

# Регрессионный анализ, часть 1

## Математические методы в зоологии - на R

Марина Варфоломеева

осень 2015

- 1 **Описание зависимости между переменными**
- 2 **Линейная регрессия**
- 3 **Неопределенность оценок коэффициентов**
- 4 **Проверка валидности модели**
- 5 **Оценка качества подгонки модели**

## Вы сможете

- посчитать и протестировать различные коэффициенты корреляции между переменными
- подобрать модель линейной регрессии и записать ее в виде уравнения
- проверить валидность модели при помощи t- или F-теста
- оценить долю изменчивости, которую объясняет модель, при помощи  $R^2$

# Описание зависимости между переменными

## Пример: усыхающие личинки мучных хрущаков

Как зависит потеря влаги личинками  
малого мучного хрущака *Tribolium confusum* от влажности воздуха?

- 9 экспериментов, продолжительность 6 дней
- разная относительная влажность воздуха,
- измерена потеря влаги, мг

(Nelson, 1964; данные из Sokal, Rohlf, 1997, табл. 14.1 по Logan, 2010. глава 8, пример 8с; Данные в файлах nelson.xlsx и nelson.csv)



Малый мучной хрущак *Tribolium confusum*, photo by Sarefo, CC BY-SA

## Читаем данные из файла и знакомимся с ними

```
# setwd("C:/mathmethr/week2") # установите рабочую директорию,
# или используйте полный путь к файлу
library(readxl)
nelson <- read_excel("nelson.xlsx", sheet = 1)
## или из .csv
# nelson <- read.table(file="nelson.csv", header = TRUE, sep = "\t", dec = ".")
str(nelson)
```

```
# Classes 'tbl_df', 'tbl' and 'data.frame': 9 obs. of 2 variables:
# $ humidity : num 0 12 29.5 43 53 62.5 75.5 85 93
# $ weightloss: num 8.98 8.14 6.67 6.08 5.9 5.83 4.68 4.2 3.72
```

```
head(nelson)
```

```
#   humidity weightloss
# 1      0.0      8.98
# 2     12.0      8.14
# 3     29.5      6.67
# 4     43.0      6.08
# 5     53.0      5.90
# 6     62.5      5.83
```

# Связана ли потеря веса со влажностью?

## Корреляция Пирсона

- Оценивает только линейную составляющую связи
- Параметрические тесты значимости применимы если переменные распределены нормально

## Ранговые коэффициенты корреляции (кор. Кендалла и кор. Спирмена)

- Не зависят от формы распределения переменных
- Тест на значимость непараметрический

## Задача: оцените силу связи

- Посчитайте разные коэффициенты корреляции между потерей веса и влажностью
- Чем отличаются результаты функций `cor()`, `cor.test()`?



# Решение

```
cor(nelson$humidity, nelson$weightloss) # корреляция Пирсона
```

```
# [1] -0.987
```

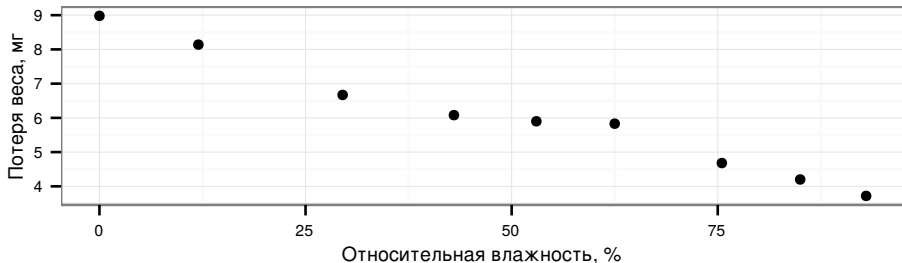
```
cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
         alternative = "two.sided", method = "pearson")
```

```
#
# Pearson's product-moment correlation
#
# data: nelson$humidity and nelson$weightloss
# t = -20, df = 7, p-value = 0.0000008
# alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
# 95 percent confidence interval:
# -0.997 -0.938
# sample estimates:
# cor
# -0.987
```

```
# cor(nelson$humidity, nelson$weightloss, method = "kendall")
# cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
#          alternative = "two.sided", method = "kendall")
# cor(nelson$humidity, nelson$weightloss, method = "spearman")
# cor.test(nelson$humidity, nelson$weightloss,
```

