α-Hölderowska ciagłość

Przypomnijmy, że $D = 2 + log_b a$, $a < 1 < b$ oraz $ab \geq 1$

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

Pokażemy, że $w(x)$ jest $2 - D$-Hölderowsko ciągła tzn. że $2 - D > 0$ oraz istnieje taka $C > 0$, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x - y|^{2-D}$$

Dowód. Z postaci D mamy $a = b^{(D-2)}$ oraz $1 < D < 2$ zatem

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} \cos(2\pi b^n x)$$

Ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ i szacujmy po kolei z nierówności trójkąta, Lipschitzowości i zbioru wartości cosinusa, własności minimum oraz wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|w(x) - w(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} |\cos(2\pi b^n x) - \cos(2\pi b^n y)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} \min(2, 2\pi b|x - y|) \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2\pi b^{(D-1)n} |x - y| + \sum_{n=m}^{\infty} 2b^{(D-2)n} \\
&\leq 2\pi \frac{b^{(D-1)m} - 1}{b^{(D-1)} - 1} |x - y| + 2\frac{b^{(D-2)m}}{1 - b^{(D-2)}}
\end{aligned}$$

Gdy $|x - y| \leq 1$ dobierzmy $m \in \mathbb{N}$ takie, że $b^{-m} < |x - y| \leq b^{-m+1}$. Wynika stąd, że

$$b^{-m(2-D)} < |x - y|^{(2-D)} \text{oraz } b^m \leq \frac{b}{|x - y|}$$

Zatem

$$|w(x) - w(y)| \leq 2\pi \frac{(|x - y|/b)^{1-D}}{b^{(D-1)} - 1} |x - y| + 2\frac{|x - y|^{2-D}}{1 - b^{(D-2)}} < C|x - y|^{2-D}$$

Gdy $|x - y| \geq 1$ oszacowanie również zachodzi, bo $w(x)$ ma okres długości 1.■

Nieróżniczkowalność

Pokażemy, że $w(x)$ jest nieróżniczkowalna: Dodatkowe założenia: $b \in 2\mathbb{N}+1$ oraz $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Dowód. Ustalmy dowolne $x_0 \in \mathbb{R}$, weźmy $\hat{x} = \frac{x_0}{2}$ oraz dla każdego $m \in \mathbb{N}$ połóżmy k_m będący najbliższą liczbą całkowitą do $b^m x_o$ co daje

$$b^m x_0 - \frac{1}{2} \leq k_m \leq b^m x_0 + \frac{1}{2}$$

Definiujemy

$$x_m = \frac{k_m + 1}{b^m}$$

I z powyższej nierówności dostajemy

$$x_0 \leq x_m \leq x_o + \frac{3}{2b^m}$$

i z tw. o trzech ciągach dostajemy, że ciąg $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \to x_0$.
Rozpiszmy

$$w(x_m/2) - w(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos(\pi b^n x_m) - \cos(\pi b^n x_0)) = A + B$$

gdzie

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} a^n(\cos(b^n \pi x_m) - \cos(b^n \pi x_0))$$

$$B = \sum_{n=m}^{\infty} a^n(\cos(b^n \pi x_m) - \cos(b^n \pi x_0))$$

Wyraz $|A|$ szacujemy z góry analogicznie jak w poprzednim dowodzie, co daje

$$|A| \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}(x_m - x_o)$$

Wyraz $|B|$ szacujemy z dołu. Zauważmy, że

$$\cos(\pi b^n x_m) = \cos(b^{n-m}(k_m+1)\pi) = (-1)^{(k_m+1)b^{n-m}} = -(-1)^{k_m}$$

bo, b^{n-m} nieparzyste oraz, że

$$\cos(\pi b^n x_0) = \cos(b^n \pi \frac{k_m + b^m x_0 - k_m}{b^m}) = \cos(b^{n-m} k_m \pi + b^{n-m} y_m \pi)$$

gdzie $y_n = b^m x_0 - k_m$ i ponownie z nieparzystości b^{n-m} mamy

$$\cos(\pi b^n x_0) = (-1)^{b^{n-m} k_m} \cos(b^{n-m} y_m \pi) = (-1)^{k_m} \cos(b^{n-m} y_m \pi)$$

Zatem

$$\begin{aligned}|B| &= |\sum_{n=m}^{\infty} a^n(-(-1)^{k_m} - (-1)^{k_m}\cos(b^{n-m}y_m\pi))| \\ &= |-(-1^{k_m})|\sum_{n=m}^{\infty} a^n(1+\cos(b^{n-m}y_m\pi)) \geq a^m(1+\cos(y_m\pi)) \geq a^m\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ więc $\pi y_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ więc $\cos(y_m\pi) \geq 0$. Ponieważ $(x_m - x_0) \leq \frac{3}{2b^m}$ dostajemy

$$|B| \geq a^m \cdot 1 \geq \frac{2(ab)^m}{3}(x_m - x_0)$$

Wykorzystując odwrotną nierówność trójkąta i $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$mamy

$$|A+B| \geq ||B| - |A|| \geq= (ab)^m(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})(x_m - x_0)$$

W efekcie dostajemy

$$\lim_{m\to\infty} |\frac{w(x_m/2) - w(\hat{x})}{x_m/2 - \hat{x}}| \geq \lim_{m\to\infty}(ab)^m(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})\frac{1}{2} = \infty. \blacksquare$$

Wymiar Hausdorffa

Wykres funkcji $f : X \to Y$ oznaczamy, jako $Graph(f)$ i definiujemy, jako

$$Graph(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$. Wtedy $dim(Graph(f)) \leq 2 - \alpha$.
Dowód. Nasz cel to znaleźć dostatecznie dobre pokrycie $Graph(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Rozpatrzymy sytuację gdy $[a, b] = [0, 1]$.

Dzielimy przedział na n przedziałów długości $\frac{1}{n}$ i każdy z nich oznaczamy przez J_k gdzie $k \in \{1, 2, ..., n\}$, dla każdych $x, y \in J_k$ mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq Cn^{-\alpha}$$

gdzie $C > 0$.

By pokryć cały wykres funkcji f na przedziale J_k potrzebujemy użyć $Cn^{1-\alpha}$ kwadratów o boku długości n^{-1}. Ponieważ, mamy n przeciałów, by pokryć cały wykres potrzebujemy $Cn^{2-\alpha}$ kwadratów o boku n^{-1}. Zatem

$$H^{2-\alpha}(Graph(f)) \leq \lim_{n\to\infty} Cn^{2-\alpha}(\frac{\sqrt{2}}{n})^{2-\alpha} < \infty. \blacksquare$$

Na mocy lematu $Dim(Graph(w(x))) \leq D$.