Математический анализ

Курс Широкова Н.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Норма линейного отображения

Определение 1.1 (Линейный оператор). $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, если $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$A(px_1qx_2) = pA(x_1) + qA(x_2)$$

$$A \Leftrightarrow \tilde{A}_{m\times n}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} A(x) = \tilde{A}_{m\times n}X$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Определение 1.2 (Норма линейного отображения).

$$|A|| \overset{def}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^m, ||X|_{\mathbb{R}^m \leq 1}} ||AX||_{\mathbb{R}^n}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... a_{1n}x_m \\ a_{21}x_1 + ... a_{2n}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

$$||AX||^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k1}x_1 + ... a_{km}x_n)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(a^2_{k1} + ... + a^2_{km}) \underbrace{(x_1^2 + ... x_m^2)}_{=||X||^2_{\mathbb{R}^n}} \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a^2_{k1} + ... + a^2_{km}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a^2_{kl} = ||A||_2 \tag{2}$$

$$(2) \implies ||A|| \leq ||A||_2 \geq 0$$

Свойства нормы линейного отображения

Теорема 1.1. $||A|| \geq 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{0}$

Доказательство. Пусть $||A|| = 0$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$
$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ не зависят друг от друга.

$e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i}, ... 0)$ $f_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$||A|| = 0 \rightarrow Af_j = \mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}$. $Af_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ Теперь рассмотрим

$e_i \underbrace{(Af_j)}_{\mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}} = (0 ... 1 ...) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij} = 0$ ■

$A, c \in \mathbb{R}, (cA(x)) \overset{def}{=} c(A(x))$

Теорема 1.2. $||cA|| = |c| \cdot ||A||$

Доказательство.

$$||cA|| = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n} \leq 1} ||cA(X)||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n} \leq 1} ||c(AX)||_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= \sup_{X \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^n} \leq 1} |c| \cdot ||AX||_{\mathbb{R}^n}$$

■

$A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Теорема 1.3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

Доказательство.

$$||A + B|| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leq 1} ||(A + B)X||_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\dots} ||AX + BX||_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \underbrace{\sup(\underbrace{||AX||}_{\leq ||A||_2} + \underbrace{||BX||}_{\leq ||B||_2})}_{M} \leq \sup_{\dots} ||AX||_{\mathbb{R}^n} + \sup_{\dots} ||BX||_{\mathbb{R}^n}$$

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^m, ||x_1||_{\mathbb{R}^m} \leq 1 \text{и} ||Ax_1|| + ||Bx_1|| > M - \varepsilon \qquad (3)$$

$(3) \implies M - \varepsilon < ||A|| + ||B| \to \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m, ||X||_{\mathbb{R}^m} \leq 1} (||AX||_{\mathbb{R}^n} + ||BX||_{\mathbb{R}^n}) \leq ||A|| + ||B||$ ■

Теорема 1.4. $||AX||_{\mathbb{R}^n} \leq ||A|| \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m}$

Доказательство.

$$X \neq \mathbb{0}^m \Leftrightarrow ||X||_{\mathbb{R}^m} \overset{def}{=} t > 0$$
$$x_0 = \frac{1}{t} x$$
$$||x_0||_{\mathbb{R}^m} = ||\frac{1}{t} x||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} ||X||_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} \cdot t = 1 \implies$$

$$||Ax_0||_{\mathbb{R}^n} \leq ||A|| \tag{5}$$

(5) $\implies ||Ax_0||_{\mathbb{R}^n} = ||A\left(\frac{1}{t}x\right)||_{\mathbb{R}^n} \leq ||A|| \to 4.$ ■

Теорема 1.5.

$$c > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c||X||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

$$\to ||A|| \leq c \tag{6'}$$

Доказательство.

$$(6) \implies \text{при } ||X||_{\mathbb{R}^m} < 1 \text{ имеем}$$
$$||AX||_{\mathbb{R}^n} \leq c \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \leq c \to \sup_{||X|| \leq 1} ||AX|| \leq c \implies (6')$$

■

Теорема 1.6.

$$E = \{c \in \mathbb{R}, > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ имеем } ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq C||X||_{\mathbb{R}^m}\} \tag{7}$$

В случае $A \neq 0$
$||A|| = \inf E,\ ||A||_2 \in E,\ \inf E \overset{def}{=} m$

$$||A|| = \inf E \tag{8}$$

Доказательство. 1. $m = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_1 \in E : {}_1 < \varepsilon$$
$$(7) \to ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c_1||x||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \to ||A|| \leq c_1 < \varepsilon$$
$$\to ||A|| = 0$$

2. $m > 0$

$$||A|| \in E, m \leq ||A||$$

$$\text{пусть } m < ||A|| \implies \exists c_2 : m < c_2 < ||A|| \tag{9}$$

$$(7) \implies ||Ax||_{\mathbb{R}^n} \leq c_2||x||_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$(9) \implies ||A|| \leq c_2 \text{ противоречие}$$

■

Теорема 1.7.

