

# **Анализ мощности**

## **Математические методы в зоологии с использованием R**

Марина Варфоломеева

# Экономим силы с помощью анализа мощности

- Тестирование гипотез (двухвыборочный t-критерий)
- Статистические ошибки при проверке гипотез
- Мощность статистического теста
- *A priori* анализ мощности, оценка величины эффекта
- Как влиять на мощность тестов

## Вы сможете

- сравнивать средние значения при помощи t-критерия, интерпретировать и описывать результаты
- дать определение ошибок I и II рода, и графически изобразить их отношение к мощности теста
- оценивать величину эффекта и необходимый объем выборки по данным пилотного исследования
- загружать данные из интернета
- загружать данные из .xlsx в R
- строить боксплоты с помощью ggplot2

# Тестирование гипотез

## Тест Стьюдента (t-критерий)

Двухвыборочный тест Стьюдента (Student, 1908) используется для проверки значимости различий между средними значениями двух нормально распределенных величин.

$$t = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{SE}$$

Гипотезы:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ,  $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

Условия применимости:

- Выборки случайны и независимы друг от друга
- Величины нормально распределены
- Дисперсии в группах одинаковы

$$SE = \sqrt{\frac{sd_1^2(n_1 - 1) + sd_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

## Тест Уэлча (модификация теста Стьюдента для случая разных дисперсий)

$$t = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{SE}$$

Условия применимости:

- Выборки случайны и независимы друг от друга
- Величины нормально распределены

$$SE = \sqrt{\frac{sd_1^2}{n_1} + \frac{sd_2^2}{n_2}}$$

Приблизительное число степеней свободы рассчитывается по уравнению Уэлча-Саттертвэйта (Welch-Satterthwaite equation)

$$df \approx \frac{\left( \frac{sd_1^2}{n_1} + \frac{sd_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\frac{sd_1^4}{n_1^2}}{df_1} + \frac{\frac{sd_2^4}{n_2^2}}{df_2}}$$

## t-распределение

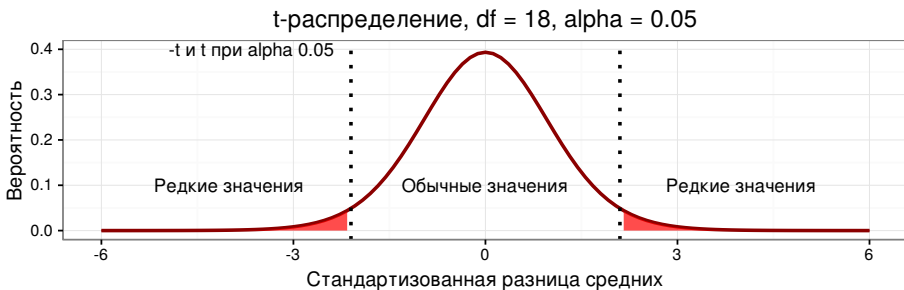
t-статистика подчиняется t-распределению.

Иными словами, если много раз взять выборки **из одной** совокупности (т.е. при условии, что  $H_0$  верна) и посчитать между ними разницу, то она будет подчиняться t-распределению.

Форма t-распределения зависит только от одного параметра — числа степеней свободы  $df$



## В хвостах этого распределения находятся редкие значения



Обычно используется уровень значимости  $\alpha$  0.05 или 0.01.

**Уровень значимости  $\alpha$  — это вероятность ошибочно отвергнуть справедливую нулевую гипотезу.** Т.е. это вероятность найти различия там, где их нет (**вероятность ошибки I рода**).

