



---

UNIwersytet Warszawski  
**Wydział Nauk Ekonomicznych**

---

# Przestrzenne modelowanie zjawisk ekonomicznych w R

**dr Katarzyna Kopczewska**

Wydział Nauk Ekonomicznych Uniwersytet Warszawski



# Dlaczego metody przestrzenne?

## Pierwsze prawo geografii:

Waldo Tobler (1970) „*Everything is related to everything else, but near things are more related than distant things.*”

## Mamy przynajmniej 4 motywy:

- **Dlaczego nie?** – ze względu na dostępność danych przestrzennych i rozwiniętego softwaru
- **Dokładność** – problem obciążenia i niezgodności estymatorów MNK w przypadku istnienia zależności przestrzennych (niespełnione założenie o losowości błędów)
- **Wartość dodana** – można testować nowe hipotezy
- **Aby podążać za naturalnymi wzorcami** – zjawiska społeczne są najczęściej skorelowane w przestrzeni



**Dalej: szczegóły przestrzennego modelowania zjawisk ekonomicznych**





# Co mierzymy ?

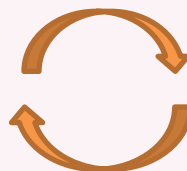
## Przestrzenne zjawiska społeczno-ekonomiczne

### Niewidzialne

- Oddziaływanie polityki
- Wzorce rdzeń-peryferia i ich trwałość
- Dyfuzja – za zwyczaj od rdzenia w kierunku peryferii
- Mechanizmy konwergencji i kohezji
- Renta instytucjonalna
- Efekty podziału administracyjnego
- Rola infrastruktury



**Zazwyczaj chcemy widzieć wpływ tych mechanizmów na widzialne dane/procesy ekonomiczno-społeczne**



### Widzialne

- Migracje
- Handel
- Rynek pracy
- Edukacja
- Rozwój gospodarczy
- PKB i jego wzrost



**Zazwyczaj chcemy widzieć obserwowany efekt i wnioskować o nieobserwowalnej polityce**

**badanie zjawisk spillover / dyfuzji**

**poszukiwanie klastrów / hot spot i reżimów przestrzennych**



# Instrumentarium

**Co przestrzennego możemy wykorzystać w modelowaniu przestrzennym?**

→ **Macierz wag przestrzennych**

- definiuje strukturę sąsiedztwa, ale też zasięg oddziaływania poszukiwanych efektów przestrzennych
  - można uwzględnić autokorelację przestrzenną błędów
  - można uwzględnić opóźnienia przestrzenne i opóźnienia czasowo-przestrzenne zmiennych (objaśniających i objaśnianych)
  - pozwala policzyć statystyki przestrzenne

→ **Odległość pomiędzy lokalizacjami**

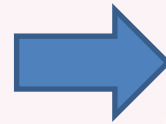
- można wykorzystać jako ciągłą zmienną różnicującą poziom innych zmiennych
  - można użyć jako zmienną objaśniającą
  - można wykorzystać do budowy macierzy wag odwrotnej odległości



# Dlaczego R ?

Co wspólnego ma  
Poznań i Bergen ?

I co to ma wspólnego  
z R ???

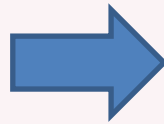




# Dlaczego R ?

Co wspólnego ma  
Poznań i Bergen ?

I co to ma wspólnego  
z R ???



## Prof. Roger Bivand

Autor środowiska i pakietów  
przestrzennych w R

Maintainer TaskViews: **Spatial**  
(Analysis of Spatial Data)

- Reading and writing spatial data
- Point pattern analysis
- Geostatistics
- Disease mapping and areal data analysis
- Spatial regression
- Ecological analysis



# Pakiety przestrzenne w R

<b>sp:</b>	Classes and methods for spatial data
<b>spdep:</b>	Spatial dependence: weighting schemes, statistics and models
<b>splancs:</b>	Spatial and Space-Time Point Pattern Analysis
<b>classInt:</b>	Choose univariate class intervals
<b>maptools:</b>	Tools for reading and handling spatial objects
<b>splancs:</b>	Spatial and Space-Time Point Pattern Analysis
<b>rgdal:</b>	Bindings for the Geospatial Data Abstraction Library
<b>rgeos:</b>	Interface to Geometry Engine - Open Source (GEOS)
<b>spgwr:</b>	Geographically weighted regression
<b>RColorBrewer:</b>	ColorBrewer palettes
<b>spatstat:</b>	Spatial Point Pattern analysis, model-fitting, simulation, tests
<b>sphet:</b>	Estimation of spatial autoregressive models with and without heteroskedastic innovations
<b>splm:</b>	Econometric Models for Spatial Panel Data
<b>spatialprobit:</b>	Spatial Probit Models
<b>SmarterPoland:</b>	A set of tools developed by the Foundation SmarterPoland.pl



# Pakiety przestrzenne w R

## w core

<b>DCluster:</b>	Functions for the detection of spatial clusters of diseases
<b>deldir:</b>	Delaunay Triangulation and Dirichlet (Voronoi) Tessellation
<b>geoR:</b>	Analysis of geostatistical data
<b>gstat:</b>	spatial and spatio-temporal geostatistical modelling, prediction and simulation
<b>RandomFields:</b>	Simulation and Analysis of Random Fields
<b>raster:</b>	Geographic data analysis and modeling
<b>spacetime:</b>	classes and methods for spatio-temporal data