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$
$$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

$$Lx = B(A(x)) \tag{10}$$

Каждая норма соответствует своей паре пространств!

$$||L|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

Доказательство.

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \; ||LX||_{\mathbb{R}^k} = ||B(AX)||_{\mathbb{R}^k} \leq ||B|| \cdot ||AX||_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \underbrace{||B|| \cdot ||A||}_{c} \cdot ||X||_{\mathbb{R}^m} \tag{11}$$

по свойству 5 (11) $\implies$ (10) ■

Дифференцируемость суперпозиции линейных отображений

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$$
$$X_o \in \Omega - \text{ внутрення точка}$$
$$G \in \mathbb{R}^n, Y_0 \in G, Y_0 - \text{ внутренняя точка в } G$$
$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n \; \forall x \in \Omega \; F(x) \in G, F(X_0) = Y_0$$
$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_k(y) \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^k$$

$$\exists P : \Omega \to \mathbb{R}^k, P(x) \stackrel{def}{=} \Phi(F(x)) \tag{15}$$

Теорема 1.8. F дифференцируема в X_0, Φ дифференцируема в $X_0 \Rightarrow P$ дифференцируема в X_0 и

$$DP(X_0) = D\Phi(X_0) \cdot DF(X_0)(\text{ это матрицы Якоби}) \tag{16}$$

Доказательство.

$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) = B\lambda + \rho(\lambda) \tag{17}$$

$$B = D\Phi(Y_0), \rho(\lambda) \in \mathbb{R}^k \text{ и } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} \underset{\lambda \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} 0 \tag{18}$$

$$\lambda = \mathbb{0}_n, \Phi(Y_0) - \Phi(Y_0) = \mathbb{0}_k + \rho(\mathbb{0}_n) \to \rho(\mathbb{0}_n) = \mathbb{0}_k$$
$$\forall \eta > 0 \exists \delta_1 > 0 :$$

$$(18) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq \mathbb{0}_n \text{ и } ||\lambda||_{\mathbb{R}_n} < \delta_1 \text{ будет } \frac{||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}_k}}{||\lambda||_{\mathbb{R}^n}} < \eta \tag{19}$$

и

$$||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \tag{20}$$

$$(19) \implies ||\rho(\lambda)||_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot ||\lambda||_{\mathbb{R}^n} \tag{19'}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall H \in \mathbb{R}^m, ||H||_{\mathbb{R}^m} \delta_2 \text{ имеем}$$

$$||r(H)||_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \tag{21}$$

$$H \in \mathbb{R}^m, x_0 + H \in \Omega \text{ возможно т.к. внутрення точка}$$
$$F(X_0) = Y_0$$

$$\text{определим } F(x_0 + H) - F(x_0) = \lambda \tag{22}$$

$$F(x_0 + H) - Y_0 = \lambda \tag{22'}$$

$$P(x_0 + H) - P(x_0) = \Phi(F(x_0 + H)) - \Phi(F(x_0)) \overset{(22')}{=}$$
$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) \overset{(17)}{=} B\lambda + \rho(\lambda) \overset{(12),(22)}{=}$$
$$B(AH + r(H)) + \rho(AH + r(H)) =$$

$$= \overbrace{(BA)}^{P(x_0+H)-P(x_0)} H + \overbrace{Br(H) + \rho(AH + r(H))}^{r_1(H)} \tag{23'}$$

$$||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_2 \to ||r(H)||_{\mathbb{R}^m} \le \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} \tag{23}$$

$$\delta = \varepsilon \ \exists \delta_1 : \text{ выполнено (20) при } ||\lambda||_{\mathbb{R}^n}\delta_1$$
$$||\lambda||_{\mathbb{R}^n} = ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n} \le ||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}$$
$$\overset{(22)}{\le} ||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} = (||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_1$$

