{\widetilde{p_n}} = \frac{\widetilde{p_n}}{\widetilde{p_n}} = 1$ (10)
$\Rightarrow \in I$ (11)(см замечания в начале лекции)
(9) $\Leftrightarrow \widetilde{p_n}\widetilde{x_n} = p_nx_n + p_{n+1}x_{n+1}$ Тогда по (9),(8) и инд. предп. получаем: $f(p_1x_1 + ... + p_{n-1}x_{n-1} + \widetilde{p_n}\widetilde{x_n}) \leq p_1f(x_1) + ... + p_{n-1}f(x_{n-1}) + \widetilde{p_n}f(\widetilde{x_n})$ (12)
$f(\widetilde{x_n}) = f(\frac{p_n}{\widetilde{p_n}}x_n + \frac{p_{n+1}}{\widetilde{p_n}}x_{n+1}) \overset{(10),(11)}{\leq} \frac{p_n}{\widetilde{p_n}}f(x_n) + \frac{p_{n+1}}{\widetilde{p_n}}f(x_{n+1}) \Rightarrow \widetilde{p_n} \cdot f(\widetilde{x_n}) \leq p_nf(x_n) + p_{n+1}f(x_{n+1})$ (13)
(8), (12), (13) $\Rightarrow$ (6) ☐

1.10 Преобразование условий выпуклости и вогнутости

рассмотрим мн-во I, $x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2$
Пусть x: $x_1 < x < x_2$ Очевидно $x \ \in \ I$
$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0, \frac{x - x_1]}{x_2 - x_1} > 0, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$

$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = x$ (14)
(14) $\Rightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ (15)
h(x) $\geq \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} h(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} h(x_2)$ (16)

Утверждение 1.6. Если f выпукла на I, то справ. (15)

Если f выпукла на I, то справ. (16)

Следствие 1.6.1. Пусть g - функция опред. на I: g$\in cnv(I)$ и одновременно $g \in cnc(I)$ (17)
Тогда $\exists c_1, c_2 : g(x) = c_1 x + c_2$(g линейная функция) (18)

Теорема 1.7. Пусть g - вып и вогнута. Пусть $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$ рассмотрим x:$x_1 < x < x_2$
(15),(17) $\Rightarrow g(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} g(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} g(x_2)$ (19)
(16),(17) $\Rightarrow g(x) \geq \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} g(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} g(x_2)$ (20)
(19),(20) $\Rightarrow g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} g(x_2) = c_1(x_1, x_2)x + c_2(x_1, x_2)$ (21)

Упр $c_1(x_1, x_2), c_2(x_1, x_2)$ не зависят от x_1 и x_2

Единственными функциями, которые одновременно выпуклы и вогнуты являются линейные функции

1.11 Выпуклость/Вогнутость и свойства производной функции

Теорема 1.8. $f \in C(I) \forall x \in I \exists f'(x) \ \ f \in cnv(I) \Leftrightarrow f'(x)$ монотонно возрасает (22)
$h \in C(I) \forall x \in I \exists h'(x)$
$f \in cnc(I) \Leftrightarrow f'(x)$ монотонно убывает (23)

Доказательство. Докажем только (22) (см свйоство 1)
(Необходимость) $x_1 < x_2; x_1, x_2 \in I$
(15): $f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$
$f(x) - f(x_1) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) - (\frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2 - f(x_1)))$ Учитывая x-$x_1 > 0$ получим:
$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (24)
Пусть x $= x_1 + h, h > 0$
$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ Переходя к пределу при $h \longrightarrow 0$
$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (25)
(15) : -f(x) $\geq -\frac{f(x_2)-f(x_1))}{x_2-x_1} f(x_1) - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$
$f(x_1) - f(x) \geq (\frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)) - \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}(f(x_2) - f(x_1))$ $x_2 > 0$
$\frac{f(x_2-f(x))}{x_2-x} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
Пусть x $= x_2 - h$, h > 0
(26): $\frac{f(x_2)-f(x_2-h)}{h} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
$-\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{h} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (27)
При $h \to 0 f'(x_0) \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (28)
(25),(28) $\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$
(Достаточность) (?) $f \in cnv(I)$ $x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ (см п."преобразование условий выпуклости и вогнутости")
$(x_2 - x_1) f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$
$(x_2 - x) f(x) - (x_2 - x) f(x_1) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$
$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$ (2)
Применим теорему Лагранжа на $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$:
$\exists c_1 \in (x_1, x): \ f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$ (3)
$\exists c_2 \in (x, x_2): \ f(x_1) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$ (4)
(3) $\Rightarrow (x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) = f'(c_1)(x_2 - x)(x - x_1)$ (5)
(4) $\Rightarrow (x - x_1)(f(x_2 - f(x))) = f'(c_2)(x - x_1)(x_2 - x)$ (6)
$c_1 < x < c_2 f'(c_1) \leq f'(c_2)$ (7) (5)-(7) $\Rightarrow$ (2) □

Следствие 1.8.1. $f \in C(I) \forall x \in I \exists f''(x)$ тогда $f \in cnv(I) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \forall x \in I$ (8)
$f \in cnc(I) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$ (9)

Замечание. I - множество, f определена на I $x_0 \in I$ - внутрення точка $\forall x \in I \ \exists f''(x)$ x_0 называется точкой перегиба для f, если $\exists \alpha, \beta \in I \ \ \alpha < x_0 < \beta$: на $[\alpha, x_0]$ f выпукла (вогнута), $[x_0, \beta]$ f вогнута (выпукла)
Если x_0 - точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$

Доказательство. $f \in cnv([\alpha, x_0]), f \in cnc([x_0, \beta])$ Пусть $f''(x_0) = (f')'(x_0) \neq 0$ тогда, например f"(x_0) $>$ 0 Рассмотрим $[x_0, \beta]$, где $f(x_0 \leq 0 ?!)$ □

1.12 Приложения признака выпуклости и вогнутости

(1) $f(x) = \ln x \ \ x > 0$ I = (0,∞) $f'(x) = \frac{1}{x}, f^n(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \Rightarrow f(x) \in cnc(I)$
Пусть $x_1 ... x_n > 0 n \geq 2$ $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$
по неравенсиву Йенсена:
$\ln(\frac{x_1+...x_n]}{n}) \geq \frac{1}{n} \ln x_1 + ... + \frac{1}{n} \ln x_n = \ln (x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}}$
Потенцируя, получим: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}}$
(2) I = (0,∞)

$f(x) = x^k, k > 1$ $f'(x) = kx^{k-1}$ $f''(x) = k(k-1)x^{k-2} > 0$
Пусть $x_1...x_n > 0$; $q_1...q_n > 0$ $Q = q_1 + ... + q_n$ $p_1 = \frac{q_1}{Q}, ..., p_n = \frac{q_2}{Q}$
Применим неравнство Йенсена $(p_1x_1 + ... + p_nx_n)^k \leq p_1x_1^k + ... + p_nx_n^k$
$(q_1x_1 + ... + q_nx_n)^k \leq Q^k(p_1x_1^k + ... + p_nx_n^k) = Q^{k-1}(q_1x_1^k + ... + q_nx_n^k)$
Пусть $a_j > 0$, $b_j > 0$, $1 \leq j \leq n$:
$q_jx_j = a_jb_j \quad (12)$
$q_jx_j^k = a_j^k \quad (13)$
$x_j^{k-1} = \frac{a_j^{k-1}}{b_j^{-1}} \quad (14)$
$(14) \Rightarrow x_j = a_j \cdot b_j^{-\frac{1}{k-1}} \qquad (15)\ x_j^k = a_j^k \cdot b_j^{-\frac{k}{k-1}}$
$q_j = \frac{a_j^k}{a_j^k \cdot b_j^{-\frac{k}{k-1}}} = b_j^{\frac{k}{k-1}} \quad (16)$
$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^n b_j^{\frac{k}{k-1}} \quad (17)$
$(11),(12),(13),(17) \Rightarrow (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^k \leq (b_1^{\frac{k}{k-1}} + ... + b_n^{\frac{k}{k-1}})(a_1^k + ... + a_n^k)$

1.13 Неравенство Гельдера

$a_1b_1 + ... + a_nb_n \leq (a_1^k + ... + a_n^k)^{\frac{1}{k}}(b_1^{\frac{k}{k-1}} + ... + b_n^{\frac{k}{k-1}})^{\frac{k-1}{k}}$
k = 2 - Неравенство Кошиб-Буняковского-Шварца
Пусть $\frac{k}{k-1} = k'$, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} = 1$
k,k' - сопряженные показатели в неравенстве Гельдера
$a_1b_1 + ... + a_nb_n \leq (a_1^k + ... + a_n^k)^{\frac{1}{k}}(b_1^{k'} + ... + b_n^{k'})^{\frac{1}{k'}}$

Глава 2

Неопределенный интеграл

Определение 2.1. Пусть I - открытое множество f определена на I, будем называть функцию F определенную на I первообразной функции f, если $\forall x \in I F'(x) = f(x) \quad (1)$

Определение 2.2. $f \in C(I)$, тогда у нее $\exists$о меньшей мере одна первообразная (см п. 3.7.)

2.1 Теорема о структуре множества первообразных

Теорема 2.1. I = (a,c) ((a,∞),$(-\infty, b), \mathbb{R}$) $f \in C(I)$
$\exists F_0'(x) = f(x) \forall x \in I$
$F'(x) = f(x) \ \ \exists c_0 : F(x) = F_0(x) + c_0 \ \ (2)$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = F(x) - F(x_0) \forall x \in I$
$\varphi(x) = c_0 \ \ (4)$
(4)⇒(2) □

$\forall C \ F_1(x) = F_0 + C \ \ F_1'(x) = F_0'(x) + C' = f(x)$

Определение 2.3. Пусть f определена на I, у которой $\exists$ хотя бы одна первообразная. Множество всех первообразных f обозначается символов: $\int f(x)dx$
если $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, то это понимается как совпадение двух множеств
Пусть $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot \int f(x)dx$ - каждый элемент множества, умножается на a
$0 \cdot \int f(x)dx = \{0\}$
$f_1, ..., f_m$ опред I $\quad \int f_1(x)dx + ... + \int f_m(x)dx$ - множество полученное из всех вомзожных сумм первообразных

2.2 Свойства неопределенного интеграла

Свойство 2.1.
(1) g - функция, определена на $\forall x \in I \ \exists g'(x) : \int g'(x)dx = \{g(x) + C\} := g(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Свойство 2.2.
(2) Если соотв. интегралы существуют, то $\int f_1(x)dx + ... + \int f_m(x)dx = \int (f_1(x) + ... + f_m(x))dx$

Доказательство. $\int f_1(x)dx + ... + \int f_m(x)dx = (F_1(x) + c_1) + ... + (F_m(x) + c_m) = (F_1(x) + ... + F_m(x)) + (c_1 + ... + c_m)$ □ (1) □

Свойство 2.3.
$a \neq 0$ a$\int f(x)dx = \int (a \cdot f(x))dx$

Доказательство.
$a(F(x) + C) = aF(x) + aC = aF(x) + C_1$, C_1 - произв. пост. □ □

Свойство 2.4.
$0 \cdot \int f(x)dx = 0$

Свойство 2.5.
$a \neq 0$ f, ax+b - функции, с соответсвующими областями значений и определения, тогда $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Свойство 2.6 (Интегрирование по частям).
$f, g \in C(I)$ (I- промеж, луч или $\mathbb{R}$)$\forall x \in I \exists f'(x), \exists g'(x)$ и $\exists \int f'(x)g(x)dx \int f(x)g'(x)dx$, тогда
$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (2)

Доказательство. Пусть $U'(x) = f'(x)g(x)$ $V'(x)_= f(x)g'(x)$
(U(x) + V(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)·g(x))' (3)
(3) $\Rightarrow \exists c_0 : U(x) + V(x) = f(x)g(x) = c_0$ (4)
$\int f'(x)g(x)dx = U(x) + c_1$ (5')
f(x)g(x) - V(x)- $c_2 = U(x) + c_0 - c_2$ $(5'')$
(5'),(5'') $\Rightarrow$ (2) □

Свойство 2.7 (Формула замены переменной).
I множество(промеж, луч, ось) $\omega(x)\omega' \in C(I)$ J - множество (того же типа, что I) $\forall x \in I \omega(x) \in J$ f - функция: F'(u) = f(u), тогда $\int f(\omega(x))\omega'(x)dx = F(\omega(x)) + C$

Доказательство. Очевидно. □

2.3 Таблица основных неопределенных интегралов

(1) $\int 0 \cdot dx = C$
(2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$
(3)$r \neq -1 (r \in \mathbb{N}, I := \mathbb{R}; r \in \mathbb{Z}, r < 0, I := \mathbb{R} \backslash 0, r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, I := (0, \infty)) \int x^2 dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
(4)$x > 0 (\ln x)' = \frac{1}{x}, x < 0 (\ln -x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
(5) $\int e^x dx = e^x + C$
(6)$a > 0, a \neq 1 (a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
(7) $\int \cos x dx = \sin x + C$
(8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$
(9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

(10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, x \in \mathbb{R} \backslash \pi k$
(11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$
(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, x \in (-1, 1)$
(13) $\int \ln x dx, \quad x > 0 \ g(x) = \ln x \ f(x) = x \ f(x) = x \ f'(x) \equiv 1$
$\int x' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - x + C$
Примеры интегралов не приводящихся к конечным комбинациям элементарных функций: $\int \frac{dx}{\ln x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx$ и т.д.

2.4 Интегрирование рациональных выражений

Определение 2.4. P(x), Q(X)≠0 - многочлены рац. функций $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} deg\P(x) < deg(Q)$
Простейшими дробями будем называть выраж. вида
(6) $\frac{b}{(x-a)^n} \quad a, b \in \mathfrak{R}, b \neq 0, n \geq 1$
(7) $\frac{px+q}{(x^2+cx+d)^{2m}} \quad |p| + |q| > 0 \ m \geq 1 \quad x^2 + cx + d$ - неприводим над $\mathbb{R}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{N} r_j(x) \quad (8)$
(8) $\Rightarrow \int \frac{P(X)}{Q(x)} dx = \sum_{j=1}^{N} \int r_j(x) dx \quad (9)$
Случай (6) $\int \frac{a}{(bx+c)^n} dx = a \int \frac{dx}{(bx+c)^n} = a \int (bx+c)^{-n} dx = \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1-n} (bx+c)^{-n+1} + C, n \neq 1 \\ \frac{a}{b} \cdot \ln |bx+c| + C_2, n = 1 \end{cases}$
Случай (7) $x^2 + cx + d = (x + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4} = (x + \frac{c}{2})^2 + v^2 \quad d - \frac{c^2}{4} = v^2 \ N > 0$
$\int \frac{px+q}{(x^2+cx+d)^m} dx = \int \frac{p(x+\frac{c}{2})+q-\frac{pc}{2}}{((x+\frac{c}{2})^2+v^2)^m} dx = \int \frac{px_1+q_1}{(x_1^2+v^2)^m} dx_1 = \underbrace{p \int \frac{x_1}{(x_1^2+v^2)^m}}_{1} + q_1 \int \frac{dx_1}{(x_1^2+v^2)^m}$, где $q_1 := q - \frac{pc}{2}, x_1 := x + \frac{c}{2}$

Рассмотрим 1 $\int \frac{x_1}{(x_1^2+v^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{2x_1 dx_1}{(x_1^2+v^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 1)' dx_1'}{(x_1^2+v^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{dx_2}{(x_1^2+v^2)^m} = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \frac{1}{1-m} (x_2 + v^2)^{-m+1} + C, \ m \neq 1 \\ \ln |x_2 + v^2| + C_1, \ m = 1 \end{cases}$
$\int \frac{dx_1}{(x_1^2+v^2)^m} = \int \frac{v dx_3}{(v^2 x_3 + v^2)^m} = v^{1-2m} \int \frac{dx_3}{(x_3^2+1)^m} dx \quad (10)$, где $x_1 = v x_3, x_1' = v, v > 0$
Рассмотрим $\int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + c$ Пусть $\Phi_1(y) := \arctan y$ ... $\Phi_m(y) := \int \frac{dy}{(y^2+1)^m}$
Найдем $\Phi_{m+1} -?$
$\int \frac{dy}{(y^2+1)^m} = \int \frac{y' dy}{(y^2+1)^m} = y \cdot \frac{1}{(y^2+1)^m} - \int y \cdot (\frac{1}{(y^2+1)^m})' dy = \frac{y}{(y^2+1)^m} = 2m \cdot \int y \cdot y dy = \frac{y}{(y^2+1)^m} + 2m \int \frac{dy}{(y^2+1)^m} - 2m \int \frac{dy}{(y^2+1)^{m+1}} \Rightarrow \int \frac{dy}{(y^2+1)^{m+1}} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{y}{(y^2+1)^m + \frac{2m-1}{2m}} \int \frac{dy}{(y^2+1)^m} \quad (12)$
(12) $\Rightarrow \Phi_{m+1}(y) := \frac{1}{2m} \cdot \frac{y}{(y^2+1)^m} + \frac{2m-1}{2m} \ \Phi_m(y) \quad (13)$

* * *

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, deg \ P(x), deg \ P(x) < deg \ Q(x)$ тогда $\int R(x) dx$ явл. конечной комбинацией элементарных функций.
Если p(x), Q(x) $\neq 0$ - многочлены, то P(x) = r(x)Q(x) + $p_1(x)$ (14) $deg \ r(x) \geq 0 \ deg \ p_1(x) < deg Q(x)$
Тогда $\frac{P}{Q} = r + \frac{p_1}{Q} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int r(x) dx + \int \frac{p_1(x)}{Q(x)} dx$

Теорема 2.2. Если R(x) - любая рациональная функций то $\int R(x)$ может быть выражен в виде конечной комбинации элементарных функций

Определение 2.5. Рациональная функцией R(U,V) будем называть выражение R(U,V) = $\frac{P(U,V)}{Q(U,V)}$, где P, Q - многочлены (Q$\neq$ 0)

Теорема 2.3. $\int R(\cos x, \sin x)dx$ представим в виде конечной комбинации элементарных функций.