I wiele wiele innych





# Jak zacząć?

\* **Ekonomiści** korzystają głównie z danych obszarowych, wg podziału terytorialnego

- Mapa – shapefile np. z DIVA GIS (*open source*)
- Dane – w porządku obszarów z mapy, dane z GUS, Eurostat, ECB, IMF, EVS, Diagnoza społeczna, Komenda Główna Policji etc.
- R – pakiety sp, spdep, classInt, maptools, rgeos, RColorBrewer,...
- Pomysł na badanie: wkład własny

Czyli jak prowadzić badania za 0 zł 😊



# Kod R: Starter (1)

```
library(spdep)
library(maptools)
library(sp)

# wczytanie plików shapefile dla powiatów i województw
woj<-readShapePoly("POL_adm1.shp",
                   proj4string=CRS("+proj=longlat+ellps=clrk80"))
pow<-readShapePoly("POL_adm2.shp",
                   proj4string=CRS("+proj=longlat+ellps=cl

# środki powiatów
crds<-coordinates(pow)

# mapa administracyjna
plot(pow)
plot(woj, add=TRUE, lwd=2)
points(crds, pch=21, bg="red", cex=0.8)
```



# Macierz wag przestrzennych

- Sąsiedztwo

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

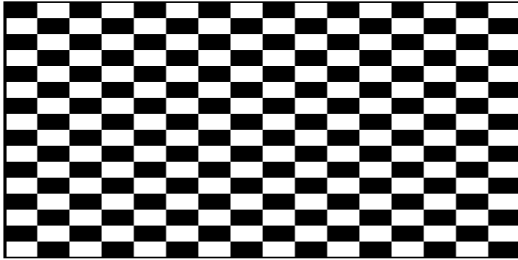
- Wagi przestrzenne  $W$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

```
# macierz wag przestrzennych W dla powiatów (contiguity matrix)
cont.nb<-poly2nb(as(pow, "SpatialPolygons"))
cont.listw<-nb2listw(cont.nb, style="W", zero.policy=TRUE)

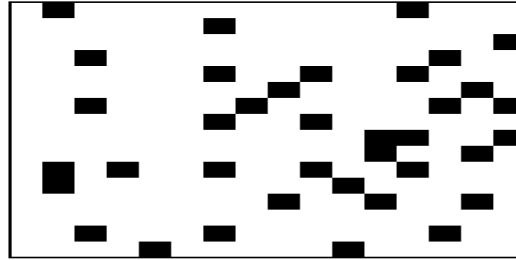
# wczytywanie danych z *.csv skonsolidowane i uporządkowane
dane<-read.csv("dane powiaty.csv ", sep=";", dec=",", header=TRUE)
summary(dane)
```

# Autokorelacja przestrzenna (1)



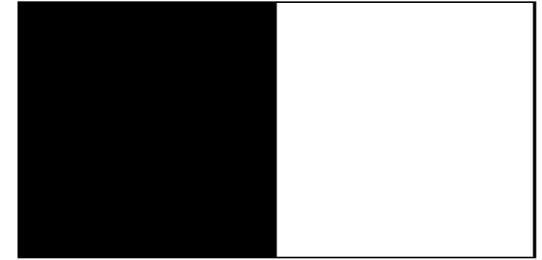
Negative (extreme)

**Ujemna autokorelacja przestrzenna** – gdy wartości podobne sąsiadują rzadziej niż wg rozkładu losowego



No correlation

**Brak autokorelacji** – gdy brak jednoznacznego wzorca



Positive (extreme)

**Dodatnia autokorelacja przestrzenna** - wartości podobne sąsiadują częściej niż wg rozkładu losowego

```
dane12<-dane[dane$rok==2012, ]  
wynik<-moran.test(dane12$XA06, cont.listw)  
wynik  
attributes(wynik)
```

```
Moran's I test under randomisation  
data: dane12$XA06  
weights: cont.listw
```

```
Moran I statistic standard deviate = 13.6153, p-value < 2.2e-16  
alternative hypothesis: greater  
sample estimates:
```

```
Moran I statistic  
0.462766094
```

```
Expectation  
-0.002666667
```

```
Variance  
0.001168579
```



# Autokorelacja przestrzenna (2)

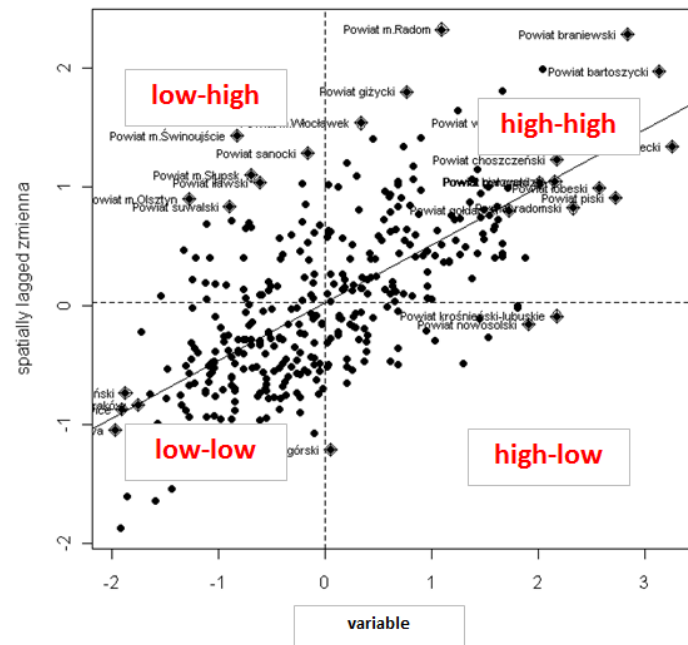
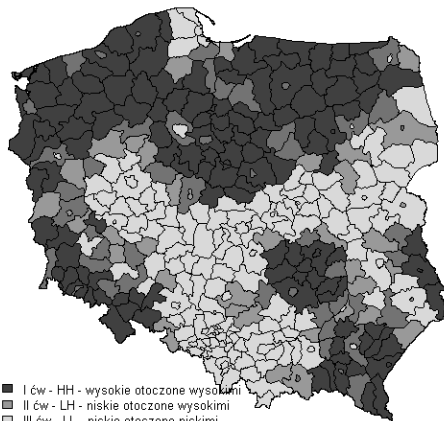
```
# Moran scatterplot
```

```
x<-dane12$XA06
```

```
zx<-as.data.frame(scale(x))
```

```
moran.plot(zx$V1, cont.listw, pch=19,  
labels=as.character(dane12$powiat))
```