Для t-теста  $\alpha$  — это вероятность ошибочно сделать вывод о том, что средние выборки различаются **при условии, что эти выборки получены из одной генеральной совокупности.**

# Тестирование гипотезы о равенстве двух средних при помощи t-критерия



- Для конкретных данных считаем значение t-критерия
- Сравниваем его с теоретическим распределением t (распределением при условии, что  $H_0$  верна)
- Принимаем решение, отвергнуть ли  $H_0$



## Пример: Снотворное

В датасете `sleep` содержатся данные об увеличении продолжительности сна по сравнению с контролем после применения двух снотворных препаратов (Cushny, Peebles, 1905, Student, 1908)

```
data(sleep)  
View(sleep)
```

## Двухвыборочный t-критерий

Сравним увеличение продолжительности сна при помощи двухвыборочного t-критерия.

```
tt <- t.test(extra ~ group, sleep)
tt
```

```
#
# Welch Two Sample t-test
#
# data: extra by group
# t = -2, df = 20, p-value = 0.08
# alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
# 95 percent confidence interval:
# -3.365 0.205
# sample estimates:
# mean in group 1 mean in group 2
# 0.75 2.33
```

## Что спрятано в результатах?

Как называются отдельные элементы результатов можно узнать посмотрев их структуру при помощи функции `str()`

```
str(tt)
```

```
# List of 9
# $ statistic : Named num -1.86
#   ..- attr(*, "names")= chr "t"
# $ parameter : Named num 17.8
#   ..- attr(*, "names")= chr "df"
# $ p.value    : num 0.0794
# $ conf.int   : atomic [1:2] -3.365 0.205
#   ..- attr(*, "conf.level")= num 0.95
# $ estimate   : Named num [1:2] 0.75 2.33
#   ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "mean in group 1" "mean in group 2"
# $ null.value : Named num 0
#   ..- attr(*, "names")= chr "difference in means"
# $ alternative: chr "two.sided"
# $ method     : chr "Welch Two Sample t-test"
# $ data.name  : chr "extra by group"
# - attr(*, "class")= chr "htest"
```

## Можно получить элементы результатов в виде отдельных цифр

```
tt$parameter # степени свободы
```

```
# df  
# 17.8
```

```
tt$p.value # доверительная вероятность
```

```
# [1] 0.0794
```

```
tt$statistic # значение t-критерия
```

```
# t  
# -1.86
```

## Статистические ошибки при проверке гипотез

# Типы ошибок при проверке гипотез

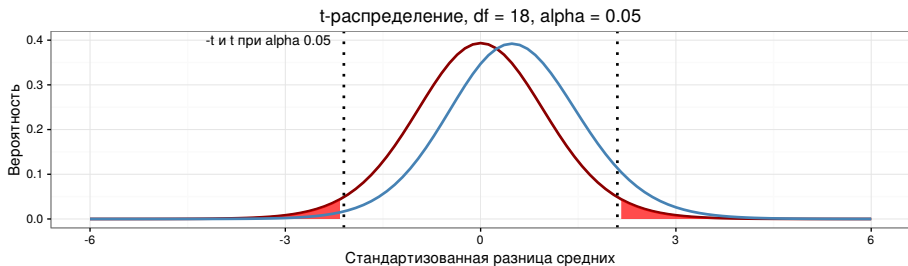
	$H_0 == TRUE$	$H_0 == FALSE$
Отклонить $H_0$	Ошибка I рода	Верно
Сохранить $H_0$	Верно	Ошибка II рода

# Ошибка I рода



**Ошибка I рода — вероятность отвергнуть  $H_0$ , когда верна  $H_0$**

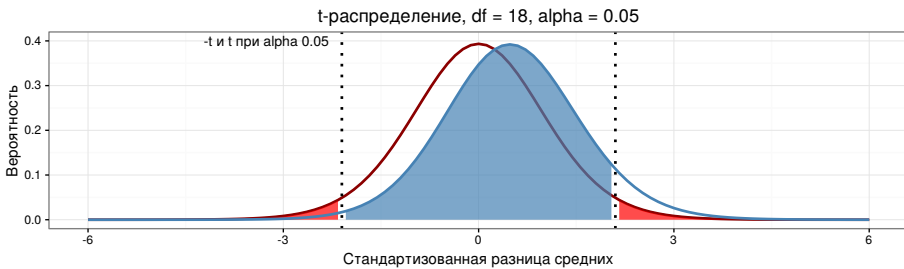
# Мы этого не знаем, но может быть верна $H_A...$



Можно построить еще одно распределение статистики — распределение, при условии того, что верна  $H_A$