Доказательство. $\tan\frac{x}{2} = y$ (1) $x = 2\arctan y$ (5)
$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ $\tan^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ (2)
$\cos x = \frac{2}{y^2+1} - 1 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ (3)
$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2y}{y^2+1}$ (4)
$y'(x) = (\tan\frac{x}{2})' = \frac{1+y^2}{2}$ $x'(y) = \frac{2}{y^2+1}$ (6)
$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}) \cdot \frac{2}{1+y^2}dy$ (7)
$R_1(y) = R(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}) \cdot \frac{2}{1+y^2}$ - рациональная функция □

2.5 Интегралы некоторых иррациональных функций

R(U,V) n > 1, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
$\int R((\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2})^{\frac{1}{n}}, x)dx$ (9)
В частности вместо $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2})^{\frac{1}{n}}$ может находиться $(a_1x+b_1)^{\frac{1}{n}}, a_1 \neq 0$; $(\frac{a_1x+b_1}{x})^{\frac{1}{n}}, b_1 \neq 0; x^{\frac{1}{n}}$

Теорема 2.4. Интеграл (9) - конечная комбинация элементарных функций

Доказательство. (10); $(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2})^{\frac{1}{n}} = y$; $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} = y^n$ (11)
$x = \frac{b_2}{a_1-a_2y^n}$ (12) Очевидно x'(y) - рац. функция
(10)-(12) $\Rightarrow \int R((\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2})^{\frac{1}{n}}, x)dx = \int R(y, \frac{b_2y^n-b_1}{a_1-a_2y^n}) \cdot x'(y)dy$
$R(y, \frac{b_2y^n-b_1}{a_1-a_2y^n})x'(y) = R_2(y)$
(13) $\Rightarrow \int R((\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2})^{\frac{1}{n}}, x)dx = \int R_2(y)dy$ (14) □

2.6 Интегралы от биномиальных дифференциалов

$\int x^m(a+bx^n)^pdx$- интеграл от бин. дифф. $a, b \neq 0, m, n, p \in \mathbb{Q}$
Рассмотрим случаи

1. p - целое $p \neq 0$, m $= \frac{M}{L}, n = \frac{N}{L}$, где $L \in \mathbb{N}, M, N \in \mathbb{Z}$
   $x^m(a+bx^m)^p = (x^{\frac{1}{L}})^M(a+b(x^{\frac{1}{L}})^N)^p$
   $R(u,v) := U^M(a+bU^N)^P$, что явл. рац. функцией

2. p - не целое Пусть $x^n = y, x = y^{\frac{1}{n}}, x'(y) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$
   $\int x^m(a+bx^n)^pdx = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m}{n}} \cdot (a+by)^py^{\frac{1}{n}-1}dy = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(a+by)^pdy$

2.а $\frac{m+1}{n}$ - целое (15) Пусть $p = \frac{r}{q}, q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}$
$R(u,v) = (a+bu)^r \cdot v^{\frac{m+1}{n}-1}$ (15) $\Rightarrow$ R - рациональная фукция от u,v
$\frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(a+by)^pdy = \int R((a+by)^{\frac{1}{q}}, y)dy$

2.б $\frac{m+1}{n}$ - не целое
$\frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(a+by)^p = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1+p}(\frac{a+by}{y})^pdy$ (16), где $\frac{m+1}{n} + p$ - целое □

Теорема 2.5 (Теорема(Чебышева).). Других случаев, при которых рац. дифференциал может быть выражен в виде кон. комбинаций нет

2.7 Подстановка Эйлера

$R(u, v)$ - рац. выраж.
$\sqrt{ax^2+bx+c}, a \neq 0$
$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x)dx$ - требуется привести интеграл к известнымфункциям
I-ая подстановка (a>0)
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t \quad (1)$
$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$
$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \quad (2) \quad ; \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t \quad (3)$
$x'(t)$ - рац.функция, тогда $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x)dx = \int R(\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t, \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t})(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t})'dt = \int R_1(t)dt$
II-ая подстановка (c>0)
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx \quad (4)$
$ax^2+bx+c = c + 2\sqrt{c}tx + t^2x^2$
$x \neq 0 : ax + b = 2\sqrt{c}t + t^2x$
$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2} \quad (5) \ ; \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + t \cdot \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2} \quad (6)$, тогда $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x)dx = \int R(\sqrt{c} + t \cdot \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, t\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2})(\frac{a\sqrt{c}t-b}{a-t^2})'dt =$
$\int R_2(t)dt$
III-ая подстановка
Пусть $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ - корни $ax^2+bx+c, \gamma \neq \delta$
$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\gamma) \quad (7)$
$ax^2+bx+c = t^2(x-\gamma)^2$
$a(x-\gamma)(x-\delta) = t^2(x-\gamma)^2 \quad a(x-\gamma)(x-\delta) = t^2(x-\gamma)^2 \ x \neq \gamma, \quad x \neq \delta$
$ax - a\delta = t^2x - t^2\gamma$
$x = \frac{a\delta - t^2\gamma}{a-t^2} \quad (8); \ \sqrt{ax^2+bx+c} = t \quad (\frac{a\delta-t^2\gamma}{a-t^2} - \gamma)$ и т.д
Если a<0, c<0< нет 2 разл. корней, то $ax^2+bx+c \leq 0$ и о корне из этого выражения речи быть не может

2.8 Подстанока Абеля

$m \geq 1, a \neq 0 \quad int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{m+1}{w}}} \qquad f(x) := ax^2+bx+c$
t $= (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{f(x)}} \quad (9)$
$(9) \Rightarrow t^2f(x) = a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}$
$t^2ax^2 + 4t^2bx + t^2c = a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}$
$4t^2ax^2 + 4t^2bx + 4t^2c = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \quad (10')$
$4af(x) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \quad (10''))$
Вычтем из (10') (10"): $4t^2f(x) - 4af(x) = b^2 - 4ac \quad f(x) = \frac{b^2-4ac}{4(t^2-a)}$
$\frac{1}{(f(x))^{\frac{2m+1}{2}}} = (\frac{4}{b^2-4ac})^{\frac{2m+1}{2}}(t^2-a)^{\frac{2m+1}{2}} \quad (11)$
$t = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}};$
$t\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2}f'(x) = ax + \frac{b}{2} \quad (12)$
$(12) \Rightarrow t'_x\sqrt{f(x)} + t(\sqrt{f(x)})'_x = a \quad (13)$
$(13) \Rightarrow t'_x\sqrt{f(x)} + t^2 = a \quad t'_x = \frac{a-t^2}{\sqrt{f(x)}}$
$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}} = \int \frac{1}{(f(x))^m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} =$

$\frac{1}{(f(x))^m} = (\frac{a}{b^2-4ac})^m(t^2-a)^m$ (14)
$= \int (\frac{4}{b^2-4ac})^m(t^2-a)^m \cdot \frac{t'_x}{-t^2+a}dx = (\frac{4}{b^2-4ac})^m \int (t^2-a)^{m-1}t'_x dx = -(\frac{4}{b^4-4ac})^m \int (t^2-a)^{m-1}dt$

Глава 3

Интеграл Римана-Стильтьеса

!!! Все рассматриваемые функции ограничение
Разбиением промежутка [a,b] будем называть множество $x_0, ...x_n$ $n \geq 1$ $a = x_0 < ... < x_n = b$ Обозначание: $\underline{P}$(position) $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$ $m_i = inf\ f(x)$ $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $M_i = sup\ f(x)$ $x \in [x_i, x_{i+1}] m_i \geq M_i$
$U(f, \underline{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$
$L(f, \underline{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ (*)
$U(f, \underline{P}) \geq L(f, \underline{P})$ $\forall p$

Определение 3.1. Верхний интеграл Римана: $\int\limits_a^{\bar{b}} f dx = inf\ U(f, \underline{P})$

Нижний интеграл Римана: $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f dx = sup\ L(f, \underline{P})$ будет доказано, что $\int\limits_a^{\bar{b}} f dx \geq \int\limits_{\underline{a}}^{b} f dx$

Определение 3.2. Функция f интегрируема по Риману на [a,b] если $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f dx = \int\limits_a^{\bar{b}} f dx =: \int\limits_a^b f dx \quad f \in \mathbb{R}$

$[a, b], \underline{P} = \bigcup_{j=0}^{n} x_j \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
f - функция, опред. на [a,b] $\alpha : \alpha(x) \leq \alpha(y)\ \forall x < y$ (1)
$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $m_i = \underset{x \in [x_i, x_{i+1}]}{inf} f(x)$; $M_i = \underset{x \in [x_i, x_{i+1}]}{sup} f(x)$ (2)
Верхняя сумма Римана-стильтьеса: U(f,$\alpha, \underline{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))$ (3)
Нижняя сумма: $L(f, \alpha, \underline{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))$ (4)
$\Delta\alpha(x_i) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)$ (5)
Если $\alpha(x) \equiv x$, то см. предыдущие опр-я (*)

3.1 Свойства сумм Римана-Стильтьеса

1. (1) $\Rightarrow \Delta\alpha(x_i) \geq 0$ $m_i \leq M_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha(x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta\alpha(x_i)$
   $\underline{L(f, \alpha, \underline{P}) \leq U(f, \alpha, \underline{P})}$

2. $\exists m, M : \forall x\ m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m \leq m_i;\quad M_i \leq M \forall i (8)$
   $m\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)) = m(\alpha(b) - \alpha(a)) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} M\Delta\alpha(x_0) = M(\alpha(b) - \alpha(a))$ (9)

3. $\underline{P}\quad x_{i_0} < x^* < x_{i_0 \neq 1}$
   $\underline{P^*} = \underline{P} \cup x^*$, тогда $L(f, \alpha, \underline{P}) \leq L(f, \alpha, \underline{P^*})$ (10)
   $U(f, \alpha, \underline{P^*}) \leq U(f, \alpha, \underline{P})$ (11)
   <u>оказательство.</u> $m_i, M_i\quad i \neq i_0\ m'_{i_0} := \underset{x \in [x_{i_0}, x^*]}{f(x)}\quad m''_{i_0} := \underset{x \in [x^*, x_{i_0}]}{inf}\ f(x)$
   $L(f, \alpha, \underline{P^*}) - L(f, \alpha, \underline{P}) = m'_{i_0}(\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0})) + m^n_{i_0}(\alpha(x_{i_0 \neq 1}) - \alpha(x^*)) - m_{i_0}(\alpha(x_{i_0 \neq 1}) - \alpha(x_{i_0}))=$
   $\alpha(x_{i_0 \neq 1}) - \alpha(x_{i_0}) = (\alpha(x_{i_0 \neq 1}) - \alpha(x^*)) + (\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0}))$
   $= (m'_{i_0} - m_{i_0})(\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0})) + (m''_{i_0} - m_{i_0})(\alpha(x_{i_0+1}) - \alpha(x^*)) \geq 0$ т.к $m_{i_0} \geq m'_i\quad m_{i_0} \leq m''_{i_0}$ (12) □

Замечание. $\alpha(x) \equiv x$, то частным случаемм будет: $L(f, \underline{P}) \leq L(f, \underline{P^*})\quad U(f, \underline{P} \geq U(f, \underline{P^*})$

> **Определение 3.3.** P_2 - измельчение разбиения P_1, если все точки P_1 содрж. в P_2 $(P_1 \subset P_2)$

$L(f, \alpha, P_1) \leq L(f, \alpha, P_2)$ (13)
$I(f, \alpha, P_1) \geq U(f, \alpha, P_2)$ (14) (док-во: см. п. 3)
4! P_1, P_2- произвольные разбиения, тогда справедливо неравенство: $L(f, \alpha, P_1) \leq U(f, \alpha, P_2)$ (15)

> *Доказательство.*
> $P = P_1 \cup P_2$ не огр. общности $P_1 neq P_2$, тогда P - измельчение как P_1, так и P_2, тогда
> $L(f, \alpha, P_1) \leq L(f, \alpha, P) \leq U(f, \alpha, P) \leq U(f, \alpha, P_2)$ □

Замечание. $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ Терминолог. замечание: Иногда данные суммы наз.суммами Дарбу(так было бы исторически правильнее)

3.2 Определение интеграла Римана-Стильтьесса

В соотнош. (15) фиксируем разбиение P_2, тогда $-\infty < \underset{P_1}{sup}\ L(f, \alpha, P_1) \leq U(f, \alpha, P_2)$ (16)

> **Определение 3.4.** Нижний интеграл Римана-Стильтьеса
> $\underline{\int} f d\alpha := \underset{P_1}{sup}\ L(f, \alpha, P_1)(17)$
> $-\infty < \underline{\int} f d\alpha \leq U(f, \alpha, P_2) < +\infty$ (17')
> (17') $\Rightarrow \underline{\int} d\alpha \leq \underset{P_2}{inf}\ U(f, \alpha, P_2) < +\infty$ (18)

> **Определение 3.5.** Верхний интеграл Римана-Стильтьеса
> $\overline{\int} f d\alpha := \underset{P_2}{inf}\ U(f, \alpha, P_2)$ (19)
> (18),(19) $\Rightarrow \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha$ (20)

Теорема 3.1. $\forall$ огранич. ф-ции f и $\forall$ возраст. ф-ции $\alpha\exists$ нижний и верхний интегралы Римана-Стильтьеса и между ними справедл. соотн. (20)

Замечание. $\alpha(x) \equiv x$, то $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f dx \leq \int\limits_{a}^{\overline{b}} f dx \quad (20')$

Определение 3.6. f интегрируема по Риману -стильбтьесу с весом α на [a,b], если $\underline{\int} f d\alpha = \overline{\int} f d\alpha \quad (21)$
$\overset{def}{\Leftrightarrow} f \in R(\alpha)$
$\int\limits_{a}^{b} f d\alpha := \underline{\int} f d\alpha = \overline{\int} f d\alpha \quad (22)$

3.3 Критерий интегрируемости по Риману-Стильтьесу с весом α

Теорема 3.2. $f \in R(\alpha) \Leftrightarrow \forall\epsilon\ > 0\ \exists$ разбиение P: $U(f, \alpha, P) - L(f, \alpha, P) < \epsilon \quad (23)$

Доказательство. (Достаточность)
$L(f, \alpha, P) \leq \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha \leq U(f, \alpha, P) \quad \Rightarrow 0 \underset{(20)}{\leq} \overline{\int} f d\alpha - \underline{int} f d\alpha \leq U(f, \alpha, P) - L(f, \alpha, P) \underset{(23)}{\epsilon} \forall\epsilon \ (24) \quad \Rightarrow$
$\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha$
(Необходимость) f - инт. по Риману- Стиотитесу с весом α Фиксируем $\epsilon > 0$
$\exists P_1 : U(f, \alpha, P_1 < \overline{\int} f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad (25)$
$\exists P_2 : L(f, \alpha, P_2 > \underline{\int} f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} \quad (26)$
$P = P_1 \cup P_2$ Если $P_1 \neq P_2$, то P- измельчение P_1 и P_2 (Если $P_1 = P_2$, то все просто) По сл. из свойства 3
$L(f, \alpha, P_2) \leq L(f, \alpha, P) \leq \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha \leq U(f, \alpha, P) \leq U(f, \alpha, P_1) \quad (27)$
$\underline{\int} f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} < L(f, \alpha, P) \leq \int f d\alpha \leq U(f, \alpha, P) < \overline{\int} f d\alpha + \frac{\epsilon}{2}$
$U(f, \alpha, P) - L(f, \alpha, P) < (\overline{\int} f dx + \frac{\epsilon}{2}) - (\underline{\int} f dx - \frac{\epsilon}{2}) < \epsilon$ □

Замечание. $\alpha(x) = x : f \in R \Leftrightarrow\ \forall\epsilon > 0\ \exists P : U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad (28)$
Кроме того $L(f, \alpha, P) \leq \int f d\alpha \leq U(f, \alpha, P) \quad (29)$
В частности$L(f, P) \leq \int f dx \leq U(f, P) \quad (30)$

3.4 Достаточные признаки интегрируемости функции по Риману-Стильтесу

f опред. на [a,b], α - монотонная функция

Утверждение 3.3. Если $f \in C([a,b])$, то $f \in R(\alpha)$
Пусть P - разбиение [a,b]: a $= x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
Диаметром разбиения будем называть $\mu(P) = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$; Докажем более сильное утверждение

Утверждение 3.4. Пусть $f \in C([a,b])$,тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ разбиения P $\mu(P) < \delta$ и $\forall t_i \int [x_i, x_{i+1}]$
$|\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i) - \int\limits_a^b f d\alpha| < \epsilon \qquad (1)$

