Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka

Rozwiązanie zadania z kolokwium nr 1

Michał Mikołajczyk, Wojciech Adamiec

14 kwietnia 2020

Treść zadania:

Standardowy rozkład normalny ma gęstość określoną wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big), \qquad x \in R. \tag{1}$$

Dla dystrybuanty otrzymujemy wyrażenie:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\, dx, \tag{2}$$

która to całka nie ma przedstawienia za pomocą funkcji elementarnych. Ponieważ gęstość jest funkcją parzystą zatem zachodzi związek:

$$\Phi(t) = 1 - \Phi(-t) \tag{3}$$

Redukujemy zatem to zadanie do obliczenia wartości poniższej całki dla ustalonego $t > 0$:

$$G(t) = \int_{0}^{t} \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\, dx. \tag{4}$$

Rozwiązanie:

1. *Dowód* (3)*:*

   Zauważmy, że:

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \\ f(x) = f(-x). \end{gathered} \tag{5}$$

   Wtedy:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx - \int_{t}^{\infty} f(x) \\ &\overset{(5)}{=} 1 - \int_{t}^{\infty} f(x). \end{aligned} \tag{6}$$

   Skoro $f(x) = f(-x)$, to:

$$\int_{t}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-t} f(x) dx \quad = \Phi(-t). \tag{7}$$

   Zatem $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

$\blacksquare$

2. Metoda obliczania całki $G(t)$ – (4):
   Korzystamy z metody Romberga. Nasze rozwiązanie bazowaliśmy na wersji znajdującej się na stronie wikipedii – *Romberg's method*.

3. Obliczanie $\Phi(t)$ na podstawie $G(t)$:

   (a) Jeśli $t < 0$ wówczas naszym wynikiem będzie: $1 - \Phi(-t)$

   (b) Dla $t \geq 0$ mamy $\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot G(t)$, gdzie $\frac{1}{2}$ to pole pod wykresem naszego rozkładu w przedziale $(-\infty, 0]$.

Informacje techniczne:

Do dokumentacji jest dołączony program napisany w języku *Python* obliczający zarówno $\Phi(t)$ jak i samo $G(t)$. Dodatkowo dla wygody dołączamy również dokument w formacie *jupyter* z tymi samymi programami oraz z kilkoma przykładami.

Kod źródłowy:

Metoda Romberga

```
def romberg(f, a, b, max_steps, acc):
    Rp = [0 for _ in range(max_steps)] # Previous row
    Rc = [0 for _ in range(max_steps)] # Current row
    h = (b-a) # Step size
    Rp[0] = (f(a) + f(b)) * h * 0.5 # First trapezoidal step

    for i in range(1, max_steps):
        h /= 2
        c = 0
        ep = 1 << (i-1) # 2^(n-1)

        for j in range(1, ep+1):
            c += f(a+(2*j-1)*h)

        Rc[0] = h*c + 0.5 * Rp[0] # R(i,0)

        for j in range(1, i+1):
            n_k = 4**j
            Rc[j] = (n_k * Rc[j-1] - Rp[j-1]) / (n_k-1) # compute R(i,j)

        if i > 1 and abs(Rp[i-1] - Rc[i]) < acc:
            return Rc[i-1]

        # swap Rn and Rc as we only need the last row
        rt = Rp
        Rp = Rc
        Rc = rt

    return Rp[max_steps-1] # return our best guess
```

Definicja funkcji $G(t)$

```python
from math import exp
def G(t):
  def internal(x):
    return exp(-(x**2) / 2)
  return romberg(internal, 0, t, 1000, 0.001)
```

Definicja funkcji $\Phi(t)$

```python
from math import sqrt, pi
def phi(t):
  if t < 0:
    return 1 - phi(-t)
  return 0.5 + 1/sqrt(2 * pi) * G(t)
```