# Как зависит потеря веса от влажности?

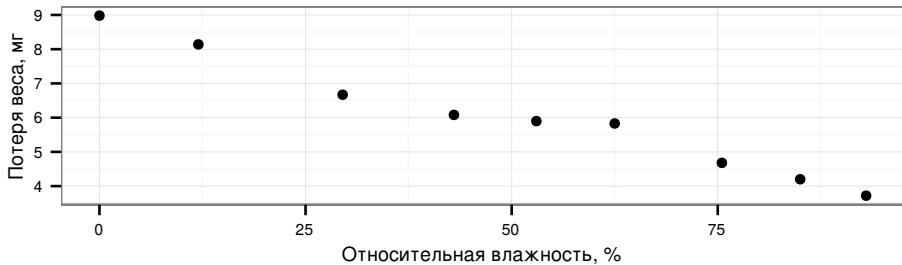
```
library(ggplot2);theme_set(theme_bw(base_size = 8))
gg_nelson <- ggplot(data=nelson, aes(x = humidity, y = weightloss)) +
  geom_point() +
  labs(x = "Относительная влажность, %", y = "Потеря веса, мг")
gg_nelson
```



# Как зависит потеря веса от влажности?

$$weightloss_i = b_0 + b_1 humidity_i$$

```
library(ggplot2); theme_set(theme_bw(base_size = 8))
gg_nelson <- ggplot(data=nelson, aes(x = humidity, y = weightloss)) +
  geom_point() +
  labs(x = "Относительная влажность, %", y = "Потеря веса, мг")
gg_nelson
```



# Линейная регрессия

# Линейная регрессия

- простая

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

- множественная

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \epsilon_i$$

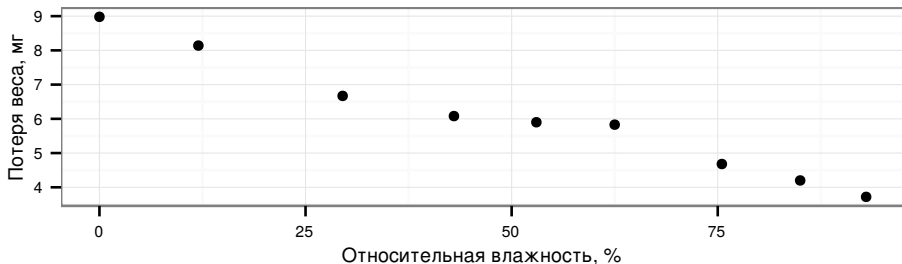
# Как провести линию регрессии?

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$  - модель регрессии

$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$  - оценка модели

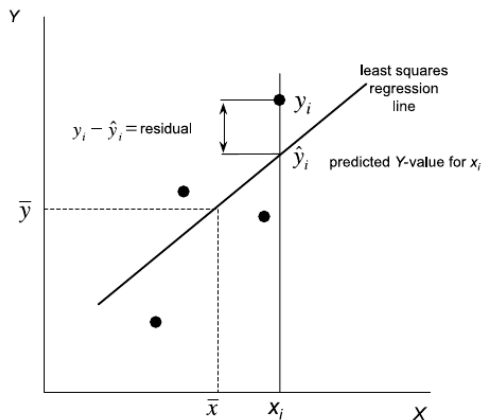
нужно оценить  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\sigma^2$

- Метод наименьших квадратов (Ordinary Least Squares)
- Методы максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, REstricted Maximum Likelihood)



# Метод наименьших квадратов

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$  - модель регрессии  
 $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$  - оценка модели  
 нужно оценить  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\sigma^2$



Линия регрессии по методу наименьших квадратов  
 (из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 85, рис. 5.6 а)

# Оценки параметров линейной регрессии

Параметры	Оценки параметров	Стандартные ошибки оценок
$\beta_1$	$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	$SE_{b_1} = \sqrt{\frac{MS_e}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$
$\beta_0$	$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$	$SE_{b_0} = \sqrt{MS_e \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]}$
$\epsilon_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$\approx \sqrt{MS_e}$

Таблица из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 86, табл. 5.2

## Оценки параметров линейной регрессии

- подбирают так, чтобы минимизировать остатки  $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$

## Стандартные ошибки коэффициентов

- используются для построения доверительных интервалов
- нужны для статистических тестов



