Глава 1

Собственные значения и собственные векторы

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Скаляр $\lambda \in K$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если $\exists v \in V,\ v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v$. Можно написать иначе: $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - (\lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$, $\varepsilon = \mathrm{id}$

Определение 1.1. Таким образом, λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0$
Если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и т.д., то "собственное число $=$ собственное значение"

Определение 1.2. Пусть $v \in V$, λ - собственное значение $\mathcal{A}$. Говорят, что v - собственный вектор $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ, если $v \neq 0$ и $\mathcal{A}v = \lambda V$, т.е. $v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)\backslash\{0\}$
$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$ - собственное подпространство $\in$ собственное значение λ

Определение 1.3. $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ называется диагонализируемым, если в V существует базис E, такой что $[\mathcal{A}]_E$ диагональна

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow V$ существует из собственных векторов $\mathcal{A}$

Доказательство. $\Rightarrow$: $[\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $E = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$, $e_i \neq 0$ так как входит в базис $\Rightarrow e_i$ - собственный
$\Leftarrow$: Пусть $E = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис из собственных векторов. $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ для некоторых $\lambda_i \in K$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow [\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ■

Лемма 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: 0 - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(V)$

Доказательство. 0 - собственное значение оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 0\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(v)$ ■

Определение 1.4. Пусть λ - собственное значение $\mathcal{A}$. Его геометрической кратностью называется $g_y = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon), \lambda \leqslant g_\lambda \leqslant n = \dim V$

Предложение 1.3. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где k - конечное число, - различные собственные значения $\mathcal{A}$. $v_1, \ldots, v_k$ - принадлежащие им собственные векторы. Тогда $v_1, \ldots, v_k$ - ЛНЗ

Доказательство. Индукция по k.
База: $k = 1$. по определению $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$ - ЛНЗ Переход: $k-1 \to k$.
Пусть $v_1, \ldots, v_k$ - собственные векторы, принадлежащие $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
Предположим, $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 (*)$.$\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k + \ldots = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$
$(*) \cdot \lambda : \lambda_1 \lambda_k v_1 + \ldots + \lambda_k \lambda_k v_1$
По индукционному предположению: $v_1, \ldots, v_{k-1}$ - ЛНЗ $\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = \ldots = \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ - ЛНЗ
■

Следствие 1.3.1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные собственные значения $\mathcal{A}$. Тогда $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Доказательство. Нужно доказать: если $v_1 + \dots + v_k = v_1' + \dots + v_k'$ (где $v_1, v_1' \in V_{\lambda_i}, i = 1, \dots, k$). Таким образом, $v_1 = v_1', \dots, v_k = v_k'$.

$$(v_1 - v_1') + \dots + (v_k - v_k') = 0 \qquad (**)$$

Предположим, $\exists i : v_i = v_i'$. Тогда в $(**)$ есть ненулевое слагаемое: $v_i - v_i' \in V_{\lambda_i}$. Оставим в $(**)$ только ненулевые слагаемые - противоречие с линейной независимостью. ■

Следствие 1.3.2. Пусть $\dim V = n, \mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда у $\mathcal{A} \leqslant n$ собственных значений.

Следствие 1.3.3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - все собственные значение $\mathcal{A}$. Тогда $g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} \leqslant n = \dim V$

Доказательство. $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m} < V \Rightarrow \dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}) \leq n$ ■

Предложение 1.4. Критерий диагональности оператора в терминах геометрических разностей.
Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ $\dim V = n$ Тогда: $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$

Доказательство. $\Rightarrow$ найдется базис E такой что: $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m})$, $c_1, \dots, c_m \geq 0$ Первые c_1 векторов - собственные, принадлежащие собственным значениям λ_1. Они ЛНЗ $\Rightarrow c_1 \leq g_{\lambda_1}$ Аналогично, $c_i \leq g_{\lambda_i}, m \leq i \leq 2$. $n = c_1 + \dots + c_m \leq g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$
$\Leftarrow \dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}) = g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$
E_1 - любой базис V_{λ_1} E_m - любой базис V_{λ_m} E - диагонализирующий базис для $\mathcal{A}$ ■

Замечание. При этом получим $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m})$

Таким образом, $c_1 = g_{\lambda_1}, \dots, c_m = g_{\lambda_m}$