то есть

$$|H||_{\mathbb{R}^m} \le \frac{\delta_1}{||A|| + \varepsilon} \tag{24}$$

$$\delta_0 = \min(\delta_2, \frac{\delta_1}{||A|| + \varepsilon}) \tag{25}$$

и полагаем $||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_0$

$$\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^m} < \delta_0 (26) \implies ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k} \le ||Br(H)||_{\mathbb{R}^k} +$$
$$+ ||\rho(AH + r(H))||_{\mathbb{R}^k} \le ||B|| \cdot ||r(H)||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon ||AH + r(H)||_{\mathbb{R}^n}$$
$$\overset{(20),(23)}{\le} ||B|| \cdot \varepsilon ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||AH||_{\mathbb{R}^n} + ||r(H)||_{\mathbb{R}^n}) \le$$

$$\le ||B||\varepsilon||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon(||A|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon||H||_{\mathbb{R}^m}) = \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \tag{22}$$

$$P(x_0) + H - P(X_0) = (BA)H + r_1(H) \tag{27'}$$

$$\text{При } ||H||_{\mathbb{R}^n} < \delta_0 \text{ имеем } ||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k} \le \varepsilon(||B|| + ||A|| + \varepsilon)||H||_{\mathbb{R}^m} \tag{27''}$$

$$(27'') \implies \frac{||r_1(H)||_{\mathbb{R}^k}}{||H||_{\mathbb{R}^m}} \underset{H \to \mathbb{0}_m}{\longrightarrow} 0 \tag{28}$$

$(23'), (27'), (28) \implies (16)$ ■

Глава 2

Частные производные

Теорема об обратном отображении

$E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, $x_0 \in E$, x_0 – внутренняя точка $F : E \to \mathbb{R}^n$

$$F \in C^1(w) \tag{1}$$

$$\det DF(x_0) \neq 0 \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) влекут: $F(x_0) = Y_0, \exists x_0 \in v$ и $\exists y_0 \in V$:

$$F|_v - \text{гомеоморфизм на } V \tag{3}$$

$$\Phi = F^{-1}, \Phi \in C^1(V) \tag{4}$$

Определение 2.1 (Якобиан). $I(x_0) \overset{def}{=} detDF(x_0)$ – Якобиан отображения F в точке x_0

$$\Phi(F(X)) \equiv X \implies D\Phi(Y)DF(X) = DI(X) \implies$$
$$Y = F(X), I(X) \equiv X$$
$$I_n - \text{ единичная матрица в } \mathbb{R}^n$$
$$\implies detD(\Phi(Y_0)) \cdot detDF(X_0) = detI_n = 1$$

Доказательство. 1. Будем пользоваться определителем матрицы Якоби. Будем обозначать дальше $DF(x_0) = A$. Условие (2) влечёт $\exists A^{-1}$

$$\text{Будем обозначать } ||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda}, \lambda > 0 \tag{5}$$

Раассмотрим такое линейное отображение $x \in w, ||DF(x) - DF(x_0)|| < ||DF(x) - DF(x_0)||_2$

$$(\dots |f'_{ix_j}(x) - f'_{ix_j}(x_0)|^2 + \dots)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1) \implies |f'_{ix_j} - f'_{ix_j}(x_0)|^2 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

$$(6) \implies ||DF(X) - DF(X_0)||_2 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

$$(7) \implies ||DF(X - DF(X_0)|| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \tag{8}$$

$$(8) \implies \exists r > 0 : \forall x, ||X - X_0||_{\mathbb{R}^n} < r \text{ имеем}$$

$$DF(X) - DF(X_0)|| < 2\lambda \tag{9}$$

$$U = B_r(X_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \lambda \tag{10}$$

$$DF(X) - A|| < 2\lambda \tag{9'}$$

Замечание (О внутренности шара).

$$X_1, X_2 \in B_r(X_0), 0 < t < 1 \implies tX_1 + (1-t)x_2 \in B_r(x_0)$$

$$\begin{gathered} |(tX_1 + (1-t)X_2) - X_0||_{\mathbb{R}^n} = ||t(X_1 - X_0) + \\ +(1-t)(X_2 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} \leq ||t(X_1 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} + \\ +||(1-t)(X_2 - X_0)||_{\mathbb{R}^n} < \\ < tr + (1-t)r = r \end{gathered}$$

