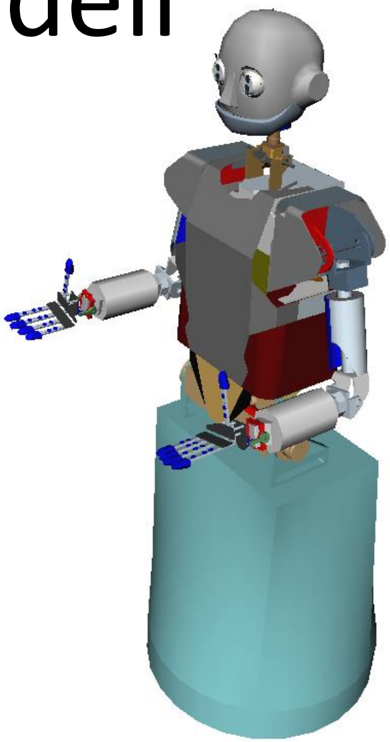
Inhalt

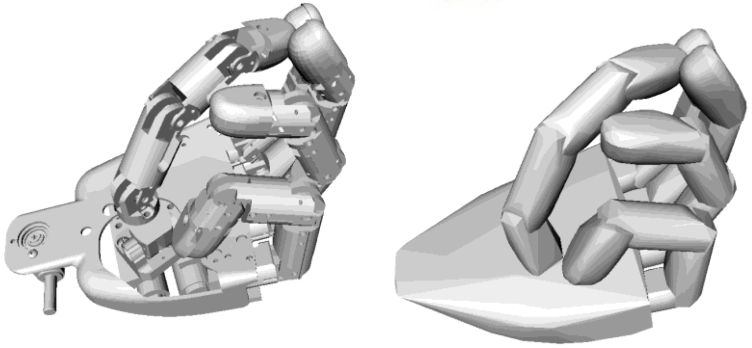
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele
- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele

Geometrisches Modell

Einsatzbereiche

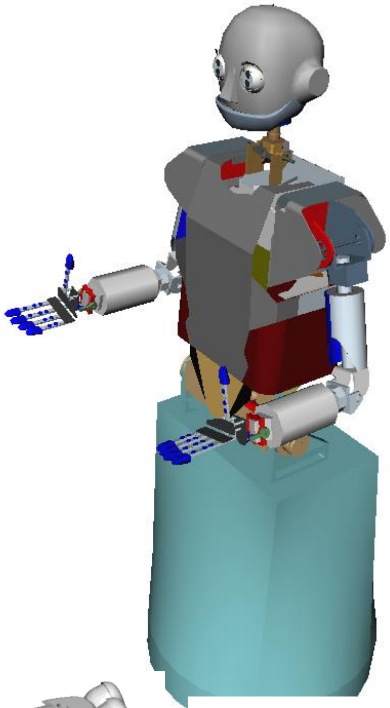


- Graphisch Darstellung von Körpern
- Ausgangspunkt der Abstandsmessung und Kollisionserkennung
- Grundlage zur Berechnung der Bewegungen von Körpern
- Grundlage zur Ermittlung der wirkenden Kräfte und Momente



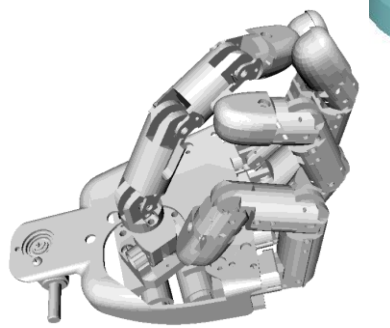
Geometrisches Modell

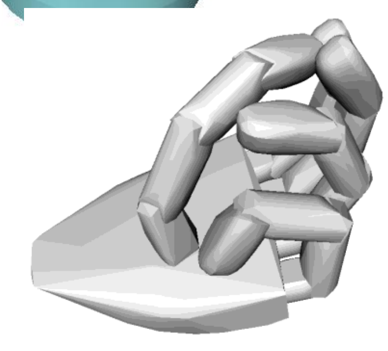
Klassifizierung



- **Nach Raum**
  - 2D Modelle
  - 2,5D Modelle
  - 3D Modelle

- **Nach Grundprimitiven**
  - Kanten- bzw. Drahtmodelle
  - Flächen- bzw. Oberflächenmodelle
  - Volumenmodell



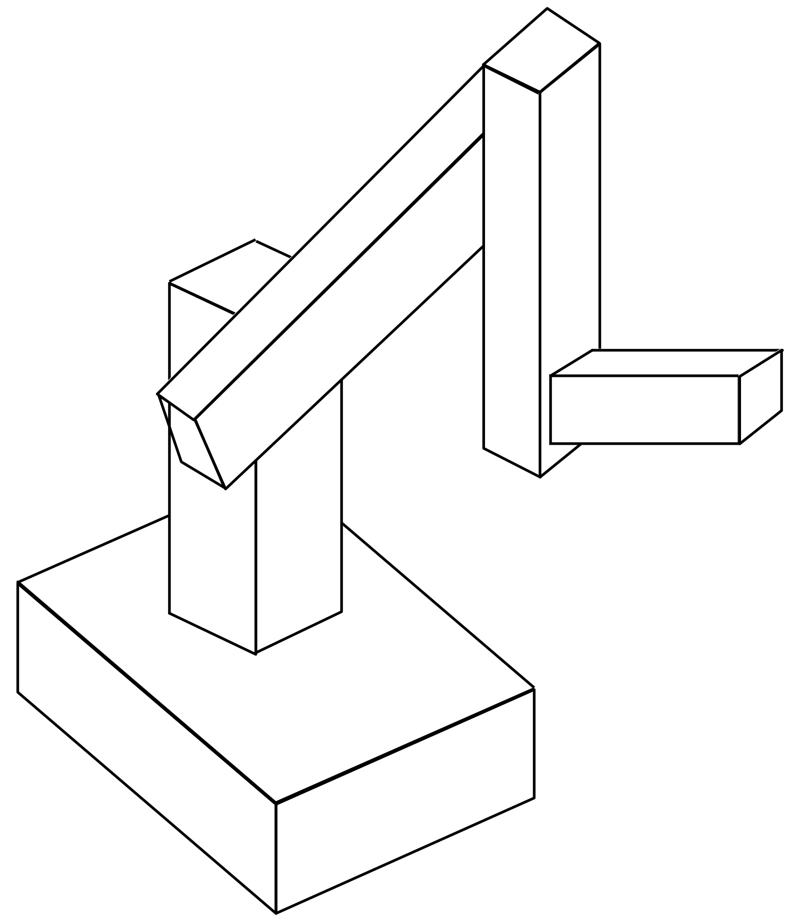


Geometrisches Modell

Beispiel: Blockwelt

- Die Körper werden durch einhüllende Quader dargestellt.
- wird in den ersten Schritten der Kollisionsvermeidung benutzt.

Klasse: 3D, Volumen bzw. Flächen



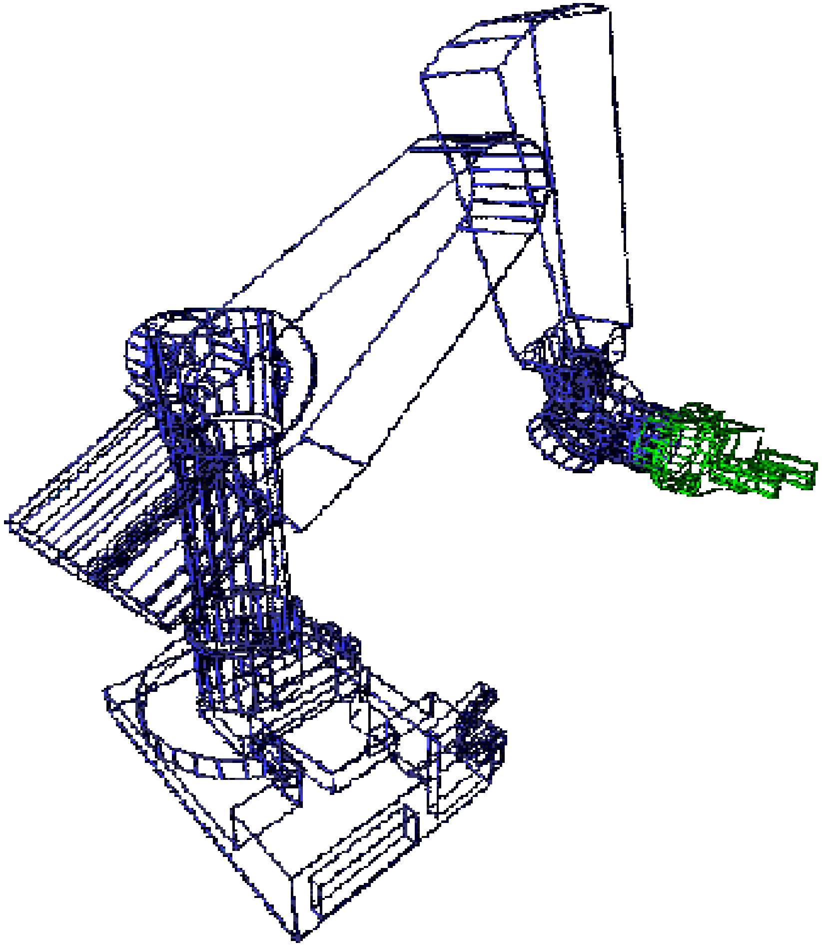
Unimate PUMA 260 – Blockwelt-Modell

Geometrisches Modell

Beispiel: Kantenmodell

- Die Körper werden durch Polygonzüge (Kanten) dargestellt.
- wird zur schnellen Visualisierung benutzt.