# Коэффициенты регрессии

## Интерпретация коэффициентов регрессии

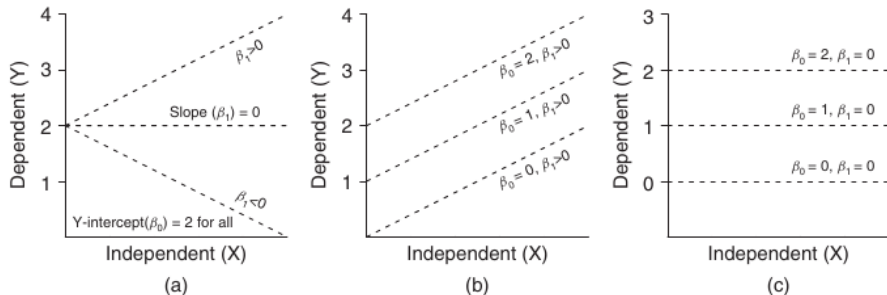


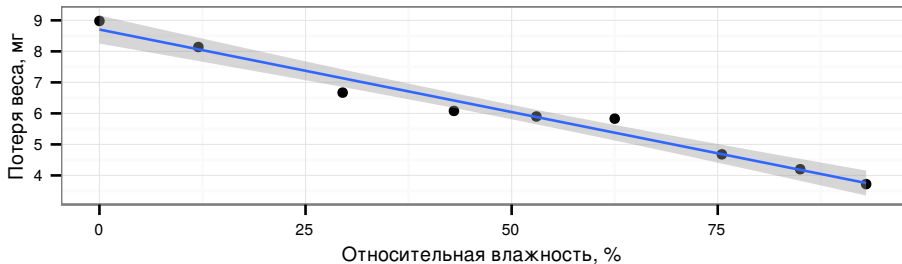
Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 170, рис. 8.2

## Для сравнения разных моделей - стандартизованные коэффициенты

- Не зависят от масштаба измерений  $x$  и  $y$
- Можно вычислить, зная обычные коэффициенты и их стандартные отклонения  $b_1^* = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
- Можно вычислить, посчитав регрессию по стандартизованным данным

## Добавим линию регрессии на график

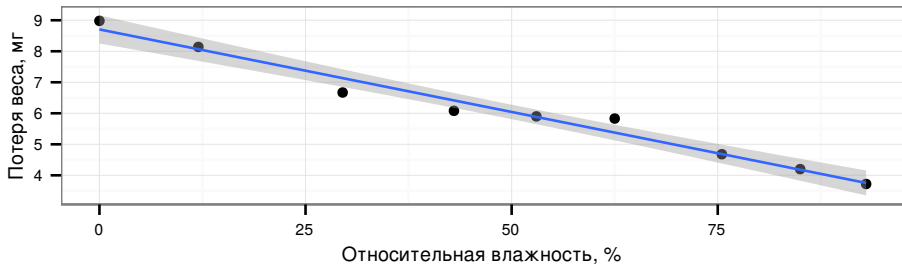
```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm')
```



## Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

● Это...

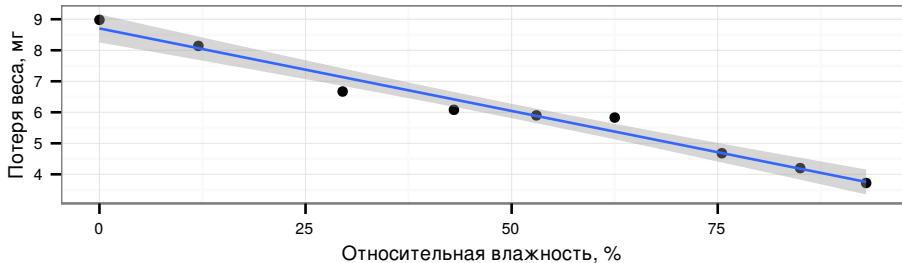
```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm')
```



## Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...
  - 95% доверительная зона регрессии