2. Биективность отображения F на U

$$0 < t < 1$$

$$X \in B_r(x_0), H \in \mathbb{R}^n, X + H \in B_r(X_0)$$
$$t(X+H) + (1-t)X = X + tH \in B_r(X_0)$$
$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$g(t) = F(X+tH) - tAH \tag{11}$$

По достаточному условию дифференцируемости все матрицы Якоби существуют

$$\begin{aligned}(11) \implies Dg(t) = g'(t) = D(F(X+tH)) - D(tAH) = \\ = DF(X+tH)D(t+tH) - AH = \\ = DF(x+tH)H - DF(x_0)H =\end{aligned}$$

$$= (DF(x+tH) - DF(x_0))H \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\text{Правая часть}(12) &\leq ||DF(X+tH) - DF(x_0)|| \cdot ||H||_{\mathbb{R}^n} \\ &< 2\lambda ||H||_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

$$\underset{13'}{\leq} \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{14}$$

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda} \implies \forall X \in \mathbb{R}^n ||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{4\lambda}||X||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow$$

$$||X||_{\mathbb{R}^n} \geq 4\lambda ||A^{-1}X||_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow ||AY||_{\mathbb{R}^n} \geq 4\lambda ||Y||_{\mathbb{R}^n} \tag{13}$$

$$(13) \Leftrightarrow 2\lambda ||Y||_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2}||AY||_{\mathbb{R}^n} \tag{13'}$$

По теореме Лагранжа ..

$$(12), (14) \implies ||g'(t)||_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{15}$$

$$\exists t_o \in (0,1) : ||g(1) - g(0)||_{\mathbb{R}^n} \leq ||g'(t_0)||_{\mathbb{R}^n} \cdot (1-0) = ||g'(t_0)||_{\mathbb{R}^n} \tag{16}$$

$$g(1) - g(0) = F(X+H) - AH - F(X) = (F(X+H) - F(X)) - AH \tag{17}$$

$$(15),(16),(17) \implies ||(F(X+H)-F(X))-AH||_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{18}$$

$$(18) \implies ||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} \geq ||AH||_{\mathbb{R}^b}-$$

$$-||F(X+H)-F(X)-AH||_{\mathbb{R}^n} > ||AH||_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^b} =$$

$$= \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} > 0 \tag{19}$$

$$AH = (AH - F(X+H)) - F(X) + (F(X_H) - F(X))$$

$$||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} > \frac{1}{2}||AH||_{\mathbb{R}^n} \tag{20}$$

$$\text{при } X \in B_r(X_0), X+H \in B_r(x_0), H \neq \mathbb{0}_n$$

$$(20) \implies F(X+H) \neq F(X) \text{ при } H \neq \mathbb{0}_n$$

$$V \overset{def}{=} F(U) \tag{21}$$

$$\exists \Phi : V \to U \tag{22}$$

$$\text{т.ч. } \Phi = F^{-1}$$

3. Открытость отображения

$$(20),(13') \implies ||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} \tag{23}$$

Лемма 2.1. $X_1 \in U, Y_1 = F(X_1)$, $0 < \rho < \rho - ||X_1 - X_0||_{\mathbb{R}^n}$ Такой выбор влечёт

$$\overline{B}_\rho(X_1) \in UY \in B_{\lambda\rho}(Y_1), Y \neq Y_1 \tag{24}$$

$$\implies \exists X \in B_\rho(X_1) : F(X) = Y \tag{25}$$

Доказательство. От редактора: если поместить доказательство внутри доказательства, будет стрёмно, поэтому я просто напишу, где закончится доказательство леммы :(■

Давайте рассмотрим функцию

$$P(X) : \overline{B}_\rho(X_1) \to \mathbb{R}$$

$$P(X) = ||F(X) - Y||_{\mathbb{R}^n} \tag{26}$$

Видно, что функция непрерывная, класса C^1, норма это непрерывная функция на замкнутом шаре. Так как замкнутый шар это компакт:

$$\exists X_1 \in \overline{B}_\rho : P(X_) \leq P(X) \forall x \in \overline{B}_\rho(X_1) \tag{27}$$

$$X_2 \text{ т.ч. } ||X_2 - X_1||_{\mathbb{R}^n} = \rho, H = X_2 - X_1$$

$$(23) \implies ||F(X_2) - F(X_1)||_{\mathbb{R}^n} = ||F(x_1 + H) - F(X_1)||_{\mathbb{R}^n} > \\ > 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} == 2\lambda||X_2 - X_1||_{\mathbb{R}^n}$$