Przynależność regionów do ćwiartek  
z wykresu punkowego Morana





# Badana przykładowa zależność

$$Y \sim X$$

średnie wynagrodzenie  $\sim$  stopa bezrobocia

## Zmienne kontrolne:

- udział zatrudnienia w usługach
- odległość powiatu od rdzenia (relatywna lokalizacja)

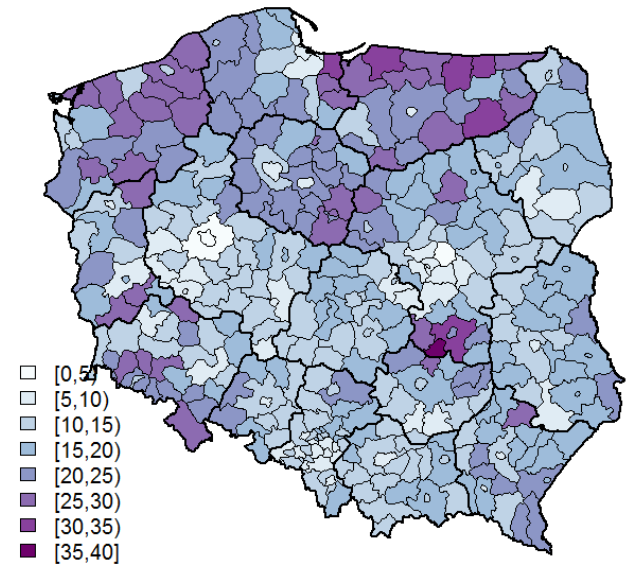
## Ważne problemy w modelowaniu:

- Stałość strukturalna w czasie i przestrzeni danej zmiennej
- Zróżnicowanie / bieżność w przestrzeni danej zmiennej
- Zbieżność rozkładów przestrzennych (charakterystyk przestrzennych) badanych zmiennych
  - ➔ jeśli te problemy istnieją, to konieczny taki dobór formy modelu, aby je zniwelować



# Rozkład przestrzenny

Stopa bezrobocia w powiatach w 2012r.



```
# mapa stopy bezrobocia wg powiatów
```

```
zmienna<-dane$XA06[dane$rok==2012]
```

```
summary(zmienna)
```

```
przedziały<-8
```

```
kolory<-brewer.pal(przedziały, "BuPu") # wybór kolorów
```

```
klasy<-classIntervals(zmienna, przedziały, style="fixed",  
    fixedBreaks=c(0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40))
```

```
tabela.kolorów<-findColours(klasy, kolory)
```

```
plot(pow, col=tabela.kolorów)
```

```
plot(woj, lwd=2, add=TRUE)
```

```
legend("bottomleft", legend=names(attr(tabela.kolorów,  
    "table")), fill=attr(tabela.kolorów, "palette"), cex=1, bty="n")
```

```
title(main="Stopa bezrobocia w powiatach w 2012r.")
```



# Wykres panelowy

```
sub1<-dane[dane$odległość==0,]  
sub2<-dane[dane$odległość<25, ]  
sub3<-dane[dane$odległość<50 & dane$odległość>25, ]  
sub4<-dane[dane$odległość<100 & dane$odległość>50, ]  
sub5<-dane[dane$odległość>100, ]
```

```
msub1<-aggregate(sub1$XA06, by=list(sub1$rok), mean,  
msub2<-aggregate(sub2$XA06, by=list(sub2$rok), mean,  
msub3<-aggregate(sub3$XA06, by=list(sub3$rok), mean,  
msub4<-aggregate(sub4$XA06, by=list(sub4$rok), mean, na.rm=TRUE)  
msub5<-aggregate(sub5$XA06, by=list(sub5$rok), mean, na.rm=TRUE)
```

```
plot(msub1, type="n", ylim=c(0, 30), axes=FALSE, xlab="    ", ylab=" ")
```

```
axis(1); axis(2)
```

```
lines(msub1, lwd=3)
```

```
lines(msub2, lwd=3, lty=2)
```

```
lines(msub3, lty=1, lwd=2)
```

```
lines(msub4, lty=2, lwd=2)
```

