Домашняя работа по лямбда-исчислению

Пономарев Николай

23 марта 2023 г.

1.1. Нормализация

Привести к нормальной форме

$$((\lambda a.(\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ b)\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a)).$$

Применим нормальную стратегию:

$$\begin{aligned}
&((\lambda a.(\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ b)\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))\\
\to_\beta\ &(\lambda a.(\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))[a := b]\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))\\
=\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))\\
\to_\beta\ &(\lambda b.b\ b)[b := (\lambda b.b\ b)]\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))\\
=\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))
\end{aligned}$$

Нормальная стратегия не приводит к сокращению терма, значит нормальной формы нет. Тем не менее терм можно еще редуцировать:

$$\begin{aligned}
&((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ ((\lambda c.(c\ b))\ (\lambda a.a))\\
\to_\beta\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ ((\lambda c.(c\ b))[c := (\lambda a.a)])\\
=\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ ((\lambda a.a)\ b)\\
\to_\beta\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ (\lambda a.a)[a := b]\\
=\ &((\lambda b.b\ b)\ (\lambda b.b\ b))\ b\\
\equiv\ &(\omega\ \omega)\ b\\
\equiv\ &\Omega\ b
\end{aligned}$$

Больше редукций провести невозможно.

1.2. $S\ K\ K$

Доказать, что $S\ K\ K = I$.

$$
\begin{aligned}
& S\ K\ K \\
\equiv\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda x\ y.x)\ (\lambda x\ y.x) \\
\to_\alpha\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda x\ y.x)[x := u]\ (\lambda x\ y.x) \\
=\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda u\ y.u)\ (\lambda x\ y.x) \\
\to_\alpha\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda u\ y.u)\ (\lambda x\ y.x)[x := v] \\
=\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda u\ y.u)\ (\lambda v\ y.v) \\
\to_\beta\ & (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))[x := (\lambda u\ y.u)]\ (\lambda v\ y.v) \\
=\ & (\lambda y\ z.(\lambda u\ y.u)\ z\ (y\ z))\ (\lambda v\ y.v) \\
\to_\beta\ & (\lambda y\ z.(\lambda u\ y.u)\ z\ (y\ z))[y := (\lambda v\ y.v)] \\
=\ & \lambda z.(\lambda u\ y.u)\ z\ ((\lambda v\ y.v)\ z) \\
\to_\beta\ & \lambda z.(\lambda u\ y.u)[u := z]\ ((\lambda v\ y.v)\ z) \\
=\ & \lambda z.(\lambda y.z)\ ((\lambda v\ y.v)\ z) \\
\to_\beta\ & \lambda z.(\lambda y.z)[y := ((\lambda v\ y.v)\ z)] \\
=\ & \lambda z.z \\
\equiv\ & I
\end{aligned}
$$