Глава 1

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение $\mathcal{A}$. λ - собственое значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow |\mathcal{A} - \lambda\varepsilon| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ, при которых определитель матрицы равен нулю. $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого уравнения.

Определение 1.1. Пусть $A \in M_n(K)$. Есть характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$\begin{pmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1} x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\operatorname{Tr} A} x^{n-1} + \dots + |A|$, где $A = (a_{ij})$, $\deg G \leq n - 2$, $\operatorname{Tr} A$ - след матрицы.

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Его характеристический многочлен называют $\chi_{\mathcal{A}} \chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E - любой базис V.

Проверка корректности: пусть $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}$, $C = M_{E \to E_1}$. Нужно: $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$.

$A_1 = C^{-1}AC \quad \chi = |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}}_{|C|^{-1}} |A - XE_n||C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}}$

У эквивалентных матриц след одинаков.