Доказательство. P произв. разбиение $\exists t_i' \int [x_i, x_{i+1}]$
(2) $\quad f(t_i') = \min\limits_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t)$ (по 2-ой Т. Вейерштрасса)
$\exists t_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$
(3) $\quad f(t_i'') = \max\limits_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t)$

$$\left.\begin{aligned} (2),(3) \Rightarrow L(f,\alpha,P) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i')\Delta\alpha(x_i) \\ U(f,\alpha,P) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i'')\Delta\alpha(x_i) \end{aligned}\right\} (4)$$

$(4) \Rightarrow U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(t_i'') - f(t_i'))\Delta\alpha(x_i))$ (5) не огр. общности $\alpha(x) \ne const$
Применим Т.Кантора: Пусть $\sigma : \sigma(\alpha(b) - \alpha(a)) < \epsilon \quad (6)$
Выберем $\delta :\ \forall x \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in [x, x+\delta]\ \ |f(y_1) - f(y_2)| < \sigma \quad (7)$ Наложим ограничение на P: $\mu(P) < \delta$ (8)
$(8) \Rightarrow \forall i\ \ |t_i'' - t_i'| \le \Delta x_i \le \mu(P) < \delta$ (9)
(5),(7) $\Rightarrow U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) \le \sum_{i=0}^{n-1} \sigma\Delta\alpha(x_i) = \sigma(\alpha(b) - \alpha(a)) < \epsilon \Rightarrow$ f интегрируема по Риману-Стильтьесу с весом α

Докажем соотношение 1: Пусть $t_i \in [x_i, x_{i+1}] f(t_i') \le f(t_i) \le f(t_i'') \overset{(4)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i) \le U(f,\alpha,P) \\ \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i) \ge L(f,\alpha,P) \end{aligned}\right\}$
(10)
$L(f,\alpha,P) \le \int\limits_a^b f d\alpha \le U(f,\alpha,P) \quad (11)$
сравнивая (10) и (11) получим:
$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i) - \int\limits_a^b f d\alpha| \le U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) < \epsilon$ $\square$

Замечание. Если f непрерывна на [a,b], то она интегрируема по Риману

Утверждение 3.5.]Пусть $\alpha \in C([a,b])$ и монотонна на [a,b] f - монотонна и определена на [a,b] (без требования непрерывности), тогда $f \in R(\alpha)$

Доказательство. Не огр. общ. $\alpha \neq const$ Пусть P-разбиение a $=x_0 < x_1 < ... < x_n$=b
$\alpha(x_1) - \alpha(x_0) = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$ (12)
$k < n-2 \quad \alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$ (13)
$\alpha(x_n) - \alpha(x_{n+1}) = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$ (14)
(12) $\Leftrightarrow \alpha(x_1 = \alpha(a) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}) \quad \alpha(a) < \alpha(x_1)\alpha(b)$ ....
Пусть P определено в (12)-(14) $\forall t \in [x_i, x_{i+1}]\ f(x_i) \leq f(t) \leq f(x_{i+1})$ (15)
(15) $\Rightarrow \quad L(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta\alpha(x_i) U(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta\alpha(x_i)\ \}$
$U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\Delta\alpha(x_i)=$
(12)-(14) $\Rightarrow \Delta\alpha(x_i) = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$ (16)
$=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \frac{(\alpha(b)-\alpha(a))(f(b)-f(a))}{n\epsilon \quad (17)}$ □

Следствие 3.5.1 (Замечание). f - монотонна $\Rightarrow$ f интегрируема по Риману на промежутке [a,b]

3.5 Свойства интеграла Римана-Стильтьеса

1. $f_1, f_2 \in R(\alpha) \Rightarrow f_1 + f_2 \in R(\alpha)$
   $\int (f_1+f_2)d\alpha = \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha$

2. $f \in R(\alpha) \Rightarrow cf \in R(\alpha)$
   $\int (cf)d\alpha = c\int f d\alpha$

3. $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ и $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int f_1 d\alpha \leq \int f_2 d\alpha$

4. $f \in R(\alpha[a,b])$ - означ, что f интегр. на промежутке [a,b] $\forall c \in (a,b) \quad f \in R(\alpha[a,c]),\ f \in R(\alpha[c,b])$
   $\int\limits_a^b f d\alpha = \int\limits_a^c f d\alpha + \int\limits_c^b f d\alpha$

5. $f \in R(\alpha,[a,b])$ и |f(x)|$\leq M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |\int f d\alpha| \leq M(\alpha(b) - \alpha(a))$

6. $f \in R(\alpha_1), f \in R(\alpha_2), f \in R(\alpha_1+\alpha_2) \quad \int f d(\alpha_1+\alpha_2) = \int f d(\alpha_1) + \int f d(\alpha_2)$

7. $f \in R(\alpha), c \geq 0 \Rightarrow f \in R(c\alpha)$ и $\int f d(c\alpha) = c\int f d\alpha$

Лемма 3.6. Пусть f_1, f_2 определены и огранич. на [x,y], тогда справедливы неравенства:
$\underset{t\in[x,y]}{inf}\ f_1(t) + \underset{t\in[x,y]}{inf}\ f_2(t) \leq \underset{t\in[x,y]}{inf}\ (f_1(t)+f_2(t))$ (18)
$\underset{t\in[x,y]}{sup}\ f_1(t) + \underset{t\in[x,y]}{sup}\ f_2(t) \geq \underset{t\in[x,y]}{sup}\ (f_1(t)+f_2(t))$ (19)

Доказательство. докажем (18)
Пусть $\eta > 0\ \exists t_0 \in [x,y] : f_1(t_0) + f_2(t_0) < \underset{t\in[x,y]}{inf}\ (f_1(t) + f_2(t)) + \eta \quad (20)$
$f_1(t_0) \geq \underset{t\in[x,y]}{inf}\ (f_1(t)) \quad (21)$
$f_2(t_0) \geq \underset{t\in[x,y]}{inf}\ (f_2(t)) \quad (22)$
(20)-(22) $\Rightarrow inf f_1 + inf f_2 \leq inf(f_1 + f_2 + \eta) \quad \square$
Применим Лемму для промеж $[x_i, x_{i+1}]$
(18),(19) $\Rightarrow L(f_1,\alpha,P) + L(f_2,\alpha,P) \leq L(f_1+f_2,\alpha,P) \leq U(f_1+f_2,\alpha,P) \leq U(f_1,\alpha,P) + U(f_2,\alpha,P) \quad (24)$

Выберем разбиение P_1 :
$\overset{(1)}{\leq} U(f,\alpha,P_1) - L(f_1,\alpha,P_1) < \frac{\epsilon}{2} \quad (25) P_2 :$
$\overset{(2)}{\leq} U(f,\alpha,P_2) - L(f_1,\alpha,P_2) < \frac{\epsilon}{2} \quad (26)$
Пусть P $= P_1 \cup P_2, P-$ измельчение P_1 и P_2, тогда
$U(f_1,\alpha,P) - L(f_1,\alpha,P) \overset{(1)}{\leq}$
$U(f_2,\alpha,P) - L(f_1,\alpha,P) \overset{(2)}{\leq}$
(24)-(26) $U(f_1+f_2,\alpha,P) - L(f_1+f_2,\alpha,P) \leq (U(f_1,\alpha,P) - L(f_1,\alpha,P)) + (U(f_2,\alpha,P) - L(f_2,\alpha,P)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
$f_1 \in R(\alpha) f_2 \in R(\alpha) \Rightarrow f_1 + f_2 \in R(\alpha)$
$\forall \epsilon > 0$ Выберем разбиения P_1, P_2;
$$\left.\begin{array}{c} L(f_1,\alpha,P_1) - \frac{\epsilon}{2} < \int f_1 d\alpha < L(f_1,\alpha,P_1) + \frac{\epsilon}{2} \\ U(f_2,\alpha,P_2) - \frac{\epsilon}{2} < \int f_2 d\alpha < L(f_2,\alpha,P_2) + \frac{\epsilon}{2} \end{array}\right\} (27)$$
Пусть P $= P_1 \cup P_2$
(26),(27) $\Rightarrow \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha - \epsilon < \int f_1 + f_2 d\alpha < \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha + \epsilon \quad (28)$ т.к. $L(f_1+f_2,\alpha,P) \leq \int f_1 + f_2 d\alpha \leq U(f_1+f_2,\alpha,P)$ см. (24) (28) $\Rightarrow \int (f_1+f_2) d\alpha = \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha \quad \square$ $\square$

Теорема 3.7. Пусть $f \in R(\alpha)$ (f опред. на [a,b]) $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$ Пусть $\varphi \in C([m,M])$, тогда $\varphi(f(x)) \in R(\alpha)$

Следствие 3.7.1.
1. $f \in R(\alpha) \Rightarrow f^2 \in R(\alpha)$
2. $f, g \in R(\alpha) \Rightarrow fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R(\alpha)$
3. $f \in R(\alpha) \Rightarrow |f| \in R(\alpha)$

Замечание. $f \in R(\alpha) |\int f d\alpha| \leq \int |f| d\alpha$

Замечания.
Пусть $k \in -1, 1 : \quad k\int f d\alpha = |\int f d\alpha| \quad |\int f|d\alpha = k \int f d\alpha = \int (kf) d\alpha \leq \int |f| d\alpha \quad \square$ $\square$

3.6 Интеграл Римана- Стильтьеса как предел интегральных сумм.

$f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R(\alpha)$ было доказано: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall P (P = \bigcup_{i=0}^{n} x_i), \mu(P) < \delta \forall t_i \in [x_i, x_{i+1}]$
$|\int f d\alpha - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta\alpha(x_i)| < \epsilon$

Определение 3.7. Пусть даны фунции f, α (монот. возр) разбиение P: $x_0 < x_1 < ... < x_n$ набор T: $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \quad x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$ (1)
Интегральной суммой Римана- Стильтьеса будем называть : $S(f, \alpha, P, T) := \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i)$ (2)
Ясно, что $|\int f d\alpha - S(f, \alpha, P, T)| < \epsilon$

Определение 3.8. Пусть f опр. на [a,b], α монот. возр. будем говорить, что $\exists$ предел интегральных сумм Римана-Стильтьесса ф-ции f с вессом α, если $\exists I > 0 : \ \forall\epsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \ \forall P \ (\mu(P) < \delta)$ и $\forall$ набора точек T выполнено неравенство $|I - S(f, \alpha, P, T)| < \epsilon$ (3)
I- предел интегральных сумм Римана- Стильтьеса функции f с весом α
$I := \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$ (4)

3.7 Утверждения о пределах интегральных сумм Римана- Стильтьеса

Теорема 3.8. $f \in C([a, b]) \quad \int f d\alpha = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$

Теорема 3.9. f - ограничена на [a,b] α - возраст.
$\exists I = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$ (5)
(5) $\Rightarrow f \in R(\alpha)$ и I $= \int f d\alpha$ (6)

Теорема 3.10. Пусть $f \in R(\alpha)$ Пусть α непрерывна на [a,b] (7), тогда $\exists$ предел интегральных сумм и $\int f d\alpha = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$ (8)

<u>Замечание.</u> Пусть $\alpha(x) \equiv x$ $f \in R([a, b])$ - функция интегр. по Риману.$\int\limits_a^b f dx = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$ (8′)

3.8 интеграл римана с переменным верхним пределом

Пусть $f \in R([a, b]) \Rightarrow f \in R([a, x]) \ \forall x \in (a, b)$

Определим новую ф-цию $\forall x \in (a, b] :$ Φ(x) $= \int\limits_a^x f dt$ (9) - интеграл Римана с перем. верхним пределом

x = a: Φ(a):= 0 (10)

Теорема 3.11. 1) $\Phi \in C([a, b])$
2) $\forall x_0 \in (a, b) :$ непр. в x_0
$\exists$ Φ'(x_0)=f(x_0) (11)

Доказательство. 1) $\exists M : \forall x \ \ |f(x)| \leq M$ (12)
рассмотрим $x_1, x_2 : a \leq x_1 < x_2 \leq b]$
$\Phi(x_2) = \int\limits_a^{x_2} f dt = \int\limits_a^{x_1} f dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} f dt = \Phi(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x_2} f dt$
$\Phi(x_2)$-$\Phi(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f dt$ (13)
(12),(13) $\Rightarrow |\Phi(x_2)$-$\Phi(x_1)| = |\int\limits_{x_1}^{x_2} f dt| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} |f| dt \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} M = M(x_2 - x_1)$ (14)
(14) $\Rightarrow \Phi \in C([a,b])$
2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ (15)
Рассмотрим $\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{n}$ Пусть $-\delta < h < 0$ (16)
(13) $\Rightarrow \Phi(x_0)$-$\Phi(x_0+h) = \int\limits_{x_0+h}^{x} f dt = \int\limits_{x_0+h}^{x_0} (f - f(x_0) + f(x_0)) dt = \int\limits_{x_0+h}^{x_0} (f - f(x_0)) dt + \int\limits_{x_0+h}^{x_0} f(x_0) dt$
$\int\limits_{x_0+h}^{x_0} f - f(x_0) dt + f(x_0) \cdot (-h)$ (17) $\Rightarrow \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{n} = f(x_0) - \frac{1}{n} \int\limits_{x_0+h}^{x_0} (f - f(x_0)) dt$ (18)
(15) $\Rightarrow | -\frac{1}{n} \int\limits_{x_0+h}^{x_0} (f - f(x_0)) dt| \leq \frac{1}{|n|} \int\limits_{x_0+h}^{x_0} |f - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{|n|} \int\limits_{x_0+h}^{x_0} \epsilon dt = \epsilon$ (19)
(18),(19) $\Rightarrow |\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{n} - f(x_0)| \leq \epsilon$ (20) $\Rightarrow$ (11), что верно для $\forall h : 00 < |n| < \delta$ (доказ. аналог) □

Следствие 3.11.1. $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R([a,b]) \ \ \Phi(x) = \int\limits_a^b f dt \ \forall x_0 \in (a,b) \ \ \exists \Phi'(x_0) = f(x_0) \ \ \Phi \in C([a,b])$

3.9 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.12. $f \in R([a,b])$ Φ'(x) = f(x) $\Phi \in C([a,b])$, тогда $\int\limits_a^b f dx$ = Φ(b) - Φ(a) (1)

Доказательство. $\int\limits_a^b f dx = \lim\limits_{\mu(P) \to 0} S(f, x, P, T)$ (2)
(2) означает: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall P \ \mu(P) < \delta \ \ P = \bigcup_{i=0}^n x_i \ \ \forall t_i \in [x_i, x_{i+1}] \ \ 0 \leq l \leq n-1$
$|\int\limits_a^b f dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i| < \epsilon$ (3)
Φ(b) - Φ(a) $= \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)) =$
По т. Лагранжа $\forall i \exists t_i \in (x_i, x_{i+1}) : \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(t_i) \Delta x_i$ (4)
$= \sum_{i=0}^{n-1} \Phi'(t_i) \Delta x_i \underset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i = S(f, x, P, T)$
В силу произвольности набора T соотношении 3:
$|\int\limits_a^b f dx - (\Phi(a) - \Phi(b))| < \epsilon \ \forall \epsilon > 0$ (7) $\Rightarrow \int\limits_a^b f dx$ = Φ(b)-Φ(a) □

3.10 Интеграл Римана-Стильтьеса как интеграл римана

Теорема 3.13. $f \in R([a,b])$ $\alpha \in C([a,b])$
$\forall x \in (a,b)\ \exists \alpha'(x) : \alpha' \in R([a,b])$, тогда f $\in R(\alpha)$ и $\int\limits_a^b f d\alpha = \int\limits_a^b f\alpha' dx$

Доказательство. Если доказать, что $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,\alpha,P,T) = I_0$ (9), то из этого будет следовать, что $f \in R(\alpha)$ и $\int\limits_a^b f d\alpha = I_0$ (10). Ясно, что $f \cdot \alpha' \in R([a,b])$ Положим $I := \int\limits_a^b f\alpha' dx$ (11)
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall P, \mu(P) < \delta\ \forall T$ выполняется: $|\int\limits_a^b f\alpha' dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i| < \epsilon$ (12)
Докажем, что $|I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i)|$ меньше выраж, связанного с ϵ
$\Delta\alpha(x_i) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)$
по т. Лагранжа $\exists s_i \in (x_i, x_{i+1}) :\quad \Delta\alpha(x_i) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \alpha'(s_i)\Delta x_i$ (13)
$|I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(x_i)| \underset{(13)}{=} |I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t-i)\alpha'(s_i)\Delta x_i| \le |I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i| + |\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i))\Delta x_i| \underset{(11),(12)}{<} \epsilon + |\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i))\Delta x_i|$ (14)
$\exists M :\ \forall x \in [a,b]\ \ |f(x)| \le M$ (15)
$(15) \Rightarrow |\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i))\Delta x_i| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_i)||\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i \le M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i$ (16)
$s_i, t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ τ_i^*, τ_i - точки s_i и t_i, переименнованные так, что $\alpha'(\tau_i^*) \ge \alpha'(\tau_i)$ (17)
$|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| = \alpha'(\tau_i^*) - \alpha'(\tau_i)$ (18)
$(18) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha'(\tau_i^*)\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha'(\tau_i)\Delta x_i = S(\alpha', x, p, \mathbb{T}^*) - S(\alpha', x, P, \mathbb{T})$ (19), где $\mathbb{T}^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i^*$ $\mathbb{T} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i$ т.к. $\alpha \in R([a,b])$, то $\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma_1 > 0 :\ \forall P, \mu(P) < \sigma$ и $\forall \overset{\wedge}{\mathbb{T}}$ и $\forall \overset{\wedge}{\mathbb{T}}$ $|\int\limits_a^b \alpha' dx - S(\alpha', x, P, \overset{\wedge}{\mathbb{T}})| < \epsilon$ (20) Положим $\overset{\wedge}{\mathbb{T}} := \mathbb{T}$, а затем $\overset{\wedge}{\mathbb{T}} := \mathbb{T}^*$ Получим:
$|S(\alpha', x, P, \mathbb{T}^*) - S(\alpha, x, P, \mathbb{T})| \le |S(\alpha', x, P, \mathbb{T}^*) - \int\limits_a^b \alpha' dx| + |\int\limits_a^b \alpha' dx - S(\alpha', x, P, \mathbb{T})| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$ (21)
Пусть $\delta_2 := min(\delta, \delta_1)$
$(21) \Rightarrow M \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i < 2\epsilon M$ $(M > 0)$ (22)
$(16), (22) \Rightarrow |\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i))\Delta x_i| < 2M\epsilon$ (23)
$(14), (23) \Rightarrow |I - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta\alpha(t_i)| < \epsilon + 2M\epsilon = (2M+1)\epsilon$ (24)
Это неравенство верно для $\forall$ разбиения, диаметр которого меньше $\delta_2(\mu(P) < \delta_2)$
$(24) \Rightarrow I = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f, \alpha, P, T)$ (25)
По теорему (25) $\Rightarrow f \in R(\alpha)$ и $I = \int\limits_a^b f d\alpha$ (26) Сравнивая (11) и (26) получим доказываемую формулу □

Глава 4

Функции ограниченной вариации

??

