

Rozwiązanie równania wibracji akustycznych warstwy materiału za pomocą Metody Elementów Skończonych

Wojciech Barczyński - AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

2022-01-26

1 Problem

Problemem, którego rozwiązanie ma na celu ten projekt jest znalezienie Metoda Elementów Skończonych rozwiązania następującego równania: <https://www.overleaf.com/project/63d3125145b87825ae9400ee>

$$\begin{aligned}-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u &= \sin x \\ u(0) &= 2 \\ \frac{du(2)}{dx} + u(2) &= 0\end{aligned}$$

2 Wyprowadzenie sformułowania słabego

2.1 Doprowadzenie równania do postaci liniowo zależnej

Niech $v \in V = \{f \in H^1(\Omega) : f(0) = 0\}$

Całkując oraz przekształcając równania chcemy doprowadzić układ do postaci równości jednostronnie zależnej liniowo od u i v oraz jednostronnie liniowo zależnej od v - $B(u, v) = L(v)$.

Ponieważ $v \in V$, spełniona jest równość:

$$-\int_0^2 u''v \, dx - \int_0^2 uv \, dx = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$

Całkując $\int_0^2 u''v \, dx$ przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned}-u'v \Big|_0^2 + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx &= \int_0^2 \sin(x)v \, dx \\ -u'(2)v(2) + u'(0)v(0) + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx &= \int_0^2 \sin(x)v \, dx\end{aligned}$$

Ponieważ $v \in V \implies v(0) = 0$, to człon $u'(0)v(0) = 0$.

Podstawiając $\frac{du(2)}{dx} + u(2) = 0 \implies \frac{du(2)}{dx} = -u(2)$ otrzymujemy:

$$u(2)v(2) + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$

Przyjmując:

$$B(u, v) = u(2)v(2) + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx$$

$$L(v) = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$

otrzymujemy równość:

$$B(u, v) = L(v)$$

2.2 Uwzględnienie warunków brzegowych Dirichleta

Niech $\bar{u} \in U = \{f \in H^1 : f(0) = 2\}$

Wybieramy $\bar{u} = 2 \cdot e_0$

$$B(w + \bar{u}, v) = L(v)$$

Korzystając z liniowości $B(u, v)$ względem zmiennych u i v , możemy zapisać:

$$B(w, v) = L(v) - B(\bar{u}, v)$$

Przyjmując $L(v) = L(v) - B(\bar{u}, v)$ możemy określić sformułowanie słabe jako:

Znaleźć takie $w \in U$, że:

$$\begin{aligned} \forall v \in V \\ B(w, v) = L(v) \end{aligned}$$

3 Wybranie funkcji testujacych i rozwiązanie układu równań

Jako funkcje testujące wybrałem standardowy zbiór funkcji dla metody MES (oznaczamy kolejne funkcje testujące jako e_i) oraz rozwiązałem układ macierzowy wyznaczając współczynniki funkcji będącej przybliżeniem jednego rozwiązania zadanego równania.

4 Wyniki

Poniżej przedstawiam otrzymane rozwiązania, dla różnych wartości parametru n .



