Алгебра и теория чисел

Курс Жукова И.Б.

Осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Алгебра линейных операторов

07.09.22

Определение 1.1 (Алгебра). V — линейное пространство над полем K. Линейный оператор на V — линейное отображение $V \to V$ (эндоморфизм линейного пространства V).

Определение 1.2. $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V, V)$ — множество линейных операторов.

$$\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, W) \quad [\mathcal{A}]_{E,F}$$

Имея два пространства V и W, базисы E и F можно выбрать так, что матрица получится окаймленной единичной.

Теперь же мы имеем одно пространство, соответственно, и один базис и все еще хотим, чтобы матрица была наиболее простой.

Определение 1.3. Говорят, что задана алгебра над полем K, если задано множество A, бинарные операции $+$, $\times$ на нем и отображение $K \cdot A \to A$, т.ч.:

1. $(A, +, \times)$ - кольцо
2. $(A, +, \cdot)$ - линейное пространство над полем K
3. $\forall \alpha \in K\ \forall a, b \in A : \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$

Пример 1.1. $A = M_n(K)$, $A_0 = \{\alpha E_n | \alpha \in K\}$ — подкольцо скалярных матриц, изоморфное полю K.

Пример 1.2. $A = K[x]$

Пример 1.3. Любая ситуация, где поле $K \subset R$ (R — кольцо) $\implies$ R — K-алгебра.

В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отожествить с полем K.

Любая ситуация, где поле $K \subset R$ (R – кольцо) $\implies$ R – K-алгебра. В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отожествить с полем .

Почему алгебра с единицей:

Пусть A — алгебра с $1 (\neq 0)$ над полем K. Рассмотрим множество $A_0 = \{\alpha \cdot 1 | \alpha \in K\}$.

$$K \xrightarrow{\varphi} A_0 \quad \alpha \mapsto \alpha_1$$

Идеал в поле либо нулевой, либо все поле. $\varphi(1) \neq 0 \Rightarrow Ker(\varphi) \neq K$. Значит, φ — изоморфизм. A_0 — подкольцо, изоморфное полю K.

Линейные операторы тоже образуют алгебру. Заметим, что в End V есть сложение и композиция операторов, а также умножение на скаляр. (End $V, +$) — абелева группа. Проверка дистрибутивности операторов:

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_1 + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_2$$
$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{B} + \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{B}$$

(End $V, +, \circ$) — линейное пространство над полем K. Наконец, $(\alpha \cdot \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha \cdot \mathcal{B}) = \alpha \cdot (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$.

Таким образом, (End $V, +, \circ, \cdot$) — алгебра над полем K.

Предложение 1.1. Пусть $\dim V = n$. E — базис V. Тогда отображение $\lambda_E : \operatorname{End} V \to M_n(K)$, $\mathcal{A} \mapsto [\mathcal{A}]_E$ — изоморфизм алгебр над полем K (т.е. биекция, сохраняющая все операции).

Доказательство. Знаем: λ_E — изоморфизм линейных пространств. $\lambda_E(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = [\mathcal{B}\mathcal{A}]_E = [\mathcal{B}]_E \cdot [\mathcal{A}]_E = \lambda_E(\mathcal{B})\lambda_E(\mathcal{A})$. ■

Следствие 1.1.1. $\dim \operatorname{End}\ V = (\dim\ V)^2$

lil friendly reminder: $U_E \xrightarrow{\mathcal{A}} V_F \xrightarrow{\mathcal{B}} W_G$, $[\mathcal{B}\mathcal{A}]_{EG} = [\mathcal{B}]_{FG}[\mathcal{A}]_{EF}$ - стандартный случай.

$\mathcal{A} : U_{EE'} \to V_{FF'}$. Как связаны матрицы этого линейного отображения в двух базисах? $[\mathcal{A}]_{EF} = A$ - знаем, $[\mathcal{A}]_{E'F'} = ?$ Нужны матрицы перехода: $M_{E\to E'} = C$, $M_{F\to F'} = D$. Можем записать: $E' = EC$, $E = (e_1, \dots, e_n)$, $C = c_{ij}$ (E - вектор, C - квадратная матрица). Тогда $EC = (c_{11}e_1 + \dots + c_{m1}e_n, c_{12}e_1 + \dots + c_{n2}e_n, \dots)$. Что происходит с матрицей при такой замене базиса?