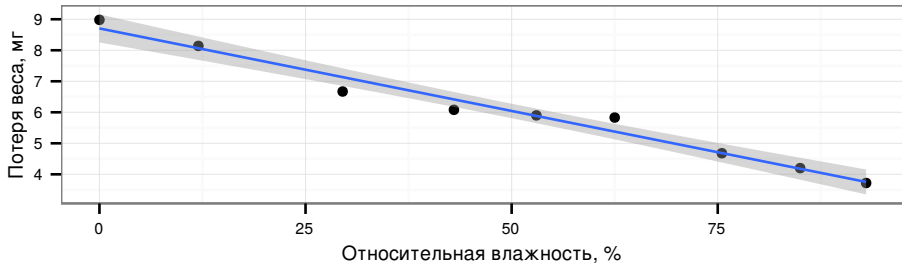
```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm')
```



## Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

- Это...
  - 95% доверительная зона регрессии
  - В ней с 95% вероятностью лежит регрессионная прямая

```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm')
```

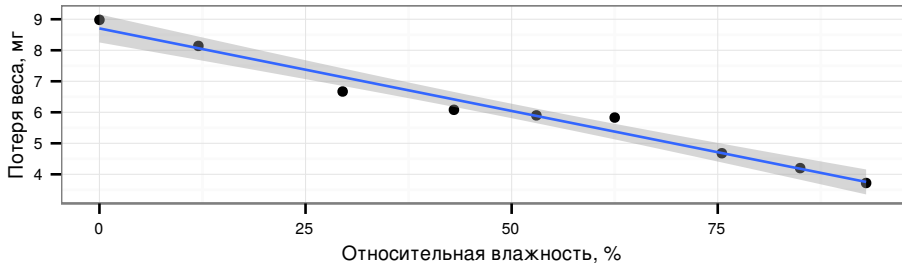


## Задача: как вы думаете, что это за серая область вокруг линии регрессии?

● Это...

- 95% доверительная зона регрессии
- В ней с 95% вероятностью лежит регрессионная прямая
- Возникает из-за неопределенности оценок коэффициентов регрессии

```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm')
```



# Как в R задать формулу линейной регрессии

`lm(формула, данные)` - функция для подбора регрессионных моделей

Формат формулы: `зависимая_переменная ~ модель`

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$  (простая линейная регрессия с  $b_0$  (intercept))
  - $Y \sim X$
  - $Y \sim 1 + X$
  - $Y \sim X + 1$
- $\hat{y}_i = b_1 x_i$  (простая линейная регрессия без  $b_0$ )
  - $Y \sim X - 1$
  - $Y \sim -1 + X$
- $\hat{y}_i = b_0$  (уменьшенная модель, линейная регрессия  $Y$  от  $b_0$ )
  - $Y \sim 1$
  - $Y \sim 1 - X$

## Задача: Запишите в нотации R эти модели линейных регрессий

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i}$

(множественная линейная регрессия с  $b_0$ )

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_3x_{3i}$

(уменьшенная модель множественной линейной регрессии, без  $x_2$ )



# Решение

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i}$

(множественная линейная регрессия с  $b_0$ )

$$Y \sim X_1 + X_2 + X_3$$

$$Y \sim 1 + X_1 + X_2 + X_3$$

- $\hat{y}_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_3x_{3i}$

(уменьшенная модель множественной линейной регрессии, без  $x_2$ )

$$Y \sim X_1 + X_3$$

$$Y \sim 1 + X_1 + X_3$$

# Подбираем параметры линейной модели

```
nelson_lm <- lm(weightloss ~ humidity, nelson)
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403     0.19156   45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322     0.00326  -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
#  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

## Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Кoeffициенты линейной регрессии  $b_0$  и  $b_1$ ...

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403    0.19156   45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322    0.00326  -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

## Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Коэффициенты линейной регрессии  $b_0$  и  $b_1$ ...
  - $b_0 = 8.704$

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403     0.19156    45.4 0.00000000065 ***
# humidity     -0.05322     0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF, p-value: 0.000000782
```

## Задача: Назовите, чему равны коэффициенты линейной регрессии?

- Коэффициенты линейной регрессии  $b_0$  и  $b_1$ ...
  - $b_0 = 8.704$
  - $b_1 = -0.053$

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403     0.19156   45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322     0.00326  -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