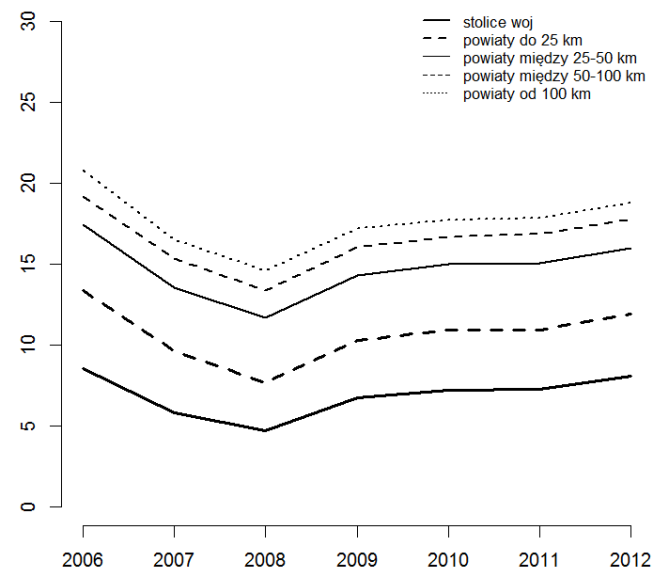
```
lines(msub5, lty=3, lwd=2)
```

```
title(main="Rejestrowana stopa bezrobocia
```

```
      wg odległości powiatu od miasta wojewódzkiego")
```

```
legend("topright", legend=c("stolice woj", "powiaty do 25 km", "powiaty między 25-  
50 km", "powiaty między 50-100 km", "powiaty od 100 km"),  
      lty=c(1,2,1,2,3), lwd=c(2,2,1,1,1), bty="n", cex=0.8)
```

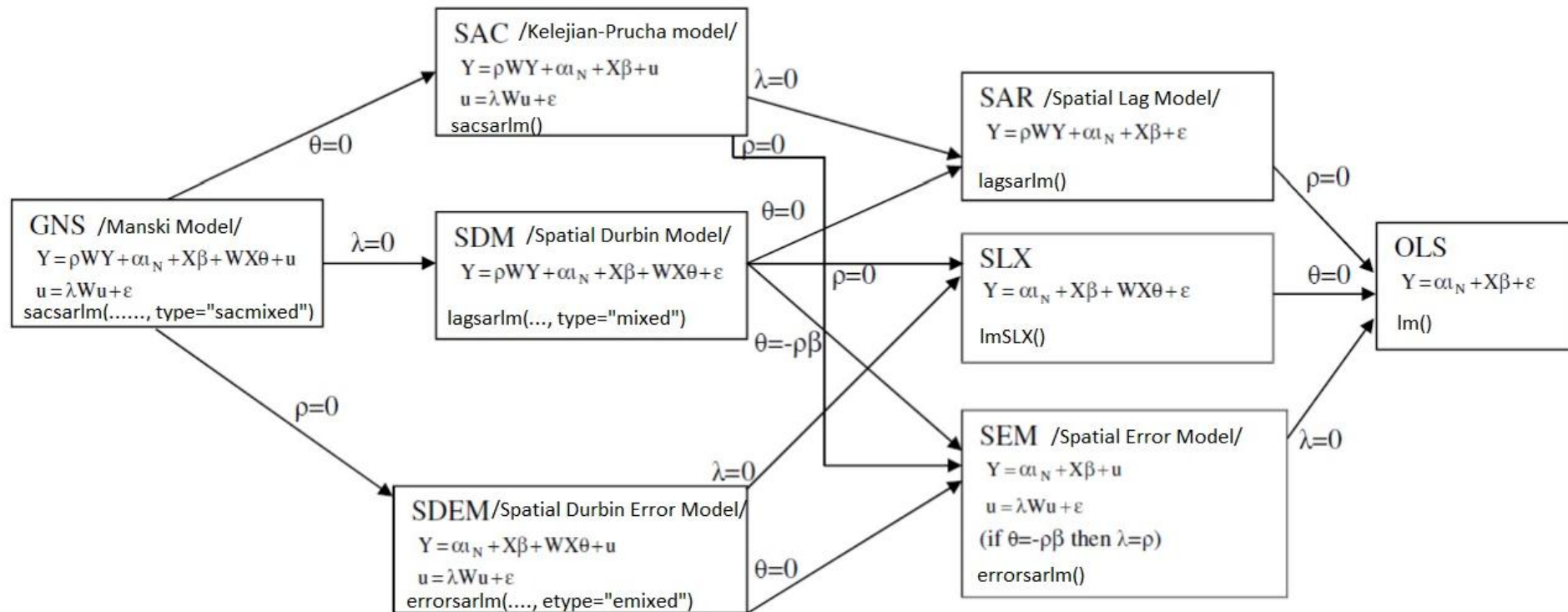
Rejestrowana stopa bezrobocia  
wg odległości powiatu od miasta wojewódzkiego







# Modele przestrzenne jednookresowe



Elhorst's Flow Chart (Vega & Elhorst, 2013) uzupełniony o kody R



# Zmienne do modelu

```
# model
# y      przeciętne wynagrodzenie Polska=100% (XA31)
# x1     stopa bezrobocia (XA06)
# x2     udział osób zatrudnionych w usługach (XA05/XA20)
# x3     odległość od miasta woj. (odległość)

# estymacja modelu
dane$y<-dane$XA31
dane$x1<-dane$XA06
dane$x2<-dane$XA05/dane$XA20
dane$x3<-dane$odległość

dane12<-dane[dane$rok==2012, ] # dla roku 2012

równanie<-y~x1+x2+x3
```