Klasse: 3D, Kanten bzw. Flächen



Unimate PUMA 260 – Kantenmodell

Geometrisches Modell

Beispiel: Volumenmodell

- Die Körper werden genau dargestellt.
- wird für die Ermittlung der genauen Werte der Kollisionserkennung benutzt.
- Darstellung in der Animation.

Klasse: 3D, Volumen

Unimate PUMA 560 – Volumenmodell

Kinematisches Modell

Definition

Das **kinematische Modell** eines Roboters beschreibt die Zusammenhänge zwischen dem Raum der

Gelenkwinkel (Roboterkoordinaten, Konfigurationsraum)

und dem Raum der

Lage des Endeffektors in Weltkoordinaten (Arbeitsraum, Kartesischer Raum)

Einsatzbereiche

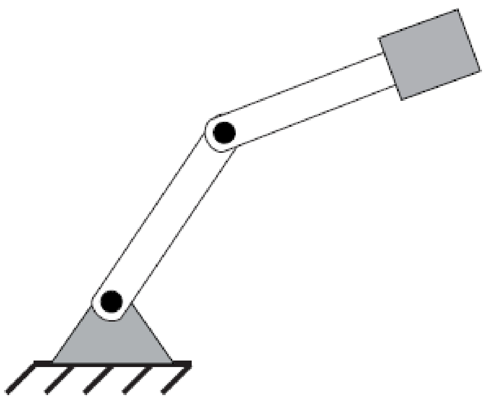
- Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Gelenkwerten und Stellungen des Roboters
- Erreichbarkeitsanalyse
- Relation zwischen Körpern des Roboters (Selbstkollision)
- Relation zur Umgebung (Kollisionserkennung)

Kinematische Kette

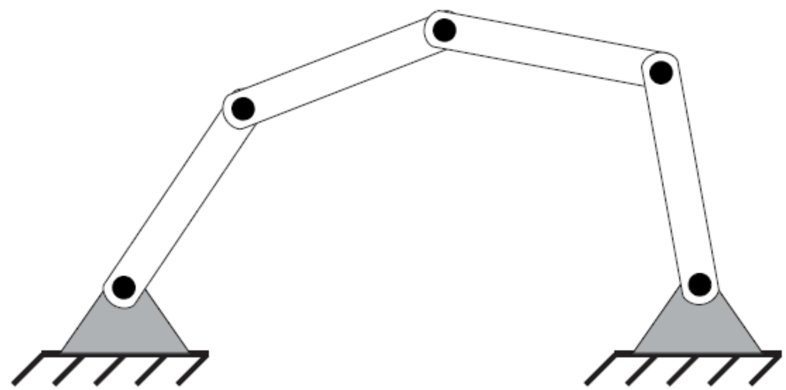
Definition

Eine **kinematische Kette** wird von mehreren Körpern gebildet, die durch Gelenke kinematisch verbunden sind (z. B.: Roboterarm).

Typen



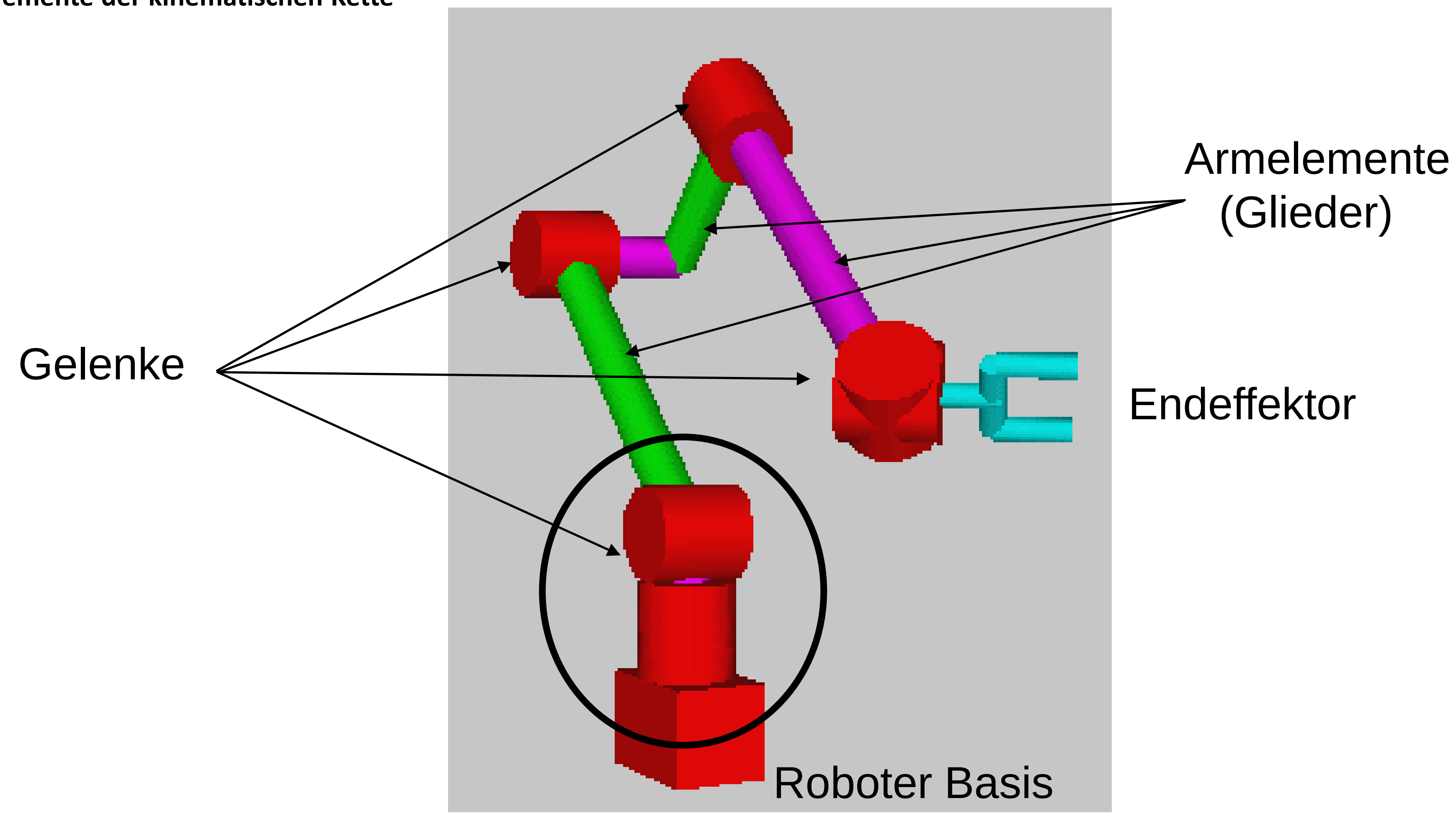
Offene kinematische Kette



Geschlossene kinematische Kette

Kinematische Kette

Elemente der kinematischen Kette

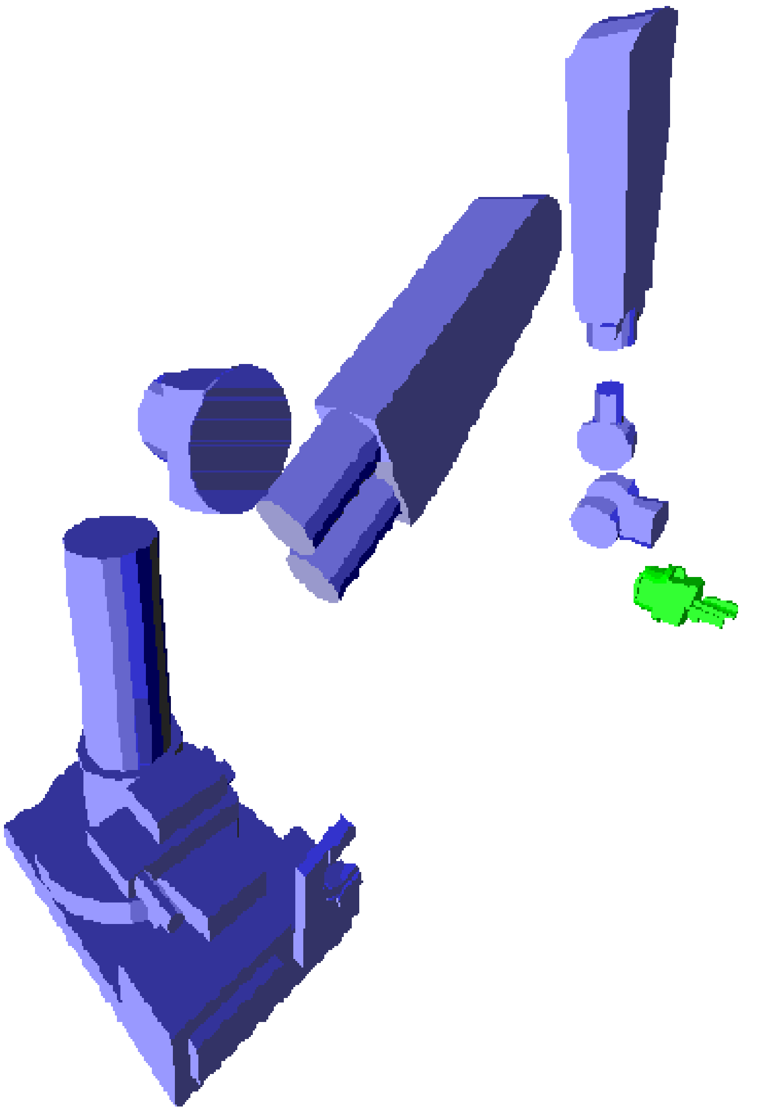


Kinematische Kette

Konventionen

- Jedes Armelement entspricht einem starren Körper.
- Jedes Armelement ist mit dem nächsten durch ein Schub- oder Rotationsgelenk verbunden.
- Jedes Gelenk hat nur einen Freiheitsgrad (rot. oder transl.)