# Неопределенность оценок коэффициентов

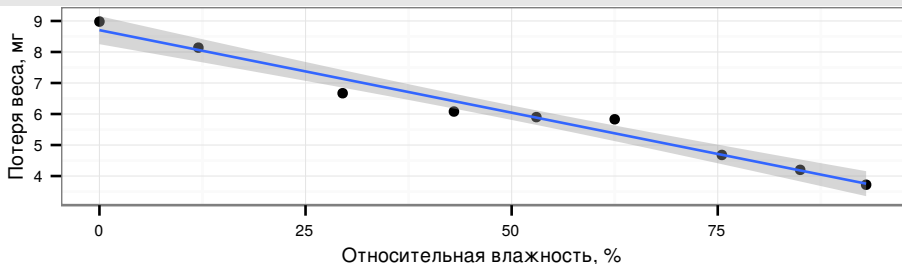
# Неопределенность оценок коэффициентов

## Доверительный интервал коэффициента

- зона, в которой с  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  вероятностью содержится среднее значение коэффициента
- $b_1 \pm t_{\alpha, df=n-2} SE_{b_1}$
- $\alpha = 0.05 \Rightarrow (1 - 0.05) \cdot 100\% = 95\%$  интервал

## Доверительная зона регрессии

- зона, в которой с  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  вероятностью лежит регрессионная прямая



# Находим доверительные интервалы коэффициентов

```
# оценки коэффициентов отдельно
```

```
coef(nelson_lm)
```

```
# (Intercept)    humidity
#      8.7040      -0.0532
```

```
# доверительные интервалы коэффициентов
```

```
confint(nelson_lm)
```

```
#           2.5 %   97.5 %
# (Intercept) 8.2510  9.1570
# humidity    -0.0609 -0.0455
```



## Предсказываем Y при заданном X

Какова средняя потеря веса при заданной влажности?

```
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100)) # значения, для которых предсказываем
(pr1 <- predict(nelson_lm, newdata, interval = "confidence", se = TRUE))
```

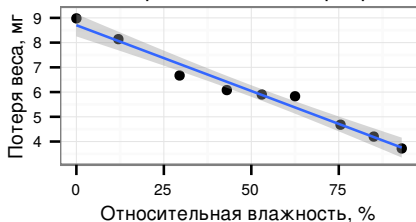
```
# $fit
#      fit   lwr   upr
# 1 6.04 5.81 6.28
# 2 3.38 2.93 3.83
#
# $se.fit
#      1      2
# 0.0989 0.1894
#
# $df
# [1] 7
#
# $residual.scale
# [1] 0.297
```

- При 50 и 100% относительной влажности ожидаемая средняя потеря веса жуков будет  $6 \pm 0.2$  и  $3.4 \pm 0.4$ , соответственно.

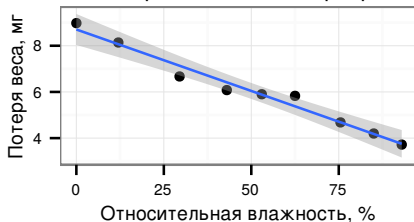
# Строим доверительную зону регрессии

```
library(gridExtra)
grid.arrange(gg_nelson + geom_smooth(method = "lm") +
  labs (title = "95% доверительная зона регрессии"),
  gg_nelson + geom_smooth(method = "lm", level = 0.99) +
  labs (title = "99% доверительная зона регрессии"),
  ncol = 2)
```

95% доверительная зона регрессии



99% доверительная зона регрессии



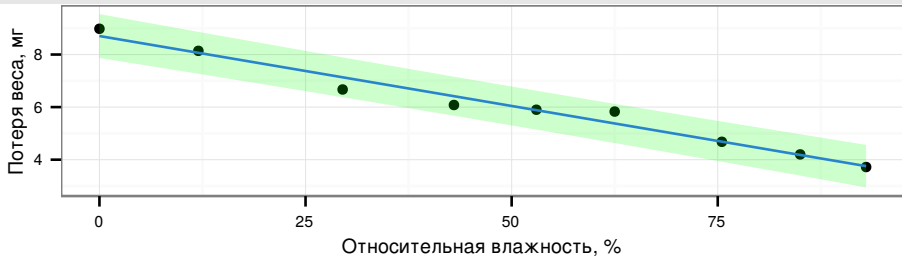
# Неопределенность оценок предсказанных значений

## Доверительный интервал к предсказанному значению

- зона в которую попадают  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  значений  $\hat{y}_i$  при данном  $x_i$
- $\hat{y}_i \pm t_{0.05, n-2} SE_{\hat{y}_i}$
- $SE_{\hat{y}} = \sqrt{MS_e \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{prediction} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]}$