Определение 4.1. f определена на [a,b] f имеет ограниченную вариацию на [a,b], если: V(f,[a,b]):= $\underset{P}{sup}\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|<\infty$ (1) - вариация ф-ции f на [a,b], где P = $\bigcup_{i=0}^{n}\{x_i\}$ $a=x_0<...<x_n=b$

Пример 4.1. Если $f(x_{i+1})-f(x_i)\geq 0$ (f возрастает), то $\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))=f(b)-f(a)=V(f;[a,b])$.
Если $g(x_{i+1})-g(x_i)\leq$ (g убывает), то $\sum_{i=0}^{n-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)|=g(a)-g(b)=V(g;[a,b])$

КОНЕЦ КРАСИВЫХ КОНСПЕКТИКОВ

Глава 5

Лекции Широкова без нумерации парарафов

5.1 Интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 5.1. Пусть u,v $\in C([a,b]); \forall x \in [a,b]\ \exists u'(x), v'(x)$ и $u', v' \in C([a,b])$, тогда $uv', u'v \in C([a,b])$ и справедлива формула: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx \quad (11)$

Доказательство. В формуле Ньютона- Лейбница(1) функцией F является любая первообразная функция f; Пусть $U \in C([a,b]), U'(x) = u(x)v'(x), x \in [a,b], V \in C([a,b]), V'(x) = u'(x)v(x), x \in [a,b]$ Существование функции U и V установлены в теореме из предыдущего пункта. По свойству интегрирование по частям в определенном интеграле существует постоянная c_0 т.ч. при $x \in [a,b]$ имеет U(x) = u(x)v(x) - V(x)+ $c_0 \quad (12)$
из (12) получаем U(b)-U(a) = (u(b)v(b)-V(b)+c_0) $-(u(a)v(a) - V(a) + c_0) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - (V(b) - V(a)) \quad (13)$
Но (1) влечёт U(b)-U(a) = $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx, V(b) - V(a) = \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx \quad (14)$
Теперь (13),(14) $\Rightarrow$ (11) □

5.2 Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 5.2. Пусть $f \in C([a,b]), \varphi \in C([a,b]), \varphi$ строго возрастает, $\varphi(p) = q, \varphi(q) = b$, и пусть $\varphi' \in C([p,q])$, тогда
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_p^q \varphi(t)\varphi'(t)dt \quad (15)$

Доказательство. По формуле замены переменной в неопредёленном интеграле справедлива формула $\int f(x)dx = \int \varphi(t)\varphi'(t)dt$; Пусть F - какая-то первообразная функции f, тогда $F(\varphi(t))$- первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

По формуле (1) Ньютона-Лейбница имеем $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (16)$

$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) \quad (17)$

Поскольку $\varphi(p) = a, \varphi(q) = b,$ (15) следует из (16) и (17) □ □

5.3 Первая теорема о среднем

Теорема 5.3. Пусть $f \in C([a,b]),\ g(x) \geq 0\ g \in C([a,b])$ тогда существует $c \in (a,b)$ т.ч. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx \quad (18)$

Доказательство. Пусть M = $\underset{x\in[a,b]}{max} f(x), m = \underset{x\in[a,b]}{min} f(x)$, тогда $\forall x \in [a,b]$ имеем $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, тогда $m\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b mg(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx \quad (19)$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то (18) следует из (19) при $\forall c \in [a,b]$

Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, тогда (19) $\Rightarrow m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M \quad (20)$

Из (20) следует по теореме о промежуточном значении, что $\exists c \in (a,b)$ т.ч. $\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = f(c)$, что эквивалетно (18) □

Замечание. Теорема остается справедливой при условии g(x) ≤ 0

Следствие 5.3.1. Пусть $f \in C[a,b]$; полагая g(x)≡1, получим, что $\exists c \in [a,b]$ т.ч. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

5.4 Вторая теорема о среднем

Теорема 5.4. Пусть функция f монотонна, $f' \in C([a,b]).g \in C([a,b])$, тогда $\exists c \in (a,b)$ т.ч. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^c g(x)dx = f(b)\int\limits_c^b g(x)dx \quad (21)$

Доказательство. Пусть G(x) $= \int\limits_a^x g(y)dy$, если x > a, и G(a) = 0. Тогда по теореме об интеграле с переменным верхним пределом G'(x) = g(x), $x \in [a,b]$ По теореме об интегрировании по частям имеем
$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)G'(x)dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int\limits_a^b G(x)f'(x)dx \quad (22)$
В силу монотоноости f выполнено $f'(x) \geq 0$ или f'(x)≤ 0 $\forall x \in [a,b]$, поэтому по первой теореме о среднем $\exists c \in (a,b)$ т.ч. $\int\limits_a^b G(x)f'(x)dx = G(c)\int\limits_a^b f'(a)dx = G(c)(f(b) - f(a)) \quad (23)$
Тогда (22) и (23) влекут $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - G(c)(f(b) - f(a)) = f(b)(G(b) - G(c)) + f(a)(G(c) - G(a)) \quad (24)$
Поскольку G(b)-G(c)$= \int\limits_c^b g(x)dx, G(c) - G(a) = \int\limits_a^c g(x)dx \quad (25)$. Тогда (24),(25) $\Rightarrow$ (21) □

5.5 Интеграл с переменным нижним пределом

Пусть $f \in C([a,b]), \Phi(b) = 0$ и Φ(x) $= \int\limits_x^b f(y)dy, a \leq x < b \quad (26)$
Тогда $\Phi \in C([a,b])$, Φ'(x) = -f(x), x $\in [a,b]$

Доказательство. Пусть a < x < b, F(x) $= \int\limits_a^x f(y)dy$. Тогда F(x) + Φ(x) $= \int\limits_a^x f(y)dy + \int\limits_x^b f(y)dy = \int\limits_a^b f(y)dy$, отсюда F'(x)+$\Phi$'(x) = $(\int\limits_a^b f(y)dy)' \equiv 0$, тогда Φ'(x) $= -F'(x) = -f(x)$, что и требовалось. □

5.6 Расширение применения символа определённого интеграла

Пусть f $\in R([a,b])$ Тогда по определению полагаем $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx,\ \int\limits_a^a f(x)dx = \int\limits_c^c f(x)dx = 0\ \forall c \in [a,b]$
При таком доопределении применения символа определённого интеграла формула Ньютона-Лейбница продолжает действовать: пусть F - первообразная для f, тогда $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) \quad \int\limits_c^c f(x)dx = 0 = F(c) - F(c)$
Теперь можно сформулировать дополнение к утверждению о замене переменной в определенном интеграле.

Теорема 5.5. Пусть $f \in R([a,b]), g : [-b,-a] \to R, g(x) = f(-x)$, тогда $g \in R([-b,-a])$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int -a^{-b} g(y)dy = -\int\limits_{-a}^{-b} f(-x)dx \quad (1)$

Доказательство. Пусть $P = \{x_k\}_{k=0}^n$ - разбиение [a,b], положим $P^- = \{y_l\}_{l=0}^n$, где $y_l = -x_{n-l}$- разбиение [-b,-a]. Тогда, если $M_l^- = \underset{y\in[y_{l-1},y_l]}{sup} g(y), m_l^- = \underset{y\in[y_{l-1},y_l]}{inf} g(y)$, то тогда $M_l^- = \underset{x\in[-x_{n-l+1},x_{n-l}]}{sup} f(-x) = \underset{y\in[x_{n-l},x_{n-l+1}]}{sup} f(t) = M_{n-l+1}$ и аналогично $m_l^- = m_{n-l+1}, y_l - y_{l-1} = -x_{n-l} - (-x_{n-l+1}) = x_{n-l+1} - x_{n-l}$, поэтому $U(g,P^-) = \sum_{l=1}^n M_l^-(y_l - y_{l-1}) = \sum_{l=1}^n M_{n-l+1}(x_{n-l+1} - x_{n-l}) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f,P)$, аналогично $L(g,P^-) = L(f,P)$, поэтому $U(f,P^-) - L(g,P^-) = U(f,P) - L(f,P) \quad (2)$
Возьмем $\forall\epsilon > 0$, выьерем P так, чтобы $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ Тогда (2) влечет, что $U(g,P^-) - L(g,P^-) < \epsilon$, т.е. $g \in R([-b,-a])$. Положим I $= \int\limits_a^b f(x)dx$ Опять возьмем $\forall\epsilon > 0$, найдем $\delta_0 > 0$ так, чтобы при $\delta(P) < \delta_0$ выполнялось соотношение $|S(f,P,T) - I| < \epsilon \qquad (3)$ Выберем n так чтобы $\frac{l-a}{n} < \delta_0$, пусть $P = \{a = k\frac{b-a}{n}\}_{k=0}^n, T = \{a = k\frac{b-a}{n}\}_{k=1}^n$. Тогда S(f,P,T) $= \sum_{k=1}^n f(a + k\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n}$ Тогда $P^- = \{-b + l\frac{b-a}{n}\}_{l=0}^n$ и пусть $T^- = \{-b + l\frac{b-a}{n}\}_{l=0}^{n-1}$ $S(y,P^-,T^-) = \sum_{l=0}^{n-1} g(-b + l\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \sum_{l=0}^{n-1} f - (-b + l\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{l=0}^{n-1} f(b - l\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^n f(a + k\frac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n} = S(f,P,T)$, поэтому (3) $\Rightarrow |S(y,P^-,T^-) - I| < \epsilon \qquad (4)$
Из (4) следует, что $\int\limits_{-a}^{-b} g(y)dy = -\int\limits_{-b}^{-a} g(y)dy = -I$, что и доказывает (1) □

Следствие 5.5.1. Пусть $f \in C([a,b]), \varphi, \varphi' \in C([p,q]), \varphi$строго монотонно убывает, $\varphi(p) = b, \varphi(q) = a$ Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx$

Доказательство. Пусть ψ(y) $= \varphi(-y), y \in [-q,-p]$ Тогда $\psi'(y) - \varphi'(-y) \cdot (-1) \in C([-q,-p]), \psi$ строго возрастает, теореме о замене переменной в неопределенном интеграле имеем $\int\limits_{-q}^{-p} f(\psi(y))\psi'(y)dy = \int\limits_b^a f(x)dx \quad (6)$
По уже доказанной теореме $\int\limits_{-q}^{-p} f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)dy = \int\limits_{-q}^{-p} f(\varphi(-y)) \cdot \varphi'(-y)(-1)dy = -\int\limits_q^p f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot (-1)dt = \int\limits_q^p f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (7)$
(6),(7) $\Rightarrow \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = -\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = -\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx$ □

5.7 Несобственные интегралы

$$\left.\begin{array}{l} \text{Пусть } f_1 \in R([a,b]) \ \forall\beta > a, \\ f_2 \in R([\alpha,b]) \ \forall\alpha < b \\ f_3 \in R([a,\beta]) \ \forall\beta,\ a < \beta, b \\ f_4 \in R([\alpha,b]) \ \forall\alpha,\ a < \alpha < b \end{array}\right\} (8)$$

Предположения (8) влекут, что $\forall\beta$, где $\beta > a$ или a$<\beta < b$, определены функции $I_j(\beta) = \int\limits_a^b f_j(x)dx, j = 1,3$ (9)

и $\forall\alpha$, где $\alpha < b$ или $a < \alpha < b$ определена функции $K_j(\alpha) = \int\limits_a^b f_j(x)dx, j = 2,4$ (10)

Определение 5.1. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f_1(x)dx$ или $\int\limits_a^b f_3(x)dx$ сходится, если $\exists \lim\limits_{\beta\to+\infty} I_1(\beta)) \in \mathbb{R}$ (11)
или, соответственно, $\exists \lim_{\beta\to b} I_3(\beta) \in \mathbb{R}$ (12)
При этом по определению полаг $\int\limits_a^\infty f_1(x)dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty} F_1(\beta), \int\limits_a^b f_3(x)dx = \lim\limits_{\beta\to b-0} I_3(\beta)$
Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f_2(x)dx$ или $\int\limits_a^b f_4(x)dx$ сходится, если $\exists \lim\limits_{\alpha\to-\infty} K_2(\alpha) \in \mathbb{R}$ (13)
или, соответственно, $\exists \lim\limits_{\alpha\to a+0} K_4(\alpha) \in \mathbb{R}$ (14) При этом полагаем $\int\limits_{-\infty}^b f_2(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} K_2(\alpha), \int\limits_a^b f_4(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to a+0} K_4(\alpha)$
Если какое-то из условий (11)-(14) не выполняется, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится и ему не приписываем числового значения.

Примеры несобственных интегралов:
$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}, f_1 = \frac{1}{x^p}; \int\limits_1^2 \frac{dx}{(2-x)^q}, f_3 = \frac{1}{(2-x)^q}; \int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2}, f_2 = e^{-x^2}; \int\limits_0^1 \ln x dx, f_4 = \ln x$
Положим для сокращения вариантов формулировок $\beta_0 = +\infty$ в (11), $\beta_0 = b$ в (12), $\alpha_0 = -\infty$ в (13),$\alpha_0 =$ a в (14) Соответственно $U(\beta_0)$ - это окрестность $+\infty$ или b, $U(\alpha_0)$ - окрестности $-\infty$ или a

5.8 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Теорема 5.6. Для того, чтобы несобственные интегралы в (11) или (12) сходимости, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\epsilon > 0\ \exists U(\beta_0)$ т.ч. $\forall x_1, x_2 \in U(\beta_0)$ выполено $|\int\limits_{x_1}^{x_2} f_j(y)dy| < \epsilon, j = 1,3$ (15)
Для того, чтобы несобственные интегралы в (13) и (14) сходились, необходимо и достаточно что $\forall\epsilon > 0\ \exists U(\alpha_0)$ т.ч. $\forall x_1, x_2 \in U(\alpha_0)$ выполнено $|\int\limits_{x_1}^{x_2} f_j(y)dy| < \epsilon, j = 2,4$ (16)

Доказательство. Проведем рассуждение для случаев j = 1,3 в (15), случаи j = 2,4 в (16) рассматриваются аналогично. По критерию Коши существования конечного предела функции $\exists \lim\limits_{x\to\beta_0} f_j(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists U_\epsilon(\beta_0)$ т.ч. $\forall x_1, x_2 \in U_\epsilon(\beta_0)$ имеет $|I_j(x_2) - I_j(x_1)| < \epsilon$. Пусть $a < x_1 < x_2$ тогда $I_j(x_2) - I_j(x_1) = \int\limits_a^{x_2} f_j(y)dy - \int\limits_a^{x_1} f_j(y)dy = \int\limits_a^{x_1} f_j(y)dy + \int\limits_{x_1}^{x_2} f_j(y) - \int\limits_a^{x} f_j(y)dy = \int\limits_{x-1}^{x_2} f_j(y)dy \Rightarrow (15)$ □

5.9 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Предположим, что $f_j(x) \geq 0, j = 1,..4$. Если $\beta_0 > \beta_2 > \beta_1$, то $I_j(\beta_2) - I_j(\beta_1) = \int\limits_a^{\beta_2} f_j(x)dx - \int\limits_a^{\beta_1} f_j(x)dx = \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f_j(x)dx \geq 0 \quad (1)$

Если $\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_1$, то $K_j(\alpha_2) - K_j(\alpha_1) = \int\limits_{\alpha_2}^{b} f_j(x)dx - \int\limits_{\alpha_1}^{b} f_j(x)dx = \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} f_j(x)dx \geq 0 \quad (2)$

Из (1) и (2) следует, что при j = 1,3 функции $I_j(\beta)$ не убываают, а при j = 2,4 функции $K_j(\alpha)$ не возрастают. Это позволяет применить к функциям I_j и K_j критерий существования конечного предела, применение которого дает следующий результат

Теорема 5.7. Пусть $f_j(x) \geq 0, x \in [a,\beta)$ или $x \in (\alpha, b]$ Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы существоввали $M_j > 0$ такие, что $\int\limits_a^{\beta} f_j(x)dx \leq M_j, x \in [a,\beta_0), j = 1,3$, или, соответсвенно, $\int\limits_\alpha^{b} f_j(x)dx \leq M_j, x \in (\alpha_0, b], j = 2,4$