$$= 2\lambda\rho \tag{28}$$

$$(28), (24) \implies ||F(X_2) - Y||_{\mathbb{R}^n} \geq ||F(X_2) - \\ - \underbrace{F(X_1)}_{Y_1}||_{\mathbb{R}^n} - ||\underbrace{F(X_1)}_{Y_1} - Y||_{\mathbb{R}^b} > 2\lambda\rho - \lambda\rho > 2\lambda\rho - \lambda\rho$$

$$= \lambda\rho \tag{29}$$

$$(29) : P(X_2) > \lambda\rho \tag{30}$$

$$P(X_1) = ||F(X_1) - Y||_{\mathbb{R}^n} = ||Y_1 - Y||_{|\mathbb{R}^n} < \lambda\rho \tag{31}$$

$$(30), (31) \implies P(X_1) < P(X_2) \tag{32}$$

$$(32) \implies X_- \in B_\rho(X_1) \tag{33}$$

Теперь хотим ввести функцию

$$f(X) = P^2(X)$$

и получаем, что

$$f(X_-) \leq f(X) \forall X \in \overline{B}\rho(X_1) \tag{34}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix}$$

$f(X) \geq 0$ обозначили координатные функции

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} (F_k(X) - Y_k)^2 \tag{35}$$

$$(35) \implies C^1(U) \tag{36}$$

$$(34), (35) \implies f'_{xj} = 0, 1 \leq j \leq n \tag{37}$$

(необходимое условие экстремума, согласны ?)

$$(35) \implies f'_{x_j}(X) = 2\sum_{k=1}^{n} (F_k(X) - Y_k) F'_{kx_j}(X) \tag{38}$$

$$f_k = F_k(X_-) - Y_k$$

$$(37), (38) \implies \sum_{k=1}^{n} F'_{kx_j}(X_-) l_k = 0, 1 \leq j \leq n \tag{39}$$

$L = (e_1, \dots, e_n)$

$$(39) \implies LDF(X_-) = \mathbb{0}_n^T \tag{40}$$

Будем для краткости записи пользоваться обозначениями из Якобиана

$$\forall X \in U J_F(X) \neq 0 \tag{41}$$

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{4\lambda}$$

Хотим обозначить теперь

$$B = DF(X)$$

$$\beta = ||A - B|| < 2\lambda$$

по теореме из предыдущей лекции 22.09.22

$$||B^{-1}|| \leq \frac{1}{4\lambda - \beta} < \frac{1}{2\lambda} \tag{42}$$

матрица якоби из (40) обратима, сейчас обратим её

$$(40),(41) \implies (LDF(X_-))(DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n^T(DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n$$

$$\implies L = \mathbb{0}_n^T \qquad (43)$$

Здесь закончилось доказательство леммы
$G \subset U$, G – открытое $\implies$ $F(G)$ открытое. $\forall Y_1 \in F(G)$, пусть $X_1 \in G, F(X_1) = Y_1$. $\exists \rho > 0$ т.ч. $B_\rho(X_1) \in G$ и $\overline{B_\rho(X_1)} \in U$ по предыдущей лемме получаем соотношение

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(B_\rho(X_1)) \subset F(G)$$

Отображение F действительно является открытым отображением.

$$V = F(U), V - \text{ открытое }, G \subset U, G - \text{ открытое}$$

хотим рассмотреть отображение

$$\Phi = F^{-1}; V \to U$$

посмотрим на прообразы открытых множеств V. Пусть $\Omega \in V-$ открытое.

$$\Phi^{-1}(G) = F(G) - \text{ открытое}$$

Применяем топологическое определение непрерывности

$$\implies \Phi \text{ непрерывна на } V$$

Мы выяснили что F биективно, V - открыто, а обратное отображение непрерывно на V. Теперь надо проверять что Φ такой же гладкости как и ... Осталось проверить что обратное отображение класса C^1