Kinem. Parameter = Gelenk- & Armelementparameter

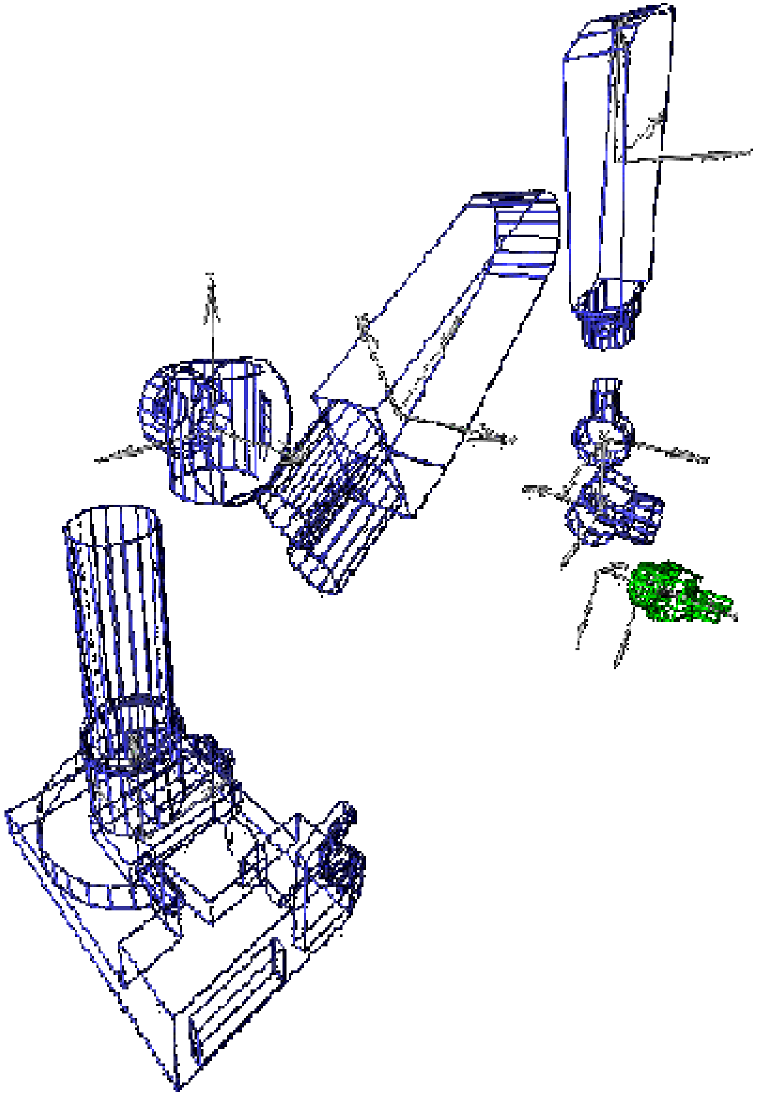


Kinematische Kette

Beschreibung

Zur Beschreibung der Kinematik eines Roboters (kinematische Kette) ist die Lage jedes einzelnen Armelements bezogen auf ein Referenzsystem zu definieren:

– Roboterbasis	$\text{OKS}_{\text{Basis}}$
– Armelement 1	OKS_{Arm1}
– …	…
– Armelement 6	OKS_{Arm6}



Kinematische Kette

Vorgehen zur Beschreibung

- In jedes Armelement wird ein festes lokales Koordinatensystem gelegt (Objektkoordinatensystem OKS).
- Ursprung des Koordinatensystems liegt in dem Armgelenk, welches das jeweilige Armelement bewegt.
- Für jedes Armelement muss eine Transformationsmatrix bestimmt werden, die das jeweilige lokale Koordinatensystem in das Bezugskoordinatensystem überführt.
- Überführung der lokalen Koordinatensysteme in das Bezugskoordinatensystem durch Beschreibungsvektor oder 4x4 homogene Transformationsmatrix.

Kinematische Kette

Parameter der kinematischen Kette

Für jedes Armelement muss eine Transformationsmatrix zum Bezugskoordinatensystem bestimmt werden:

- 3 Rotationsparameter
- 3 Translationsparameter

➔ 6 Parameter pro Armelement mit Gelenk

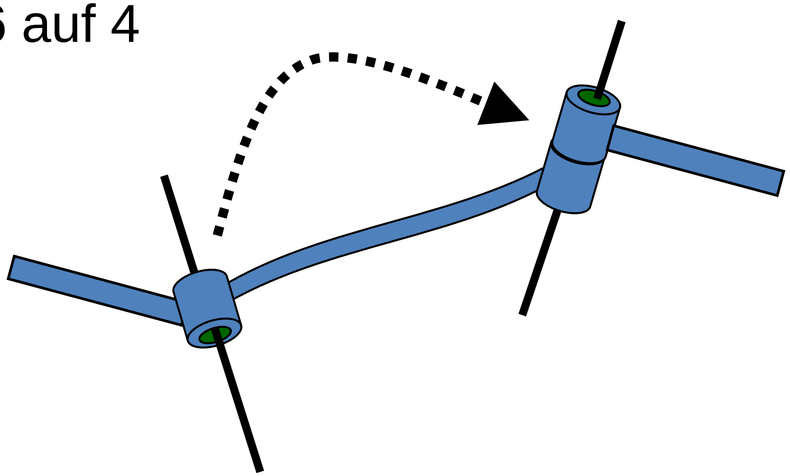
Denavit-Hartenberg-Konvention

Ziel

Reduktion der Parameter zur Beschreibung eines Armelementes mit Gelenk.

Eigenschaften

- Systematische Beschreibung der Beziehungen (Translationen und Rotationen) zwischen **benachbarten** Gelenken
- Reduktion der Anzahl Parameter von 6 auf 4



Literatur: Denavit, Hartenberg: ”A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Bases on Matrices”, Journal of Applied Mechanics, 1955, vol 77, pp 215-221

Kinematisches Modell

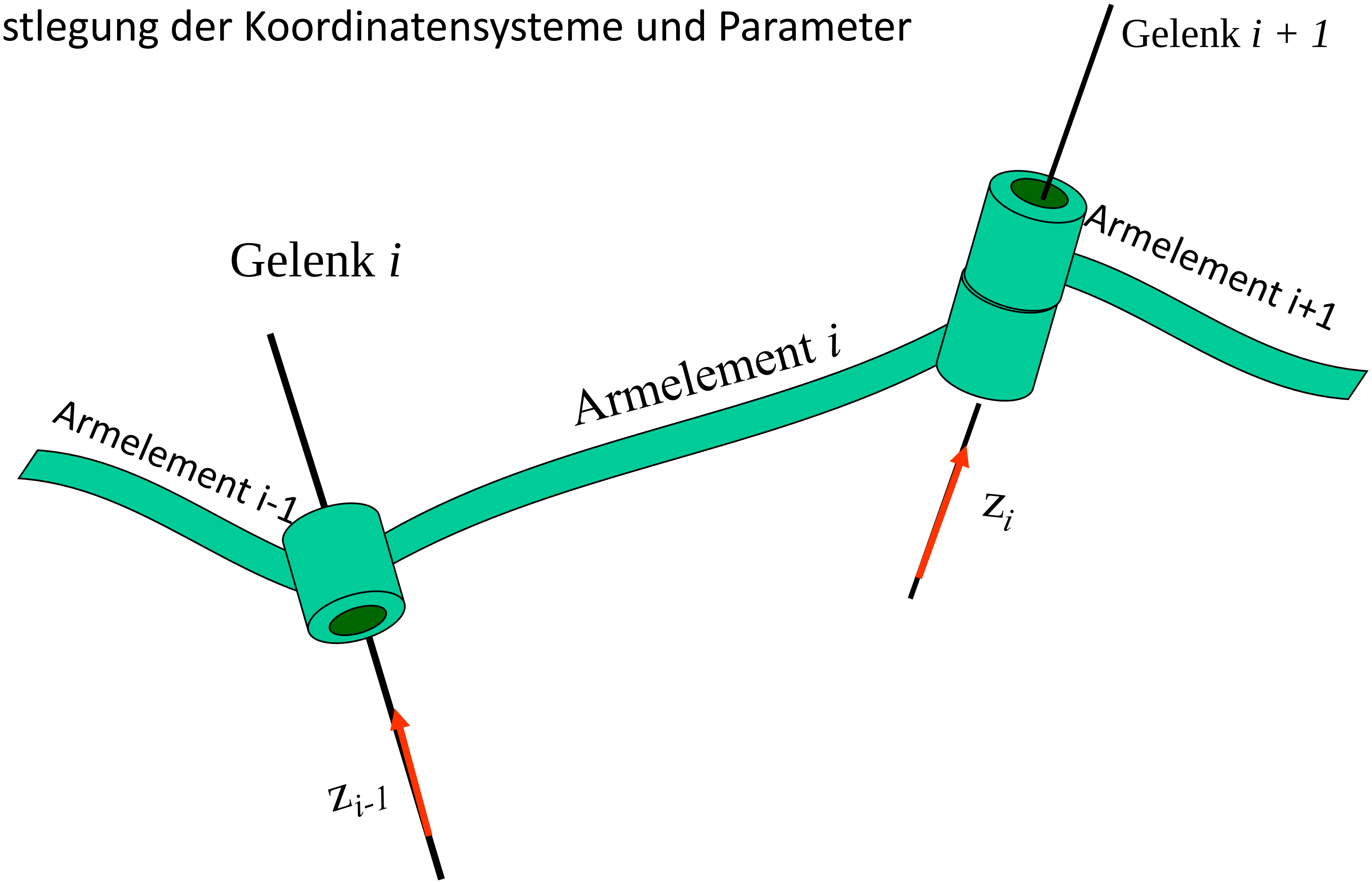
Die Transformation vom
OKS des ***i-ten*** *Armelements* auf das
OKS des ***(i-1)-ten*** *Armelements* erfolgt nach der
Denavit-Hartenberg-(DH-)Konvention:

