

# Математический анализ

Курс Широкова Н.А.

Осень 2022 г.

---

# Оглавление

---

Оглавление	i
1 Норма линейного отображения	1
2 Частные производные	8

---

# Глава 1

## Норма линейного отображения

---

**Определение 1.1** (Линейный оператор).  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейный оператор, если  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$A(px_1 + qx_2) = pA(x_1) + qA(x_2)$$

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \tilde{A}_{m \times n} \\ X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad A(x) = \tilde{A}_{m \times n} X \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Определение 1.2** (Норма линейного отображения).

$$\|A\| \stackrel{def}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1} \|AX\|_{\mathbb{R}^n} \quad (1)$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nm}x_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|AX\|_{\mathbb{R}^n}^2 &= \sum_{k=1}^n (a_{k1}x_1 + \dots a_{km}x_m)^2 \leq \sum_{k=1}^n (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2) \underbrace{(x_1^2 + \dots x_m^2)}_{=\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2} \leq \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}^2 = \|A\|_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$(2) \implies \|A\| \leq \|A\|_2 \geq 0$$

## Свойства нормы линейного отображения

**Теорема 1.1.**  $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

**Доказательство.** Пусть  $\|A\| = 0$   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  не зависят друг от друга.

$$e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots 0) \quad f_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 0 \rightarrow Af_j = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad Af_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{Теперь рассмотрим } e_i \underbrace{(Af_j)}_{0_{\mathbb{R}^n}} =$$

$$(0 \dots 1 \dots) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{ij} = 0$$

■

$$A, c \in \mathbb{R}, (cA(x)) \stackrel{def}{=} c(A(x))$$

**Теорема 1.2.**  $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \|cA\| &= \sup_{X \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} \|cA(X)\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{X \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} \|c(AX)\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \sup_{X \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} |c| \cdot \|AX\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

■

$$A, B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Теорема 1.3.**  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1} \|(A + B)X\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{\dots} \|AX + BX\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \underbrace{\sup(\|AX\| + \|BX\|)}_{\substack{\leq \|A\|_2 \quad \leq \|B\|_2 \\ M}} \leq \sup_{\dots} \|AX\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{\dots} \|BX\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^m, \|x_1\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1 \text{ и } \|Ax_1\| + \|Bx_1\| > M - \varepsilon \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow M - \varepsilon < \|A\| + \|B\| \rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^m, \|X\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1} (\|AX\|_{\mathbb{R}^n} + \|BX\|_{\mathbb{R}^n}) \leq \|A\| + \|B\|$$

■

**Теорема 1.4.**  $\|AX\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\| \cdot \|X\|_{\mathbb{R}^m}$

**Доказательство.**

$$X \neq 0^m \Leftrightarrow \|X\|_{\mathbb{R}^m} \stackrel{def}{=} t > 0$$

$$x_0 = \frac{1}{t}x$$

$$\|x_0\|_{\mathbb{R}^m} = \left\| \frac{1}{t}x \right\|_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} \|X\|_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{t} \cdot t = 1 \Rightarrow$$

$$\|Ax_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\| \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow \|Ax_0\|_{\mathbb{R}^n} = \|A\left(\frac{1}{t}x\right)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\| \Rightarrow 4. \quad \blacksquare$$

**Теорема 1.5.**

$$c > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq c\|X\|_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \quad (6)$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq c \quad (6')$$

**Доказательство.**

$$(6) \Rightarrow \text{при } \|X\|_{\mathbb{R}^m} < 1 \text{ имеем}$$

$$\|AX\|_{\mathbb{R}^n} \leq c \cdot \|X\|_{\mathbb{R}^m} \leq c \rightarrow \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| \leq c \Rightarrow (6') \quad \blacksquare$$

**Теорема 1.6.**

$$E = \{c \in \mathbb{R}, > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ имеем } \|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|X\|_{\mathbb{R}^m}\} \quad (7)$$