Доказательство было предпослано формулировке

5.10 Признаки сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций

Теорема 5.8. Пусть $f_j(x) \geq, x \in [a,\beta_0)]$ или $x \in (\alpha_0, b], c_j > 0$ и пусть $f_j(x) \leq c_j g_j(x) \forall x$ Тогда

(A), если $\int\limits_a^{\beta_0} g_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} g_j(x)dx$ сходится, то и $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$ сходится, при этом $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx \leq c_j \int\limits_a^{\beta_0} g_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx \leq c_j \int_{\alpha_0}^b g_j(x)dx \quad (3)$

(B), если $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_a^{\beta_0} g_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} g_j(x)$ расходится

Доказательство. (A) По предыдущему критерию $\exists M_j > 0$ т.ч. $\int\limits_a^\beta g_j(x)dx \le M_j, \int\limits_\alpha^b g_j(x)dx \le M; j = 1, ...4$ (4) Тогда условие и (4) влекут
$\int\limits_a^\beta f_j(x)dx \le \int\limits_a^\beta c_j g_j(x)dx \le cM_j, j = 1, 3$ (5)
$\int\limits_\alpha^b f_j(x)dx \le \int\limits_\alpha^b c_j g_j dx \le cM_j, j = 2, 4$ (6)
(5) и (6) влекут, что $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx, \int\limits_{\alpha_0}^b f_j(x)dx$ сходятся. Далее, условия влекут неравенства $\int\limits_a^\beta f_j(x)dx \le \int\limits_a^\beta c_j g_j(x)dx = c_j \int\limits_a^\beta g_j(x)dx$ (7)
$\int\limits_\alpha^b f_j(x)dx \le \int\limits_\alpha^b c_j g_j(x)dx = c_j \int\limits_\alpha^b g_j(x)dx$ (8)
Установлено, что пределы в левой части (7) или (8) конечно, пеоеходя в неравенствах (7) и (8) к пределу при $\beta \to \beta_0$ или $\alpha \to \alpha_0$ получаем (3). часть (A) доказана □

Доказательство (B) Если предположим, что $\int\limits_a^{\beta_0} g_j(x)dx$ или $\int\limits_a^{\beta_0} g_j(x)$ сходится, то применима часть (A) и тогда $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^b f_j(x)dx$ должны бы сходиться, что противоречит предположению. Часть (B) доказана □

5.11 Важные примеры

Пусть p>0, b > 0 Рассмотрим (1) $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$; пусьб 0<p<1, $0<\alpha < $ b Тогда $\int\limits_\alpha^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(b^{1-p}-\alpha^{1-p}) \underset{\alpha\to+0}{\to} \frac{1}{1-p}b^{1-p}$, (9)
т.е. при 0<p<1 $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$ сходится и (9) $\Rightarrow \int\limits_0^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}b^{1-p}$

Пусть p = 1, тогда $\int\limits_\alpha^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln \alpha \underset{\alpha\to+0}{\to} +\infty$, (11)

Из (11) следует, что $\int\limits_0^b \frac{dx}{x}$ расходится

Пусть p>1, тогда $\int\limits_\alpha^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}(\alpha^{1-p} - b^{1-p}) \underset{\alpha\to+0}{+\infty}$, (12) и (12) $\Rightarrow \int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$ при p > 1 расходится

Пусть p > 0, a> 0 Рассмотрим $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ Пусть p > 1, тогда $\int\limits_a^\beta \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(\beta^{1-p}) - a^{1-p} = \frac{1}{p-1}(a^{1-p} - \beta^{1-p}) \underset{\beta\to+\infty}{\to} \frac{1}{p-1}a^{1-p}$ (13) т.е $\int\limits_0^\infty$ сходится и (13) $\Rightarrow \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}a^{1-p}$

Пусть p = 1, тогда $\int\limits_a^\beta \frac{dx}{x} = \ln \beta - \ln a \underset{\beta\to+\infty}{\to} +\infty$, (14) т.е. $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ расходится. Пусть 0<p<1, тогда $\int\limits_a^\beta \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(\beta^{1-p} - a^{1-p}) + \underset{\beta\to+\infty}{\to} + \infty$ (15),

(15) $\Rightarrow \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ расходится

5.12 Абсолютно сходящиеся интегралы

Пусть $f_j(x)$ могут иметь произвольный знак. Говорят, что $\int\limits_a^{\beta_0} f_i(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$ абсолютно сходится, если сходятся несобственный интегралы $\int\limits_a^{\beta_0} |f_j(x)|dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$

Теорема 5.9. Пусть $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ или $\int\limits_{\alpha_0}^{b} f_j(x)dx$ абсолютно сходится. Тогда эти интегралы сходятся.

Доказательство. Докажем для случая $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ для других случаев доказательство аналогично.

Применим критерий Коши сходимости $\int\limits_a^{\beta_0} |f_j(x)|dx, j = 1, 3$

Пусть $\epsilon > 0$ - любое. Тогда $\exists$ окрестности $U_\epsilon(\beta_0)$ т.ч. $\forall \beta_1 < \beta_2 < \beta_0,\ \beta_1, \beta_2 \in U_\epsilon(\beta_0)$ выполнено $|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f_j(x)dx| < \epsilon$, при этом $|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f_j(x)|dx \geq 0$

Тогда $|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f_j(x)dx| \leq \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} |f_j(x)|dx < \epsilon \quad (16)$

Из (16) следует, что $\int\limits_a^{\beta_0} f_j(x)dx$ сходится □

Признак Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов

Теорема 5.10 (признак Абеля). Пусть функция g(x) монотонна, $|g(x)| \leq M\ \forall x \in [a, \infty)$, и $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Применяя условие, получаем, что $\exists$ окрстности $U_\epsilon(\infty)$ т.ч. $\forall \beta_2 > \beta_1, \beta_1, \beta_2 \in U_\epsilon(\infty)$ выполнено $|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx| < \epsilon \qquad (17)$ Для дальнейшего проведения доказательства потребуется следующее утверждение, которое примет без доказательств

Утверждение 5.11. Вторая теорема о среднем справедлива при более слабых предположениях: достаточно предполагать f монотонная на $[a, b], g \in R[a, b]$

Продолжим доказательство теоремы. По второй теореме о среднем с формулировке утверждения для $\beta_1.\beta_2\ \exists \beta_3\ \beta_1 < \beta_3 < \beta_2$ т.ч. $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx = g(\beta_1)\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx + g(\beta_2)\int\limits_{\beta_3}^{\beta_2} f(x)dx \quad (18)$

Из (17) и (18) $\Rightarrow |\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx| \leq |g(\beta_1)| \cdot |\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx| + |g(\beta_2)||\int\limits_{\beta_3}^{\beta_2} f(x)dx| < M\epsilon + M\epsilon = 2M\epsilon \quad (19)$

Из (19) следует, что $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится □

Теорема 5.12 (признак Дирихле). Пусть функция g(x) монотонна, $g(x)x \underset{\to}{\to} +\infty 0$, и $\exists M_1 > 0$ т.ч. $\forall a < \beta < \infty$ выполнено $|\int\limits_a^\beta f(x)dx| \le M_1$ (20) Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство. Выберем $\epsilon > 0$, тогда $\exists \beta_* > a$ т.ч. $\forall \beta > \beta_*$ выполнено $|g(\beta)| < \epsilon$ (21) Из (20) и (21) следует, что $\forall \beta_1, \beta_2 > \beta_*$ выполнено $|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx| = |\int\limits_a^{\beta_2} f(x)dx - \int\limits_a^{\beta_1} f(x)dx| \le |\int\limits_a^{\beta_2} f(x)dx| + |\int\limits_a^{\beta_1} f(x)dx| \le M_1 + M_1 = 2M_1$ (22)
Выберем $\beta_2 > \beta_1 > \beta_*$; по второй теореме о среднем в формулировке утверждения $\exists \beta_3$ $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$, т.ч. $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx = g(\beta_1)\int\limits_{\beta_1}^{\beta_3} f(x)dx + g(\beta_2)\int\limits_{\beta_3}^{\beta_2} f(x)dx$ (23)

Из (21) - (23) $\Rightarrow |\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)g(x)dx| \le |g(\beta_1)||\int\limits_{\beta_1}^{\beta_3} f(x)dx| + |g(\beta_2)||\int\limits_{\beta_3}^{\beta_2} f(x)dx| < 2M_1\epsilon + 2M_1\epsilon = 4M_1\epsilon$ (24)
(24) доказывает теорему. □

Глава 6

Числовые ряды

Определение 6.1. Пусть $\{a_n\}_{n-1}^{\infty}$ - произвольная последовательность. Рядом называется символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) Частичной суммой ряда(1) называется выражение $S_n = a_1 + \ldots a_n, n \geq 1$.

Говорим, что ряд(1) сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что S является суммой ряда (1) и пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (2) Если предела S_n не существует или этот предел бесконечен, то говорят, что ряд (1) сходится, и в этом случае символу (1) не присваивают числового значения

6.1 Необзодимый признак сходимости ряда

Теорема 6.1. Пусть ряд (1) сходится, Тогда $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Тогда $S_n = a_1 + ... + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, тогда $a_n = S_n - S_{n-1}$ (3) Пусть, в соотвествии с (2), $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$; тогда и $S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S$, поэтому (3) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, что и доказывает теорему. □

Замечание. Признак сходимости является необходимым, но не достаточным

6.2 Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 6.2. Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чобы $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ т.ч. $\forall m > n > N$ выполнялось $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon$ (4)

Доказательство. По критерию Коши существования конечного предела последовательности для того, что последовательность $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ т.ч. $\forall m > n > N$ выполнена $|S_m - S_n| < \epsilon$ (5) Поскольку $S_m - S_n = a_{n+1} + ... + a_m$, то (5) $\Rightarrow$ (4) □

6.3 Ряды с неотрицательными слагаемыми

Пусть $a_n \geq 0, n \geq 1, (6)$ тогда $S_{n+1} - S_n = a_n \geq 0$, поэтому по теореме о пределе монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \overline{\mathbb{R}}$ Для сходимости ряда (1) с условиями $a_n \geq 0$ справедлив следующий критерий

Теорема 6.3. Для того, чтобы сходился ряд (1) при условии (6), необходимо и достаточно, чтобы $\exists M > 0$ т.ч. $\forall n$ выполнялось $S_n \leq M$

Доказательство. Необходимость. Пусть $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$, $S \in \mathbb{R}$ Тогда по теореме об ограниченности последовательности, имеющей конечый предел, $\exists M$ т.ч. $|S_n| = S_n \leq M$, что доказывает необходимость. Достаточность. Пусть $S_n \leq M$ $\forall n$, тогда по теореме о пределе монотонной последовательности $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq M$. Теорема доказана. □

6.4 Признаки сравнения рядов с неотрицательными слагаемыми

Теорема 6.4. Пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0, n \geq 1$ Предположим, что $a_n \leq cb_n, c > 0$ (6)
(A) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (7) (B) Предположим,что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Доказательство. Доказательство (A). Пусть $S_n = a_1 + ... + a_n, T_n = b_1 + ... + b_n$ Тогда условие (6) влечёт $S_n \leq cb_1 + ... + cb_n = cT_n$ (8)
Пусть $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, тогда $T_n \leq T$ по теореме о пределе монотонной последовательности, и (18) $\Rightarrow$ $S_n \leq cT_n \leq cT$ (9) Из (9) следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $S \leq cT$ Часть (A) доказана Доказательство (B). Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда мы находимся в условии части (A), и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ должен сходится, что противоречит предположению. Часть (B) доказано. □

6.5 Признак Коши сходимости ряда

Теорема 6.5. Пусть $a_n \geq 0, q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если q < 1; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если q > 1
В случае q $= 1$ признак не даёт определённого утверждения.

Доказательство. Пусть $q < 1, r = \frac{1+q}{2}, q = \frac{1-q}{2}$. По свойствам верхних пределов $\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполнено $\sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon = r$ (10) Тогда (10) $\Rightarrow a_n < r^n, n > N$. Положим $c_0 = \underset{1\leq k\leq N}{max} a_k r^{-k}$, $c = max(c_0, 1)$ (11) Тогда (11) $\Rightarrow \left. \begin{matrix} a_k \leq c_0 r^k \leq cr^k, 1 \leq k \leq N & a_k \leq r^k \leq cr^k, k > N \end{matrix} \right\}$ (12)
Заметим, что $r + r^2 + ... + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{r}{1-r}$, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ сходится и (12) влечёт сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по признаку сравнения рядов. Пусть q > 1, $\epsilon_0 = q - 1$. По свойству верхних пределов $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ т.ч. $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q - \epsilon_0 = 1$ Поэтому $a_{n_k} > 1 = 1$, поэтому свойство $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ не выполнено, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по необходимому признаку сходимости ряда □

6.6 Признак Даламбера сходимости ряда

Теорема 6.6. Пусть $a_n > 0$; предположим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ Тогда, если q < 1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если q > 1, то этот ряд расходится, если q $= 1$, то нет определённого ответа

Доказательство. Пусть $q < 1, r = \frac{1+r}{2}, \epsilon = \frac{1-q}{2}$ Тогда $\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполнено $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon = r$, (13) а также $\frac{a_n}{a_{n-1}} < r, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < r$, ... $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r$ (14) Перемножим неравенства (13) и (14): $\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} ... \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \underbrace{n-N} r...r = r^{n-N}$ (15) т.е. $\frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} < r^{-N-1} \cdot r^{n+1}, a_{n+1} < a_{N+1} r^{-N-1} \cdot r^{n+1}$ (16) Положим $c = \underset{1 \le k \le N+1}{max} a_k r^{-k}$, тогда при $k \le N+1$ имеем $a_k \le cr^k$, при $n > N+1$ из (16) следует $a_{n+1} \le cr^{n+1}$, т.е. $\forall n \ge 1$ выполнено $a_n \le cr^n$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку сравнения рядов. Пусть $q > 1, \epsilon_0 = q - 1$ Тогда $\exists N_0$ т.ч. $\forall n > N_0$ выполнено $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \epsilon_0 = 1$, т.е. $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, ... $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > 1$, поэтому $a_{n+1} > a_n > ... > a_{N+1} > 0$, поэтому неверно, что $a_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$, т.е. ряд расходится по необходимому признаку сходимости ряда ☐

6.7 Интегральный признак сходимости ряда

Теорема 6.7. Пусть $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}, f(x) \ge 0, f(x)$ убывает. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int^{\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно.

Доказательство. Пусть $x \in [n, n+1]$, тогда условие монотонности влечёт $f(n) \ge f(x) \ge f(n+1)$, поэтому $\int_n^{n+1} f(n)dx \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge \int_n^{n+1} f(n+1)dx$, т.е. $1 \cdot f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge 1 \cdot f(n+1)$ (17) (17) $\Rightarrow f(1)+...+f(n) \ge \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_n^{n+1} f(x)dx \ge f(2)+...+f(n+1), f(1)+...f(n) \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge f(2)+...+f(n+1)$ (18) Предположим, что $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится Тогда $\int_1^{n+1} f(x)dx \le \int_1^{\infty} f(x)dx$ (19) в силу $f(x) \ge 0$ и (18) и (19) влекут $f(1)+f(2)+...+f(n+1) \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$ (20) Тогда (20) $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Тогда (18) $\Rightarrow \int_1^{n+1} f(x)dx \le f(1) + ... + f(n) \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (21) Пусть A >1, выберем n так,чтобы n+1 > A, тогда (21) $\Rightarrow \int_1^A f(x)dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (22) Из (22) следует, что $\int_1^{\infty} f(x)$ сходится. ☐

Пример 6.1. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (23) По теорема этот ряд сходится одновременно с $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$. По примеру интеграл сходится при p > 1 и расходится при $p \le 1$, поэтому ряд (23) сходится при p > 1 и расходится при $p \le 1$. В частности, при p = 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

6.8 Ряды со слагаемыми произвольных знаков

Определение 6.2. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1)$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то говорим, что ряд (1) сходится не абсолютно

Теорема 6.8. Если ряд(1) абсолютно сходится, то он сходится

Доказательство. Применим Критерий Коши к ряду (1) и к ряду (2). Возьмем $\forall \epsilon > 0$ По условию, ряд (2) сходится, поэтому $\exists N$ т.ч. $\forall m > n > N$ выполнено:
$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$ (3)
При этом (3) $\Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$ (4)
(4) означает, что признакКоши применим к ряду (1), т.е. ряд(1) сходится. □

6.9 Перестановки рядов

Определение 6.3. Пусть $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция множества натуральных чисел на себя; перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будем называть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = a_{\alpha(n)}$. Если α^{-1}- обратное к α отображение, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, поскольку $a_n = b_{\alpha^{-1}(n)}$

Теорема 6.9. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - перестановка этого ряда. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (5)