## Доверительная область значений регрессии

- зона, в которую попадает  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  всех предсказанных значений



## Предсказываем изменение $Y$ для 95% наблюдений при заданном $X$

В каких пределах находится потеря веса у 95% жуков при заданной влажности?

```
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100)) # новые данные для предсказания значения
(pr2 <- predict(nelson_lm, newdata, interval = 'prediction', se = TRUE))
```

```
# $fit
#      fit   lwr   upr
# 1 6.04 5.30 6.78
# 2 3.38 2.55 4.21
#
# $se.fit
#      1      2
# 0.0989 0.1894
#
# $df
# [1] 7
#
# $residual.scale
# [1] 0.297
```

- У 95% жуков при 50 и 100% относительной влажности будет потеря веса будет в пределах  $6 \pm 0.7$  и  $3.4 \pm 0.8$ , соответственно.

## Данные для доверительной области значений

Предсказанные значения для исходных данных объединим с исходными данными в новом датафрейме - для графиков

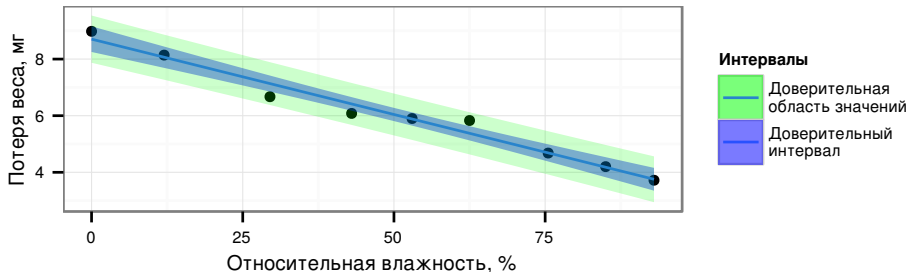
```
(pr_all <- predict(nelson_lm, interval = 'prediction'))
```

```
#   fit  lwr  upr
# 1 8.70 7.87 9.54
# 2 8.07 7.27 8.86
# 3 7.13 6.38 7.89
# 4 6.42 5.67 7.16
# 5 5.88 5.14 6.62
# 6 5.38 4.63 6.12
# 7 4.69 3.92 5.45
# 8 4.18 3.39 4.97
# 9 3.75 2.95 4.56
```

```
nelson_with_pred <- data.frame(nelson, pr_all)
```

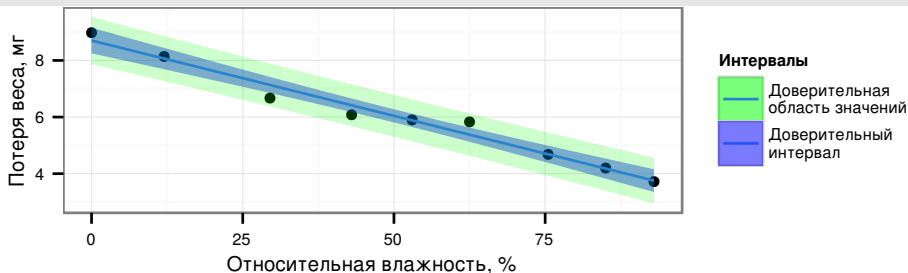
# Строим доверительную область значений и доверительный интервал одновременно

```
gg_nelson + geom_smooth(method = 'lm',
                        aes(fill = 'Доверительный \интервал'),
                        alpha = 0.4) +
geom_ribbon(data = nelson_with_pred,
          aes(y = fit, ymin = lwr, ymax = upr,
              fill = 'Доверительная \область значений'),
          alpha = 0.2) +
scale_fill_manual('Интервалы', values = c('green', 'blue'))
```



