

# Алгебра и теория чисел

Курс Жукова И.Б.

Осень 2022 г.

---

# Оглавление

---

Оглавление	i
1 Алгебра линейных операторов	1
2 Инвариантные подпространства	4
3 Собственные значения и собственные векторы	8
4 Характеристический многочлен оператора	12
5 Характеристический многочлен оператора	15

---

# Глава 1

## Алгебра линейных операторов

---

07.09.22

**Определение 1.1** (Алгебра).  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ . Линейный оператор на  $V$  — линейное отображение  $V \rightarrow V$  (эндоморфизм линейного пространства  $V$ ).

**Определение 1.2.**  $\text{End } V = \text{Hom}(V, V)$  — множество линейных операторов.

$$\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W) \quad [\mathcal{A}]_{E,F}$$

Имея два пространства  $V$  и  $W$ , базисы  $E$  и  $F$  можно выбрать так, что матрица получится окаймленной единичной.

Теперь же мы имеем одно пространство, соответственно, и один базис и все еще хотим, чтобы матрица была наиболее простой.

**Определение 1.3.** Говорят, что задана алгебра над полем  $K$ , если задано множество  $A$ , бинарные операции  $+$ ,  $\times$  на нем и отображение  $K \cdot A \rightarrow A$ , т.ч.:

1.  $(A, +, \times)$  - кольцо
2.  $(A, +, \cdot)$  - линейное пространство над полем  $K$
3.  $\forall \alpha \in K \forall a, b \in A : \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$

**Пример 1.1.**  $A = M_n(K)$ ,  $A_0 = \{\alpha E_n | \alpha \in K\}$  — подкольцо скалярных матриц, изоморфное полю  $K$ .

**Пример 1.2.**  $A = K[x]$

**Пример 1.3.** Любая ситуация, где поле  $K \subset R$  ( $R$  — кольцо)  $\Rightarrow R$  —  $K$ -алгебра.

В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отождествить с полем  $K$ .

Любая ситуация, где поле  $K \subset R$  ( $R$  — кольцо)  $\Rightarrow R$  —  $K$ -алгебра. В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отождествить с полем  $K$ .

Почему алгебра с единицей:

Пусть  $A$  — алгебра с  $1 (\neq 0)$  над полем  $K$ . Рассмотрим множество  $A_0 = \{\alpha \cdot 1 | \alpha \in K\}$ .

$$K \xrightarrow{\varphi} A_0 \quad \alpha \mapsto \alpha_1$$

Идеал в поле либо нулевой, либо все поле.  $\varphi(1) \neq 0 \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) \neq K$ . Значит,  $\varphi$  — изоморфизм.  $A_0$  — подкольцо, изоморфное полю  $K$ .

Линейные операторы тоже образуют алгебру. Заметим, что в  $\text{End } V$  есть сложение и композиция операторов, а также умножение на скаляр.  $(\text{End } V, +)$  — абелева группа. Проверка дистрибутивности операторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) &= \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_1 + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_2 \\ (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \circ \mathcal{B} &= \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{B} + \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{B} \end{aligned}$$

$(\text{End } V, +, \circ)$  — линейное пространство над полем  $K$ . Наконец,  $(\alpha \cdot \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha \cdot \mathcal{B}) = \alpha \cdot (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$ .

Таким образом,  $(\text{End } V, +, \circ, \cdot)$  — алгебра над полем  $K$ .

**Предложение 1.1.** Пусть  $\dim V = n$ .  $E$  — базис  $V$ . Тогда отображение  $\lambda_E : \text{End } V \rightarrow M_n(K)$ ,  $\mathcal{A} \mapsto [\mathcal{A}]_E$  — изоморфизм алгебр над полем  $K$  (т.е. биекция, сохраняющая все операции).

**Доказательство.** Знаем:  $\lambda_E$  — изоморфизм линейных пространств.  $\lambda_E(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = [\mathcal{B}\mathcal{A}]_E = [\mathcal{B}]_E \cdot [\mathcal{A}]_E = \lambda_E(\mathcal{B})\lambda_E(\mathcal{A})$ . ■

**Следствие 1.1.1.**  $\dim \text{End } V = (\dim V)^2$

lil friendly reminder:  $U_E \xrightarrow{\mathcal{A}} V_F \xrightarrow{\mathcal{B}} W_G$ ,  $[\mathcal{B}\mathcal{A}]_{EG} = [\mathcal{B}]_{FG}[\mathcal{A}]_{EF}$  - стандартный случай.