# Model uogólniony (GNS)

```
model<-sacsarlm(równanie, data=dane12, cont.listw, type="sacmixed")  
summary(model)
```

```
Type: sacmixed  
Coefficients: (asymptotic standard errors)  
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)  
(Intercept) 29.996984  10.034294  2.9894 0.002795  
x1           -0.323845   0.127141 -2.5471 0.010861  
x2           50.211856   7.146706  7.0259 2.127e-12  
x3           -0.040632   0.033888 -1.1990 0.230520  
lag.x1        0.311368   0.165833  1.8776 0.060437  
lag.x2       17.208147  17.188251  1.0012 0.316751  
lag.x3        0.033665   0.046503  0.7239 0.469104
```

```
Rho: 0.52892 Asymptotic standard error: 0.131 z-value: 4.033, p-value: 5.5059e-05  
Lambda: -0.415 Asymptotic standard error: 0.184 z-value: -2.249, p-value: 0.024515  
LR test value: 27.126, p-value: 5.39e-05  
Log likelihood: -1393.363 for sacmixed model  
ML residual variance (sigma squared): 88.505, (sigma: 9.4077)  
Number of observations: 376  
Number of parameters estimated: 10  
AIC: 2806.7, (AIC for lm: 2823.9)
```

GNS /Manski Model/  
$$Y = \rho WY + \alpha_N + X\beta + WX\theta + u$$
$$u = \lambda Wu + \varepsilon$$
`sacsarlm(....., type="sacmixed")`



# Model SAC

```
model<-sacsarlm(równanie, data=dane12, cont.listw)
summary(model)
```

Type: sac

Coefficients: (asymptotic standard errors)

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )
(Intercept)	32.854871	7.973674	4.1204	3.782e-05
x1	-0.123572	0.080960	-1.5263	0.1269
x2	55.975653	6.594515	8.4882	< 2.2e-16
x3	-0.015493	0.013934	-1.1119	0.2662

SAC /Kelejian-Prucha model/

$$Y = \rho WY + \alpha_N + X\beta + u$$

$$u = \lambda Wu + \varepsilon$$

sacsarlm()

Rho: 0.5429 Asymptotic standard error: 0.0847 z-value: 6.4058, p-value: 1.496e-10

Lambda: -0.433 Asymptotic standard error: 0.134 z-value: -3.224, p-value: 0.001262

LR test value: 22.036, p-value: 1.6403e-05

Log likelihood: -1395.908 for sac model

ML residual variance (sigma squared): 89.149, (sigma: 9.4418)

Number of observations: 376

Number of parameters estimated: 7

AIC: 2805.8, (AIC for lm: 2823.9)



# Przestrzenny model panelowy

```
library(splm)
```

```
dane$order<-rep(1:376, times=7)
```

```
dane<-dane[,c(36,16,1:35)]
```

```
model.spml<-spml(formula=równanie, data=dane, listw=cont.listw,  
  model="pooling", effect="twoways", lag=TRUE, spatial.error="b")
```

```
summary(model.spml)
```

Error variance parameters:

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t )
rho	-0.420245	0.058213	-7.2191	5.234e-13 ***

Spatial autoregressive coefficient:

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t )
lambda	0.556182	0.033214	16.746	< 2.2e-16 ***

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t )
(Intercept)	30.2560632	0.7324545	41.3078	< 2.2e-16 ***
x1	-0.1227367	0.0270357	-4.5398	5.631e-06 ***
x2	63.3827536	2.5849719	24.5197	< 2.2e-16 ***
x3	-0.0180097	0.0049756	-3.6196	0.000295 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



# Direct and indirect impacts

```
imp <- impacts(model, tr=trMat, R=2000)
summary(imp, zstats=TRUE, short=TRUE)
```

Impact measures (sac, trace):

	Direct	Indirect	Total
x1	-0.13261940	<b>-0.13773181</b>	-0.2703512
x2	60.07413659	<b>62.38996377</b>	122.4641004
x3	-0.01662756	<b>-0.01726854</b>	-0.0338961

=====  
Simulation results (asymptotic variance matrix):  
=====

Simulated z-values:

	Direct	Indirect	Total
x1	-1.571985	-1.3712662	-1.526920
x2	8.569725	2.5810763	4.306607
x3	-1.128902	-0.9835448	-1.082085

Simulated p-values:

	Direct	Indirect	Total
x1	0.11595	0.1702920	0.12678
x2	< 2e-16	0.0098493	1.6578e-05
x3	0.25894	0.3253394	0.27921

*direct impact: wpływ zmiany  
x(i) na zmianę y(i)*

*indirect impact: wpływ  
zmiany x(i) na zmianę y(j)*

*total impact: łączny wpływ  
direct + indirect impact*



**Badanie efektu spillover**



# No właśnie, jak modelować spillover...

## Jest kilka podejść teoretycznych:

- 1) Podstawowe podejście: uwzględnienie opóźnień przestrzennych zmiennej objaśnianej lub błędu w modelu (**spatial dependence models**). Spillover istnieje, gdy współczynniki przestrzenne są istotne (e.g. Schaltegger & Zemp, 2003; Lundberg, 2001).
- 2) Podobnie jak powyżej, ale opóźnienia przestrzenne dotyczą zmiennych objaśniających ( $\Theta_{WX}$ ) (**model Durbina**) (Yuandong et al., 2013)
- 3) Przez uwzględnienie **innej macierzy wag przestrzennych**, np. zależnej od lokalizacji, dochodu per capita czy czynników demograficznych (kompozycja etniczna) (Case & Rosen, 1993)
- 4) Przez uwzględnienie macierzy wag przestrzennych **z sąsiadami w promieniu d km, z różnymi punktami odcięcia**, co umożliwia ocenę zmian wyników w zależności od kryterium sąsiedztwa (Schaltegger & Zemp, 2003)
- 5) Anselin (2003) proponuje rozróżnienie pomiędzy **lokalnymi i globalnymi efektami**, przy czym lokalny spillover pojawia się pomiędzy połączonymi lokalizacjami, zaś globalny spillover pomiędzy niepołączonymi lokalizacjami