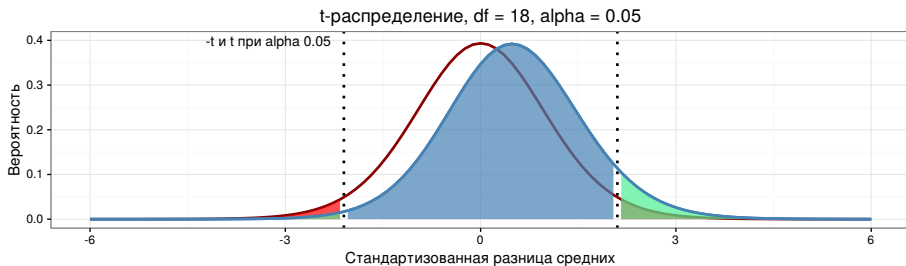


# Ошибка II рода



**Ошибка II рода — вероятность принять  $H_0$ , когда верна  $H_A$**

# Мощность теста — способность выявлять различия



**Мощность теста - вероятность отвергнуть  $H_0$ , когда верна  $H$**

$$Power = 1 - \beta$$

Обычно считается, что хорошо, когда мощность не меньше 0.8

Т.е. что в 80% случаев мы можем найти различия заданной величины, если они есть.

# Анализ мощности

## *A priori*

- какой нужен объем выборки, чтобы найти различия с разумной долей уверенности?
- различия какой величины мы можем найти, если известен объем выборки?

## *Post hoc*

- смогли бы мы найти различия при помощи нашего эксперимента ( $\alpha$ ,  $n$ ), если бы величина эффекта была  $X$ ?

## **А priori анализ мощности**

## Пример: Заповедник спасает халиотисов

Лов халиотисов (коммерческий и любительский) запретили, организовав заповедник.

Стало ли больше моллюсков через несколько лет? (Keough, King, 1991)

Данные из Quinn, Keough, 2002, Box 9-5, Fig 9-7

# A priori анализ мощности

Что нужно

- тест
- уровень значимости
- желаемая мощность теста—80%
- ожидаемая величина эффекта

# A priori анализ мощности

## Что нужно

- тест
- уровень значимости
- желаемая мощность теста—80%
- ожидаемая величина эффекта

## Что есть

- $t$ -критерий
- $\alpha = 0.05$
- $P = 80\%$
- ?

## Величина эффекта

$d$  Коэна (Cohen's  $d$ )

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

Где сигма может оцениваться одним из способов:



## Величина эффекта

$d$  Коэна (Cohen's  $d$ )

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

Где сигма может оцениваться одним из способов:

- среднеквадратичное отклонение ( $d$  Коэна)

$$\sigma = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$$

## Величина эффекта

$d$  Коэна (Cohen's  $d$ )

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

Где сигма может оцениваться одним из способов:

- среднеквадратичное отклонение ( $d$  Коэна)

$$\sigma = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$$

- обобщенное стандартное отклонение ( $g$  Хеджа)

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

## Величина эффекта

Яков Коэн предложил делить эффекты на сильные, умеренные и слабые (Cohen, 1982)

```
library(pwr)  
cohen.ES(test = "t", size = "large")
```

```
#  
#      Conventional effect size from Cohen (1982)  
#  
#           test = t  
#           size = large  
# effect.size = 0.8
```

## Задание

Рассчитайте величину умеренных и слабых эффектов для t-критерия

## Решение

```
cohen.ES(test = "t", size = "medium")
```

```
#  
#      Conventional effect size from Cohen (1982)  
#  
#      test = t  
#      size = medium  
#      effect.size = 0.5
```

```
cohen.ES(test = "t", size = "small")
```

```
#  
#      Conventional effect size from Cohen (1982)  
#  
#      test = t  
#      size = small  
#      effect.size = 0.2
```

## Величина эффекта из пилотных данных

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

$\sigma$  - стандартное отклонение плотности халиотисов:

- Плотность крупных халиотисов на 50<sup>2</sup> была  $\bar{x} = 47.5$ ,  $SD = 27.7$