- die Koordinatensysteme liegen in den Bewegungsachsen
- die z_i-Achse liegt entlang der Drehachse des i+1-ten Gelenks
- die x_i-Achse steht senkrecht zur z_{i-1}-Achse und zeigt von ihr weg
- die y_i-Achse bildet mit den anderen ein rechtshändiges Koordinatensystem

i □ {Basis,1,...,n}

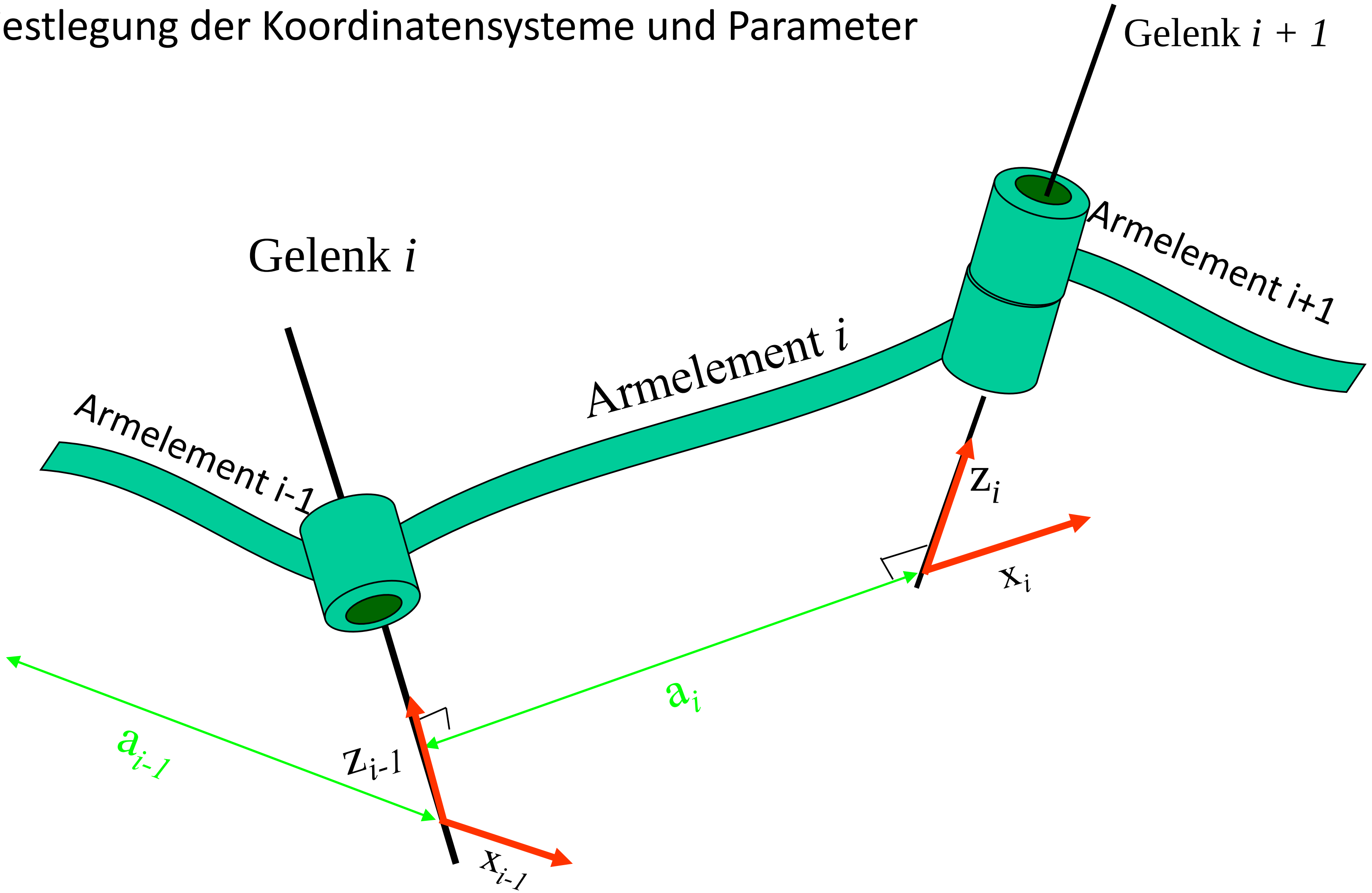
Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme und Parameter



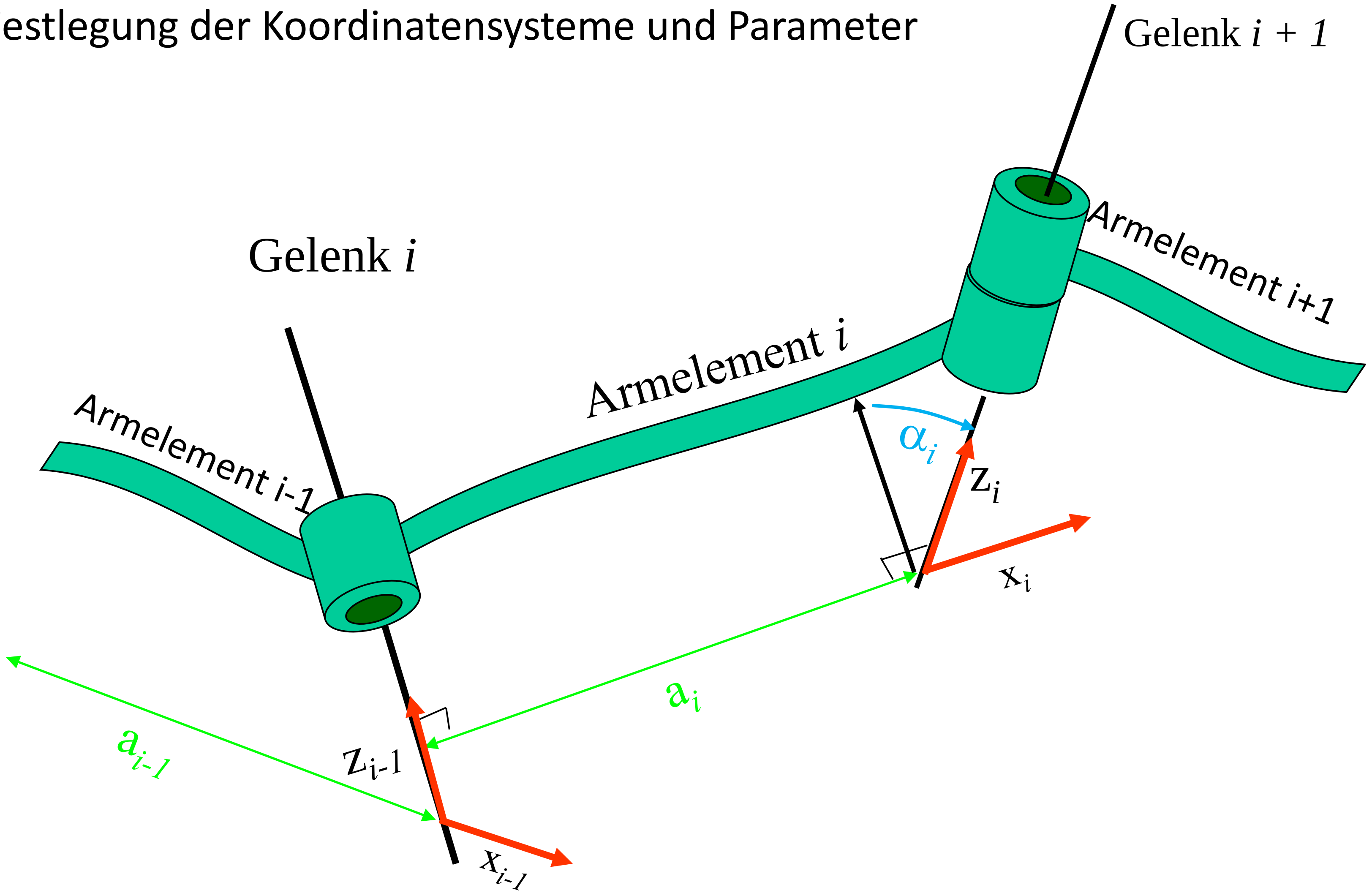
Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme und Parameter