$\mathcal{A} : U_{EE'} \rightarrow V_{FF'}$ . Как связаны матрицы этого линейного отображения в двух базисах?  $[\mathcal{A}]_{EF} = A$  - знаем,  $[\mathcal{A}]_{E'F'} = ?$  Нужны матрицы перехода:  $M_{E \rightarrow E'} = C$ ,  $M_{F \rightarrow F'} = D$ . Можем записать:  $E' = EC$ ,  $E = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $C = c_{ij}$  ( $E$  - вектор,  $C$  - квадратная матрица). Тогда  $EC = (c_{11}e_1 + \dots + c_{m1}e_n, c_{12}e_1 + \dots + c_{n2}e_n, \dots)$ . Что происходит с матрицей при такой замене базиса?

**Предложение 1.2.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ ,  $E$  и  $E'$  — базисы,  $[\mathcal{A}]_E = A$ ,  $M_{E \rightarrow E'} = C$ , тогда  $[\mathcal{A}]_{E'} = C^{-1}AC$ .

**Доказательство.**

$$\begin{array}{ccc} U_E & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V_F \\ \varepsilon_U \uparrow & & \downarrow \varepsilon_V = id_V \\ U_{E'} & \xleftarrow{\mathcal{A}} & V_{F'} \end{array}$$

$$[\mathcal{A}]_{E'F'} = \underbrace{[\varepsilon_V]_{FF'}}_{D^{-1}} \underbrace{[\mathcal{A}]_{EF}}_A \underbrace{[\varepsilon_U]_{E'E}}_C$$

В нашем случае ( $U = V, E = F, E' = F'$ ). ■

**Определение 1.4 (Алгебра).** Пусть  $A'$  эквивалентно  $A$ , если  $\exists C \in \text{GL}_n(K)$ :  $A' = C^{-1}AC$ . Проверка симметричности и транзитивности:

$$A = (C^{-1})^{-1}A'C^{-1}$$

$$A'' = D^{-1}A'D = D^{-1}C^{-1}A'CD = (DC)^{-1}A'(CD)$$

---

## Глава 2

# Инвариантные подпространства

---

**Определение 2.1.**  $V$  — линейное конечномерное пространство,  $A \in \text{End } V$ . Пусть  $W \subset V$  — линейное подпространство.  $W$  — называется инвариантным относительно  $A$ , если  $\forall w \in W : A(w) \in W$ .

### Свойства.

1.  $0, W$  —  $A$ -инвариантны
2.  $\text{Ker } A$  —  $A$ -инвариантно
3.  $\text{Im } A$  —  $A$ -инвариантен

Пусть  $W$  —  $A$ -инвариант. Следовательно,  $A|_W$  можно рассматривать как элемент  $\text{End } W$ . Более формально,  $\exists A_1 \in \text{End } W \forall w \in W : A_1 w = Aw$

$$W \xrightarrow{A} W \quad w \mapsto Aw$$

$A_1$  — оператор индуцированный оператором  $A$  на инвариантном подпространстве  $W$ .

$W \subset V$ ,  $V/W = \{v + w | v \in V\}$  — фактор-пространство.  $W$  —  $A$ -инвариант. Определим  $A_2$ .

$$\mathcal{A}_2 : V/W \rightarrow V/W \quad v + W \mapsto \mathcal{A}v + W$$

Проверка корректности: пусть  $v_1 + W = v_2 + W$ , нужно проверить, что  $\mathcal{A}v_1 + W = \mathcal{A}v_2 + W$ . Так,  $\mathcal{A}v_2 = \mathcal{A}(v_1 + (v_2 - v_1)) = \mathcal{A}v_1 + \underbrace{\mathcal{A}(v_2 - v_1)}_{\in W} \Rightarrow \mathcal{A}v_2 + W = \mathcal{A}v_1 + W$ .

**Предложение 2.1.**  $\mathcal{A}_2 \in \text{End } V/W$

**Доказательство.** Проверка линейности:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2((v_1 + W) + (v_2 + W)) &= \mathcal{A}_2((v_1 + v_2) + W) = \\ &= \mathcal{A}(v_1 + v_2) + W = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}v_2 + W = \\ &= (\mathcal{A}v_1 + W) + (\mathcal{A}v_2 + W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\alpha(v + w)) &= \mathcal{A}_2(\alpha v + W) = \\ &= \mathcal{A}(\alpha v) + W = \alpha \mathcal{A}v + W = \\ &= \alpha(\mathcal{A}v + W) = \alpha \mathcal{A}_2(v + W) \end{aligned}$$

■

$\mathcal{A}_2$  — индуцированный оператор на фактор-пространстве.

