Zadanie Kolokwialne 3

Michał Mikołajczyk (307371), Wojciech Adamiec (310064)

10 maja 2020

Treść zadania:

Obliczyć gęstość rozkładu t-Studenta z n stopniami swobody. Zakładamy, że znamy wzór na gęstość rozkładu normalnego i rozkładu chi-kwadrat.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od definicji rozkładu t-Studenta. Niech niezależne zmienne X, Y mają rozkłady $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$. Wtedy mówimy, że zmienna $t(n) = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ ma rozkład t-Studenta z n stopniami swobody.

Niech Y będzie zmienną losową z rozkładem $Y \sim \chi^2$ z n stopniami swobody [2]. Wtedy wiemy, że zmienna $\hat{Y} = \sqrt{Y}$ będzie miała rozkład $\hat{Y} \sim \chi$ z n stopniami swobody [1]. Taki rozkład ma gęstość:

$$f_{\hat{Y}(\hat{y})} = \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \hat{y}^{n-1} \exp -\frac{\hat{y}^2}{2} \tag{1}$$

Niech $Z = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{Y}$. Wtedy $\frac{\partial \hat{Y}}{\partial Z} = \sqrt{n}$. Korzystając ze wzoru na zmianę zmiennej losowej [3] otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_{\hat{Y}}(\sqrt{n}z)\Big|\frac{\partial \hat{Y}}{\partial Z}\Big| \\ &= \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\sqrt{n}z)^{n-1} exp\Big\{-\frac{(\sqrt{n}z)^2}{2}\Big\}\sqrt{n} \\ &= \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} n^{\frac{n}{2}} z^{n-1} exp\Big\{-\frac{n}{2}z^2\Big\} \end{aligned} \tag{2}$$

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $X \sim N(0,1)$. Wtedy możemy zdefiniować zmienną losową T, która będzie miała rozkład t-studenta o n stopniach swobody:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{X}{Z} \tag{3}$$

Wiemy, że gęstość zmiennej T (iloraz dwóch niezależnych zmiennych losowych [4]) ma postać:

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_X(tz) f_Z(z) dz \tag{4}$$

Wiemy, że zmienna Z jest nieujemna, bo χ^2 ma nieujemną funkcję gęstości. (Dla $x < 0$ zwraca 0). Upraszcza nam to całkę do:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty z f_X(tz) f_Z(z)\, dz \\ &= \int_0^\infty z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big\{-\frac{(tz)^2}{2}\Big\} \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} n^{\frac{n}{2}} z^{n-1} exp\Big\{-\frac{n}{2}z^2\Big\}\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} n^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty z^n exp\Big\{-\frac{1}{2}(n+t^2)z^2\Big\}\, dz \end{aligned} \tag{5}$$

Skupimy się teraz na całce, którą mamy we wzorze na $f_T(t)$. Nazwijmy ją I. Dokonamy w niej podstawienia $m = z^2$ ($z = m^{\frac{1}{2}}$). Dzięki temu dostajemy:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty z^n exp\Big\{-\frac{1}{2}(n+t^2)m\Big\} \frac{dm}{2z} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty m^{\frac{n-1}{2}} exp\Big\{-\frac{1}{2}(n+t^2)m\Big\}\, dm \end{aligned} \tag{6}$$

Skorzystamy teraz z gęstości rozkładu Gamma:

$$Gamma(m;k;\Theta) = \frac{m^{k-1}\exp\{-\frac{m}{\Theta}\}}{\Theta^k\Gamma(k)} \tag{7}$$

Chcemy dopasować I do tej gęstości. W tym celu dokonamy podstawień:

$$\begin{aligned} k-1 &= \frac{n-1}{2} \implies k^* = \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{\Theta} &= \frac{1}{2}(n+t^2) \implies \Theta^* = \frac{2}{n+t^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Następnie dzielimy I przez $(\Theta^*)^{k^*}\Gamma(k^*)$, a następnie mnożymy przez tą samą wartość, aby zachować równość. Domnożone wyrażenie wyciągamy przed całkę. Mamy teraz pod całką dokładnie wzór na gęstość rozkładu Gamma. Całkując go po całej dziedzinie dostaniemy 1. Zatem jedyne co nam zostanie to wyciągnięte przed całkę wyrażenie:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(\Theta^*)^{k^*}\Gamma(k^*) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{n+t^2}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}}\Big(n\Big(1+\frac{t^2}{n}\Big)\Big)^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{n+1}{2}}\Big(1+\frac{t^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

Ostatecznie policzone I wstawiamy z powrotem do $f_T(t)$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{n+1}{2}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned} \tag{10}$$

Co należało obliczyć.

Bibliografia

[1] Wikipedia contributors. *Chi distribution — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* wikipedia.org.

[2] Wikipedia contributors. *Chi-squared distribution — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* wikipedia.org.

[3] Wikipedia contributors. *Probability density function — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* wikipedia.org.

[4] Wikipedia contributors. *Ratio distribution — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* wikipedia.org.