# Осторожно!

**Вне интервала значений  $X$  ничего предсказать нельзя!**



# Проверка валидности модели



# Проверка при помощи t-критерия

## t-критерий

Нулевая гипотеза  $H_0 : b_1 = \theta, \theta = 0$

Тест

$$t = \frac{b_1 - \theta}{SE_{b_1}}$$

Число степеней свободы  $df = n - 2$

# Проверка коэффициентов с помощью t-критерия

```
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403     0.19156   45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322     0.00326  -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
#  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

- Увеличение относительной влажности привело к достоверному замедлению потери веса жуками ( $b_1 = -0.053$ ,  $t = -16.35$ ,  $p < 0.01$ )

# Проверка при помощи F-критерия

## F-критерий

Нулевая гипотеза  $H_0 : \beta_1 = 0$

Тест

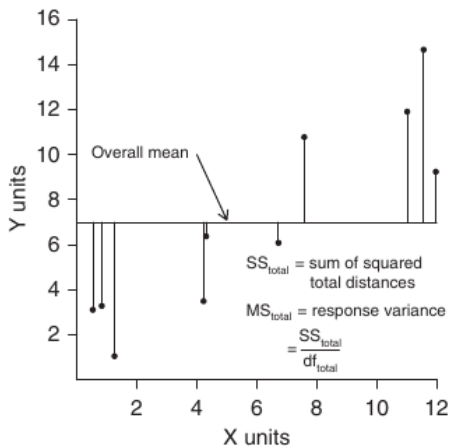
$$F = \frac{MS_{\text{regression}}}{MS_{\text{error}}}$$

Число степеней свободы  $df_{\text{regression}}$ ,  $df_{\text{error}}$

- Та же самая нулевая гипотеза, что и у t. Как так получается?

## Общая изменчивость

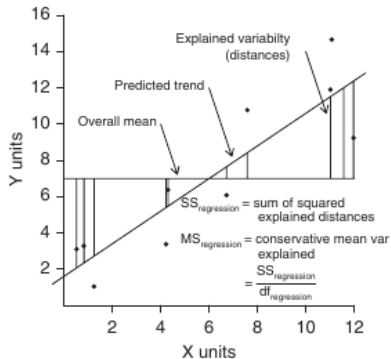
Общая изменчивость -  $SS_{total}$ , отклонения от общего среднего значения



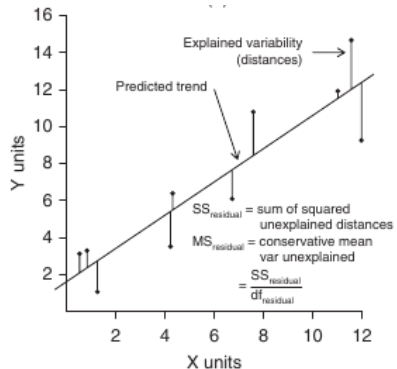
Общая изменчивость (из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 а-с)

# Общая изменчивость

$$SS_{total} = SS_{regression} + SS_{error}$$



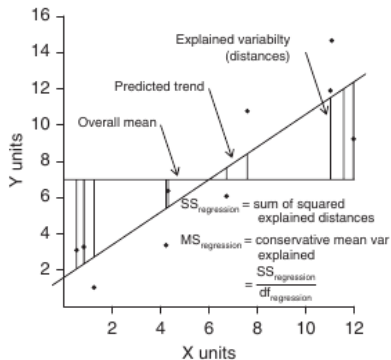
Объясненная изменчивость



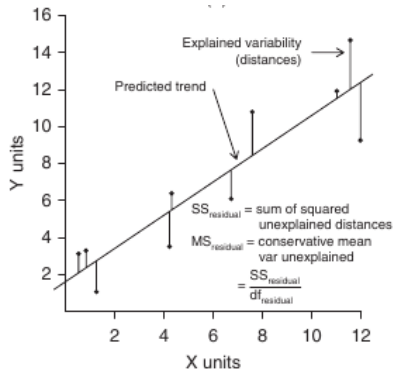
Остаточная изменчивость

# Если зависимости нет, $b_1 = 0$

Тогда  $\hat{y}_i = \bar{y}$  и  $MS_{\text{regression}} \approx MS_{\text{error}}$



Объясненная изменчивость



Остаточная изменчивость

# Что оценивают средние квадраты отклонений?

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений SS	Число степеней свободы df	Средний квадрат отклонений MS	Ожидаемый средний квадрат
Регрессия	$\sum (\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	1	$\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - \hat{y}_i)^2}{1}$	$\sigma_\epsilon^2 + \beta_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Остаточная	$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n - 2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$	$\sigma_\epsilon^2$
Общая	$\sum (\bar{y} - y_i)^2$	$n - 1$		

Если  $b_1 = 0$ , тогда  $\hat{y}_i = \bar{y}_i$  и  $MS_{regression} \approx MS_{error}$

Тестируем:

$$F = \frac{MS_{regression}}{MS_{error}}$$

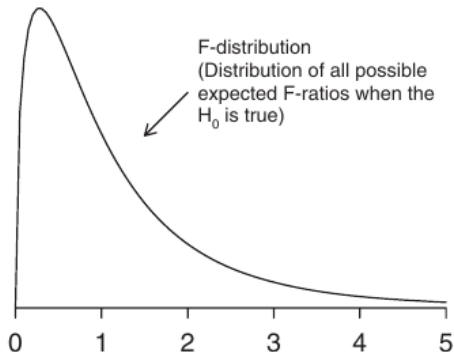
# F-критерий и распределение F-статистики

F - соотношение объясненной и не объясненной изменчивости

$$F = \frac{MS_{\text{regression}}}{MS_{\text{error}}}$$

Зависит от

- $\alpha$
- $df_{\text{regression}}$
- $df_{\text{error}}$



Распределение F-статистики при справедливой  $H_0$   
(с изменениями из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 d)



# Таблица результатов дисперсионного анализа

Источник изменчивости	SS	df	MS	F
Регрессия	$SS_r = \sum (\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	$df_r = 1$	$MS_r = \frac{SS_r}{df_r}$	$F_{df_r, df_e} = \frac{MS_r}{MS_e}$
Остаточная	$SS_e = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$	$df_e = n - 2$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	
Общая	$SS_t = \sum (\bar{y} - y_i)^2$	$df_t = n - 1$		

- Минимальное упоминание в тексте -  $F_{df_r, df_e}, p$

# Проверяем валидность модели при помощи F-критерия