Доказательство. Предположим в начале, что $a_n \geq 0$, тогда и $b_n \geq 0 \forall n$. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в данном случае означает просто сходимость этого ряда, пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Возьмем $\forall N \in \mathbb{N}$ и пусть $A(N) = \underset{1 \leq n \leq N}{max} \alpha(n)$. Тогда $\sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{n=1}^{N} a_{\alpha(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (6) Первое неравенство в (6) следует из предположения $a_k \geq 0$ $\forall k$ и того,что среди чисел $\alpha(n), 1 \leq n \leq N$, могли быть не все числа от 1 до N. Из(6) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq S$ (7)
Пусть $T = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является перестановкой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, то по уже проведенным рассуждениям с переменной ролей рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, то, она логично (7), получим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq T$ (8) из (7) и (8) получаем, что $S = T$, что и требуется предположении $a_n \geq 0$. Пусть теперь a_n могут иметь произвольный знак.
Положим $a^+ = \begin{cases} \text{a, если a} \geq 0 \\ 0, \text{если a} < 0 \end{cases}$ $\quad a^- = \begin{cases} |a|, \text{если a} \leq 0 \\ 0, \text{если a} > 0 \end{cases}$
Тогда $a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то $S \underset{\text{по опр}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + a_n^- \in \mathbb{R}(9)$ Поскольку $a_n^+ \leq |a_n|, a_n^- \leq |a_n|$, то (9) по признака мравнения рядов с неотрицателльными слагаемыми влечёт, что сходядтся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Отметим также свойства сходящихся рядов, следующих из свойств пределов последовательностей: если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_n + q_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_n + q_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n$; если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $c \in \mathbb{R}$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot p_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ Применим эти свйоства в данном случае. Пусть $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$- биекция, $b_n = a_{\alpha(n)}$, тогда $b_n^+ = a_{\alpha(n)^+}, b_n^- = a_{\alpha(n)}^-$, и по свойству установленному для рядов с неотрицательными слагаемыми, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^+ - b_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что и требуется □

6.10 Теорема Римана.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неабсолютно сходится, $S \in \mathbb{R}$ - любое число, тогда $\exists$ биекция $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что для $b_n = a_{\alpha(n)}$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

Доказательство. Примем без доказательства □

6.11 Признак Лейбница

Знакопеременным рядом будем называть ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0$

Теорема 6.10. Пусть $a_n \to 0, a_n > 0, a_n$ монотонно убывает. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится

Доказательство. Пусть $S_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}a_n$ Тогда в силу условия $a_n \geq a_{n+1}$ получим $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + ...(a_{2m-1} - a_{2m}) \leq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m}) + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) = S_{2m+2}$ (10)
$S_{2m-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) \geq a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m+1}) - (a_{2m} - a_{2m+1}) = S_{2m+1}$ (11) В силу условия $a_n > 0$ получаем $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} > S_{2m}$ (12) Из (10)- (12) находим, что $0 \leq a_1 - a_2 = S_2 \leq ... \leq S_{2m-2} \leq S_{2m} < S_{2m+1} \leq S_{2m-1} \leq ... \leq S_1 = a_1$ (13) Из (13) находим, что $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} \overset{\text{по опр}}{=} S' \leq a_1$,и$\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S'' \geq S'$ Далее, в силу $a_n \to 0$ имеем $S'' - S'' = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} - \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} - S_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, т.к. S' = S" =S и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, что и требуется ☐

Пример 6.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ (14) По признаку Лейбница этот ряд сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Таким образом, ряд (14) сходится неабсолютно

6.12 Признак Абеля.

Теорема 6.11. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (15) и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16) сходится, а b_n монотонна и $\exists M > 0$ т.ч. $|b_n| \leq M\ \forall n$ Тогда ряд (15) сходится

Доказательство. Положим $A_n = a_n, A_{n+1} = a_n + a_{n+1}, ...$ Применим преобразование, называемое преобразованием Абеля: поскольку $a_k = A_k - A_{k-1}, k \geq n = 1$, то $a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_m b_m = (A_{n+1} - A_n)b_{n+1} + (A_{n+2} - A_{n+1})b_{n+2} + ... + (A_m - A_{m-1})b_m = -A_n b_{n+1} + A_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + ...A_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + A_m b_m$ (17) Выберем $\epsilon > 0$ В силу сходимости ряда (16) $\exists N$ т.ч. $\forall m \geq n > N$ выполнено $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon$ (18)
Из (17) и (18) получаем $|a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_m b_m| \leq |A_n b_{n+1}| + |\sum_{k=n+1}^{m-1} A_k(b_k - b_{k+1})| + |A_m b_m| < \epsilon \cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1}|A_k||b_k - b_{k+1}| + \epsilon \cdot M \leq 2\epsilon M + \epsilon\sum_{k=n+1}^{m-1}|b_k - b_{k+1}| = 2\epsilon M + \epsilon|\sum_{k=n+1}^{m-1}(b_k - b_{k+1})| = 2\epsilon M + \epsilon|b_{n+1} - b_m| \leq 2\epsilon M + \epsilon(|b_{n+1}| + |b_m|) \leq 4\epsilon M$ (19)
В равенстве (19) использовалась монотонность b_n В силу произвольности $\epsilon > 0$ из (19) по критерию Коши следует сходимость ряда (15). ☐

6.13 Признак Дирихле

Теорема 6.12. Пусть $\exists L > 0$ т.ч. $\forall n$ выполнено $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq L$ и пусть b_n монотонна и $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогда ряд (15) сходится.

Доказательство. Возьмем $\forall\epsilon < 0$, выберем N так, чтобы $\forall n > N$ выполнялось $|b_n| < \epsilon$ Положим опять $A_n = a_n, A_{n+1} = a_n + a_{n+1}, ...A_m = a_n + ... + a_m$. В силу условия имеем при $k \geq n : |A_k| = |\sum_{r=1}^{k} a_r - \sum_{r=1}^{n-1} a_r| \leq |\sum_{r=1}^{k} a_r| + |\sum_{r=1}^{n-1} a_r| \leq 2L$ (20)
Применяя преобразования Абеля (17) и используя условие $|b_k| < \epsilon, k > n$, и (20), получим $|a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_m b_m| \leq |A_n b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1}|A_k||b_k - b_{k+1}| + |A_m b_m| < 2\epsilon L + 2L\sum_{k=n+1}^{m-1}|b_k - b_{k+1}| + 2L\epsilon = 4\epsilon L + 2L|\sum_{k=n+1}^{m-1}(b_k - b_{k+1})| = 4\epsilon L + 2L|b_{n+1} - b_m| < 4\epsilon L + 2L \cdot 2\epsilon = 8\epsilon L$ (21)
В силу произвольности $\epsilon > 0$ применение критерия Коши к (21) показывает, что ряд (15) сходится. ☐

Глава 7

Пространства $\mathbb{R}^n$

7.1 простанства $\mathbb{R}^n$

Определение 7.1. Пространством $\mathbb{R}^n$ будем называть множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел, $n \geq 2$ Упорядоченные наборы n вещественных чисел будем записывать в строку $(x_1, ...x_n)$, в таком случае говорим, что $\mathbb{R}^n$ реализовано как множество вектор- строк $(x_1, ...x_n)$ или же записываем в столбец $\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, тогда говорим, что $\mathbb{R}^n$ реализовано как множество вектор-столбцов.
В каждом случае x_k называем k-той координатой элемента из $\mathbb{R}^n$; по определению полагаем $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Далее некоторое время будем считать, что $\mathbb{R}^n$ реализовано как множество вектор-строк. Через $\mathbb{O}_n$ обозначаем элемент $\mathbb{O}_n = (0, ..., 0)$. В $\mathbb{R}^n$ определены операции: если $c \in \mathbb{R}$, $X = (x_1, ...x_n)$, то с $X = (X_1, ...cX_n)$; если $X = (x_1, ...x_n), y = (y_1, ...y_n), X + Y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), (X, Y) = x_1y_1 + ...x_ny_n$
Нормой $||X||$ назовем выражение $||X|| = \sqrt{x_1^2 + ..x_n^2}$, где $X = (x_1, ...x_n)$
Отметим, что $(X, X) = ||X||^2$

7.2 Свойства нормы

Свойство 7.1. 1. $||X|| \geq 0$; $||X|| = 0 \Leftrightarrow X = \mathbb{O}_n$ - понятно

2. $c \in \mathbb{R}$, тогда $||cX|| = \sqrt{(cx_1)^2 + .. + (cx_n)^2} = |c|\sqrt{x_1^2 + ...x_n^2} = |c| \cdot ||X||$

3. $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y|| \quad (1)$

3). Если $X + Y = \mathbb{O}_n$, то (1) следует из свойства 1. Пусть $Z = X + Y \neq \mathbb{O}_n, Z = (z_1, ...z_n), ||z_n|| = t > 0$. Пусть $W = \frac{1}{t} \cdot z$, тогда 2. $\Rightarrow ||W|| = \frac{1}{t}||Z|| = \frac{1}{t} \cdot t = 1$. Пусть $W = (w_1, ...w_n)$, тогда $(Z, W) = z_1w_1 + ...z_nw_n = (x_1 + y_1)w_1 + ...(x_n + y_n)w_n = (x_1w_1 + ... + x_nw_n) + (y_1w_1 + ... + y_nw_n) = (X, W) + (Y, W)$ Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (случай неравенства Гёльдера при p = q = 2) влечёт соотношения $|(X, W)| \leq ||X|| \cdot ||W||, \ |(Y, W)| \leq ||Y|| \cdot ||W||, (2)$ при этом (2) $\Rightarrow |(Z, W)| \leq |(X, W)| + |(Y, W)| \leq ||X|| + ||Y||, \quad (3)$ поскольку $||W|| = 1$. Но $(Z, W) = z_1w_1 + ...z_nw_n = z_1 \cdot \frac{1}{t}z_1 + ... + z_n \cdot \frac{1}{t}z_n = \frac{1}{t}||Z||^2 = ||Z|| \quad (4)$
Теперь (2)-(4) $\Rightarrow$ (1). □

При n = 1 свойства 1.-3. выполнены, при $x \in \mathbb{R}$ $||x|| = \sqrt{x_1^2} = |x|$
Из свойств 1.-3. получаем, что $\mathbb{R}^n -$ метрическое пространство с метрикой d(X,Y) = ||X-Y|| (5)

Доказательство. Установим, что (5) - метрика

1. $d(X,Y) \geq 0$; если $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow ||X-Y|| = 0 \Leftrightarrow X - Y = \not{V}_n \Leftrightarrow X = Y$
2. $d(Y,X) = ||Y-X|| = 1 \cdot ||Y-X|| = ||(-1)\cdot(Y-X)|| = ||X-Y|| = d(X,Y)$
3. $d(X,Z) = ||X-Z|| = ||(X-Y)+(Y-Z)|| \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

□

7.3 Применение общих соображений из 1 семестра

Применим определения, относящиеся к точкам сгущения, пределам последовательностей и пределам функции и их свйоствам, справедливым для любого метрического пространства. Запишем эти определения, используя конкретный вид метрики d(X,Y) из (5).

Определение 7.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$. Говорим, что A является точкой сгущения для множества E, если $\forall \epsilon > 0\ \exists X \in E, X \neq A$ т.ч. $||X - A|| < \epsilon$

Утверждение 7.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ \in \mathbb{R}^n, A$- точка сгущения множества E. Тогда $\exists \{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X_n \in E, X_n \neq x_m$, если $n \neq m, X_n \neq A\ \forall n$ и $X_n \underset{n\to\infty}{\to} A$.

Было дказано для любого метрического пространства. Напомню, что $X_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ означает по определению $d(X_n, A) = ||X_n - A|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset, f : E \to \mathbb{R}$ - функция, заданная на E (т.е. $\forall X \in E$ сопоставляется f(x) $\in \mathbb{R}$). Далее, с учетом записи $X = (x_1, ...x_n)$, в ряде случаев функцию f будем обозначать $f(x_1, ...x_n)$.

Опредление предела функции записывается так:

Определение 7.3. Пусть E $\subset \mathbb{R}^n$, A -точка сгущения множества E, $f : E \to \mathbb{R}$ - функция, заданная на E, $c \in \mathbb{R}$. Говорим, что $f(x) \underset{X\to A}{\to} 0$ или $\lim\limits_{X\to A} f(x) = c$, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall X \in E, X \neq A, ||X-A|| < \delta$ выполнено $|f(X) - c| < \epsilon$ (6)

Теорема 7.2. Пусть$E \subset \mathbb{R}^n, A$ - точка сгущения множества $E, c \in \mathbb{R}$. Тогда для того, чтобы $f(x) \underset{X\to A}{\to} c$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ т.ч.$X_m \in E, X_m \neq A, X_m \underset{m\to\infty}{\to} A$, выполнялось $f(X_m) \underset{m\to\infty}{\to} c$

Было доказано для метрических пространств для пределорв функций, заданных на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, в силу предыдущей теоремы выполнены все свойства, справедливые для пределов функций от одной переменной, за исключением свйоств пределов монотонных функций. В частности, справедлив критерий Коши.

Теорема 7.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1, A \in \mathbb{R}^n$ - точка сгущения множества E, $f : E \to \mathbb{R}$. Для того, чтобы $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x) \underset{X\to A}{\to} c$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall X_1, X_2 \in E, X_1 \neq A, X_2 \neq A$, $|X_1 - A| < \delta, |X_2 - A| < \delta$ выполнялось соотношение $|f(X_2) - f(X_1)| < \epsilon$

7.4 Непрерывность функции в точке

Определение 7.4. Пусть $A \in E, E \subset \mathbb{R}^n, A-$ точка сгущения множества E $f : E \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f непрерывна в A, если $\exists \lim\limits_{X \to A} f(x)$ и $\lim\limits_{X \to A} f(x) = f(A)$

Из свойств пределов следуют следующие свойства непрерывных в точке функций

Свойство 7.2.
1. f непр в A $\Rightarrow$ cf непр в A
2. f,g непр в A $\Rightarrow$ f$\pm$g непр в A
3. f,g непр в A $\Rightarrow$ fg непр в A
4. f непр в A, $f(x) \neq 0, X \in E \Rightarrow \frac{1}{f}$ непр в A
5. f, как в 4., g - непр в $\Rightarrow \frac{g}{f}$ непр в A

Отметим, что в п.4 и п.5 из $A \in X$ следует $f(A) \neq 0$, пооэтому корректно применять свойства предела функции: если $f(X) \neq 0, X \in E$, и $\exists \lim\limits_{X \to A} f(X) \neq 0$, то $\lim\limits_{X \to A} \frac{1}{f(X)} = \frac{1}{\lim\limits_{X \to A} f(X)}$

В прошлом семестре определялся предел отображения $F : X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y Будем применять это определение в конкретном случае $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, n, m \geq 1$, между собой они не связаны. Если $X \subset \mathbb{R}^n$ - непустое множество, то оно может быть поделено метрикой из $\mathbb{R}^n$, именно, $d_x(A, B) = ||A - B||_{\mathbb{R}^n}, A, B \in X$, где индекс X означает множество X, а индекс $\mathbb{R}^n$ означает, что рассматривается метрика в $\mathbb{R}^n$. Применяя упомянутое определение, для $F : X \to Y, X \in \mathbb{R}^n,\ Y \in \mathbb{R}^n$, при $A_0 \in \mathbb{R}^n$ - точка сгущения $X, C_0 \in \mathbb{R}^m$, получаем следующе условие: $F(A) \underset{A \to A_0}{\to} C_0$ или $\lim\limits_{A \to A_0} F(A) = C_0$, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall A \in X \backslash \{A_0\}, ||A - A_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta$ выполнено $||F(A) - C_0||_{\mathbb{R}^m} < \epsilon \quad (1)$
Запишем F(A) как вектор-строку, $F(A) = (f_1(A), ...f_m(A))$. Получим набор m функций $f_1 : X \to \mathbb{R}, ...mf_m : X \to \mathbb{R}$, заданных на множестве X. Эти функции будем называть координатными функциями отображения F
Пусть $C_0 = (c_0, ..., c_{0_m})$

Теорема 7.4. Для того, чтобы $F(A) \underset{A \to A_0}{\to} C_0$, необходимо и достаточно, чтобы при j = 1,...m выполнялось соотношение $f_j(A) \to C_{0_j}$

Доказательство. Пусть $F(A) \to C_0$, т.е. выполнено (1). Возьмем $\forall j, 1 \leq j \leq m$. Учтем, что $|f_j(A) - C_{0_j}| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (f_k(A) - C_{0_k}^2} = ||F(A) - C_0||_{\mathbb{R}^m}$, поэтому, если взято $\forall \epsilon > 0$ и выбрано $\delta > 0$ так, что при $A \in X \backslash A_0, ||A - A_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta$ имеем $||F(A) - C_0||_{\mathbb{R}^m} < \epsilon$, то (2) $\Rightarrow |f_j(A) - C_{0_j}| < \epsilon$ т.е. $f_j(A) \underset{A \to A_0}{\to} C_{0_j}$ (3) при всех j, $1 \leq j \leq m$. Возьмем $\forall \epsilon > 0$, тогда (3) $\Rightarrow \exists \delta_j > 0$ т.ч. $\forall A \in X \backslash \{A_0\}, ||A - A_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta$; выполнено $|f_j(A) - C_{0_j}| < \epsilon \quad (4)$
Пусть $\delta = \underset{1 \leq j \leq m}{\delta_j}$ Тогда при $||A - A_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta, A \in X \backslash A_0 \quad (4) \Rightarrow ||F(A) - C_0||_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{(f_1(A) - C_{0_1})^2 + ... + (f_m(A) - C_{0_m})^2} < \sqrt{m\epsilon^2} = \sqrt{m}\epsilon$, т.е. $F(A) \underset{A \to A_0}{\to} C_0$ $\square$

7.5 Непрерывность отображения в точке

Определение 7.5. Пусть $X < \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, n, m \geq 1, A_0 \in X, A_0$ -точка сгущения X, $F : X \to Y$ Будем говорить, что F непрерывна в A_0, если $\exists \lim\limits_{A \to A_0} F(A)$ и $\lim\limits_{A \to A_0} F(A) = F(A_0)$