4.
$$\forall Y \in V, K \in \mathbb{R}^n, Y + K \in V$$

$$\Phi(Y+K) - \Phi(Y) \overset{def}{=} H \text{ т.к. отображение } \Phi \text{ непрерывно}$$
$$H \underset{K \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} \mathbb{0}_n$$

$$\Phi(Y) = X \; \Phi(Y+K) = X + H$$
$$F(\Phi(Y+K)) = F(X+H)$$
$$Y + K = F(X+H) \; F(\Phi(Y)) = F(X)$$

$$K = (Y+K) - Y = F(X+H) - F(X) \tag{1}$$

$$DF(X) \; ||(DF(X))^{-1}|| < \frac{1}{2\lambda} \text{ (42) от 29.09} \tag{2}$$

$$DF(X))^{-1} = B$$
$$F(X+H) - F(X) = DF(X)H + t(H) \tag{3}$$

$$\frac{t(H)}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{H \to \mathbb{0}_n}{\longrightarrow} 0 \tag{4}$$

$$(1),(3) \implies$$
$$K = DF(X)H + t(H)$$
$$DF(X)H = K - t(H)$$
$$(BDF(X))H = BK - B(t(H))$$

$$H = BK - Bt(H) \tag{5}$$

$$(5) \implies \Phi(Y+K) - \Phi(Y) = BK - Bt(H) \tag{6}$$

Дифференцируемость почти получилась, потому что есть линейное отображение BK..., надо выяснить, что есть соответствующее свойство для дифференирцемости отображения.

$$||F(X+H)-F(X)||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} \text{ (23) из прошлой лекции} \tag{7}$$

$$||K||_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda||H||_{\mathbb{R}^n} \tag{7'}$$

$$\frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \leq \frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \overset{<}{(2)} \frac{1}{2\lambda}\frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} = \frac{1}{2\lambda}\frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \cdot \frac{||H||_{\mathbb{R}^n}}{||K||_{\mathbb{R}^n}} \overset{<}{(7')}$$

$$< \frac{1}{4\lambda^2}\frac{||t(H)||_{\mathbb{R}^n}}{||H||_{\mathbb{R}^n}} \underset{K\to\mathbb{0}_n}{\longrightarrow} 0 \tag{8}$$

$$(6),(8) \implies \Phi \text{ дифференцируема в } Y$$

Получаем следующие равенства:

$$D\Phi(Y) = (DF(X))^{-1} \tag{9}$$

$$\text{где } Y = F(X) \Leftrightarrow X = \Phi(Y)$$

то, что мы доказали, влечёт следующее: если мы рассмотрим координатные функции F, то получится, что существуют все частные производные. осталось проверить их непрерывность

5. .

$$F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix} \Phi(Y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(Y) \\ \vdots \\ \varphi_n(Y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{1y_1}(Y) & ... & \varphi'_{1y_n}(Y) \\ ... & \ddots & ... \\ \varphi'_{ny_1} & ... & \varphi'_{ny_n}(Y) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & ... & F'_{1x_n} \\ ... & \ddots & ... \\ F'_{1x_1}(X) & ... & F'_{nx_n}(X) \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$(9) \implies \varphi'_{ky_l}(Y) = \frac{\sum \pm F'_{ix_i}(x) \cdots F'_{sx_t}(X)}{\underbrace{\sum + \cdots F'_{px_q}(X) \cdots F'ux_v(X)}_{\neq 0}} \tag{10}$$

$$F'_{ix_j}(X) = F'_{ix_j}(\Phi(Y)) \in C(V) \tag{11}$$

$$(10),(11) \implies \varphi'_{ky_l} \in C(V) \forall k,l \tag{12}$$

По определению класса C^r получаем

$$(12) \implies \Phi \in C^1(V)$$

■

Следствие 2.1.1.

$$r \geq 1, F \in C^r(E)$$
$$E \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, E - \text{ открытое множество}$$
$$X_0 \in E, F(X_0) = Y_0, d_F(X_0) \neq 0$$
$$\implies \exists x_0 \in U \text{ и } \exists Y_0 \in V \text{ т.ч. } F|_U - \text{ гомеоморфизм}$$
$$\Phi = F^{-1}$$
$$\Phi \in C^r(E)$$

Доказательство. Доказательство было проговорено устно и я ничего не расслышал :(■

Следствие 2.1.2 (Теорема об открытом отображении)**.**

$$E \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$$
$$E - \text{ открытое }, F : E \to \mathbb{R}^n$$

$$d_F(X) \neq 0 \forall x \in E \implies F - \text{ открытое отображение}$$

Доказательство.