В случае  $A \neq 0$

$$\|A\| = \inf E, \|A\|_2 \in E, \inf E \stackrel{def}{=} m \\ \|A\| = \inf E \quad (8)$$

**Доказательство.** 1.  $m = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_1 \in E : c_1 < \varepsilon$$

$$(7) \rightarrow \|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_1\|x\|_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m \rightarrow \|A\| \leq c_1 < \varepsilon \\ \rightarrow \|A\| = 0$$

2.  $m > 0$

$$\|A\| \in E, m \leq \|A\|$$

$$\text{пусть } m < \|A\| \Rightarrow \exists c_2 : m < c_2 < \|A\| \quad (9)$$

$$(7) \Rightarrow \|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq c_2\|x\|_{\mathbb{R}^m} \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$[(9) \Rightarrow \|A\| \leq c_2 \text{ противоречие} \quad \blacksquare$$

**Теорема 1.7.**

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ L : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

$$Lx = B(A(x)) \quad (10)$$

Каждая норма соответствует своей паре пространств!

$$\|L\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|LX\|_{\mathbb{R}^k} &= \|B(AX)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|B\| \cdot \|AX\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \underbrace{\|B\| \cdot \|A\|}_c \cdot \|X\|_{\mathbb{R}^m} \end{aligned} \quad (11)$$

по свойству 5 (11)  $\Rightarrow$  (10) ■

## Дифференцируемость суперпозиции линейных отображений

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$$

$X_o \in \Omega$  — внутренняя точка

$G \in \mathbb{R}^n, Y_0 \in G, Y_0$  — внутренняя точка в  $G$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega \quad F(x) \in G, F(X_0) = Y_0$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_k(y) \end{bmatrix} : G \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\exists P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, P(x) \stackrel{def}{=} \Phi(F(x)) \quad (15)$$

**Теорема 1.8.**  $F$  дифференцируема в  $X_0$ ,  $\Phi$  дифференцируема в  $X_0 \Rightarrow P$  дифференцируема в  $X_0$  и

$$DP(X_0) = D\Phi(X_0) \cdot DF(X_0) \text{ (это матрицы Якоби)} \quad (16)$$

**Доказательство.**

$$\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) = B\lambda + \rho(\lambda) \quad (17)$$

$$B = D\Phi(Y_0), \rho(\lambda) \in \mathbb{R}^k \text{ и } \frac{\|\rho(\lambda)\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\lambda\|_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0_n} 0 \quad (18)$$

$$\lambda = 0_n, \Phi(Y_0) - \Phi(Y_0) = 0_k + \rho(0_n) \rightarrow \rho(0_n) = 0_k$$

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_1 > 0 :$$

$$(18) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0_n \text{ и } \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_1 \text{ будет } \frac{\|\rho(\lambda)\|_{\mathbb{R}^k}}{\|\lambda\|_{\mathbb{R}^n}} < \eta \quad (19)$$

и

$$\|\rho(\lambda)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n} \quad (20)$$

$$(19) \Rightarrow \|\rho(\lambda)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \eta \cdot \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n} \quad (19')$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall H \in \mathbb{R}^m, \|H\|_{\mathbb{R}^m} \delta_2 \text{ имеем}$$

$$\|r(H)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^m} \quad (21)$$

$$H \in \mathbb{R}^m, x_0 + H \in \Omega \text{ возможно т.к. внутренняя точка}$$

$$F(X_0) = Y_0$$

$$\text{определим } F(x_0 + H) - F(x_0) = \lambda \quad (22)$$

$$F(x_0 + H) - Y_0 = \lambda \quad (22')$$

$$\begin{aligned} P(x_0 + H) - P(x_0) &= \Phi(F(x_0 + H)) - \Phi(F(x_0)) \stackrel{(22')}{=} \\ &\Phi(Y_0 + \lambda) - \Phi(Y_0) \stackrel{(17)}{=} B\lambda + \rho(\lambda) \stackrel{(12'), (22)}{=} \\ &B(AH + r(H)) + \rho(AH + r(H)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{P(x_0 + H) - P(x_0)}{\overbrace{(BA)}^{r_1(H)}} H + \overbrace{Br(H) + \rho(AH + r(H))}^{r_1(H)} \quad (23')$$

$$\|H\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_2 \rightarrow \|r(H)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^m} \quad (23)$$