7.6 Непрерывность суперпозиции отображений

Теорема 7.5. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^k, n, m, k \geq 1, A_0 \in X, A_0$ -точка сгущения X, $B_0 \in Y, B_0$ - точк сгущения Y, отображение $F : X \to Y$ и $G : Y \to W$, при этом $F(A_0) = B_0$, F непрерывно в $A_0, GB_0, \Phi : X \to W, \Phi(A) = G(F(A))$. Тогда Φ непрерывно в A_0

Доказательство. Положим $G(B_0) = C_0$, тогда $\Phi(A_0)$= G(F(A_0)) = G(B_0) = C_0. Выберем $\forall \epsilon > 0$. В силу ннепрерывности отображения G в точке $B_0 \exists \sigma > 0$ т.ч. $\forall B \in Y, B \neq B_0, ||B - B_0||_{\mathbb{R}^m} < \sigma$ выполнено $||G(B) - G(B_0)||_{\mathbb{R}^k} < \epsilon$ (5)
Соотношение (5) справедливо и при $B = B_0$, поэтому условие $B = B_0$ можно не учитывать. В силу непрерывности F в точке A_0 для $\sigma > 0$ $\exists \delta > 0$ т.ч. $\forall A \in X, A \neq A_0, ||A - A_0||_{\mathbb{R}^n} < \sigma$ выполняется $||F(A) - F(A_0)||_{\mathbb{R}^m} < \sigma$ (6)
Если положить B = F(A), $B_0 = F(A_0)$, то (5) и (6) при указаных условиях на A влекут ||Φ(A)-$\Phi(A_0)||_{\mathbb{R}^k} = ||G(F(A)) - G(F(A_0))||_{\mathbb{R}^k} = ||G(B) - G(B_0)||_{\mathbb{R}^k} < \epsilon$ □

Пусть $F_0 \in X \subset \mathbb{R}^n, A_0$ - точка сгущения X, $F : X \to Y, Y \subset \mathbb{R}^m, F(A) = (f_1(A), ..., f_m(A))$ Применяя теорему о пределе F и пределах f_j, получаем следующее утверждение

Теорема 7.6. Для того, чтобы отображение F было непрерывно в точке A_0, необходимо и достаточно, чтобы при j = 1,...m были непрерывно в A_0 координатные функции f_j

Определение 7.6. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, X \neq \emptyset$. Множество X будем называть ограниченным, если $\exists R > 0$ т.ч.$\forall A \in X$ выполнено $||A||_{\mathbb{R}^n} \leq R$
Далее будут использоваться следующие геометрические объекты. Пусть $a_1 < b_1 ... a_n < b_n$ открытым параллелепипедом $\Pi(a_1, b_1; ...; a_n, b_n)$ будем называть множество $\Pi(a_1, b_1; ...; a_n, b_n) = \{A = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n : f_j < X_j < b_j, j = 1...n\}$

Замкнутым параллелепипедом $(a_1, b_1; ...; a_n, b_n)$ назовем множество $(a_1 b_1; ...; a_n b_n) = \{A = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1...n\}$
Открытым шаром $B_{r(A)}$ с центром в A и радиусом r назовем множество $B_r(A) = \{C = (c_1, ...c_n) \in \mathbb{R}^n : ||C - A||_{\mathbb{R}^n} < r\}$
Замкнутым щаром $\overline{B_r}(A)$ с центром в A и радиусом r назовем множество $\overline{B_r}(A) = \{C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n : ||C - A||_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$ Сферой $S_{r(A)}$ с центром в A и радиусом r назовем множество $S_{r(A)} = \{C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n : ||C - A||_{\mathbb{R}^n} = r\}$

7.7 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 7.7. Пусть имеется ограниченная последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_m \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ т.е. $\exists R > 0$ т.ч. $\forall m$ выполнено $||A_m||_{\mathbb{R}^n} \leq R$. Тогда $\exists$ Последовательность $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $C \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A_{m_k} \underset{k \to \infty}{\to} C$.

Доказательство. В случае n = 1, т.е. при $A_m \in \mathbb{R}'$, это утверждение было доказано в первом семестре. Положим $A_m = (a_{1_m}, a_{2_m}, a_{n_m})$ Поскольку $|a_{j_m}| \leq ||A_m||_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{R}\ \forall m, \forall j, 1 \leq j \leq n$, то к числовой последовательности $\{a-1_m\}_{m=1}^{\infty}$ можно применить принцип выбора Больцано Вейерштрасса и $\exists \{a_{1_{m_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ и $c_1 \in \mathbb{R}$ т.ч. $a_{1_{m_l}} \underset{l\to\infty}{\to} c_1$ (7)

Оставим в последовательности $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ только элемент с номерами m_l По-прежнему будет выполняться условие $||A_{m_l}||_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{R}\ \forall l$

Пусть $A'_l = A_{m_l}, a'_{jl} = a_{j_{m_l}}$, тогда (7) $\Rightarrow a'_{1_l} \underset{l\to\infty}{\to} c_1$ (8)

Применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса и последовательности $\{a'_{2_l} = a_{j_{m_l}}\}$, тогда можно найти, подпоследовательности $\{a'_{2_{l_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ и число $c_2 \in \mathbb{R}$ т.ч. $a'_{2_{l_k}} \underset{k\to\infty}{\to} c_2$. Пусть $A''_k = A'_{l_k}$, тогда (8) $\Rightarrow$ $a'_{1_{l_k}} \underset{k\to\infty}{\to} c_1$, а также $a'_{2_{l_k}} \underset{k\to\infty}{\to} c_2$ (9)

Последовательность $\{A''_k\}_{k=1}^{\infty}$ - это подпоследовательности последовательности $\{A'_l\}_{l=1}^{\infty}$, которая является подпоследовательностью $\{A_m\}_{l=1}^{\infty}$, т.е. $\{A''_k\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ Теперь рассматриваем последовательность $\{a''_{3_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a'_{3_{l_k}}\}_{k=1}^{\infty}$, применяем к ней предыдущее рассуждение, выделяем подпоследовательность $\{a''_{3_{k_q}}\}_{q=1}^{\infty}$ т.ч. для некоторого $c_3 \in \mathbb{R}$ $a''_{3_{k_q}} \underset{q\to\infty}{\to} c_3$ (10)

Эту операцию проводим n раз, всякий раз прореживая предыдущую последовательность. В конце получим последовательность $\{A_s^{(n)}\}_{s=1}^{\infty}$, являющийся подпоследовательностью $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которой выполнено $a_{ns}^{(n)} \underset{s\to\infty}{\to} c_n$, (11) Тогда (8),(9),(10),(11) влекут, что $a_{js}^{(n)} \underset{s\to\infty}{\to} c_j, 1 \leq j \leq n$ (12). Пусть $C = (c_1, ..c_n)$, тогда (12) $\Rightarrow A_s^{(n)} \underset{s\to\infty}{\to} C \in \mathbb{R}^n$ Требуемая подпоследовательность построена. □

Определение 7.7. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$. Множество E называестя открытым, если либо $E = \emptyset$, либо $\forall A \in E\ \exists r > 0$ т.ч. $B_r(A) \subset A$. Точка $A \in E$, т.ч. $\exists r > 0$, для которого $B_r(A) \subset E$, называется внутренней.

Пример 7.1. $B_r(A)$, $\Pi(a_1, b_1; ...; a_n, b_n)\bar{b}\mathbb{R}^n$ - ЕСли поймете дайте знать

Проверим, что $B_r(A)$ открыт. Пусть $C \in B_r(A)$ Тогда $||C-A||_{\mathbb{R}^n} < r$. Положим $\varrho = r - ||C-A||_{\mathbb{R}^n}$, и пусть $C_1 \in B_\varrho(C)$. Тогда $||C_1 - A||_{\mathbb{R}^n} = ||(C_1 - C) + (C - A)||_{\mathbb{R}^n} \leq ||C_1 - C||_{\mathbb{R}^n} + ||C - A||_{\mathbb{R}^n} < \varrho + ||C - A||_{\mathbb{R}^n} = r$, т.е. $c_1 \in B_r(A)$ и $B_\varrho(C) \subset B_r(A)$

Определение 7.8. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$. Множество F называют замкнутым, если $\mathbb{R}^n \backslash F$ открыто

Пример 7.2. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \backslash \emptyset$ - замкнуто;
$\emptyset = \mathbb{R}^n\ \mathbb{R}^n$ - замкнуто
$\overline{B}_r(A), (a_1, b_1; ...; a_n, b_n)$ - замкнуто

Утверждение 7.8. Одновременно открытым и замкнутыми подмножествами $\mathbb{R}^n$ являются только $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ (без док-ва)

Теорема 7.9. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset, E \neq \mathbb{R}^n$. Тогда E замкнуто тогда и только тогда, когда $\forall A \in \mathbb{R}^n$, которая является точкой сгущения для E, выполнено$A \in E$

Доказательство. Пусть E замкнуто, но $\exists A \in E$ т.ч. A - точка сгущения E. Пусть $G = \mathbb{R}^n \backslash E$, тогда по определению G открыто и $A \in G$. Тогда $\exists r > 0$ т.ч. $B_r(A) \subset G$ т.е. $B_r(A) \cap E = \emptyset$, и A не может быть точкой сгущения E. Пусть теперь $\forall A$, которая является точкой сгущения E, принадлежит E. Если E - не замкнуто, то $G = \mathbb{R}^n \backslash E$ не открыто, т.е. $\exists A_0 \in G$ т.ч. $\forall r > 0$ выполнено $B_r(A_0) \not\subset G$, т.е. $\forall r > 0\ B_r(A_0) \cap \emptyset$, т.е. A_0 - т.сг.E, но $A_0 \notin E$ - противоречие □

Определение 7.9. Пусть $E \neq \emptyset, Y \notin E, E \subset \mathbb{R}^n$. Точка Y называется внешней по отношению к E, если Y внутренняя для $\mathbb{R}^n \backslash E$. Точка $Z \in \mathbb{R}^n$ называется граничной точкой E, если она не внутренняя и не внешняя.

Определение 7.10. Множество $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset, n \geq 1$, называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Теорема 7.10 (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, E-$ компакт. функция f: $E \to \mathbb{R}$. Предположим, что для $\forall A \in E$, A - точка сгущения E, функция f непрерывна в A. Тогда f ограничена, т.е. $\exists M > 0$ т.ч. $\forall X \in E$ выполнено $|f(x)| \leq M$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, т.е. $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists X_m \in E$ т.ч. $|f(X_m)| > m$ Поскольку множество E ограничено, то ограничена и последовательность $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$, т.е. $\exists R > 0$ т.ч. $\forall m$ выполнено $||X_m||_{\mathbb{R}^n} \leq R$. По принципу выбора Больцано-Вейерштрасса $\exists A \in \mathbb{R}^n$ и $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ т.ч. $X_{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} A$. В силу предположения имеем $|f(X_{m_k})| > m_k \geq k$,поэтому среди точек X_{m_k} имеется бесконечно много различных, что влечет, что A - точка сгущения для подпоследовательности $\{X_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, и, посокольку $X_m \in E$, то A - точка сгущения для множества E. Поскольку E замкнуто, то $A \in E$. В силу непрерывности функции f в точке A $\in$ E, $\exists \delta > 0$ т.ч. $\forall x \in E$, $X \neq A$ выполнено $|f(X) - f(A)| < 1$, $|f(X)| \leq |f(A)| + |f(X) - f(A)| < |f(A)| + 1$ (1) Поскольку $X_{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} A$, то $\exists K_0$ т.ч. $\forall k > K_0$ выполнено $||X_{m_k} - A||_{\mathbb{R}^n} < \delta$, и тогда (1) влечёт при k > K_0 соотношение $|f(X_{m_k})| < |f(A)| + 1$ (2) Если взять, кроме того $k_1 > |f(A)| + 1$,то должно выполняться $|f(X_{m_{k_1}})| > m_{k_1} \geq k_1 > |f(A)| + 1$ - противоречие с (2). □

Теорема 7.11 (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ - компакт, $f : E \to \mathbb{R}$, для любой точки сгущения $A \in E$ функция f непрерывна в A. Тогда существуют $X\_, X_+ \in E$ такие, что для $\forall X \in E$ выполнено $f(X\_) \leq f(X) \leq f(X_+)$ (3)

Доказательство. Докажем правое неравенство. По первой теореме Вейерштрасса функция f ограничена, поэтому $M = \underset{x\in E}{sup} f(x) \in \mathbb{R}$. Если $\exists X_+ \in E$, для которой $M = f(X_+)$,то (3) выполнено. Предположим, что $\forall X \in E$ вполнено f(x) < M, усть $\varphi(X) = M - f(X)$. Тогда $\varphi(X) > 0\ \forall X \in E, \varphi$ непрерывно в $\forall A \in E$, являющейся точкой сгущения E. Поэтому определена функция $g : E \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, и g непрерывна в $\forall A \in E$, A - точка сгущения. По первой теореме Вейерштрасса g ограничена, т.е. $\exists L > 0$ т.ч. $g(x) \leq L \forall X \in E$. Поскольку $\varphi(x) > 0$,то g(x)>0, и $g(x) \leq L \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \frac{1}{L}$, что эквивалентно $M - f(X) \geq \frac{1}{L} \Leftrightarrow f(X) \leq M - \frac{1}{L}$ (4) (4) $\Rightarrow \underset{X\in E}{sup} f(x) \leq M - \frac{1}{L}$, что противоречит определнию M. Для доказательства левой части (3) положим h(x) = -g(x), тогда по первой части $\exists X\_$ т.ч. $\forall X \in E$ выполнено $h(X) \leq h(X\_)$, это эквивалентно $g(X) \geq g(X\_), X \in E$ Теорема доказана. □

7.8 Частные производные и дифференцируемость функций и отображений.

Определение 7.11. Пусть $X_0 \in E, E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, X_0$- внутренняя точка E, т.е. $\exists \delta > 0$ т.ч. $B_\delta(X_0) \subset E, f : E \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$ Через e_j обозначим элемент $e_j =$ (0,...1,...0), где 1 стоит на месте j,остальные нули. При $|\mathrm{h}| < \delta$, $\mathrm{h} \neq 0$, $X_0 + he_j \in E$.Частной производной функции f по ${}^{()}x_j$ в точке X_0 гахываеься выражение $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_j)-f(X_0)}{h} = f'_{x_j}(X_0)$ (5)
Выражение $f'_{x_j}(X_0)$ - обозначение частной производной. Применяется также обозначение $\frac{\delta f(X_0)}{\delta(x_j)}$ Существование предела в левой части (5) предполагается. Если $X_0 = (x_1^0, .., x_n^0)$, то (5) можно записать в виде $f'_{x_j}(X_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1^0,...,x_j^0+h,..,x_n^0)}{h}$ (6)
Формула (6) показывает, что для нахождения частной производной $f'_{x_j}(X_0)$ следует фиксировать все переменные $x_k^0, k \neq i$, рассматривать функцию $g_j(x_j) = f(x_1^0, ...x_j, .x_n^0)$ от одного аргумента x_j и находить производную от функции g_i в точке x_j^0 Это показывает, что для частных производных справедливы свойства, выполняемые для обычные производные.
Именно, $(cf)'_{x_j}(X_0) = cf'_{x_j}(X_0)$
$(f + g)'_{x_j}(X_0) = f'_{x_j}(X_0) + g'_{x_j}(X_0)$,
$(fg)'_{x_j}(X_0) = f'_{x_j}(X_0)g(X_0) + f(X_0)g'_{x_j}(X_0)$; если $f(x) \neq 0, X \in E$, то $(\frac{1}{f})'_{x_j}(X_0) = -\frac{f'_{x_j}(X_0)}{f^2(X_0)}$; если b, как в предыдущем пункте, то $(\frac{g}{f})'_{x_j}(X_0) = \frac{g'_{x_j}(X_0)f(X_0)-g(X_0)f'_{x_j}(X_0)'}{f^2(X_0)}$
В правых частях приведенных равнств все соответствующие частные производные предплогают существующими.
Функция одной переменной, имеющая в какой-то точке производную, была непрерывна в этой точке. Для функций нескольких переменных данное свойство не выполняется.