# No właśnie, jak modelować spillover...c.d.

- 6) LeSage & Pace (2009) proponują wydzielenie **efektów bezpośrednich i spillover**. Efekty bezpośrednie pojawiają się gdy efekt zmiany zmiennej objaśniającej pojawia się tylko jako oddziaływanie na zmianę zmiennej objaśnianej w tej samej lokalizacji. W przypadku spillover ten wpływ jest widziany w innej, sąsiedzkiej lokalizacji. W sensie operacyjnym, efekty bezpośrednie to elementy diagonalne macierzy pochodnych cząstkowych, zaś efekty spillover są spoza przekątnej (Claeys et al., 2012; Elhorst, 2010).
- 7) LeSage and Pace (2011) proponują jeszcze inny podział, gdzie **globalne spillover** mają **pętlę zwrotną (feedback)** – tj. zjawisko wraca do regionu emitującego, zaś lokalne spillover nie mają takiej pętli zwrotnej.
- 8) Capello (2007) proponuje **spillover jako miarę (indeks)** wykorzystywaną w modelach przestrzennej zależności. Dla regionalnego wzrostu byłoby to średnie PKB ważone wagami przestrzennymi zależnymi od odległości pomiędzy regionami.
- 9) Reback (2011) proponuje **międzyregionalny model lokalnych spillover**, w którym w regionach granicznych obserwuje się spillover. Oddzielenie naturalnych trendów (*local common shocks*) od efektów przestrzennych (spatial spillover) jest możliwe przez model zmiennych instrumentalnych. Prognozy z regionów wewnętrznych są przenoszone do regionów granicznych, a różnica pomiędzy prognozą a wartością obserwowaną jest modelowana jako spillover.





# Przykład: przestrzenny zasięg samorządów regionalnych (1)

**Czy przestrzeń ma znaczenie dla samorządów lokalnych w implementacji regionalnej polityki rozwojowej?**

- Odległość geograficzna jest czynnikiem osłabiającym transmisję polityki rozwojowej
- Samorządy położone peryferyjnie są słabsze niż te centralne
- ➔ Jak pokazują wyniki, efektywny zasięg centrów regionalnych nie przekracza 25 km (tylko najbliższe sąsiedztwo gminy). Pozostałe samorządy można traktować jako peryferyjne.
  - ➔ Badanie na danych gminnych NTS5 z lat 1995-2007

*Kopczewska K., 2013, "The spatial range of local governments: does geographical distance affect governance and public service?", The Annals of Regional Science, Volume 51, Issue 3 (2013), Page 793-810, IF=0,901, DOI: 10.1007/s00168-013-0567-z*



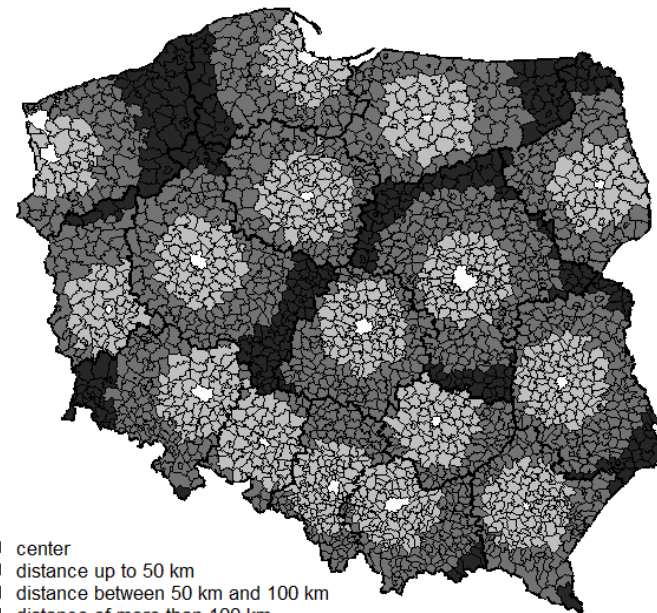
# Przykład: przestrzeń zasięg samorządów regionalnych (1)

Odległość między gminą / powiatem a miastem woj.

