Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z^2-4z+5=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt[3]{x^3+2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

5p **6.** Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-4(x+y)+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=10$, arătați că $1*2=0$.

5p **b)** Pentru $a=20$, arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[20,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(0)=\ln 4$.

5p **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,\ln(16e))$ este situat pe această tangentă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.