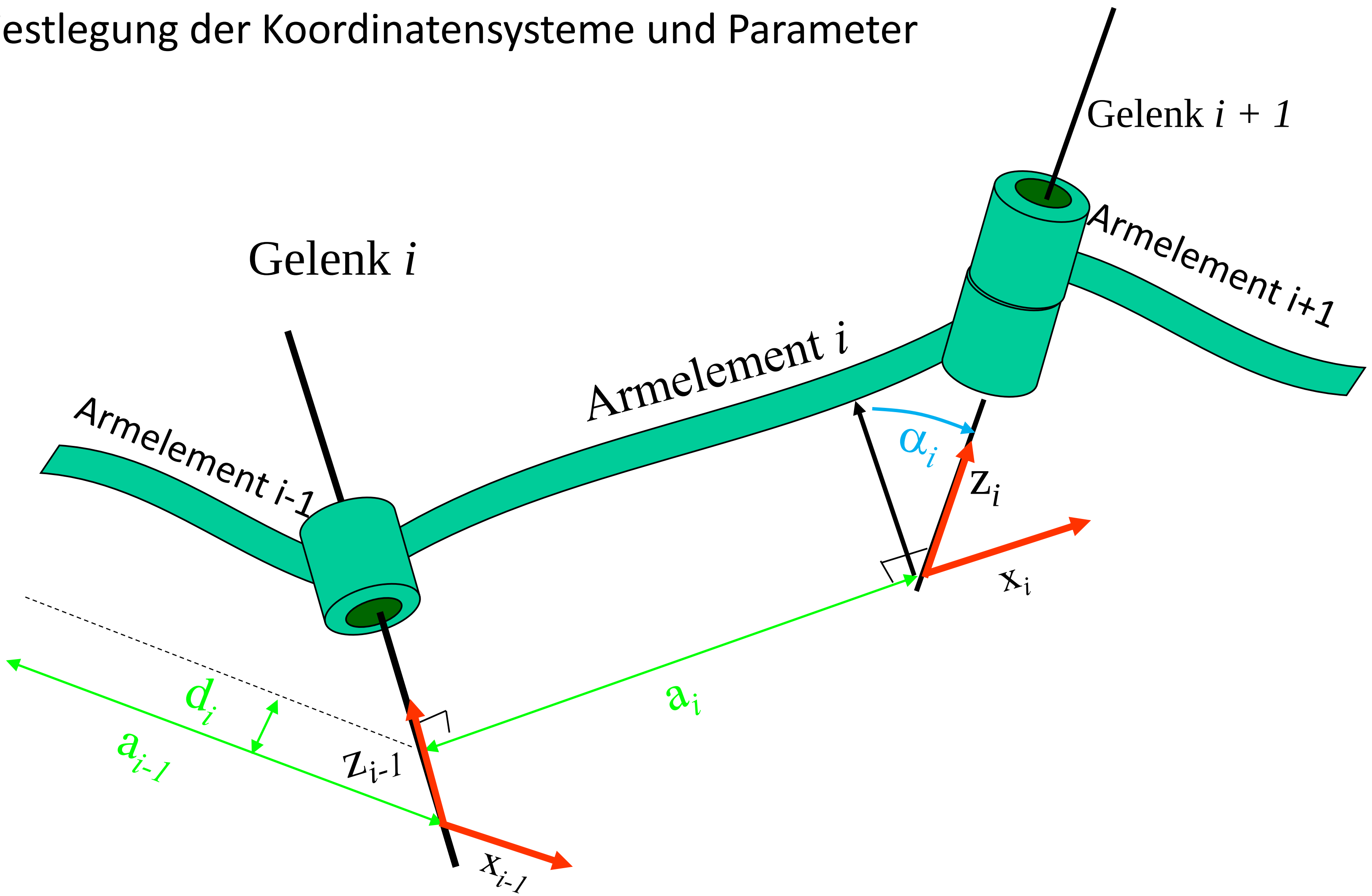
Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme und Parameter



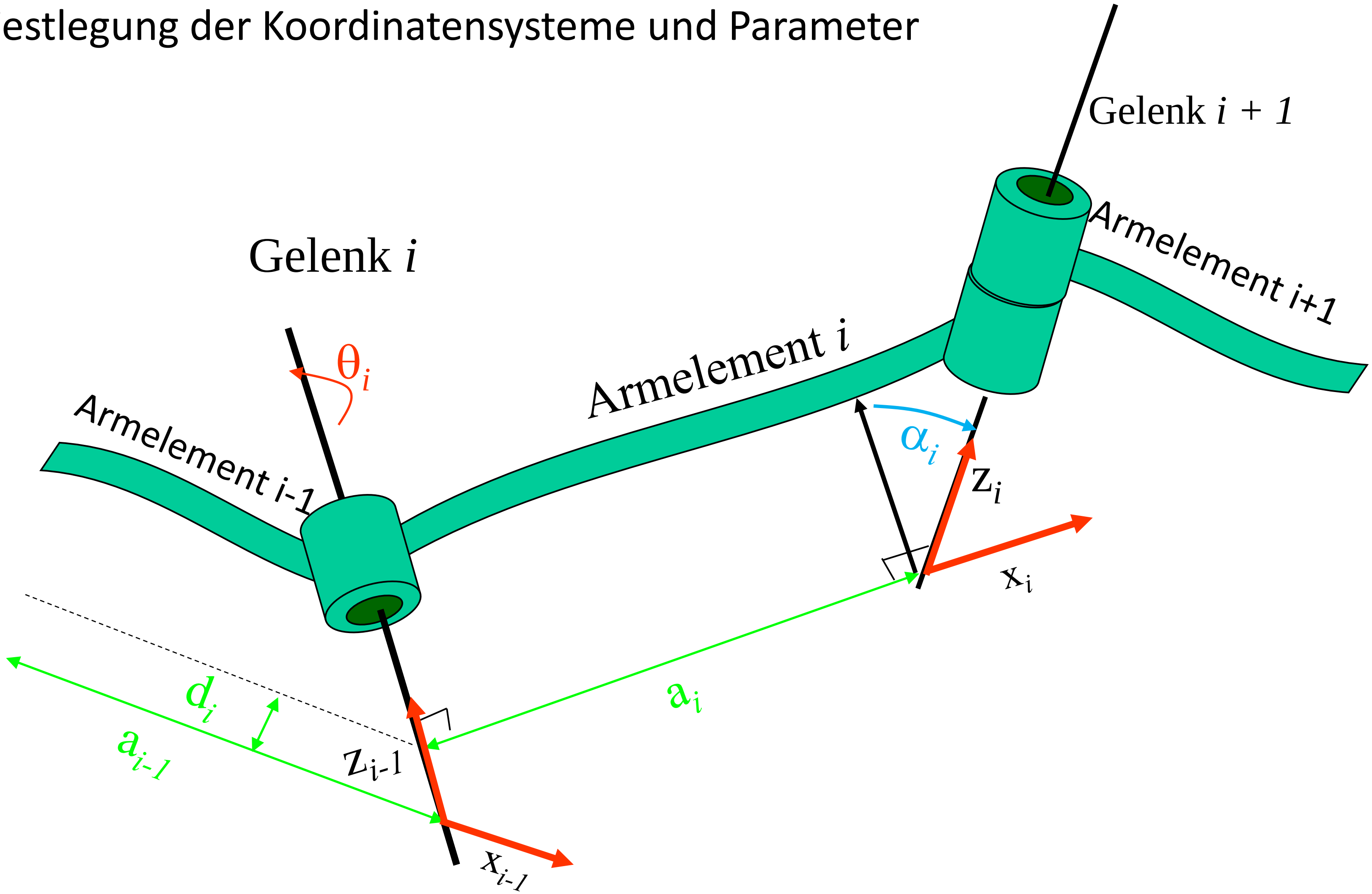
Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme und Parameter



Denavit-Hartenberg-Konvention

Festlegung der Koordinatensysteme und Parameter



Denavit-Hartenberg-Konvention

DH-Parameter

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Armelementlänge	a	invariant	invariant
Verwindung	α	invariant	invariant
Gelenkabstand	d	invariant	variabel
Gelenkwinkel	θ	variabel	invariant

Denavit-Hartenberg-Konvention

DH-Transformation: Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

1. eine Rotation $\boldsymbol{\theta_i}$ um die $\mathbf{z_{i-1}}$-Achse damit die $\mathbf{x_{i-1}}$-Achse parallel zu der $\mathbf{x_i}$-Achse liegt

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. eine Translation $\mathbf{d_i}$ entlang der $\mathbf{z_{i-1}}$- Achse zu dem Punkt, wo sich $\mathbf{z_{i-1}}$ und $\mathbf{x_i}$ schneiden

$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg-Konvention

DH-Transformation: Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

3. eine Translation $\mathbf{a_i}$ entlang der $\mathbf{x_i}$-Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. eine Rotation $\boldsymbol{\alpha_i}$ um die $\mathbf{x_i}$-Achse, um die $\mathbf{z_{i-1}}$-Achse in die $\mathbf{z_i}$ -Achse zu überführen

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kin. Modell: DH-Parameter

In Matrizenschreibweise lautet die Denavit-Hartenberg (DH) Koordinatentransformation vom Koordinatensystem des Gelenks i (OKS_i) in das Koordinatensystem des Gelenks i-1 (OKS_{i-1}):

$$\mathbf{{}_{i-1}A_i = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \bullet T_{z_{i-1}}(s_i) \bullet T_{x_i}(a_i) \bullet R_{x_i}(\alpha_i)}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit $\vec{x}_{i-1} = {}_{i-1}A_i \cdot \vec{x}_i$