$\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$  - средний вылов халиотисов в год:

- Масса выловленных коммерческим способом + данные о размерах -> численность -> плотность
  - Предположили, что коммерческий лов и любительский лов равны
  - Коммерческий лов = 11.6 экз. <sup>-2</sup>
  - Коммерческий + любительский лов = 23.2 экз. <sup>-2</sup>

## Данные для анализа мощности собраны

```
alpha <- 0.05
power <- 0.80
sigma <- 27.7 # варьирование плотности халиотисов
diff <- 23.2 # ожидаемые различия плотности халиотисов
effect <- diff/sigma # величина эффекта
effect
```

```
# [1] 0.838
```

Функции для анализа мощности t-критерия:

- при одинаковых объемах групп `pwr.t.test()`
- при разных объемах групп `pwr.t2n.test()`

## Считаем объем выборки

```
pwr_hal <- pwr.t.test(n = NULL, d = effect,  
                     power = power, sig.level = alpha,  
                     type = "two.sample",  
                     alternative = "two.sided")
```

```
pwr_hal
```

```
#  
#       Two-sample t test power calculation  
#  
#               n = 23.4  
#               d = 0.838  
#       sig.level = 0.05  
#               power = 0.8  
#       alternative = two.sided  
#  
# NOTE: n is number in *each* group
```



## Считаем объем выборки

```
pwr_hal <- pwr.t.test(n = NULL, d = effect,
                     power = power, sig.level = alpha,
                     type = "two.sample",
                     alternative = "two.sided")
```

```
pwr_hal
```

```
#
#       Two-sample t test power calculation
#
#               n = 23.4
#               d = 0.838
#       sig.level = 0.05
#               power = 0.8
#       alternative = two.sided
#
# NOTE: n is number in *each* group
```

- Чтобы с вероятностью 0.8 выявить различия плотности халиотисов в местах, где лов разрешен и запрещен, нужно обследовать **по 24 пробы каждого типа**, если мы верно оценили величину эффекта.

## Задание

Рассчитайте сколько нужно обследовать проб, чтобы обнаружить слабый эффект с вероятностью 0.8, при уровне значимости 0.01

Вам понадобятся функции `cohen.ES()` и `pwr.t.test()`

# Решение

```
cohen.ES(test = "t", size = "small")
```

```
#  
#      Conventional effect size from Cohen (1982)  
#  
#      test = t  
#      size = small  
#      effect.size = 0.2
```

```
pwr.t.test(n = NULL, d = 0.2, power = 0.8, sig.level = 0.01,  
           type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
#  
#      Two-sample t test power calculation  
#  
#      n = 586  
#      d = 0.2  
#      sig.level = 0.01  
#      power = 0.8  
#      alternative = two.sided  
#  
# NOTE: n is number in *each* group
```

## Пример: Улитки на устрицах в мангровых зарослях\*

В каких зонах мангровых зарослей на устрицах предпочитают обитать улитки (Minchinton, Ross, 1999)?

- Факторы:
  - Сайт (А и В)
  - Зона зарослей (LZ - ближе к земле, MZ - средняя часть, SZ(+TR)с деревьями, SZ(-TR) - ближе к морю, без деревьев)
- Собирали по 5 проб - число улиток на раковинах устриц

Данные из Quinn, Keough, 2002, Box 9-5, Fig 9-7

## Скачиваем данные с сайта

Не забудьте войти в вашу директорию для матметодов при помощи `setwd()`

```
library(downloader)
```

```
# в рабочем каталоге создаем суб-директорию для данных
```

```
if(!dir.exists("data")) dir.create("data")
```

```
# скачиваем файл
```

```
download(
```

```
  url = "https://varmara.github.io/mathmethr/data/minch.xls",
```

```
  destfile = "data/minch.xls")
```