**Предложение 2.2.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V, W \subset V, e_1, \dots, e_m$  — базис  $W$ ,  $e_{m+1}, \dots, e_n$  — дополнение до базиса  $V$ . Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1.  $W$  —  $\mathcal{A}$ -инвариант

$$2. [\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right), \quad A_1 \in M_m(K)$$

При этом  $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_m}$ ,  $A_2 = [\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W, \dots, e_n+W}$ , где  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — соответствующие индуцированные операторы.

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ : векторы  $e_1, \dots, e_n \in W \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W = \text{Lin}(e_1, \dots, e_m) \Rightarrow [\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$   
Очевидно,  $[\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_m} = A_1$ .

Пусть  $[\mathcal{A}]_{e_1, \dots, e_n} = (a_{ij})$ .

$$\mathcal{A}e_j = \underbrace{a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m}_{\in W} + a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n, \quad j \geq m+1$$

$$\underbrace{\mathcal{A}e_j + W}_{= \mathcal{A}_2(e_j + W)} = \underbrace{a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n + W}_{= a_{m+1j}(e_{m+1} + W) + \dots + a_{nj}(e_n + W)} \quad (\text{первые } m \text{ элементов})$$

станут нулевым классом). Таким образом,  $[\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W, \dots, e_n+W} =$

$$\begin{pmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_2$$

$$2 \Rightarrow 1: [\mathcal{A}_1]_{e_1, \dots, e_n} = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in$$

$$\text{Lin}(e_1, \dots, e_m) \in W. \text{ Пусть } w \in W \Rightarrow w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m \Rightarrow \mathcal{A}w = \beta_1 \underbrace{\mathcal{A}_1 e_1}_{\in W} + \dots + \beta_m \underbrace{\mathcal{A}_m e_m}_{\in W} \in W. \quad \blacksquare$$

Итак, мы выяснили, что если в нашем подпространстве  $V$  есть инвариантное подпространство меньшей размерности (ненулевое)  $W \subset V$ , то это позволяет нам составить блочно-треугольную матрицу  $\left( \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$ , где  $A_1, A_2$  - квадратные матрицы,  $A_1 \in M_m(K)$ ,  $m = \dim W$ .

14.09.22

В ситуации  $V = W_1 \oplus W_2$ , можно получить  $\left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$ .

**Предложение 2.3.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ ,  $V = W_1 \oplus W_2$ ,  $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{E_1}$  — базис  $W_1$ ,  $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E_2}$  — базис  $W_2$ ,  $E = E_1 + E_2$ . Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1.  $W_1, W_2$  —  $\mathcal{A}$ -инвариантны

2.  $[\mathcal{A}]_E = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$ ,  $A_1 \in M_m(K)$ ,  $A_2 \in M_{n-m}(K)$ . При этом  $A_1 = [\mathcal{A}|_{W_1}]_{E_1}$ ,  $A_2 = [\mathcal{A}|_{W_2}]_{E_2}$

**Доказательство.** Аналогично предыдущему предположению.

$$1 \Rightarrow 2: \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right), \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in W_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right).$$



$$\left| \begin{array}{l}
 2 \Rightarrow 1: \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \text{Lin}(e_1, \dots, e_m) = W_1 \Rightarrow \forall w \in \\
 W_1, \mathcal{A}w \in W_1, W_1 - \mathcal{A}\text{-инвариант.} \\
 \left( \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in \text{Lin}(e_{m+1}, \dots, e_n) = W_2 \Rightarrow \forall w \in \\
 W_2, \mathcal{A}w \in W_2, W_2 - \mathcal{A}\text{-инвариант.} \quad \blacksquare
 \end{array} \right.$$

Что означает в терминах оператора, что матрица получилась диагональной? Например, образ первого базисного вектора будет прямо пропорционален первому базисному вектору:  $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1$ ,  $\mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2$  и т.д.

---

## Глава 3

# Собственные значения и собственные векторы

---

Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ . Скаляр  $\lambda \in K$  называется собственным значением оператора  $\mathcal{A}$ , если  $\exists v \in V, v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v$ . Можно написать иначе:  $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - (\lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon), \varepsilon = \text{id}$ .

**Определение 3.1.** Таким образом,  $\lambda$  — собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0$ . Если  $K$  — числовое поле, то «собственное число = собственное значение».

**Определение 3.2.** Пусть  $v \in V, \lambda$  — собственное значение  $\mathcal{A}$ . Говорят, что  $v$  — собственный вектор  $\mathcal{A}$ , принадлежащий собственному значению  $\lambda$ , если  $v \neq 0$  и  $\mathcal{A}v = \lambda v$ , т.е.  $v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \setminus \{0\}$ .