Denavit-Hartenberg-Konvention

Verkettung von DH-Transformationen

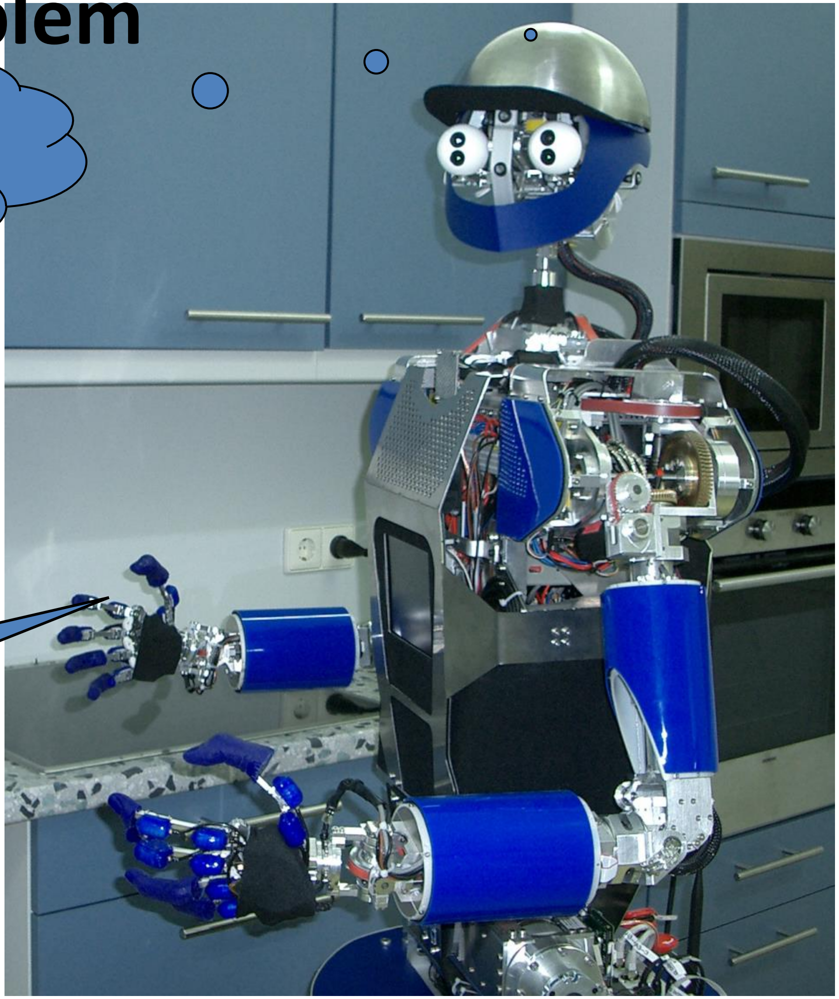
Durch Verkettung der DH-Matrizen lässt sich die Lage der einzelnen Koordinatensysteme bezüglich des Bezugskoordinatensystems bestimmen.

Lage des m-ten Koordinatensystems bezüglich der Basis:

$$_{Basis}S_m(\theta) = {}_0A_1(\theta_1) \cdot {}_1A_2(\theta_2) \cdot \ldots \cdot {}_{m-2}A_{m-1}(\theta_{m-1}) \cdot {}_{m-1}A_m(\theta_m)$$

Direktes kinematisches Problem

Direktes kinematisches Problem



Direktes kinematisches Problem

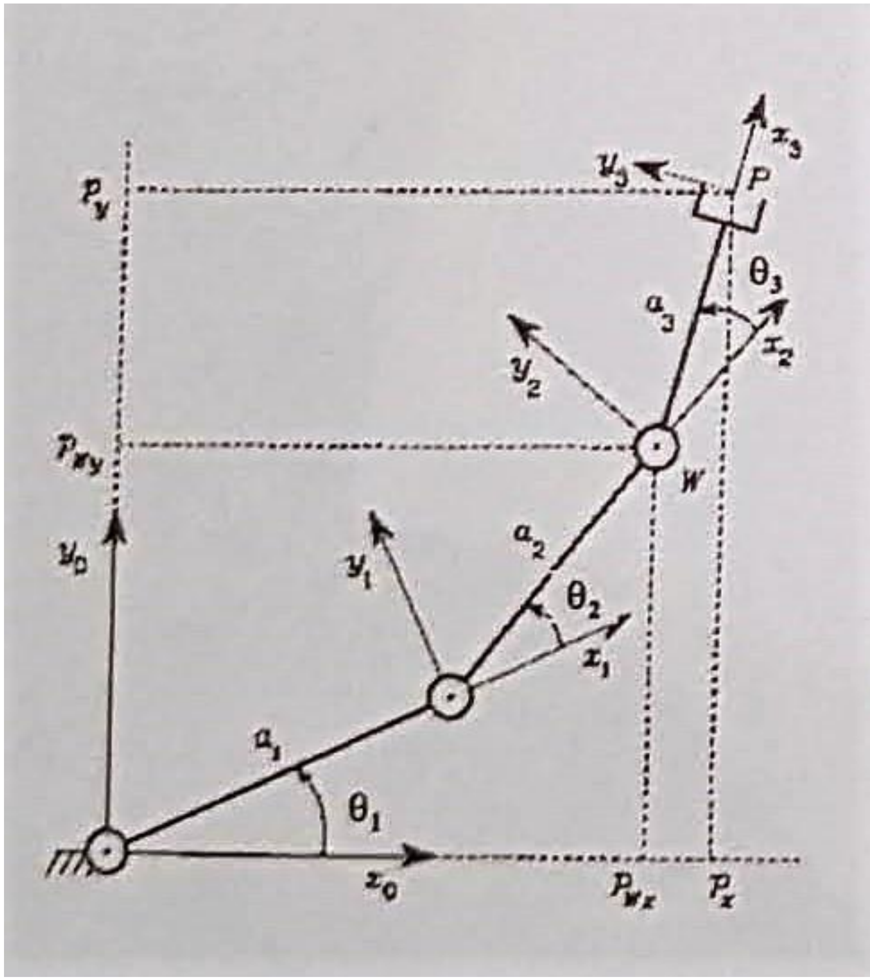
Bestimmung der Lage des Greifers

- Aus den DH-Parametern und den Gelenkwinkeln soll die Stellung des Greifers ermittelt werden.
- Die Stellung des Greifers (TCP) in Bezug auf das BKS ist gegeben durch:

$$S_{Basis,Greifer}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \ldots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

Gelenkwinkel $\theta_1,..,\theta_n$ sind vorgegeben
➔ Gleichung ausrechnen

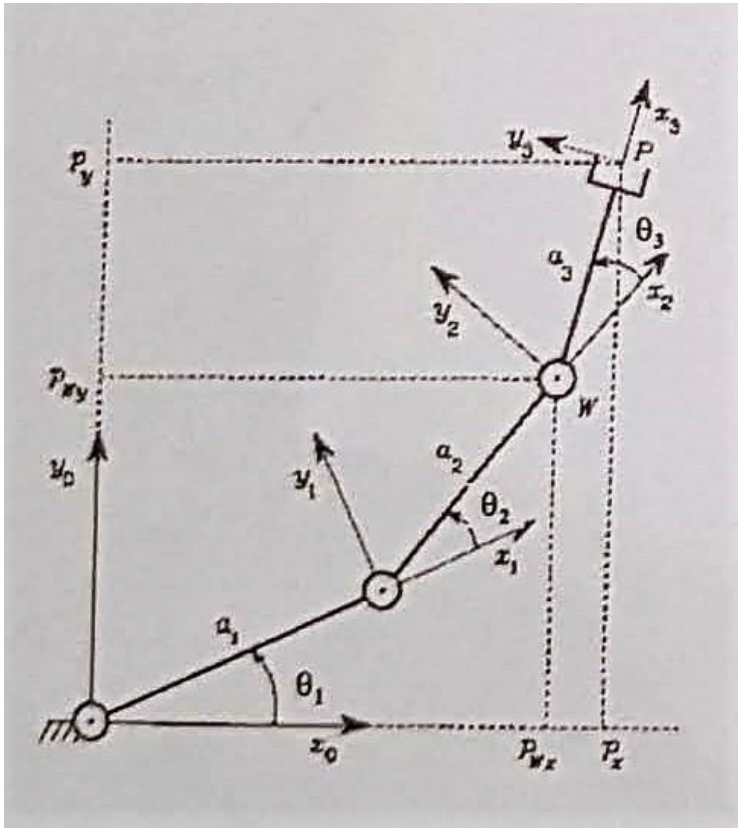
Beispiel 1



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i\, c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i\, s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1