$$w \in E, w - \text{ открытое }, F(w) = G, Y_0 \in G$$

$$\exists x_o \in w \text{ т.ч. } F(X_0) = Y_0 \exists r > 0 \text{ т.ч. } B_r(X_0) \subset w, d_F(x_0) \neq 0 \text{ т.е.}$$
$$\exists (DF(X_0))^{-1}$$

$$\lambda > 0, ||(DF(X_0)^{-1})|| = \frac{1}{4\lambda}$$
$$\implies B_{\lambda r}(Y_0) \subset F(B_r(X_0)) \qquad \text{(шаг 3)}$$
$$F(B_r(X_0)) \subset F(w)$$

■

Теорема 2.2 (О неявном отображении).

$$n \geq 1, m \geq 1$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

A - обратима

$$C = [AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$CZ_0 = \mathbb{0}_n$$

$$CZ = \mathbb{0}_n$$

$$[AB] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbb{0}_n \tag{1}$$

$$(1) \Leftrightarrow AX + BY = \mathbb{0}_n \Leftrightarrow AX = -BY \Leftrightarrow X = -(A^{-1}B)Y \tag{2}$$

$$X_0 = -(A^{-1}B)Y_0 \tag{2'}$$

Теорема 2.3 (О неявном отображении в общем случае)**.**

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m}, Z \in E, Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$F : E \to \mathbb{R}^n, F \in C^1(E)$$

$$F(Z) = \begin{bmatrix} f_1(Z) \\ \vdots \\ f_n(Z) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & ... & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & ... & f'_{1y_m}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... & ... \ddots & ... \\ f'_{nx_1}(Z_0) & ... & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & ... & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & ... & f'_{1x_n}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ f'_{nx_1}(Z_0) & ... & f'_{nx_n}(Z_0) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z_0) & ... & f'_{1y_m}(Z_0) \\ ... & \ddots & ... \\ f'_{my_1}(Z_0) & ... & f'_{my_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = [AB]$$

$$A \text{ обратима} \tag{1}$$

$$F(Z_0) = \mathbb{0}_n \tag{2}$$

$$\exists Y_0 \in W$$
$$g : W \to \mathbb{R}^n, g \in C^1(W)$$

$$g(Y_0) = X_0 \ \forall Y \in W \tag{3}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{4}$$

$$F(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}) = \mathbb{0}_n \tag{2'}$$

Доказательство.

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\Phi(Z_0) = \begin{bmatrix} F(Z_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$D\Phi(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(...) & ... & f'_{1x_n} & f'_{1y_1} & ... & f'_{1y_m} \\ ... & \ddots & ... & ... & \ddots & ... \\ f'_{nx_1} & ... & f'_{nx_n} & f'_{ny_1} & ... & f'_{ny_m} \\ & & & \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 1 & ... & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & ... & 1 \end{array} & & \end{bmatrix}$$

$$defD\Phi(Z_0) = detA \neq 0$$

По теореме об обратном отображении

$$\exists Z_0 \in U, \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$$

$$S \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^m$$

$$\Phi \text{ гомеоморфизм } U \text{ на } V$$

$$\text{для} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V \exists \Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) - \text{ обратный к}\Phi \tag{7}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}^n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = Z_0 \tag{8}$$

$$\Psi \in C^1(V)$$

$$(5) \implies \Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix} \tag{9}$$

хотим выбрать такой вектор

$$P_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V, \exists r > 0 : B_r^{m+n}(P_0) \subset V$$

$$\forall Y \in B_r^m(Y_0) \qquad\qquad \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{m+n}(P_0)$$

$$W = B_r^m(Y_0)$$

Хотим определить функцию

$$T \in W, g(T) \overset{def}{=} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

$$(10) \implies g(Y_0) = \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} g(T) \\ T \end{bmatrix}\right) \overset{(10)}{=} \Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix}\right) T \end{bmatrix}\right) \overset{(9)}{=} \Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$(11) \implies F\left(\begin{bmatrix} g(T) \\ T \end{bmatrix}\right) = \mathbb{0}_n \tag{12}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \overset{(9)}{\Longrightarrow} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = X_0 \Leftrightarrow g(Y_0) = X_0 \tag{13}$$

Предположим, что такая функция не единственная .

$$W$$
$$Y_0 \in W_1$$
$$W_2 = W \cap W_1$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} g(y) \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} g(y) \\ y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} \overset{(12)}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y \end{bmatrix}; \Phi\left(\begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) \overset{(12}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ X \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$(14) \implies g(Y) = g_1(Y)$$

■