Zadanie obliczeniowe - odkształcenie sprężyste.

1. Równanie

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$\text{Warunek Dirichleta: } u(2) = 0$$

$$\text{Warunek Cauchy'ego: } \frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 \text{ dla } x \in [0,1] \\ 5 \text{ dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

2. Wyprowadzenie

Ponieważ równanie posiada prawostronny zerowy warunek Dirichleta:

$$V = \{v(x) : v(2) = 0\}$$

Mnożąc równanie przez $v \in V$ i całkując na $\Omega = [0,2]$ otrzymamy:

$$\int_0^2 -\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)dx = \int_0^2 0v(x)dx$$

$$-\int_0^2 (E'(x)u'(x) + E(x)u''(x))v(x)dx = 0$$

Ponieważ $E'(x) = 0, x \in [0,2]$:

$$-\int_0^2 E(x)u''(x)v(x)dx = 0$$

Licząc całkę przez części:

$$-[E(x)u'(x)v(x)] + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

$$-E(2)u'(2)v(2) + E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

Wykorzystując warunki brzegowe i własności funkcji v:

$$v(2) = 0, u'(0) + u(0) = 10 \Rightarrow u'(0) = 10 - u(0)$$

$$E(0)v(0)(10 - u(0)) + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

$$\int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 3v(0)u(0) = -30v(0)$$

Oznaczymy kolejno:

$$B(u,v) = \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 3u(0)v(0)$$

$$L(v) = -30v(0)$$

$$B(u,v) = L(v), \forall v \in V$$

3. Dyskretyzacja

Dzielimy przedział $[0,2]$ na n elementów o długości $h = \frac{2}{n}$. Punkty brzegowe:

$$x_0 = 0, x_i = ih, x_n = 2 \Rightarrow x_{i-1} = x_i - h, x_{i+1} = x_i + h$$

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{x-1}}{h} = \frac{x}{h} - i + 1 \text{ dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} = i + 1 - \frac{x}{h} \text{ dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ w p. p.} \end{cases} \quad \forall i = 0, 1, ..., n-1$$

Pochodna wynosi:

$$e_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \text{ dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} \text{ dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ w p. p.} \end{cases}$$

Zajmujemy się teraz problemem przybliżonym:

$$u(x) \approx u_{h(x)} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i e_i(x)$$

Otrzymując układ równań MES:

$$B\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i e_{i(x)}, e_j\right) = L(e_j), j = 1, 2, ..., n-1$$

Dalej rozpisując z faktu, że B jest funkcjonałem biliniowym:

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i B(e_i, e_j) = L(e_j)$$

Zapisując powyższy układ w postaci macierzowej otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} B(e_0,e_0) & B(e_1,e_0) & ... & B(e_{n-1},e_0) \\ B(e_0,e_1) & B(e_1,e_1) & ... & B(e_{n-1},e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0,e_{n-1}) & B(e_1,e_{n-1}) & ... & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$B(e_i, e_j) = \int_0^2 E(x)e_i'(x)e_j'(x)dx - 3e_i(0)e_j(0)$$

$$L(e_j) = -30e_j(0)$$

Dla $|i-j| > 1$ $B(e_i, e_j) = 0$, ponieważ któraś z e_i, e_j oraz jej pochodną.

Dodatkowo zauważyć można, że $-3e_i(0)e_j(0)$ oraz $-30e_j(0)$ z dziedziny funkcji e_i, e_j zeruje się gdy $i, j \neq 0 \lor i, j \neq 1$, zaś dla $i, j = 1$ podstawiając do ich wzoru ich wartość również wyniesie 0. Dla $i, j = 0$, otrzymujemy kolejno -3 i -30, a dla w wypadku mieszanego dla B, gdzie jeden element z i, j wyniesie 0, a drugi 1 - ponownie się wyzerują.

Otrzymujemy więc:

- $i = 0$

$$B(e_0, e_0) = \int_{x_0}^{x_1} E(x)(e_0'(x))^2 dx - 3$$

- $i = 1, 2, ..., n - 1$

$$B(e_i, e_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} E(x)(e_i'(x))^2 dx$$

$$B(e_i, e_{i+1}) = B(e_{i+1}, e_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x)e_i'(x)e_{i+1}'(x)dx$$

Co wstawiając ponownie do macierzy daje:

$$\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} E(x)(e_0')^2 dx - 3 & \int_{x_0}^{x_1} E(x)e_1'e_0'dx & ... & 0 \\ \int_{x_0}^{x_1} E(x)e_0'e_1'dx & \int_{x_0}^{x_2} E(x)(e_1')^2 dx & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \int_{x_{n-2}}^{x_n} E(x)(e_{n-1}')^2 dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu pozwoli na wyliczenie szukanej funkcji:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i e_i(x)$$