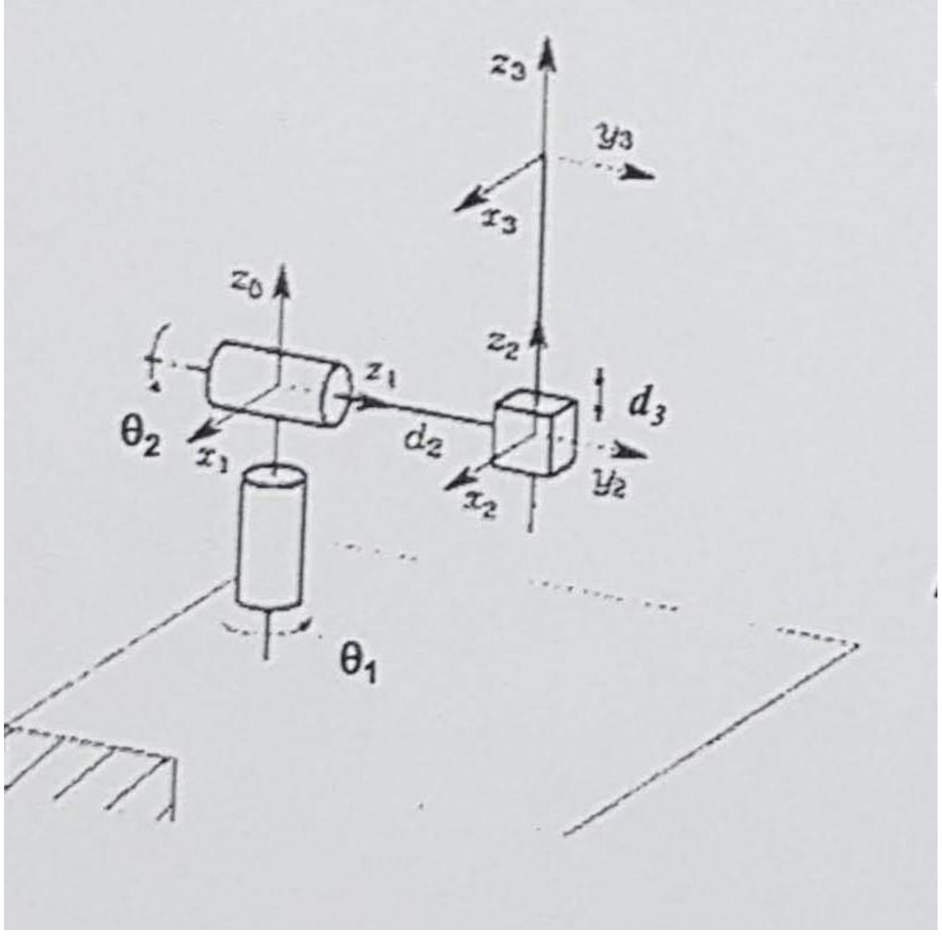


- Abkürzungen

  $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$,
  $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1} A_{1,2} A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a3\, s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

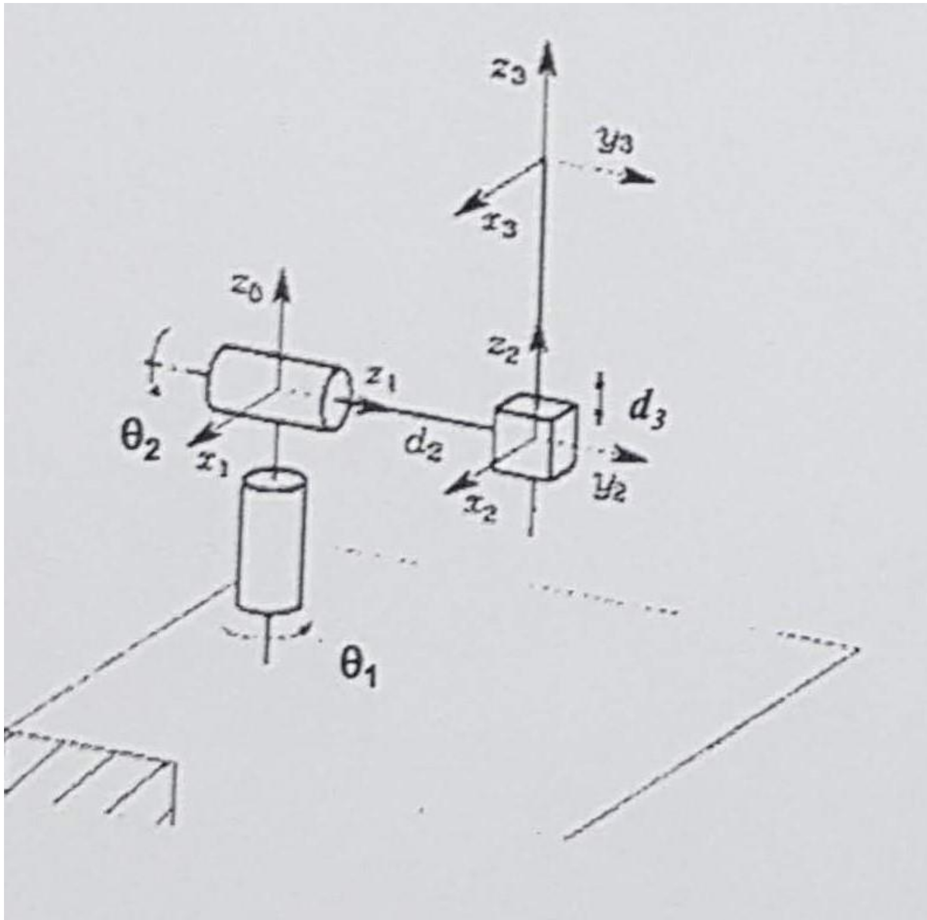
Beispiel 2



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

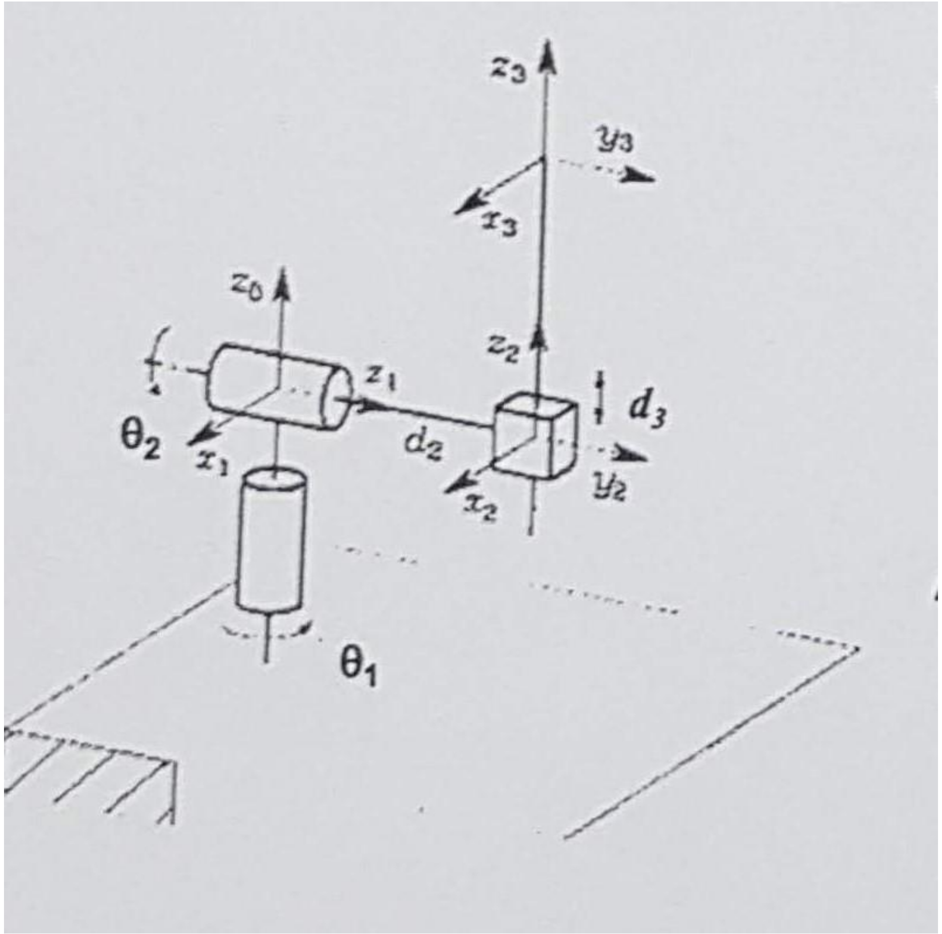
Beispiel 2



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2



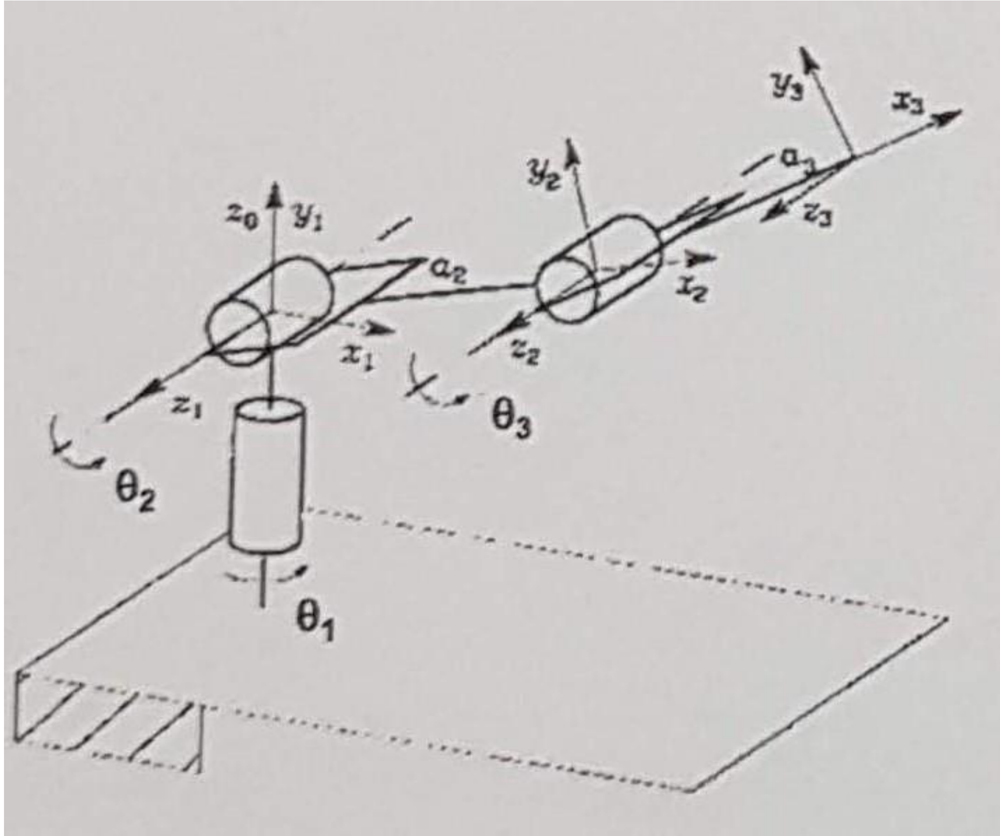
Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2