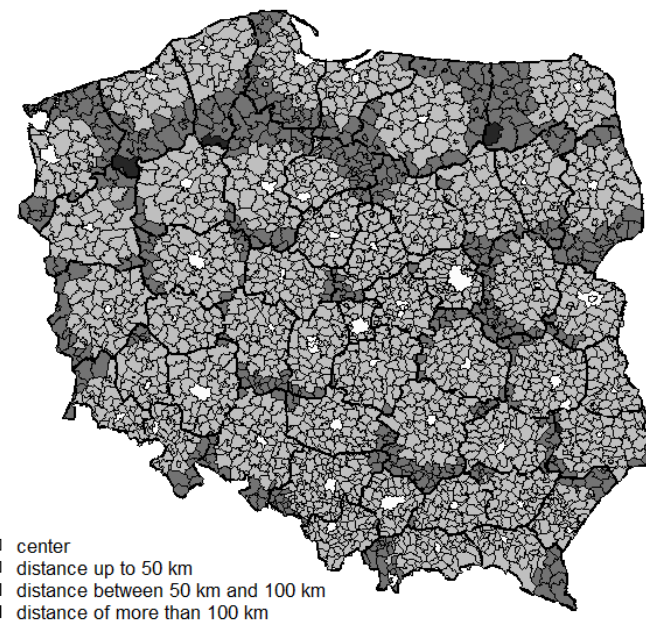
```
# macierz odległości Dij
crds<-coordinates(pow)
n<-dim(crds)
km<-matrix(0, nrow=n[1], ncol=n[1])
for(i in 1:n[1]){
  km[i,]<-spDistsN1(crds, crds[i,],
    longlat=TRUE)} # pakiet sp
km[1:5, 1:5]
min(km[km>0])# [1] 0.8622584
max(km) # [1] 765.6228
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0.00000	95.10024	112.82814	155.22502	125.77449
[2,]	95.10024	0.00000	68.46546	78.36275	62.77604
[3,]	112.82814	68.46546	0.00000	52.39279	21.44033
[4,]	155.22502	78.36275	52.39279	0.00000	31.99598
[5,]	125.77449	62.77604	21.44033	31.99598	0.00000

after the 1999 reform



prior to the 1999 reform

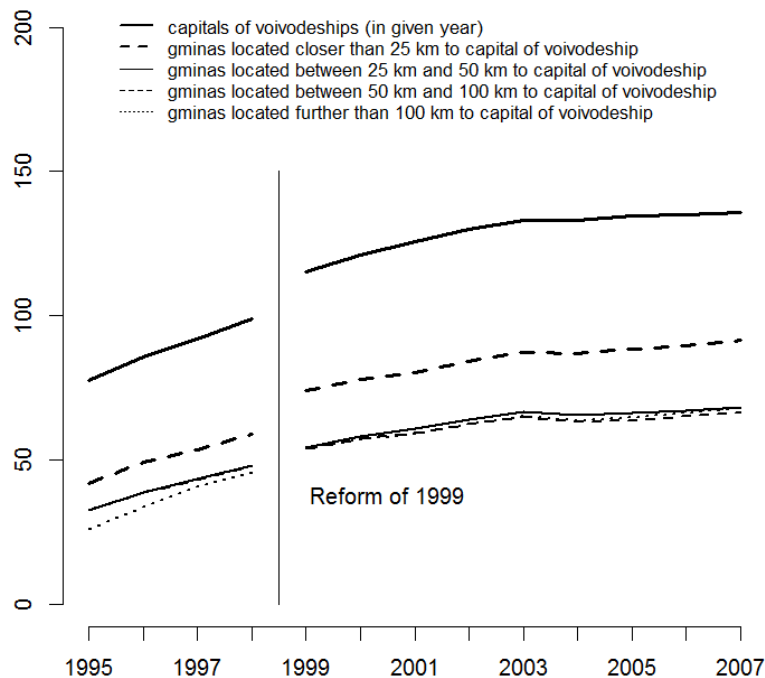




# Przykład: przestrzenny zasięg samorządów regionalnych (3)

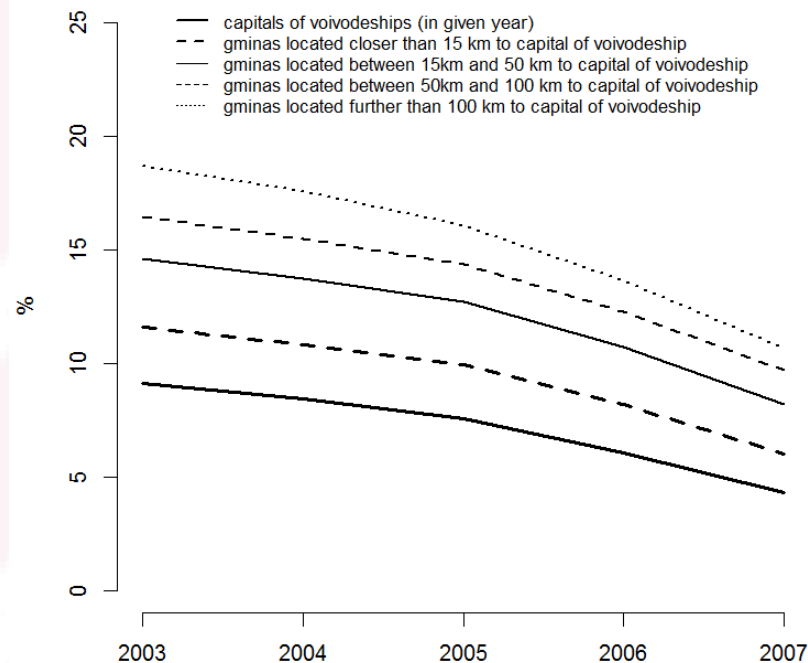
## Wyniki społeczno-gospodarcze gmin ze względu na odległość do miasta wojewódzkiego

Municipalities – Economic entities per 1000 inhabitants



Municipalities performance vs. distance to capital of voivodeship in given years

Municipalities – Rate of unemployment



Municipalities performance vs. distance to capital of voivodeship in given years



# Przykład: przestrzenny zasięg samorządów regionalnych (4)

$$xx1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot xx0 + \beta_2 \cdot city + \gamma_1 \cdot DIST + \gamma_2 \cdot DIST^2 + \gamma_3 \cdot DIST^3 + \gamma_4 \cdot DIST^4 + e$$
$$e = \lambda We + u$$

## Zmienna objaśniana:

xx1 – relatywne wydatki lub dochody *per capita* w cenach stałych jako Polska = 100 w ostatnim okresie (2007)

## Zmienne objaśniające :

xx0 – jak xx1 ale w pierwszym okresie (1999)

DIST<sup>1</sup>, DIST<sup>2</sup>, DIST<sup>3</sup> and DIST<sup>4</sup>- wielomian odległości Euklidesowej pomiędzy NTS2 i NTS5

CITY – zmienna zero-jedynkowa, =1 dla siedzib władz powiatowych