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V, E$ и E' — базисы, $[\mathcal{A}]_E = A$, $M_{E\to E'} = C$, тогда $[\mathcal{A}]_{E'} = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd} U_E \arrow[r, "\mathcal{A}"] & V_F \arrow[d, "\varepsilon_V = id_V"] \\ U_{E'} \arrow[u, "\varepsilon_U"] & V_{F'} \arrow[l, "\mathcal{A}"] \end{tikzcd}$$

$$[\mathcal{A}]_{E'F'} = \underbrace{[\varepsilon_V]_{FF'}}_{D^{-1}}\underbrace{[\mathcal{A}]_{EF}}_{A}\underbrace{[\varepsilon_U]_{E'E}}_{C}$$

В нашем случае $(U = V, E = F, E' = F')$. ■

Определение 1.4 (Алгебра)**.** Пусть A' эквивалентно A, если $\exists C \in \mathrm{GL}_n(K)$: $A' = C^{-1}AC$. Проверка симметричности и транзитивности:

$$A = (C^{-1})^{-1}A'C^{-1}$$
$$A'' = D^{-1}A'D = D^{-1}C^{-1}A'CD = (DC)^{-1}A'(CD)$$

Глава 2

Инвариантные подпространства

Определение 2.1. V — линейное конечномерное пространство, $A \in \text{End } V$. Пусть $W \subset V$ — линейное подпространство. W — называется инвариантным относительно A, если $\forall w \in W$: $\mathcal{A}(w) \in W$.

Свойства.

1. $0, W$ — $\mathcal{A}$-инвариантны
2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — $\mathcal{A}$-инвариантно
3. $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — $\mathcal{A}$-инвариантен

Пусть W — A-инвариант. Следовательно, $A|_W$ можно рассматривать как элемент End W. Более формально, $\exists\ \mathcal{A}_1 \in \text{End } W\, \forall w \in W : \mathcal{A}_1 w = \mathcal{A} w$

$$W \xrightarrow{\mathcal{A}} W \quad w \mapsto \mathcal{A}w$$

$\mathcal{A}_1$ — оператор индуцированный оператором $\mathcal{A}$ на инвариантном подпространстве W.

$W \subset V,\ V/W = \{v + w | v \in V\}$ — фактор-пространство. W — A-инвариант. Определим $\mathcal{A}_2$.

$$\mathcal{A}_2 : V/W \to V/W \quad v + W \mapsto \mathcal{A}v + W$$

Проверка корректности: пусть $v_1 + W = v_2 + W$, нужно проверить, что $\mathcal{A}v_1 + W = \mathcal{A}v_2 + W$. Так, $\mathcal{A}v_2 = \mathcal{A}(v_1 + (v_2 - v_1)) = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}\underbrace{(v_2 - v_1)}_{\in W} \Rightarrow \mathcal{A}v_2 + W = \mathcal{A}v_1 + W$.

Предложение 2.1. $\mathcal{A}_2 \in \mathrm{End}\ V/W$

Доказательство. Проверка линейности:

$$\mathcal{A}_2((v_1 + W) + (v_2 + W)) = \mathcal{A}_2((v_1 + v_2) + W) = \mathcal{A}(v_1 + v_2) + W = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}v_2 + W = (\mathcal{A}v_1 + W) + (\mathcal{A}v_2 + W)$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha(v + w)) = \mathcal{A}_2(\alpha v + W) = \mathcal{A}(\alpha v) + W = \alpha\mathcal{A}v + W = \alpha(\mathcal{A}v + W) = \alpha\mathcal{A}_2(v + W)$$

■

$\mathcal{A}_2$ — индуцированный оператор на фактор-пространстве.

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\ V, W \subset V, e_1, \dots, e_m$ — базис W, $e_{m+1}, \dots, e_n$ — дополнение до базиса V. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. W — $\mathcal{A}$-инвариант
2. $[\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 \in M_m(K)$

При этом $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{e_1,\dots,e_m}$, $A_2 = [\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W,\dots,e_n+W}$, где $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — соответствующие индуцированные операторы.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: векторы $e_1, \dots, e_n \in W \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_m) \Rightarrow [\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$
Очевидно, $[\mathcal{A}_1]_{e_1,\dots e_m} = A_1$.