## Читаем данные из файла

```
library(readxl)
minch <- read_excel(path = "data/minch.xls", sheet = 1)
```

```
str(minch) # Структура данных
```

```
# Classes 'tbl_df', 'tbl' and 'data.frame': 40 obs. of 6 variables:
# $ NA      : chr  "1" "2" "3" "4" ...
# $ site    : chr  "A" "A" "A" "A" ...
# $ zone    : chr  "SZ(-TR)" "SZ(-TR)" "SZ(-TR)" "SZ(-TR)" ...
# $ limpt   : num  0.16 0.11 0.1 0.16 0.15 0.12 0 0.03 0.05 0.43 ...
# $ limpt100: num  16 11 10 16 15 12 0 3 5 43 ...
# $ sqlim100: num  4 3.32 3.16 4 3.87 ...
```

## Просмотреть, что получилось можно так:

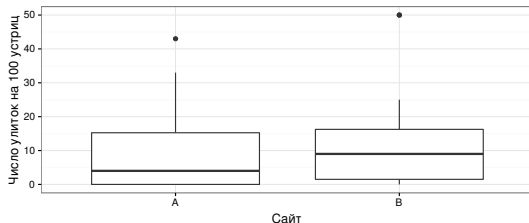
```
head(minch)      # Первые несколько строк файла
```

```
# # A tibble: 6 × 6
#   NA site zone limpt limpt100 sqlim100
#   <chr> <chr> <chr> <dbl> <dbl> <dbl>
# 1 1 A SZ(-TR) 0.16 16 4.00
# 2 2 A SZ(-TR) 0.11 11 3.32
# 3 3 A SZ(-TR) 0.10 10 3.16
# 4 4 A SZ(-TR) 0.16 16 4.00
# 5 5 A SZ(-TR) 0.15 15 3.87
# 6 6 A SZ(+TR) 0.12 12 3.46
```

## Боксплоты числа улиток

Нормальное ли тут распределение?

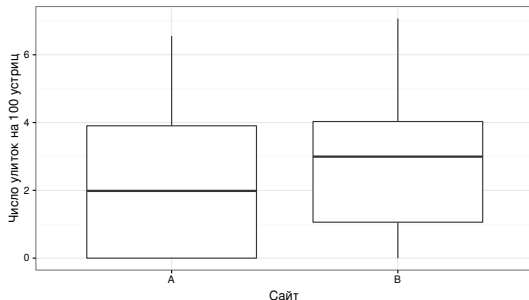
```
ggplot(data = minch, aes(x = site, y = limpt100)) +  
  geom_boxplot() +  
  labs(y = "Число улиток на 100 устриц",  
       x = "Сайт")
```





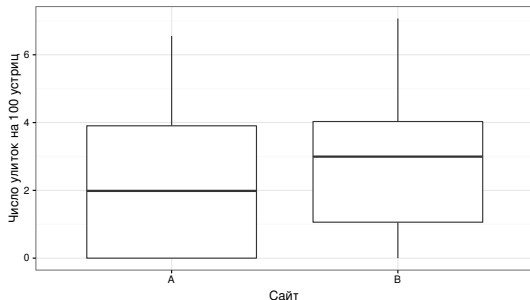
## Боксплот корня из численности улиток (sqlim100) для двух сайтов

```
ggplot(data = minch, aes(x = site, y = sqlim100)) +  
  geom_boxplot() +  
  labs(y = "Число улиток на 100 устриц",  
       x = "Сайт")
```



## Боксплот корня из численности улиток (sqlim100) для двух сайтов

```
ggplot(data = minch, aes(x = site, y = sqlim100)) +  
  geom_boxplot() +  
  labs(y = "Число улиток на 100 устриц",  
       x = "Сайт")
```



- Распределение стало больше походить на нормальное. Можно пользоваться t-критерием для сравнения значений корня из численности улиток (sqlim100) для двух сайтов.

## **A priori анализ мощности по данным пилотного исследования**

## Анализ мощности по данным пилотного исследования

Представим, что эти данные — это данные пилотного исследования.

Мы хотим выяснить по этим данным, сколько нужно собрать проб, чтобы показать, что плотность улиток различается на двух сайтах.