$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon \exists \delta_1 : \text{выполнено (20) при } \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n} \delta_1 \\ \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n} &= \|AH + r(H)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|AH\|_{\mathbb{R}^n} + \|r(H)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\stackrel{(22)}{\leq} \|A\| \cdot \|H\|_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \cdot \|H\|_{\mathbb{R}^m} = (\|A\| + \varepsilon) \|H\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_1 \end{aligned}$$

то есть

$$\|H\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{\delta_1}{\|A\| + \varepsilon} \quad (24)$$

$$\delta_0 = \min(\delta_2, \frac{\delta_1}{\|A\| + \varepsilon}) \quad (25)$$

и полагаем  $\|H\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_0$

$$\begin{aligned} \text{При } \|H\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_0 (26) &\implies \|r_1(H)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|Br(H)\|_{\mathbb{R}^k} + \\ &+ \|\rho(AH + r(H))\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|B\| \cdot \|r(H)\|_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon \|AH + r(H)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\stackrel{(20), (23)}{\leq} \|B\| \cdot \varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon (\|AH\|_{\mathbb{R}^n} + \|r(H)\|_{\mathbb{R}^n}) \leq \\ &\leq \|B\| \varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon (\|A\| \cdot \|H\|_{\mathbb{R}^m} + \varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^m}) = \\ &= \varepsilon (\|B\| + \|A\| + \varepsilon) \|H\|_{\mathbb{R}^m} \quad (22) \end{aligned}$$

$$P(x_0) + H - P(X_0) = (BA)H + r_1(H) \quad (27')$$

$$\text{При } \|H\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_0 \text{ имеем } \|r_1(H)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \varepsilon (\|B\| + \|A\| + \varepsilon) \|H\|_{\mathbb{R}^m} \quad (27'')$$

$$(27'') \implies \frac{\|r_1(H)\|_{\mathbb{R}^k}}{\|H\|_{\mathbb{R}^m}} \xrightarrow{H \rightarrow 0_m} 0 \quad (28)$$

$$(23'), (27'), (28) \implies (16)$$

■

---

## Глава 2

# Частные производные

---

### Теорема об обратном отображении

$E \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, x_0 \in E, x_0$  – внутренняя точка  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F \in C^1(w) \quad (1)$$

$$\det DF(x_0) \neq 0 \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) влекут:

$$F(x_0) = Y_0, \exists x_0 \in v \text{ и } \exists y_0 \in V : F|_v \text{ – гомеоморфизм на } V \quad (3)$$

$$\Phi = F^{-1}, \Phi \in C^1(V) \quad (4)$$

**Определение 2.1** (Якобиан).  $I(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \det DF(x_0)$  – Якобиан отображения  $F$  в точке  $x_0$

$$\Phi(F(X)) \equiv X \implies D\Phi(Y)DF(X) = DI(X) \implies$$

$$Y = F(X), I(X) \equiv X$$

$$I_n \text{ – единичная матрица в } \mathbb{R}^n$$

$$\implies \det D(\Phi(Y_0)) \cdot \det DF(X_0) = \det I_n = 1$$

**Доказательство.** 1. Будем пользоваться определителем матрицы Якоби. Будем обозначать дальше  $DF(x_0) = A$ . Условие (2) влечёт  $\exists A^{-1}$

$$\text{Будем обозначать } \|A^{-1}\| = \frac{1}{4\lambda}, \lambda > 0 \quad (5)$$