Пусть $[\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = (a_{ij})$.
$\mathcal{A}e_j = \underbrace{a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m}_{\in W} + a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n$, $j \geqslant m+1$

$\underbrace{\mathcal{A}e_j + W}_{=\mathcal{A}_2(e_j+W)} = \underbrace{a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n + W}_{=a_{m+1j}(e_{m+1}+W)+\dots+a_{nj}(e_n+W)}$ (первые m элементов станут нулевым классом). Таким образом, $[\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W,\dots,e_n+W} = \begin{pmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_2$

2 $\Rightarrow$ 1: $[\mathcal{A}_1]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \operatorname{Lin}(e_1, \dots, e_m) \in W$. Пусть $w \in W \Rightarrow w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m \Rightarrow \mathcal{A}w = \beta_1 \underbrace{\mathcal{A}_1 e_1}_{\in W} + \dots + \beta_m \underbrace{\mathcal{A}_m e_m}_{\in W} \in W$. ■

Итак, мы выяснили, что если в нашем подпространсве V есть инвариантное подпространство меньшей размерности (ненулевое) $W \subset V$, то это позволяет нам составить блочно-треугольную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, где A_1, A_2 - квадратные матрицы, $A_1 \in M_m(K)$, $m = \dim W$. 14.09.22

В ситуации $V = W_1 \bigoplus W_2$, можно получить $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$.

Предложение 2.3. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $V = W_1 \bigoplus W_2$, $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{E_1}$ — базис W_1, $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E_2}$ — базис W_2, $E = E_1 + E_2$. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. $W_1, W_2 - \mathcal{A}$-инвариантны
2. $[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 \in M_m(K)$, $A_2 \in M_{n-m}(K)$. При этом $A_1 = [\mathcal{A}|_{W_1}]_{E_1}$, $A_2 = [\mathcal{A}|_{W_2}]_{E_2}$

Доказательство. Аналогично предыдущему предположению.
1 $\Rightarrow$ 2: $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline 0 & \end{array}\right)$, $\mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in W_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & A_2 \end{array}\right)$.

$2 \Rightarrow 1$: $\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_m) = W_1 \Rightarrow \forall w \in W_1,\ \mathcal{A}w \in W_1,\ W_1$ — $\mathcal{A}$-инвариант.
$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in \mathrm{Lin}(e_{m+1}, \dots, e_n) = W_2 \Rightarrow \forall w \in W_2,\ \mathcal{A}w \in W_2,\ W_2$ — $\mathcal{A}$-инвариант. ■

Что означает в терминах оператора, что матрица получилась диагональной? Например, образ первого базисного вектора будет прямо пропорционален первому базисному вектору: $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1,\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2$ и т.д.

Глава 3

Собственные значения и собственные векторы

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Скаляр $\lambda \in K$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если $\exists v \in V,\ v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v$. Можно написать иначе: $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - (\lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$, $\varepsilon = \mathrm{id}$.

Определение 3.1. Таким образом, λ — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0$. Если K — числовое поле, то «собственное число $=$ собственное значение».

Определение 3.2. Пусть $v \in V$, λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Говорят, что v — собственный вектор $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ, если $v \neq 0$ и $\mathcal{A}v = \lambda v$, т.е. $v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)\setminus\{0\}$.

Определение 3.3. $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$ — собственное подпространство, принадлежащее собственному значению λ.

Определение 3.4. $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ называется диагонализируемым, если в V существует базис E, такой что $[\mathcal{A}]_E$ диагональна.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow$ в V существует базис из собственных векторов $\mathcal{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$:

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$E = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i,\ i = 1, \dots, n,\ e_i \neq 0$, так как входит в базис $\Rightarrow e_i$ — собственный.
$\Leftarrow$: Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ — базис из собственных векторов. $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ для некоторых $\lambda_i \in K,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow [\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ■

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: 0 — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(V)$.

Доказательство. 0 — собственное значение оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 0\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(V)$. ■

Определение 3.5. Пусть λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Его геометрической кратностью называется $g_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon),\ \lambda \leqslant g_\lambda \leqslant n = \dim V$.

Предложение 3.3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где k — конечное число, — различные собственные значения $\mathcal{A}$. $v_1, \dots, v_k$ — принадлежащие им собственные векторы. Тогда $v_1, \dots, v_k$ — ЛНЗ.

Доказательство. Индукция по k.
База: $k = 1$. по определению $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$ — ЛНЗ.
Переход: $k - 1 \to k$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — собственные векторы, принадлежащие $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Предположим, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 (*)$. $\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$. Из $(*)$ следует, что $\alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$. Вычтем: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$
По индукционному предположению: $v_1, \dots, v_{k-1}$ — ЛНС $\Rightarrow$

$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = ... = \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \Rightarrow v_1, ..., v_k$ — ЛНЗ. ■

Следствие 3.3.1. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — различные собственные значения $\mathcal{A}$. Тогда $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$.