Пример 7.3. Пусть $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$ (7) Тогда $f'_{x_1}(0, 0) = f'_{x_2}(0, 0) = 0$, но f разрывна в (0,0)

Доказательство. (7) $\Rightarrow f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0\ \forall x_1, x_2$, поэтому $f'_{x_1}(0, 0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$, аналогично $f'_{x_2}(0, 0) = 0$. С другой стороны, $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n})^2}$ (8)
$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$,т.е. f разрывна в тчоке (0,0) □

Определение 7.12. Пусть $X_0 \in E, E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, X_0-$ внутренняя точка E, $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что f дифференцируема в X_0, сли существуют $a_1, ..a_n$ т.ч. выполнено соотношение $f(x_1^0 + h_1, ..., x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, ...x_n^0) = a_1h_1 + ... + a_nh_n + r(h_1, ...h_n)$ и справедливо соотношение $\frac{r(h_1,...h_n)}{\sqrt{h_1^2+...+h_n^2}} \underset{(h_1,...h_n)\to(0,...0)}{\to} 0$ (10)
В соотношения (9) и (10) можно записать в более коротком виде, если мы будем трактовать $\mathbb{R}^n$ как множество вектор-столбцов. Полагая $X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ . \\ x_n^0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ h_n \end{bmatrix}$, тогда (9) и (10) запишем в таком виде:
f дифференцируема в точке X_0, если $\exists$ вектор - строка A $= (a_1, ...a_n)$ т.ч. справедливо соотношение $f(X_0 + H) - f(X_0) = AH = r(H)$ (9′) и $\frac{r(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0$ (10′)

Доказательство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца влечёт $|a_1h_1 + ... + a_nh_n| \leq \sqrt{a_1^2+..+a_n^2}\sqrt{h_1^2+h_n^2} = ||A||_{\mathbb{R}^n} \cdot ||H||_{\mathbb{R}^n}$ (11)
Из (10') следует, что $\exists 0 < \delta_1 < \delta$ т.ч. $\forall H \neq \mathbb{O}_n$, $||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$ выполнено $|\frac{r(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}}| < 1$, т.е. $|r(H)| < ||H||$ (12) Тогда $||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_1$ имеем изи (11) и (12) соотношение $|f(X_0+H) - f(X_0)| \leq |AH| + |r(H)| < ||A||_{\mathbb{R}^n}||H||_{\mathbb{R}^n} + ||H||_{\mathbb{R}^n} = (||A||_{\mathbb{R}^n}+1)||H||_{\mathbb{R}^n} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0$, что доказывает прерывность f в X_0. Далее, полагая $h_1 = ... = h_{j-1} = 0 = h_{j+1} = ... = h_n, h_j = h$, из (9) находим $f(x_1^0,...x_j^0+h,..x_n^0) - f(x_1^0,..x_j^0,...x_n^0) = a_jh + r(0,...h,..0)$, $\frac{f(x_1^0,...,x_j^0+h,...x_n^0)-f(x_1^0,...x_j^0,..x_n^0)}{h} = a_j + \frac{r(0,..h,..0)}{h}$ (13) Из (10) следует, что $\frac{r(0,..h,..0)}{|h|} \underset{h\to0}{\to} 0$, откуда следует, что $\frac{r(0,..h,..0)}{h} \underset{h\to0}{\to} 0$ (14)
Из (13) и (14) следует, что $\exists f'_{x_j}(X_0) = a$; □

Если f дифференцируема в X_0 то $f(X_0+H) - f(X_0) = f'_{x_1}(x_0)h_1 + ... + f'_{x_n}(X_0)h_n + r(H)$, где для $r(H)$ имеем (10')

Определение 7.13. Пусть f дифференцируема в X_0, Дифференциалом функции f в точке X_0 со значением H, обозначаем $df(X_0,H)$, называется выражение $df(X_0,H) = f'_{x_1}(X_0)h_1 + .. + f'_{x_n}(X_0)h_n$ Градиентом f в точке X_0 называется вектор-строка $(f'_{x_1}(x_0),...,f'_{x_n}(X_0))$, $gradf(X_0) = (f'_{x_1}(X_0),...,f'_{x_n}(X_0))$ Тогда $df(X_0,H) = gradf(X_0)H, f(X_0+H) - f(X_0) = df(X_0,H) + r(H)$

Определение 7.14. Пусть A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - отображение. Отображение A называется линейным, если $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ выполнено A(cX) = c(AX) и $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ имеем равенство $A(X+Y) = AX + AY$

Утверждение 7.12. Пусть A - линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда, если записываем $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ как пространства вектор-столбцов, существует единственная матрица $\mathbb{A}$ т.ч. $(X) = \mathbb{A}X$, где в правой части стоит произведение матрицы $\mathbb{A}$ а вектор-столбец X.

Доказательство. Доказано в алгебре □

Далее будем обозначать отображение и соответствубщию ему матрицу одной буквой, записывая A(X) = AX. Все последующие пространства $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, ..$ записываем как пространства вектор-столбцов

Определение 7.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, X_0 \in E, X_0$ - внутренняя точка E, $F: E \to \mathbb{R}^m$, $m, n \geq 1$. Будем говорить, что отображение F дифференцируемо в точке X_0, если $H \in \mathbb{R}^n, X_0 + H \in E$ справедливо соотношение $\frac{||R(H)||_{\mathbb{R}^m}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0$ (2)

Утверждение 7.13. Пусть множество E, точка $X_0 \in E$ и отображение F удовлетворяют предыдущему определению. Тогда, если F(X) = $\begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ f_m(x) \end{bmatrix}$, то каждая координатная функция $f_j(x)$ дифференцируема в точке X_0 и обратно, если каждая функция $f_j(x)$, $1 \leq j \leq m$, дифференцируема в X_0, то и отображение F дифференцируема в точке X_0

Доказательство. Пусть $e_j = \underbrace{0,..1-j..0}_{m}$, где 1 стоит на месте j, а на остальных местах стоит 0. Тогда (1) $\Rightarrow e_j(F(X_0+H)-F(X_0)) = e_jA(H)+e_jR(H) = (e_jA)H + e_jR(H)$,

$$\underbrace{(0,...1,..0)}_{m}\begin{bmatrix} f_1(X_0+H)-f_1(X_0) \\ .... \\ f_m(X_0+H)-f_m(X_0)\end{bmatrix} = (e_jA)\begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ h_n\end{bmatrix} + e_jR(H) \quad (3)$$

В соотношении (3) e_jA - это произведение m - вектор-строки на $m \times n$ матрицу A, поэтому e_jA- это n - вектор строка $(b_1,...b_n)$, а H $= \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ h_n\end{bmatrix}$ Вычисление произведений в (3) влечёт $f_j(X_0+H)-f_0(X_0) = b_1h_1+...+b_nh_n+e_jR(H) \quad (3)$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем соотношение $|e_jR(H)| \le ||e_j||_{\mathbb{R}^m}\cdot||R(H)||_{\mathbb{R}^m} = ||R(H)||_{\mathbb{R}^m}, \quad (4)$ Тогда (2) и (4) влекут соотношение $\frac{e_jR(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \le \frac{||R(H)||_{\mathbb{R}^m}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0$, (5) и (5) $\Rightarrow \frac{e_jR(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} \quad (6)$

Из (3) и (6) следует, что f_j дифференцируема в точке X_0. Обратно, пусть f_j дифференцируема в X_0 при $j = 1,..m$ Тогда $f_j(x_0+H)-f_j(X_0) = a_{j_1}h_1+...+a_{j_n}h_n+r_j(H) \quad (7)$, и $\frac{r_j(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0 \quad (8)$

Пусть матрица A $= (a_{j_k})_{j=1}^{m}\,{}_{k=1}^{n}$. Тогда, если положим R(H) $= \begin{bmatrix} r_1(H) \\ . \\ r_m(H)\end{bmatrix}$, то из (7) получаем равенство $F(X_0+H)-F(X_0) = \begin{bmatrix} f_1(X_0+H)-f_1(X_0) \\ ..... \\ f_m(X_0+H)-f_m(X_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}h_1+...+a_{1n}h_1+r_1(H) \\ ..... \\ a_{m1}h_1+...+a_{mn}h_n+r_m(H)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}h_1+...+a_{1n}h_n \\ ..... \\ a_{m1}h_1+..+a_{mn}h_n\end{bmatrix} + R(H) = AH + R(H) \qquad (9)$

Из (8) получаем $\frac{||R(H)||_{\mathbb{R}^m}}{den} = \sqrt{(\frac{r_1(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}})^2+...+(\frac{r_m(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}})^2} \underset{H\to\mathbb{O}_n}{\to} 0 \quad (10)$

Из (9) и (10) получаем, что F дифференцируемо в точке X_0 Утверждение доказано. □

Следствие 7.13.1. Пусть множество E, $X_0 \in E, E \subset \mathbb{R}^n, F: E \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условиям определения, $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ f_m\end{bmatrix}$. Тогда для $\forall j, 1 \le j \le m$, и $\forall k,\ 1 \le k \le n, \exists f'_{x_k}(X_0)$ и для коэффициентов a_{j_k} из соотношения (7) справедливо равенство $a_{j_k} = f'_{j_{x_k}}(X_0) \quad (11)$

Доказательство. В силу утверждения, функция $f_j(X)$ дифференцируема в точке $X_0\ \forall j$, тогда равенство (11) следует из теоремы о свойствах дифференцируемой в точке функции □

Определение 7.16. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, X_0 \in E$ - внутренняя точка, отображение F: $E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке X_0. Матрице Якоби отображения F точке X_0 будем называть матрицу $DF(X_0)$,

$$DF(X_0)\begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X_0)...f'_{1x_n}(X_0) \\ ..... \\ f'_{mx_1}(X_0)...f'_{mx_n}(X_0)\end{bmatrix} \quad (12)$$

Дифференицалом $dF(X_0,H)$ отображения F в точке X_0 при значении H будем называть значение линейного отображения $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ при значении H, задаваемого формулой $dF(X_0,H) = DF(X_0)H \quad (13)$

Во введенных терминах соотношение (1) перепишеся в виде $F(X_0+H)-F(X_0) = dF(X_0,H) + R(H)$, (14), где для отображения R выполнено соотношение (2)

7.9 Производная функции по направлению

Определение 7.17. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, X_0 \in E, X_0$ - внутренняя точка E, $f : E \to \mathbb{R}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n, ||\overline{v}||_{\mathbb{R}^n} = 1$. Производной функции f в точке x_0 по направлению $\overline{v}$ называется конечный предел в том случае, елси он существует, $f'_{\overline{v}}(X_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(X_0+h\overline{v})}{h}$ (15)

Теорема 7.14. Пусть множество E, точка $X_0 \in E$ и функция f, как в определении. Предположим, что f дифференцируема в точке X_0. Тогда $\forall \overline{v} \in \mathbb{R}^n, ||\overline{v}||_{\mathbb{R}^n} = 1$, существует производная функции f в точке X_0 по направлению $\overline{v}$ и справедливо равенство $f'_{\overline{v}}(X_0) = gradf(X_0)\overline{v}$, (16),
где в (16) вектор-строка grad$f(X_0)$ умножается на вектор-столбец $\overline{v}$

Доказательство. Положим H = h$\overline{v}$,тогда $||H||_{\mathbb{R}^n} = |h| \cdot ||\overline{v}||_{\mathbb{R}^n} = |h|$, и из дифференцируемости функции f в точке X_0 находим, что $f(X_0 + h\overline{v}) - f(X_0) = f(X_0 + H) - f(X_0) = fradf(X_0)H + r(H) = graddf(X_0) \cdot (h\overline{v}) + r(h\overline{v}) = hgradf(X_0)\overline{v} + r(h\overline{v})$, что влечет $\frac{f(X_0+h\overline{v})-f(X-0)}{h} = gradf(X_0)\overline{v} + \frac{r(h\overline{v})}{h}$ (17)
По определению дифференцируемости функции f имеем $\frac{r(h\overline{v})}{h} = \frac{|r(H)|}{||H||} \underset{H\to\mathbb{O}}{\to} 0$ (18) поэтому (17) и (18) влекут $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(X_0+h\overline{v})-f(X_0)}{h} + gradf(X_0)\overline{v} + \lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h\overline{v})}{h} = gradf(X_0)\overline{v}$, что и доказывает теорему. □

Определение 7.18. Пусть функция f дифференцируема в точке $X_0, X_0 \in E$, все объекты всякие из предыдущей теоремы. Предположим, что $gradf(X_0) \neq \mathbb{O}_n^T$, где $\mathbb{O}_n^T$ - вектор-строка (0,..0). Направлением градиента функции f называется такое $\overline{v_0}$, что $f'_{\overline{v_0}}(X_0) \geq f'_{\overline{v}}(X_0)$ (19) для любого $\overline{v} \in \mathbb{R}^n, ||\overline{v}||_{\mathbb{R}^n} = 1$

Утверждение 7.15. Предположим, что $gradf(X_0) \neq \mathbb{O}_n^T$ Тогда направление градиента задается равенством $\overline{v_0}\frac{1}{||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}}(gradf(X_0))^T$, (20), где в (20) знак $(...)^T$ означает транспонирование вектор-строки в вектор-столбец.

Доказательство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца и соотношение (16) влекут $f_{\overline{v}}(X_0) = gradf(X_0)\overline{v} \leq |gradf(X_0)\overline{v}| \leq ||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}||\overline{v}||_{\mathbb{R}^n} = ||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}$, при этом получаем из (20) и (16): $f_{\overline{v_0}}(X_0) = gradf(X_0)\overline{v_0} = gradf(X_0) \cdot \frac{1}{||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}} \cdot (gradf(X_0))^T = \frac{1}{||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}} \cdot gradf(X_0)(gradf(X_0))^T = \frac{1}{||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}} \cdot ||gradf(X_0)||^2_{\mathbb{R}^n} = ||gradf(X_0)||_{\mathbb{R}^n}$
Соотношения (21) и (22) влекут $f'_{\overline{v}}(X_0) \leq f'_{\overline{v_0}}(X_0)$, т.е. $\overline{v_0}$ в (20) - направление градиента □

Замечание. Справедливо уточнение утверждения: если $gradf(X_0) \neq \mathbb{O}_n^T, \overline{v_0}$ задано а (20), $\overline{v} \neq \overline{v_0}, ||\overline{v}|| = 1, f'_{\overline{v}}(X_0) < f'_{\overline{v_0}}(X_0)$

Доказательство. Примем без доказательство □

7.10 Достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 7.16. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, X_0 \in E, X_0-$ внутрення точка E, $f : E \to \mathbb{R}$. Пусть $B_\delta(X_0) \subset E$ и пусть $\forall j, j = 1, ...n$ и $\forall x \in B_\delta(X)\exists f'_{x_j}(X)$. Предположим, что функции $f'_x(X) : B_\delta(X_0) \to \mathbb{R}$ непрерывны в $X_0, 1 \leq j \leq n$. Тогда f дифференцирума в X_0

Доказательство. Пусть $X_0 = (x_1^0, ...x_n^0)^T$(знак T означает, что мы по-прежнему рассматриваем $\mathbb{R}^n$ как множество вектор-столбцов) Тогда $\Pi_0 = \Pi(x_1^0 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x_1^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}; ...; x_n^0 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}; x_n^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}) \subset B_\delta(X_0)$
Обозначим $\delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ Пусть Н $= (h_1, ..h_m)^T, H \neq \mathbb{O}_n, |h_j| \leq \delta_1, 1 \leq j \leq n$. Положим $H_0 = H, H_1 = (0, h_2, ...h_n)^T, H_2 = (0, 0, h_3...h_n)^T...H_{n-1} = (0, 0..., h_n)^T, H_n = \mathbb{O}_n$ Тогда $f(X_0 + H) - f(X_0) = f(X_0 + H_0) - f(X_0 + H_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1})$ (23) Рассмотрим выражение $f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1})$ Имеем: $X_0 + H_k = (x_1^0, ...x_k^0, x_{k+1}^0 + h_{k+1}, ..x_n^0 + h_n)^T$ (24)
$X_0 + H_{k+1} = (x_1^0, ...x_k^0, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0 + h_{k+2}, ..x_n^0 + h_n)^T$ (25)
Из (24) и (25 следует), что разность $f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1})$ можно рассматривать как функцию g_k от аргумента $x_{k+1} = x_{k+1}^0 + h_{k+1}$ при $x_{k+1}^0 - \delta_1 < x_{k+1} < x_{k+1}^0 + \delta_1$. По определению частной производной, данная функция $g_k(x_{k+1})$ имеем производную, именно, при указанных значениях x_{k+1} имеем $g_k'(x_{k+1}) = (f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1})'_{x_{k+1}}$ (26) Поэтому к функции g_k применим теорему Лагранжа, поэтому найдется $c_{k+1} \cdot h_{k+1} > 0$ т.ч. $g_k(x_{k+1}^0 + h_{k+1}) - g_k(x_{k+1}^0) = g_k'(x_{k+1}^0 + c_{k+1}) \cdot h_{k+1}$ (27) Функция $f(X_0 + H_{k+1})$ в силу (25) не зависит от аргумента x_{k+1}, поэтому $f'_{x_{k+1}}(X_0 + H_{k+1}) = 0$, и тогда (26) влечет $g_k'(x_{k+1}^0 + c_{k+1}) = f'_{x_{k+1}}(x_1^0, ..., x_k^0, x_{k+1}^0 + c_{k+1}, ...x_n^0 + h_n)^T$
Теперь соотношения (23),(26),(27),(28) влекут $f(X_0 + H) - f(X_0) = \sum_{k=0}^{n-1} f'_{x_{k+1}}(x_1^0, ..x_{k+1}^0 + c_{k+1}, ...x_n^0 + h_n)^T \cdot h_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}{}'(x_1^0, .., x_j^0 + c_j, ...x_n^0, ...x_n^0 + h_n)^T - f'_{x_j}(x_1^0, ...x_j^0, ...x_n^0)^T) h_j$ (29)
Поскольку $|c_j| < |h_j|$, если $h_j \neq 0$, то $(c_1, ...c_n)^T \underset{H \to \mathbb{O}}{\to} \mathbb{O}$.Непрерывность функций $f'_{x_j}(x)$ в точке X_0 влечет $0 \leq \frac{|f'_{x_j}(x_1^0, ...x_j^0 + c_j, ..x_n^0 + h_n) - f'_{x_j}(X_0)||h_j|}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \leq |f'_{x_j}(x_1^0, .., x_j^0 + c_j, .., x_n^0 + h_n)| \underset{H \to \mathbb{O}_n}{\to} 0$, (30) тогда (29) и (30) влекут, что f дифференцируема в точке X_0. Теорема доказана □

Конец второго семестра.