Рассмотрим такое линейное отображение  $x \in w$ ,  $\|DF(x) - DF(x_0)\| < \|DF(x) - DF(x_0)\|_2$

$$\begin{aligned} & (\dots |f'_{ix_j}(x) - f'_{ix_j}(x_0)|^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} \\ (1) \implies |f'_{ix_j} - f'_{ix_j}(x_0)|^2 & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$(6) \implies \|DF(X) - DF(X_0)\|_2 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (7)$$

$$(7) \implies \|DF(X - DF(X_0))\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (8) \implies \exists r > 0 : \forall x, \|X - X_0\|_{\mathbb{R}^n} < r \text{ имеем} \\ DF(X) - DF(X_0) & \| < 2\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

$$U = B_r(X_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \lambda\} \quad (10)$$

$$DF(X) - A \| < 2\lambda \quad (9')$$

**Замечание** (О внутренности шара).

$$X_1, X_2 \in B_r(X_0), 0 < t < 1 \implies tX_1 + (1-t)x_2 \in B_r(x_0)$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 \in B_r(X_0), 0 < t < 1 \implies tX_1 + (1-t)x_2 & \in B_r(x_0) \\ \|(tX_1 + (1-t)X_2) - X_0\|_{\mathbb{R}^n} & = \\ = \|t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)\|_{\mathbb{R}^n} & \leq \|t(X_1 - X_0)\|_{\mathbb{R}^n} + \\ + \|(1-t)(X_2 - X_0)\|_{\mathbb{R}^n} & < tr + (1-t)r = r \end{aligned}$$

2. Биективность отображения  $F$  на  $U$

$$0 < t < 1$$

$$\begin{aligned} X \in B_r(x_0), H \in \mathbb{R}^n, X + H & \in B_r(X_0) \\ t(X + H) + (1-t)X & = X + tH \in B_r(X_0) \\ g : [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$g(t) = F(X + tH) - tAH \quad (11)$$

По достаточному условию дифференцируемости все матрицы Якоби существуют

$$\begin{aligned} (11) \implies Dg(t) &= g'(t) = D(F(X + tH)) - D(tAH) = \\ &= DF(X + tH)D(t + tH) - AH = \\ &= DF(x + tH)H - DF(x_0)H = \\ &= (DF(x + tH) - DF(x_0))H \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Правая часть (12)} &\leq \|DF(X + tH) - DF(x_0)\| \cdot \|H\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq_{13'} \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| = \frac{1}{4\lambda} \implies \forall X \in \mathbb{R}^n \|A^{-1}X\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \frac{1}{4\lambda} \|X\|_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \\ \|X\|_{\mathbb{R}^n} \geq 4\lambda \|A^{-1}X\|_{\mathbb{R}^n} &\Leftrightarrow \|AY\|_{\mathbb{R}^n} \geq 4\lambda \|Y\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \quad (13)$$

$$(13) \Leftrightarrow 2\lambda \|Y\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2} \|AY\|_{\mathbb{R}^n} \quad (13')$$

По теореме Лагранжа ..

$$(12), (14) \implies \|g'(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} \quad (15)$$

$$\exists t_o \in (0, 1) : \|g(1) - g(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|g'(t_o)\|_{\mathbb{R}^n} \cdot (1 - 0) = \|g'(t_o)\|_{\mathbb{R}^n} \quad (16)$$

$$g(1) - g(0) = F(X + H) - AH - F(X) = (F(X + H) - F(X)) - AH \quad (17)$$

$$(15), (16), (17) \implies \|(F(X + H) - F(X)) - AH\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (18) \implies \|F(X + H) - F(X)\|_{\mathbb{R}^n} &\geq \|AH\|_{\mathbb{R}^n} - \\ -\|(F(X + H) - F(X)) - AH\|_{\mathbb{R}^n} &> \|AH\|_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} AH &= (AH - F(X + H)) - F(X) + (F(X_H) - F(X)) \\ \|F(X + H) - F(X)\|_{\mathbb{R}^n} &> \frac{1}{2} \|AH\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \quad (20)$$

