

Pracownia 2

Analiza Numeryczna (M)

Prowadzący: Witold Karczewski

Zadanie P2.9

Wojciech Adamiec, 310064

18 grudnia 2019

Spis treści

1	Wstęp	1
1.1	Treść Zadania	1
1.2	Plan Działania	1
1.3	Sprawy Techniczne	2
2	Rozwiązanie Zadania	3
2.1	Przykład 1	3
2.2	Przykład 2	3
2.3	Przykład 3	3
2.4	Przykład 4	3
3	Podsumowanie	3

1 Wstęp

1.1 Treść Zadania

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową, aby dopasować funkcję postaci $y = ab^x$ do danych:

x	1	2	3	...	m
y	y_1	y_2	y_3	...	y_m

Opracowaną metodę przetestuj na wybranych przykładach.

1.2 Plan Działania

Zgodnie z poleceniem, do rozwiązania naszego problemu zastosujemy aproksymację średniokwadratową. Nie możemy jednak zastosować jej wprost, bowiem funkcja postaci $y = ab^x$ nie jest wielomianem. Aby rozwiązać ten problem, dokonamy kilku przekształceń:

$$y = ab^x$$

Logarytmujemy obustronnie równanie:

$$\ln(y) = \ln(ab^x)$$

Korzystamy z własności logarytmów:

$$\ln(y) = \ln(a) + \ln(b^x)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + x \cdot \ln(b)$$

Zauważamy, że mamy już teraz postać wielomianu - w naszym przypadku funkcji liniowej. Użyjmy teraz zmiennych pomocniczych: $Y = \ln(y)$, $A = \ln(a)$ i $B = \ln(b)$. Dostajemy wówczas:

$$Y = A + x \cdot B$$

Teraz możemy już bez problemu zastosować aproksymację średniokwadratową. Szukamy minimum wyrażenia:

$$||Y - (A + x \cdot B)||^2$$

W tym celu musimy rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle Y, 1 \rangle \\ \langle Y, x \rangle \end{bmatrix}$$

W naszym przypadku przyjmujemy dyskretną definicję iloczynu skalarnego, co upraszcza nam równanie do:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^m x_k \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m Y_k \\ \sum_{k=1}^m Y_k x_k \end{bmatrix}$$

Teraz pozostaje nam rozwiązać układ 2 równań liniowych, aby otrzymać A i B . Końcowym krokiem będzie wyliczenie a i b zgodnie ze wzorami:

$$a = e^A$$

$$b = e^B$$

Zatem nasz plan działania sprowadza się do:

- Obliczenia $Y_k = \ln(y_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$
- Obliczenia $\sum_{k=1}^m x_k$ oraz $\sum_{k=1}^m x_k^2$
- Obliczenia $\sum_{k=1}^m Y_k$ oraz $\sum_{k=1}^m Y_k x_k$
- Rozwiązania układu 2 równań liniowych
- Obliczeniu a i b

Do zadania dołączony jest program, który wykonuje wszystkie te czynności i od razu zwraca wartości a i b .

1.3 Sprawy Techniczne

Wszystkie obliczenia numeryczne zostały wykonane w języku *Julia* w wersji *v1.2.0*, w podwójnej precyzji - *binary64* zgodnie ze standardem *IEEE 754*, którego opis można znaleźć np. tu: https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

2 Rozwiązanie Zadania

W treści zadania nie mamy żadnych konkretnych danych, zatem naszą metodę zastosujemy do kilku własnoręcznie wymyślonych przykładów. Będziemy je tworzyć w taki sposób, że najpierw wybierzemy pewną funkcję postaci $y = ab^x$, następnie dla m różnych wartości x odczytamy i zapiszemy odpowiadające wartości y . Na koniec dokonamy lekkiego *zaburzenia* wartości x i y , tak aby zasymulować rzeczywistą sytuację.

2.1 Przykład 1

Dla sprawdzenia poprawności przedstawionej metody zaczniemy od prostej funkcji $y = 2^x$. W tym przykładzie wyjątkowo nie dokonamy zaburzenia wartości, aby upewnić się, że nasza metoda jest poprawna. Jako dane weźmiemy:

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

Czyli $m = 5$.

2.2 Przykład 2

2.3 Przykład 3

2.4 Przykład 4

3 Podsumowanie