Доказательство. Нужно доказать: если $v_1 + ... + v_k = v_1' + ... + v_k'$ (где $v_1, v_1' \in V_{\lambda_i}, i = 1, ..., k$). Таким образом, $v_1 = v_1', ..., v_k = v_k'$.

$$(v_1 - v_1') + ... + (v_k - v_k') = 0 \qquad (**)$$

Предположим, $\exists i : v_i = v_i'$. Тогда в $(**)$ есть ненулевое слагаемое: $v_i - v_i' \in V_{\lambda_i}$. Оставим в $(**)$ только ненулевые слагаемые - противоречие с линейной независимостью. ■

Следствие 3.3.2. Пусть $\dim V = n,\ \mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда у $\mathcal{A} \leqslant n$ собственных значений.

Следствие 3.3.3. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — все собственные значение $\mathcal{A}$. Тогда $g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} \leqslant n = \dim V$.

Доказательство. $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m} < V \Rightarrow \dim(\underbrace{V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_k}}_{g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m}}) \leq n$. ■

Предложение 3.4. Критерий диагональности оператора в терминах геометрических кратностей.
Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V,\ \lambda_1, ..., \lambda_m$ — все его собственные значения, $\dim V = n$. Тогда $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} = n$.

Доказательство. $\Rightarrow$: найдется базис E такой что: $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, ..., \lambda_2}_{c_2}, ..., \underbrace{\lambda_m, ..., \lambda_m}_{c_m}),\ c_1, ..., c_m \geq 0$. Первые c_1 векторов — собственные, принадлежащие собственным значениям λ_1. Они ЛНЗ $\Rightarrow c_1 \leq g_{\lambda_1}$. Аналогично, $c_i \leq g_{\lambda_i},\ m \leq i \leq 2$.
$n = c_1 + ... + c_m \leq g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} = n$

$\Leftarrow$: $\dim(V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}) = g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$. E_1 — любой базис V_{λ_1}, E_m — любой базис V_{λ_m}. E — диагонализирующий базис для $\mathcal{A}$. ■

Замечание. При этом получили, если

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, ..., \lambda_2}_{c_2}, ..., \underbrace{\lambda_m, ..., \lambda_m}_{c_m}),$$

то $c_1 = g_{\lambda_1}, ..., c_m = g_{\lambda_m}$.

Глава 4

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение $\mathcal{A}$. λ - собственое значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow [\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow |\mathcal{A} - \lambda\varepsilon| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ, при которых определитель матрицы равен нулю. $[\mathcal{A} - \lambda\varepsilon]_E = A - \lambda E_n \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \vdots & a_{1n} \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого уравнения.

Определение 4.1. Пусть $A \in M_n(K)$. Есть характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$

$\begin{pmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{pmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1}x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\operatorname{Tr} A} x^{n-1} + \dots + |A|$, где $A = (a_{ij})$, $\deg G \leq n - 2$, $\operatorname{Tr} A$ - след матрицы.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ называют $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E — любой базис V.

Проверка корректности: пусть $A = [\mathcal{A}]_E, A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}$, $C = M_{E \to E_1}$. Нужно: $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}$.

$A_1 = C^{-1}AC$

$\chi_{\mathcal{A}_1} = |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}}_{|C|^{-1}}|A - XE_n||C| = |A - XE_n| = \chi_{\mathcal{A}}$

У эквивалентных матриц след одинаков.

Таким образом, λ - собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \lambda$ – корень $\mathcal{A}$.

Определение 4.3. Кратная копия λ у многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ называется собственной алгебраической кратностью собственного значения λ.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$.

1. Пусть $\mathcal{A}$ - инариантное подпространство V; $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_w \in W$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$.

2. Пусть $V = W_1 \bigoplus W_2; W_1, W_2$ – $\mathcal{A}$-инвариант.

Определение 4.4.

1. 1

2. Аналогично: в подходящем E, $[\mathcal{A}]'_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$; $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}, A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1}\chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1}\chi_{\mathcal{A}_2}$.

Следствие 4.1.1. Пусть λ - собственное значение $\mathcal{A}$. Тогда $g_\lambda \leq a_lambda$. Применим предложение к $W = V_\lambda$. Очевидно, W – $\mathcal{A}$-инвариант $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}|\chi_\mathcal{A}}$.

Теорема 4.2.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: Существует базис E, такой что: $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{g_{\lambda_1}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{g_{\lambda_k}})$. $c_{\lambda_1} = g_{\lambda_1}; \lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные значения. $\chi_\mathcal{A} = \chi_A = (\lambda_1 - X)^{g_{\lambda_1}(\lambda_2 - X)^{g_{\lambda_2}\dots(\lambda_k - X)^{g_{\lambda_k}}}}$. ■

Пример 4.1. 1.