при

$$\begin{aligned} X \in B_r(X_0), X + H \in B_r(x_0), H \neq 0_n \\ (20) \implies F(X + H) \neq F(X) \text{ при } H \neq 0_n \\ V \stackrel{\text{def}}{=} F(U) \\ \exists \Phi : V \rightarrow U \end{aligned} \quad \begin{aligned} (21) \\ (22) \end{aligned}$$

т.ч.

$$\Phi = F^{-1}$$

### 3. Открытость отображения

$$(20), (13') \implies \|F(X + H) - F(X)\|_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda\|H\|_{\mathbb{R}^n} \quad (23)$$

**Лемма 2.1.**  $X_1 \in U, Y_1 = F(X_1), 0 < \rho < \rho - \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{R}^n}$   
Такой выбор влечёт

$$\overline{B}_\rho(X_1) \in U, Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1), Y \neq Y_1 \quad (12)$$

$$\implies \exists X \in B_\rho(X_1) : F(X) = Y \quad (25)$$

**Доказательство.** Давайте рассмотрим функцию

$$P(X) : \overline{B}_\rho(X_1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(X) = \|F(X) - Y\|_{\mathbb{R}^n} \quad (26)$$

Видно, что функция непрерывная, класса  $C^1$ , норма это непрерывная функция на замкнутом шаре. Так как замкнутый шар

ЭТО КОМПАКТ:

$$\exists X_1 \in \overline{B}_\rho : P(X) \leq P(X) \forall x \in \overline{B}_\rho(X_1) \quad (27)$$

$$X_2 \text{ т.ч. } \|X_2 - X_1\|_{\mathbb{R}^n} = \rho, H = X_2 - X_1$$

$$(23) \Rightarrow \|F(X_2) - F(X_1)\|_{\mathbb{R}^n} = \|F(x_1 + H) - F(X_1)\|_{\mathbb{R}^n} > \\ > 2\lambda\|H\|_{\mathbb{R}^n} = 2\lambda\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{R}^n} = 2\lambda\rho \quad (28)$$

$$(28), (24) \Rightarrow \|F(X_2) - Y\|_{\mathbb{R}^n} \geq \|F(X_2) - \underbrace{F(X_1)}_{Y_1}\|_{\mathbb{R}^n} - \|\underbrace{F(X_1)}_{Y_1} - Y\|_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda\rho - \lambda\rho > 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho \quad (29)$$

$$(29) : P(X_2) > \lambda\rho \quad (30)$$

$$P(X_1) = \|F(X_1) - Y\|_{\mathbb{R}^n} = \|Y_1 - Y\|_{\mathbb{R}^n} < \lambda\rho \quad (31)$$

$$(30), (31) \Rightarrow P(X_1) < P(X_2) \quad (32)$$

$$(32) \Rightarrow X_- \in B_\rho(X_1) \quad (33)$$

Теперь хотим ввести функцию

$$f(X) = P^2(X) \text{ и получаем, что } f(X_-) \leq f(X) \forall X \in \overline{B}_\rho(X_1) \quad (34)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix}$$

$f(X) \geq 0$  обозначили координатные функции

$$f(X) = \sum_{k=1}^n (F_k(X) - Y_k)^2 \quad (35)$$

$$(35) \Rightarrow C^1(U) \quad (36)$$

$$(34), (35) \Rightarrow f'_{x_j} = 0, 1 \leq j \leq n \quad (37)$$

(необходимое условие экстремума, согласны ?)