```
nelson_aov <- aov(nelson_lm)
summary(nelson_aov)
```

```
#           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
# humidity    1  23.51    23.51    267 0.00000078 ***
# Residuals    7   0.62     0.09
# ---
# Signif. codes:
# 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Количество влаги, потерянной жуками в период эксперимента, достоверно зависело от уровня относительной влажности ( $F_{1,7} = 267, p < 0.01$ ).

# Оценка качества подгонки модели

# Коэффициент детерминации

## Коэффициент детерминации ( $R^2$ )

доля общей изменчивости, объясненная линейной связью  $x$  и  $y$

$$R^2 = \frac{SS_r}{SS_t}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Иначе рассчитывается как  $R^2 = r^2$

# Коэффициент детерминации можно найти в сводке модели

```
summary(nelson_lm)
```

```
#
# Call:
# lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
#
# Residuals:
#      Min       1Q   Median       3Q      Max
# -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
#
# Coefficients:
#              Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|)
# (Intercept)  8.70403     0.19156   45.4 0.00000000065 ***
# humidity    -0.05322     0.00326  -16.4 0.00000078161 ***
# ---
# Signif. codes:
#  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.974,    Adjusted R-squared:  0.971
# F-statistic: 267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

# Будьте внимательны с $R^2$ !

## Сравнение качества подгонки моделей

Не сравнивайте  $R^2$  моделей с разным числом параметров,  
для этого есть  $R^2_{adjusted}$

# Take home messages

- Модель простой линейной регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$

# Take home messages

- Модель простой линейной регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно рассчитать, зная стандартные ошибки.



# Take home messages

- Модель простой линейной регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно рассчитать, зная стандартные ошибки.
- Валидность модели линейной регрессии можно проверить при помощи t- или F-теста.  $H_0 : \beta_1 = 0$

# Take home messages

- Модель простой линейной регрессии  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно рассчитать, зная стандартные ошибки.
- Валидность модели линейной регрессии можно проверить при помощи t- или F-теста.  $H_0 : \beta_1 = 0$
- Качество подгонки модели можно оценить при помощи коэффициента детерминации  $R^2$

# Дополнительные ресурсы

- Учебники

- Гланц, 1999, стр. 221-244
- [Open Intro to Statistics: Chapter 7. Introduction to linear regression](#), pp. 315-353.
- Quinn, Keough, 2002, pp. 78-110
- Logan, 2010, pp. 170-207
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 451-491
- Zar, 1999, pp. 328-355

- Упражнения для тренировки

- OpenIntro Labs, Lab 7: Introduction to linear regression (Осторожно, они используют базовую графику а не `ggplot`)
  - Обычный вариант, упражнения 1—4
  - Интерактивный вариант на [Data Camp](#), до вопроса 4