## Величина эффекта по исходным данным

```
library(effsize)
eff_snail <- cohen.d(minch$sqlim100, minch$site)
eff_snail
```

```
#
# Cohen's d
#
# d estimate: -0.365 (small)
# 95 percent confidence interval:
#   inf      sup
# -1.028    0.298
```

Вычислим модуль, поскольку для `pwr.t.test()` эффект должен быть положительным

```
effect_snail <- abs(eff_snail$estimate)
```

## Задание

Рассчитайте объем выборки, чтобы показать различия плотности улиток между сайтами с вероятностью 0.8?

Используйте функцию `pwr.t.test()`

## Решение

```
pwr_snail <- pwr.t.test(n = NULL, d = effect_snail,  
                        power = 0.8, sig.level = 0.05,  
                        type = "two.sample",  
                        alternative = "two.sided")  
  
pwr_snail
```

```
#  
#       Two-sample t test power calculation  
#  
#               n = 119  
#               d = 0.365  
#       sig.level = 0.05  
#               power = 0.8  
#       alternative = two.sided  
#  
# NOTE: n is number in *each* group
```

## Решение

```
pwr_snail <- pwr.t.test(n = NULL, d = effect_snail,  
                        power = 0.8, sig.level = 0.05,  
                        type = "two.sample",  
                        alternative = "two.sided")  
  
pwr_snail
```

```
#  
#       Two-sample t test power calculation  
#  
#               n = 119  
#               d = 0.365  
#       sig.level = 0.05  
#               power = 0.8  
#       alternative = two.sided  
#  
# NOTE: n is number in *each* group
```

- Нужна выборка **119 площадок с каждого сайта**, чтобы с вероятностью 0.8 обнаружить различия плотности улиток между сайтами.



## Задание

Представьте, что в датасете `sleep` содержатся данные пилотного исследования.

Оцените, какой объем выборки нужно взять, чтобы показать, что число часов дополнительного сна после применения двух препаратов различается?

## Решение

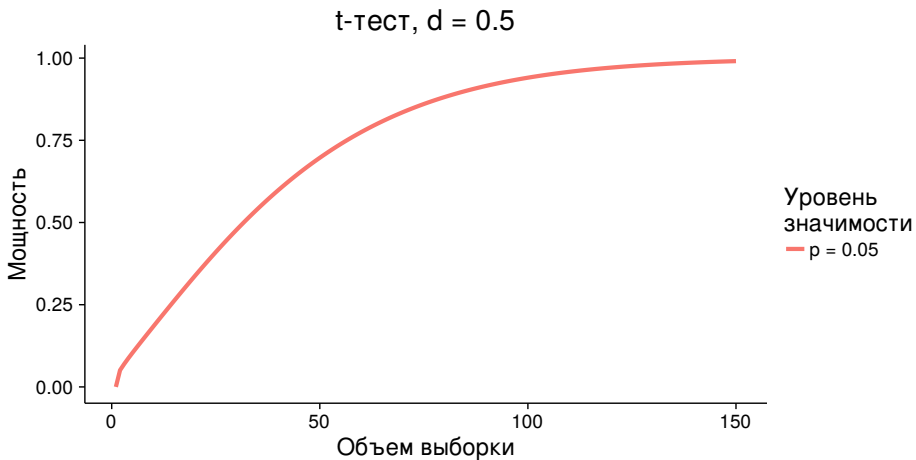
```
eff_sleep <- cohen.d(sleep$extra, sleep$group)
effect_sleep <- abs(eff_sleep$estimate)
pwr_sleep <- pwr.t.test(n = NULL, d = effect_sleep,
                        power = 0.8, sig.level = 0.05,
                        type = "two.sample",
                        alternative = "two.sided")
pwr_sleep
```

```
#
#   Two-sample t test power calculation
#
#           n = 23.7
#           d = 0.832
#   sig.level = 0.05
#           power = 0.8
#   alternative = two.sided
#
# NOTE: n is number in *each* group
```