$$(35) \Rightarrow f'_{x_j}(X) = 2 \sum_{k=1}^n (F_k(X) - Y_k) F'_{kx_j}(X) \quad (38)$$

$$f_k = F_k(X_-) - Y_k$$

$$(37), (38) \Rightarrow \sum_{k=1}^n F'_{kx_j}(X_-) l_k = 0, 1 \leq j \leq n \quad (39)$$

$$L = (e_1, \dots, e_n)$$

$$(39) \Rightarrow LDF(X_-) = 0_n^T \quad (40)$$

Будем для краткости записи пользоваться обозначениями из Якобиана

$$\begin{aligned} \forall X \in U J_F(X) &\neq 0 \\ \|A^{-1}\| &= \frac{1}{4\lambda} \end{aligned} \quad (41)$$

Хотим обозначить теперь

$$\begin{aligned} B &= DF(X) \\ \beta &= \|A - B\| < 2\lambda \end{aligned}$$

по теореме из предыдущей лекции 22.09.22 (тут появится ссылка когда лекция от 22 числа появится)

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{4\lambda - \beta} < \frac{1}{2\lambda} \quad (42)$$

матрица якоби из (40) обратима, сейчас обратим её

$$\begin{aligned} (40), (41) &\implies (LDF(X_-))(DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n^T(DF(X_-))^{-1} = \mathbb{0}_n \\ &\implies L = \mathbb{0}_n^T \end{aligned} \quad (43)$$

■

$G \subset U$ ,  $G$  – открытое  $\implies F(G)$  открытое.  $\forall Y_1 \in F(G)$ , пусть  $X_1 \in G, F(X_1) = Y_1$ .  $\exists \rho > 0$  т.ч.  $B_\rho(X_1) \in G$  и  $\overline{B_\rho(X_1)} \in U$  по предыдущей лемме получаем соотношение

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(B_\rho(X_1)) \subset F(G)$$

Отображение  $F$  действительно является открытым отображением.

$$V = F(U), V \text{ – открытое, } G \subset U, G \text{ – открытое}$$

хотим рассмотреть отображение

$$\Phi = F^{-1}; V \rightarrow U$$

посмотрим на прообразы открытых множеств  $V$ . Пусть  $\Omega \in V$  – открытое.

$$\Phi^{-1}(G) = F(G) \text{ – открытое}$$

Применяем топологическое определение непрерывности

$$\implies \Phi \text{ непрерывна на } V$$

Мы выяснили что  $F$  биективно,  $V$  - открыто, а обратное отображение непрерывно на  $V$ . Теперь надо проверять что  $\Phi$  такой же гладкости как и ... Осталось проверить что обратное отображение класса  $C^1$

4.

$$\forall Y \in V, K \in \mathbb{R}^n, Y + K \in V$$

$$\Phi(Y + K) - \Phi(Y) \stackrel{def}{=} H \text{ т.к. отображение } \Phi \text{ непрерывно}$$

$$H \xrightarrow{K \rightarrow 0_n} 0_n$$

$$\begin{aligned} \Phi(Y) &= X \quad \Phi(Y + K) = X + H \\ F(\Phi(Y + K)) &= F(X + H) \\ Y + K &= F(X + H) \quad F(\Phi(Y)) = F(X) \\ K &= (Y + K) - Y = F(X + H) - F(X) \end{aligned} \quad (1)$$

$$DF(X) \|(DF(X))^{-1}\| < \frac{1}{2\lambda} \quad (42) \text{ от } 29.09 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} DF(X))^{-1} &= B \\ F(X + H) - F(X) &= DF(X)H + t(H) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{t(H)}{\|H\|_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow{H \rightarrow 0_n} 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (1), (3) &\implies \\ K &= DF(X)H + t(H) \\ DF(X)H &= K - t(H) \\ (BDF(X))H &= BK - B(t(H)) \end{aligned}$$

$$H = BK - Bt(H) \quad (5)$$

$$(5) \implies \Phi(Y + K) - \Phi(Y) = BK - Bt(H) \quad (6)$$

Дифференцируемость почти получилась, потому что есть линейное отображение  $BK...$ , надо выяснить, что есть соответствующее свойство для дифференцируемости отображения.