```
model<-errorsarlm(dane$xx1~dane$xx0+dane$city+dane$dist+I(dane$dist^2)+
  I(dane$dist^3)+ I(dane$dist^4), data=dane, cont.listw,
  tol.solve=2e-40)
summary(model)
```

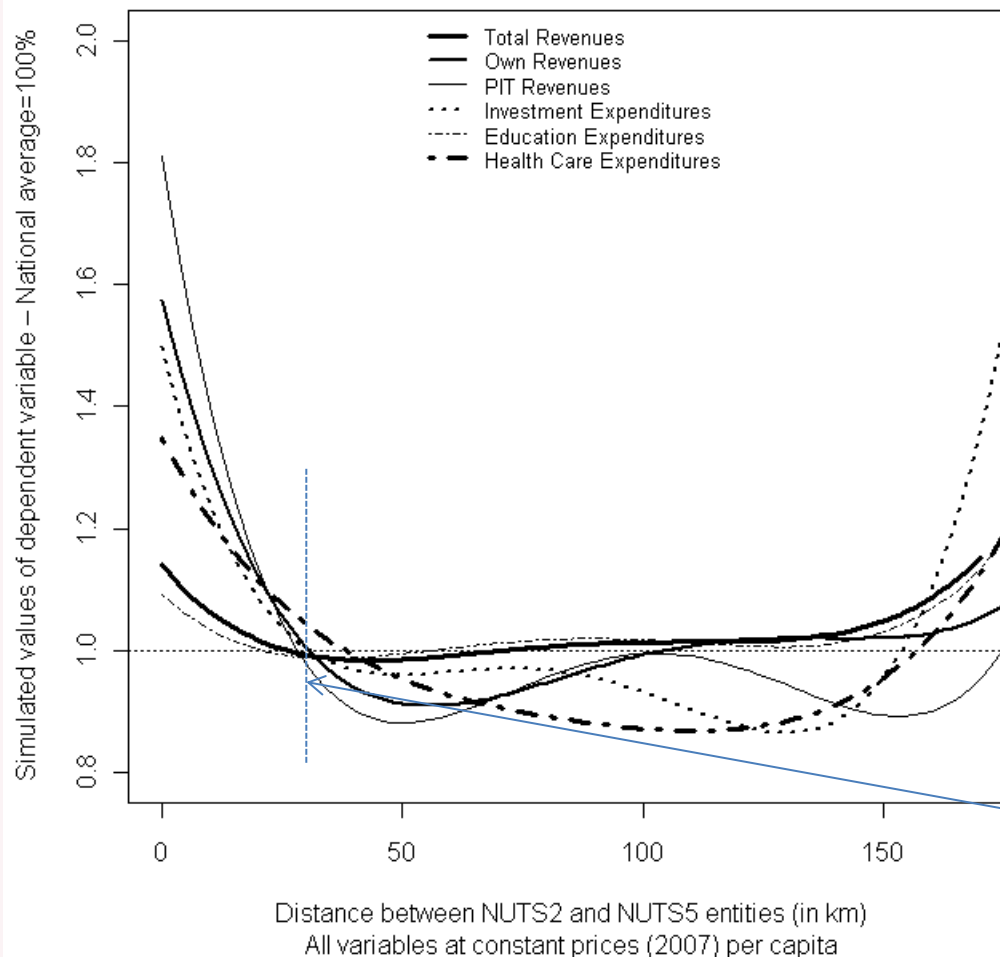
```
SRMSE<-sqrt(sum((model$fitted.values-dane$xx1)^ 2)/ dim(dane)[1]) /
  (mean(dane$xx1))
```

```
SRMSE
```



# Przykład: przestrzenny zasięg samorządów regionalnych (5)

Polynomial distance as explanatory variable



- Dochody ogółem
- Dochody własne
- Dochody z PIT
- Wydatki inwestycyjne
- Wydatki na edukację
- Wydatki na ochronę zdrowia

Model interakcji przestrzennych  
(*spatial interactions model*)

**Zasięg miast rdzeniowych -  
dyfuzja**



# Krótką reklama naukowa



[www.ersa.org](http://www.ersa.org)

[www.ersa.org.pl](http://www.ersa.org.pl)

## Międzynarodowe stowarzyszenie naukowe regionalistów

- Urbanistyka
- Geografia
- Ekonomia i ekonometria
- Planowanie przestrzenne
- Gospodarka przestrzenna
- Socjologia
- Polityka gospodarcza
- .....

Spotkania i badania naukowe dotyczące regionu,  
przestrzeni, modelowania, polityki w przestrzeni,  
specjalizacji etc.



**Dziękuję za uwagę!**

[kkopczewska@wne.uw.edu.pl](mailto:kkopczewska@wne.uw.edu.pl)