**Определение 3.3.**  $V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$  — собственное подпространство, принадлежащее собственному значению  $\lambda$ .

**Определение 3.4.**  $\mathcal{A} \in \text{End } V$  называется диагонализируемым, если в  $V$  существует базис  $E$ , такой что  $[\mathcal{A}]_E$  диагональна.

**Предложение 3.1.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ . Тогда:  $\mathcal{A}$  диагоназируем  $\Leftrightarrow$  в  $V$  существует базис из собственных векторов  $\mathcal{A}$ .

**Доказательство.** « $\lll$ » < HEAD  $\Rightarrow$ : =====  $\Rightarrow$ :  $\ggg$ » >  
45f530186e3cc2911570fe969b623a5e90d14f96

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$E = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $e_i \neq 0$ , так как входит в базис  $\Rightarrow e_i$  — собственный.

$\Leftarrow$ : Пусть  $E = (e_1, \dots, e_n)$  — базис из собственных векторов.  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$  для некоторых  $\lambda_i \in K$ ,  $i = 1, \dots, n \Rightarrow [\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Лемма 3.2.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ . Тогда:  $0$  — собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \text{GL}(V)$ .

**Доказательство.**  $0$  — собственное значение оператора  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - 0\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \text{GL}(V)$ .  $\blacksquare$

**Определение 3.5.** Пусть  $\lambda$  — собственное значение  $\mathcal{A}$ . Его геометрической кратностью называется  $g_\lambda = \dim \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)$ ,  $\lambda \leq g_\lambda \leq n = \dim V$ .

**Предложение 3.3.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , где  $k$  — конечное число, — различные собственные значения  $\mathcal{A}$ .  $v_1, \dots, v_k$  — принадлежащие им собственные векторы. Тогда  $v_1, \dots, v_k$  — ЛНЗ.

**Доказательство.** Индукция по  $k$ .  
База:  $k = 1$ . по определению  $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 - \text{ЛНЗ}$ .  
Переход:  $k - 1 \rightarrow k$ . Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — собственные векторы принадлежащие  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Предположим,  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0(*)$ .  $\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$ . Из  $(*)$  следует, что  $\alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$ . Вычтем:  $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0$   
По индукционному предположению:  $v_1, \dots, v_{k-1} - \text{ЛНС} \Rightarrow$

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = \dots = \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k - \text{ЛНЗ}. \quad \blacksquare$$

**Следствие 3.3.1.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — различные собственные значения  $\mathcal{A}$ . Тогда  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ .

**Доказательство.** Нужно доказать: если  $v_1 + \dots + v_k = v'_1 + \dots + v'_k$  (где  $v_i, v'_i \in V_{\lambda_i}, i = 1, \dots, k$ ). Таким образом,  $v_1 = v'_1, \dots, v_k = v'_k$ .

$$(v_1 - v'_1) + \dots + (v_k - v'_k) = 0 \quad (**)$$

Предположим,  $\exists i : v_i = v'_i$ . Тогда в  $(**)$  есть ненулевое слагаемое:  $v_i - v'_i \in V_{\lambda_i}$ . Оставим в  $(**)$  только ненулевые слагаемые — противоречие с линейной независимостью.  $\blacksquare$

**Следствие 3.3.2.** Пусть  $\dim V = n, \mathcal{A} \in \text{End } V$ . Тогда у  $\mathcal{A}$   $\leq n$  собственных значений.

**Следствие 3.3.3.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — все собственные значения  $\mathcal{A}$ . Тогда  $g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} \leq n = \dim V$ .

**Доказательство.**  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m} \subset V \Rightarrow \dim(\underbrace{V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}}_{g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m}}) \leq n. \quad \blacksquare$

**Предложение 3.4.** Критерий диагональности оператора в терминах геометрических кратностей.

Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  — все его собственные значения,  $\dim V = n$ . Тогда  $\mathcal{A}$  диагонализируем  $\Leftrightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ : найдется базис  $E$  такой что:  $[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m}), c_1, \dots, c_m \geq 0$ . Первые  $c_1$  векторов — собственные, принадлежащие собственным значениям  $\lambda_1$ . Они ЛНЗ  $\Rightarrow c_1 \leq g_{\lambda_1}$ . Аналогично,  $c_i \leq g_{\lambda_i}, m \leq i \leq 2$ .  $n = c_1 + \dots + c_m \leq g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$

$\Leftarrow$ :  $\dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}) = g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$ .  
 $E_1$  — любой базис  $V_{\lambda_1}$ ,  $E_m$  — любой базис  $V_{\lambda_m}$ .  $E$  — диагонализующий базис для  $\mathcal{A}$ . ■

**Замечание.** При этом получили, если

$$[\mathcal{A}]_E = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m}),$$

то  $c_1 = g_{\lambda_1}, \dots, c_m = g_{\lambda_m}$ .

