Rozwiazanie równania wibracji akustycznych warstwy materiału za pomoca Metody Elementów Skończonych

Wojciech Barczyński - AGH, Wydział Infromatyki, Elektroniki i Telekomunikacji 2022-01-26

1 Problem

Problemem, którego rozwiazanie ma na celu ten projekt jest znalezienie Metoda Elementów Skończonych rozwiazania nastepujacego równania: https://www.overleaf.com/project/63d3125145b87825ae9400ee

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = \sin x$$
$$u(0) = 2$$
$$\frac{du(2)}{dx} + u(2) = 0$$

2 Wyprowadzenie sformułowania słabego

2.1 Doprowadzenie rówaniania do postaci liniowo zależnej

Niech
$$v \in V = \{ f \in H^1(\Omega) : f(0) = 0 \}$$

Całkujac oraz przekształcajac równania chcemy doprowadzić układ do postaci równości jednostronnie zależej liniowo od u i v oraz jednostoronnie liniowo zależnej od v - B(u, v) = L(v).

Ponieważ $v \in V$, spełniona jest równość:

$$-\int_0^2 u''v \, dx - \int_0^2 uv \, dx = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$

Całkujac $\int_0^2 u''v \, dx$ przez cześci otrzymujemy:

$$-u'v\bigg|_0^2 + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$
$$-u'(2)v(2) + u'(0)v(0) + \int_0^2 u'v' \, dx - \int_0^2 uv \, dx = \int_0^2 \sin(x)v \, dx$$
Ponieważ $v \in V \implies v(0) = 0$, to człon $u'(0)v(0) = 0$.

Podstawiajac
$$\frac{du(2)}{dx} + u(2) = 0 \implies \frac{du(2)}{dx} = -u(2)$$
 otrzymujemy:

$$u(2)v(2) + \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx = \int_0^2 \sin(x)v dx$$

Przyjmujac:

$$B(u,v)=u(2)v(2)+\int_0^2 u'v'\,dx\ -\int_0^2 uv\,dx$$

$$L(v)=\int_0^2 \sin(x)v\,dx$$
 otrzymujemy równość:

$$B(u, v) = L(v)$$

2.2 Uwzglednienie warunków brzegowych Dirichleta

Niech
$$\bar{u} \in U = \{ f \in H^1 : f(0) = 2 \}$$

Wybieramy $\bar{u} = 2 \cdot e_0$
$$B(w + \bar{u}, v) = L(v)$$

Korzystajac z liniowości B(u,v) wgledem zmiennych u i v, możemy zapisać:

$$B(w,v) = L(v) - B(\bar{u},v)$$

Przyjmujac $L(v) = L(v) - B(\bar{u}, v)$ możemy określić sformułowanie słabe jako:

Znaleźdź takie
$$w \in U$$
, że:
$$\forall v \in V$$

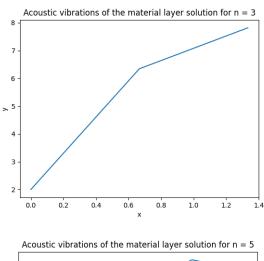
$$B(w,v) = \bar{L(v)}$$

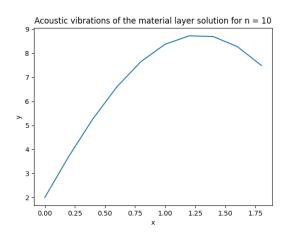
3 Wybranie funkcji testujacyc i rozwiazanie układu równań

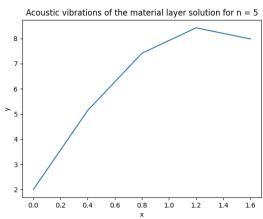
Jako funkcje testujace wybrałem standardowy zbiór funkcji dla metody MES (oznaczamy kolejne funkcje tedtujace jako e_i) oraz rozwiazałem układ macierzowy wyznaczajac współczynniki funkcji bedacej przybliżeniem jendnego rozwiazania zadanego rówania.

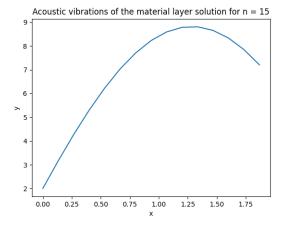
4 Wyniki

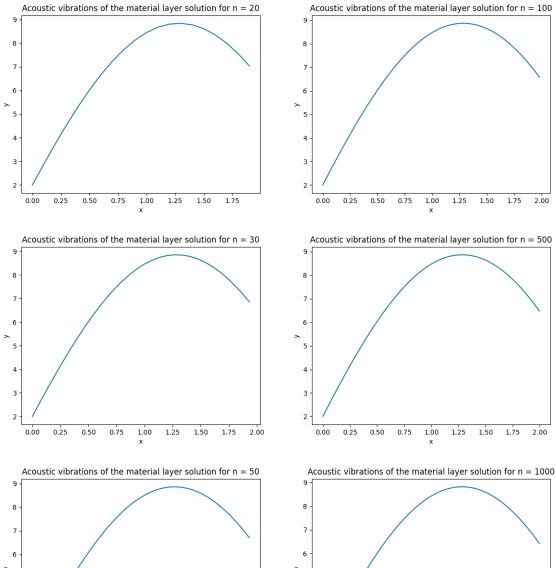
Poniżej przedstawiam otrzymane rozwiazania, dla różnych wartości parametru n.











3