$$\|F(X+H) - F(X)\|_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda\|H\|_{\mathbb{R}^n} \quad (23) \text{ из прошлой лекции} \quad (7)$$

$$\|K\|_{\mathbb{R}^n} > 2\lambda\|H\|_{\mathbb{R}^n} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} \frac{\|t(H)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|K\|_{\mathbb{R}^n}} &\leq \frac{\|t(H)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|K\|_{\mathbb{R}^n}} \stackrel{<}{(2)} \frac{1}{2\lambda} \frac{\|t(H)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|K\|_{\mathbb{R}^n}} = \\ &\frac{1}{2\lambda} \frac{\|t(H)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|H\|_{\mathbb{R}^n}} \cdot \frac{\|H\|_{\mathbb{R}^n}}{\|K\|_{\mathbb{R}^n}} \stackrel{<}{(7')} \\ &< \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\|t(H)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|H\|_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow{K \rightarrow 0_n} 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(6), (8) \implies \Phi \text{ дифференцируема в } Y$$

Получаем следующие равенства:

$$D\Phi(Y) = (DF(X))^{-1} \quad (9)$$

$$\text{где } Y = F(X) \Leftrightarrow X = \Phi(Y)$$

то, что мы доказали, влечёт следующее: если мы рассмотрим координатные функции  $F$ , то получится, что существуют все частные производные. осталось проверить их непрерывность

5.

$$F(X) = \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix} \Phi(Y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(Y) \\ \vdots \\ \varphi_n(Y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi'_{1y_1}(Y) & \dots & \varphi'_{1y_n}(Y) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \varphi'_{ny_1}(Y) & \dots & \varphi'_{ny_n}(Y) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{1x_n}(X) \\ \dots & \ddots & \dots \\ F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{nx_n}(X) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ (9) \implies \varphi'_{ky_l}(Y) &= \frac{\sum \pm F'_{ix_i}(x) \dots F'_{sx_t}(X)}{\underbrace{\sum + \dots F'_{px_q}(X) \dots F'_{ux_v}(X)}_{\neq 0}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$F'_{ix_j}(X) = F'_{ix_j}(\Phi(Y)) \in C(V) \quad (11)$$

$$(10), (11) \implies \varphi'_{ky_l} \in C(V) \forall k, l \quad (12)$$

По определению класса  $C^r$  получаем  $(12) \implies \Phi \in C^1(V)$

■

**Следствие 2.1.1.**

$$\begin{aligned}
 & r \geq 1, F \in C^r(E) \\
 & E \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, E - \text{открытое множество} \\
 & X_0 \in E, F(X_0) = Y_0, d_F(X_0) \neq 0 \\
 \Rightarrow & \exists x_0 \in U \text{ и } \exists Y_0 \in V \text{ т.ч. } F|_U - \text{гомеоморфизм} \\
 & \Phi = F^{-1} \\
 & \Phi \in C^r(E)
 \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство было проговорено устно и я ничего не расслышал :( ■

**Следствие 2.1.2 (Теорема об открытом отображении).**

$$\begin{aligned}
 & E \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 \\
 & E - \text{открытое}, F : E \rightarrow \mathbb{R}^n \\
 & d_F(X) \neq 0 \forall x \in E \Rightarrow F - \text{открытое отображение}
 \end{aligned}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 & w \in E, w - \text{открытое}, F(w) = G, Y_0 \in G \\
 & \exists x_0 \in w \text{ т.ч. } F(X_0) = Y_0 \exists r > 0 \text{ т.ч. } B_r(X_0) \subset w, d_F(x_0) \neq 0 \text{ т.е.} \\
 & \quad \exists (DF(X_0))^{-1} \\
 & \quad \lambda > 0, \|(DF(X_0))^{-1}\| = \frac{1}{4\lambda} \\
 & \quad \Rightarrow B_{\lambda r}(Y_0) \subset F(B_r(X_0)) \quad (\text{шаг 3}) \\
 & \quad F(B_r(X_0)) \subset F(w)
 \end{aligned}$$