---

## Глава 4

# Характеристический многочлен оператора

---

$\mathcal{A} \in \text{End } V$ ,  $[\mathcal{A}]_E = A$ . Задача: найти собственное значение  $\mathcal{A}$ .  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$ . Задача сводится к нахождению таких  $\lambda$ , при которых определитель матрицы равен нулю.  $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Определитель обращается в ноль, когда  $\lambda$  является корнем этого уравнения.

**Определение 4.1.** Пусть  $A \in M_n(K)$ . Есть характеристический многочлен называется  $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{Tr } A} x^{n-1} + \dots + |A|, \text{ где } A = (a_{ij}), \deg G \leq n-2, \text{ Tr } A - \text{след матрицы.}$$

**Определение 4.2.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ . Его характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}$  называют  $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$ , где  $E$  — любой базис  $V$ .

Проверка корректности: пусть  $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}, C = M_{E \rightarrow E_1}$ .  
Нужно:  $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= C^{-1}AC \\ \chi_{\mathcal{A}_1} &= |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = \\ &= |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n| |C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом,  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$  - корень  $\chi_{\mathcal{A}}$ .

**Определение 4.3.** Кратная копия  $\lambda$  у многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$  называется собственной алгебраической кратностью собственного значения  $\lambda$ .

**Предложение 4.1.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ .

1. Пусть  $\mathcal{A}$  - инвариантное подпространство  $V$ ;  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_W \in W$ .  
Тогда  $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$ .
2. Пусть  $V = W_1 \oplus W_2$ ;  $W_1, W_2$  -  $\mathcal{A}$ -инвариант.

**Определение 4.4.** 1. 1

2. Аналогично: в подходящем  $E$ ,  $[\mathcal{A}]'_E = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right); A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1} \chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} \chi_{\mathcal{A}_2}$ .

**Следствие 4.1.1.** Пусть  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A}$ . Тогда  $g_\lambda \leq a_\lambda$ . Применим предложение к  $W = V_\lambda$ . Очевидно,  $W$  –  $\mathcal{A}$ -инвариант  $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$ .

**Теорема 4.2.**

**Доказательство.** ■

**Пример 4.1.** 1.



---

## Глава 5

# Характеристический многочлен оператора

---

$\mathcal{A} \in \text{End } V$ ,  $[\mathcal{A}]_E = A$ . Задача: найти собственное значение  $\mathcal{A}$ .  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow |A - \lambda E_n| = 0$ . Задача сводится к нахождению таких  $\lambda$ , при которых определитель матрицы равен нулю.  $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Определитель обращается в ноль, когда  $\lambda$  является корнем этого уравнения.

**Определение 5.1.** Пусть  $A \in M_n(K)$ . Есть характеристический многочлен называется  $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{Tr } A} x^{n-1} + \dots + |A|, \text{ где } A = (a_{ij}), \deg G \leq n-2, \text{ Tr } A - \text{след матрицы.}$$

**Определение 5.2.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ . Его характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}$  называют  $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$ , где  $E$  — любой базис  $V$ .

Проверка корректности: пусть  $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}, C = M_{E \rightarrow E_1}$ .  
Нужно:  $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= C^{-1}AC \\ \chi_{\mathcal{A}_1} &= |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = \\ &= |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n| |C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом,  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$  - корень  $\chi_{\mathcal{A}}$ .

**Определение 5.3.** Кратная копия  $\lambda$  у многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$  называется собственной алгебраической кратностью собственного значения  $\lambda$ .

**Предложение 5.1.** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{End } V$ .

1. Пусть  $\mathcal{A}$  - инвариантное подпространство  $V$ ;  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_W \in W$ .  
Тогда  $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$ .
2. Пусть  $V = W_1 \oplus W_2$ ;  $W_1, W_2$  -  $\mathcal{A}$ -инвариант.

**Определение 5.4.** 1. 1

2. Аналогично: в подходящем  $E$ ,  $[\mathcal{A}]'_E = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right); A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1} \chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} \chi_{\mathcal{A}_2}$ .

**Следствие 5.1.1.** Пусть  $\lambda$  - собственное значение  $\mathcal{A}$ . Тогда  $g_\lambda \leq a_\lambda$ . Применим предложение к  $W = V_\lambda$ . Очевидно,  $W$  –  $\mathcal{A}$ -инвариант  $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$ .

**Теорема 5.2.**

**Доказательство.**



**Пример 5.1.** 1.