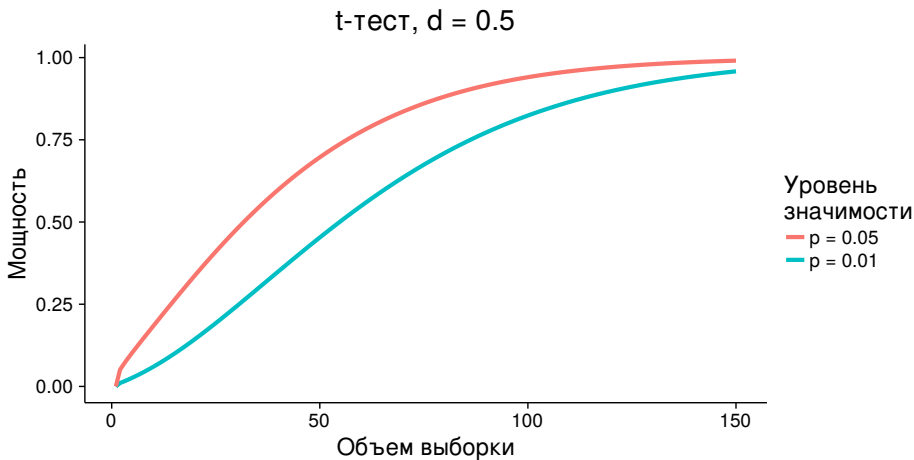
Нужна выборка **24 человека в каждой из групп**, чтобы с вероятностью 0.8 обнаружить различия числа часов дополнительного сна после применения двух препаратов.

## Как влиять на мощность теста?

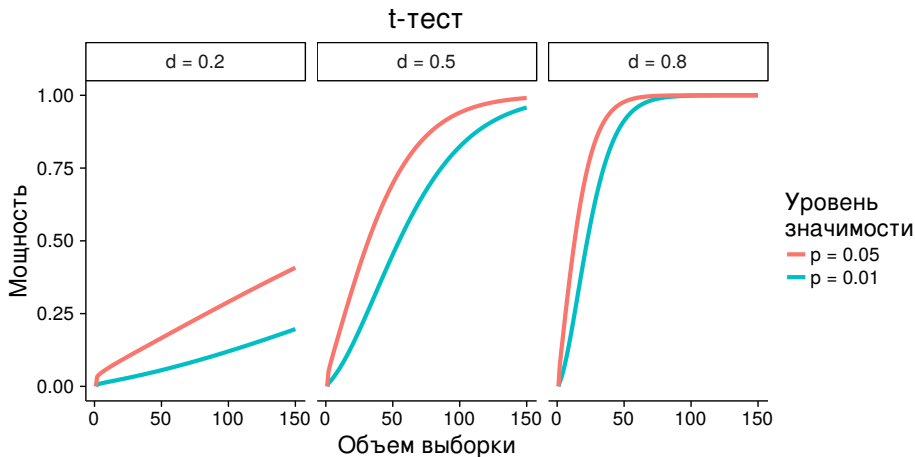
# Чем больше объем выборки — тем больше мощность



## Чем больше уровень значимости — тем больше мощность



# Чем больше величина различий — тем больше мощность



## Каким образом можно повлиять на мощность теста?

- Мощность теста можно регулировать, если
  - изменить число повторностей
  - выбрать другой уровень значимости ( $\alpha$ )
  - определиться, какие эффекты действительно важны ( $ES$ )

## Take home messages

- Чтобы не находить несуществующих эффектов, фиксируем уровень значимости
- Чтобы не пропустить значимое, рассчитываем величину эффекта, объем выборки и мощность теста
- Способность выявлять различия зависит
  - от объема выборки,
  - от уровня значимости
  - от величины эффекта



## Дополнительные ресурсы

- Quinn, Keough, 2002, pp. 164-170
- Open Intro to Statistics: [4.6 Sample Size and Power](#), pp. 193-197
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 167-169.
- Zar, 1999, p. 83.
- R Data Analysis Examples - Power Analysis for Two-group Independent sample t-test. UCLA: Statistical Consulting Group.
- R Data Analysis Examples - Power Analysis for One-sample t-test. UCLA: Statistical Consulting Group.
- FAQ - How is effect size used in power analysis? UCLA: Statistical Consulting Group.