■

**Теорема 2.2** (О неявном отображении).

$$n \geq 1, m \geq 1$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

$A$  - обратима

$$C = [AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$CZ_0 = 0_n$$

$$CZ = 0_n$$

$$[AB] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0_n \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow AX + BY = 0_n \Leftrightarrow AX = -BY \Leftrightarrow X = -(A^{-1}B)Y \quad (2)$$

$$X_0 = -(A^{-1}B)Y_0 \quad (2')$$

**Теорема 2.3** (О неявном отображении в общем случае).

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m}, Z \in E, Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}^n, F \in C^1(E)$$

$$F(Z) = \begin{bmatrix} f_1(Z) \\ \vdots \\ f_n(Z) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \cdots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \cdots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \cdots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \cdots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \cdots & f'_{1x_n}(Z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \cdots & f'_{nx_n}(Z_0) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z_0) & \cdots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{my_1}(Z_0) & \cdots & f'_{my_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

$$DF(Z_0) = [AB]$$

$$A \text{ обратима} \tag{1}$$

$$F(Z_0) = 0_n \tag{2}$$

$$\exists Y_0 \in W$$

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}^n, g \in C^1(W)$$

$$g(Y_0) = X_0 \quad \forall Y \in W \tag{3}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = 0_n \tag{4}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = 0_n \tag{2'}$$

**Доказательство.**

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} F \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) \\ Y \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Phi(Z_0) = \begin{bmatrix} F(Z_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D\Phi(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(\dots) & \dots & f'_{1x_n} & f'_{1y_1} & \dots & f'_{1y_m} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} & f'_{ny_1} & \dots & f'_{ny_m} \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det D\Phi(Z_0) = \det A \neq 0$$

По теореме об обратном отображении

$$\exists Z_0 \in U, \begin{bmatrix} 0_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$$

$$S \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^m$$

$\Phi$  гомеоморфизм  $U$  на  $V$

$$\text{для } \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V \exists \Psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) - \text{обратный к } \Phi \quad (7)$$

$$\Psi \left( \begin{bmatrix} 0_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) = Z_0 \quad (8)$$

$$\Psi \in C^1(V)$$

$$(5) \Rightarrow \Psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \quad (9)$$

хотим выбрать такой вектор

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V, \exists r > 0 : B_r^{m+n}(P_0) \subset V$$

$$\forall Y \in B_r^m(Y_0) \quad \begin{bmatrix} 0_n \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{m+n}(P_0)$$

$$\begin{aligned} W &= B_r^m(Y_0) \\ T \in W, g(T) &\stackrel{def}{=} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$(10) \implies g(Y_0) = \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} g(T) \\ T \end{bmatrix} \right) \stackrel{(10)}{=} \Phi \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \right) \stackrel{(9)}{=} \Phi \left( \Psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ T \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$(11) \implies F \left( \begin{bmatrix} g(T) \\ T \end{bmatrix} \right) = \mathbb{0}_n \quad (12)$$

$$\Psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \stackrel{(9)}{\implies} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) = X_0 \Leftrightarrow g(Y_0) = X_0 \quad (13)$$

Предположим, что такая функция не единственная.

$$\begin{aligned} &W \\ &Y_0 \in W_1 \\ &W_2 = W \cap W_1 \\ \Phi \left( \begin{bmatrix} g(y) \\ y \end{bmatrix} \right) &= \left[ F \left( \begin{bmatrix} g(y) \\ y \\ Y \end{bmatrix} \right) \right] \stackrel{(12)}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ Y \end{bmatrix}; \Phi \left( \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) \stackrel{(12)}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_n \\ X \end{bmatrix} \\ (14) &\implies g(Y) = g_1(Y) \end{aligned} \quad (14)$$

■