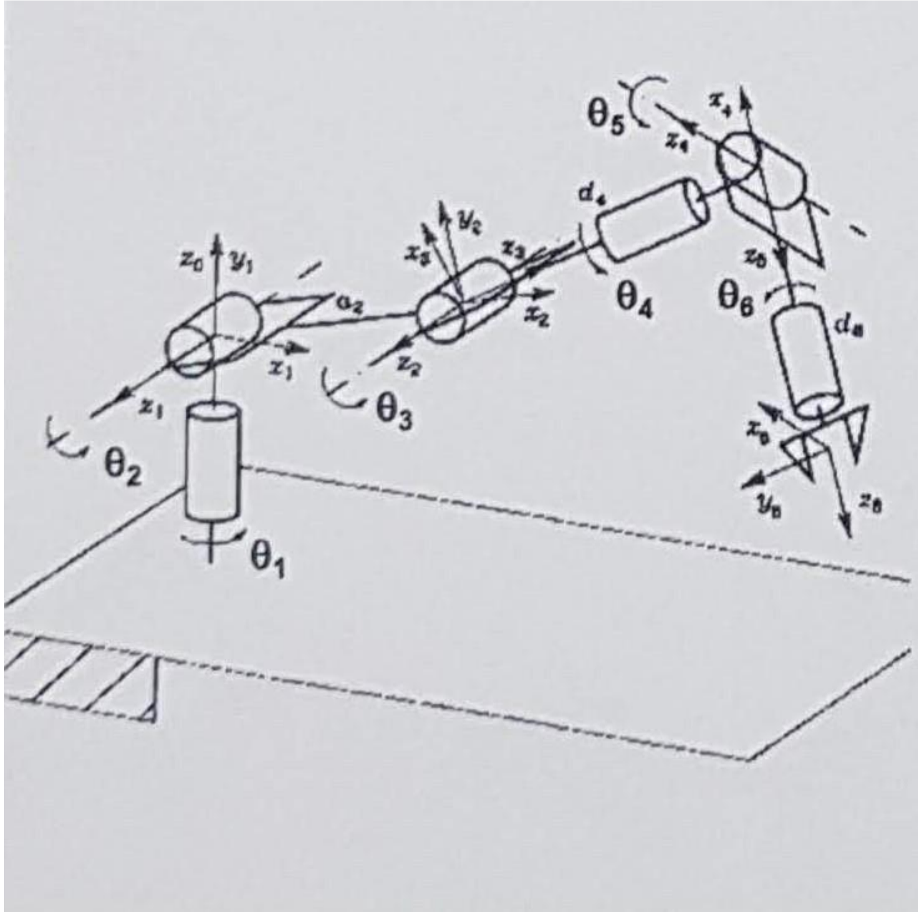
$$\mathbf{A_{0,3}\ (\theta) = A_{0,1}\, A_{1,2}\, A_{2,3}} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Beispiel 4



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	0	90	0	θ_3
4	0	-90	d_4	θ_4
5	0	90	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

Zusammenfassung

Direktes kinematisches Problem

1. Skizze des Manipulators
2. Identifiziere und nummeriere die Gelenke (1, Letztes Glied = n)
3. Zeichne die Achsen $\mathbf{z}_{i-1}$ für jedes Gelenk **i**
4. Bestimme die Parameter $\mathbf{a}_i$ (Armlänge) zwischen $\mathbf{z}_{i-1}$ und $\mathbf{z}_i$
5. Zeichne die x_i –Achsen
6. Bestimme die Parameter α_i (Verwindung um die x_i-Achsen)
7. Bestimme die Parameter $\mathbf{d}_i$ (Gelenkabstand)
8. Bestimme die Winkel θ_i (Gelenkwinkel) um $\mathbf{z}_{i-1}$-Achsen
9. Stelle die Gelenk-Transformation-Matrizen $\mathbf{A}_{i-1,i}$ - auf und verknüpfe sie

Inverse Kinematik

- **Algebraische Methoden**
  - Durch sukzessive Invertierung der Denavit-Hartenberg-Transformations-matrizen und damit Lösung des folgenden Gleichungssystems können nach und nach die einzelnen Gelenkwinkelvektorkomponenten berechnet werden:
    $$T_{\mathrm{TCP}}(q) = T_1(q_1) \cdot T_2(q_2) \cdot \ldots \cdot T_n(q_n)$$
  - Wobei T_{TCP} eine homogene Matrix ist, die die Position und Orientierung des Endeffektors beschreibt.
- **Geometrische Methoden**
  - Aufgrund des Wissens über die Geometrie des Roboters wird versucht, zum Beispiel mit Hilfe von Kosinussatz oder Sinussatz den Gelenkwinkelvektor zu berechnen.
- **Numerische Methoden**
  - Mit numerischen Methoden wird iterativ versucht, eine Lösung für den Gelenkwinkelvektor zu finden. Lokale Minima oder die Bestimmung eines geeigneten Startwerts sind hier jedoch problematisch.

Geometr. Inv. Kinematik

aus http://informatikdienstleistungen.de/blog/wp-content/uploads/2013/08/Geometrische_inverse_Kinematik.pdf

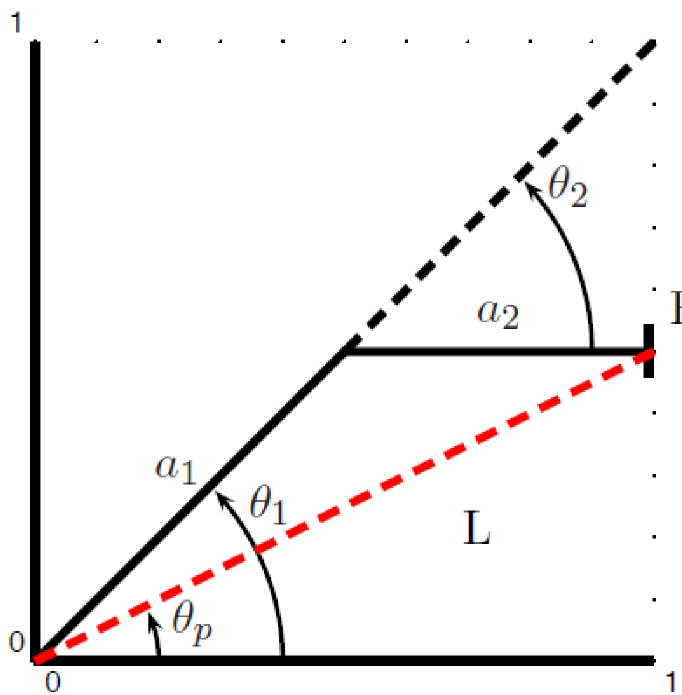
- geg.:

  a_1, a_2, das sind die Längen der Teile 1 und 2 des Roboterarms.

  (x,y) das ist die gewünschte Position zu der sich der Roboterarm hinbewegen soll.

- ges.:

  Θ_1, Θ_2, das sind die Winkel die die Rotationsgelenke 1 und 2 einnehmen müssen um die gewünschte Position des Effektors zu erreichen



Effektor des Roboters an Position (x,y)

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

Skizze:

L := das ist die gedachte gestrichelte Linie vom Koordinatenursprung (0,0) zum Effektor (1,0.5).

θ_p := das ist der Winkel der von L und der X-Achse eingeschlossen wird.

Berechnung

Berechnung:

Nach dem Kosinussatz gilt:

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 * cos(180 - \theta_2)$$

Und wegen:

$$cos(180 - \phi) = -cos(\phi)$$

Folgt:

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 * cos(\theta_2)$$

Durch Umstellung erhält man:

$$cos(\theta_2) = \frac{L^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad => \quad \theta_2 = acos(\theta_2) = \frac{L^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Analog gilt wegen dem Kosinussatz ferner der folgende Zusammenhang:

$$a_2^2 = a_1^2 + L^2 - 2a_1 * L * cos(\theta_1 - \theta_p)$$

Durch Umstellung erhält man:

$$cos(\theta_1 - \theta_p) = \frac{L^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 * L}$$

Die Umkehrfunktion des Kosinus angewendet ergibt:

$$\theta_1 - \theta_p = acos(\frac{L^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 * L})$$

Durch Umstellung erhält man:

$$\theta_1 = acos(\frac{L^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 * L}) + \theta_p$$

$$\theta_1 = acos(\frac{L^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 * L}) + \theta_p$$

$$cos(\theta_2) = \frac{L^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Bsp: Effektorpos. P(1,0.5)

$a_1 = 2$, $a_2 = 1$