Funkcja Weierstrassa i wymiar Hausdorffa

Wojciech Wdowski

Uniwersytet Śląski

Tło historyczne: W 1872 roku Karl Weierstrass publikuje przykład funkcji rzeczywistej ciągłej i nieróżniczkowalnej w żadnym punkcie dziedziny, co obala popularny pogląd, że ciągłość implikuje różniczkowalność prawie wszędzie, a Henri Poincaré określa ją i jej podobne mianem „monsters".

Funkcja Weierstrassa

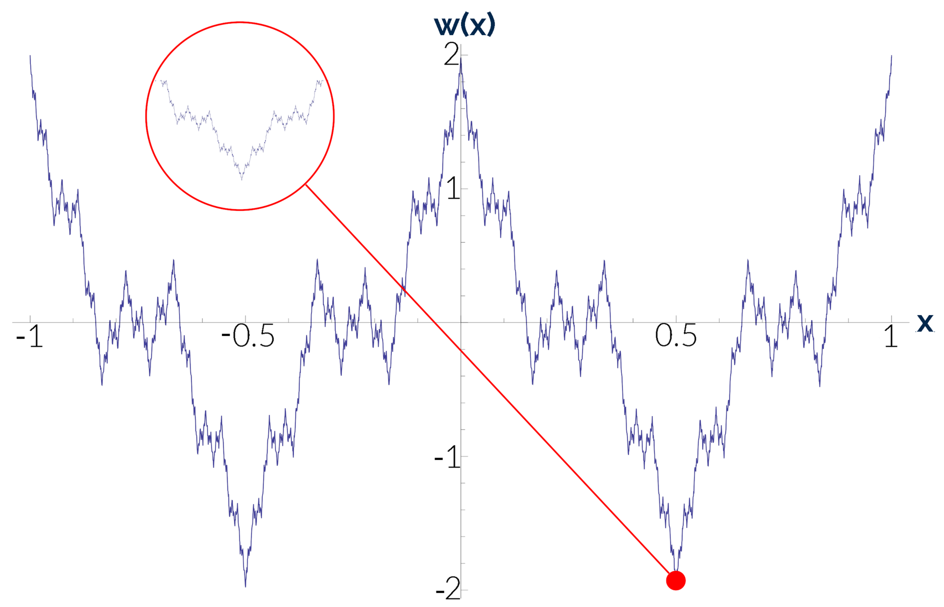
Niech $0 < a < 1 < b$ oraz $ab \geq 1$ wtedy funkcję zadaną przez szereg

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

będziemy nazywać funkcją Weierstrassa.

Wprowadzmy oznaczenia pomocnicze: $f_n(x) = a^n \cos(2\pi b^n x)$ oraz $D = 2 + \log_b a$.

Przykładowy wykres w(x)



Istnienie i własności funkcji Weierstrassa

Zbieżność powyższego szeregu natychmiast dostajemy z kryterium Weierstrassa

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^n \cos(2\pi b^n x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

ponieważ $|a| < 1$, co tłumaczy jedno z naszych założeń. Ponownie z kryterium Weierstrassa i ciągłości $f_n(x)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy ciągłość funkcji $w(x)$. Przeanalizujmy również ograniczenia nałożone na b. Gdyby któreś z nich niezachodziło, wtedy istniałaby pochodna $w'(x)$ ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n'| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |-(ab)^n \sin(2\pi b^n x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n < \infty.$$

Nieróżniczkowalność $w(x)$ została już wspomniana, warto również zaznaczyć, że jest ona Hölderowsko ciągła z wykładnikiem $2 - D$, tzn. że istnieje takie $C > 0$, że:

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x - y|^{2-D}$$

Wykładnik nie może zostać zwiększony.

Tło historyczne: W 1872 roku Karl Weierstrass udowodnił nieróżniczkowalność tylko dla b nieparzystych i dla $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, dowód przy przyjętych przez nas założeniach jako pierwszy opublikował Godfrey. H. Hardy w 1916 roku, dużo krótszy dowód został podany przez Jona Johnsen'a w 2009 roku.

Dowody i generator funkcji

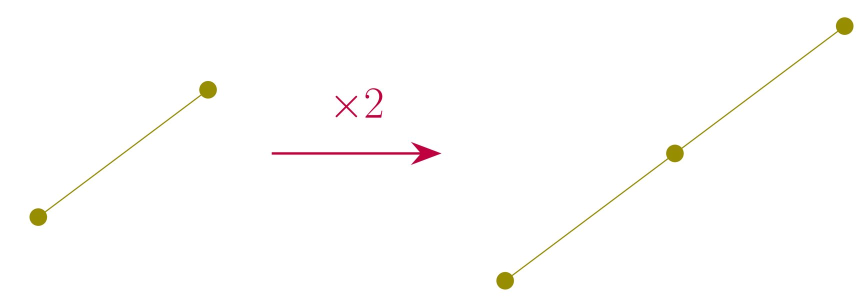
Skanując QR-Code znajdziesz:

- dowody podanych tu faktów,
- prosty generator funkcji Weierstrassa,
- źródła wraz opisem.

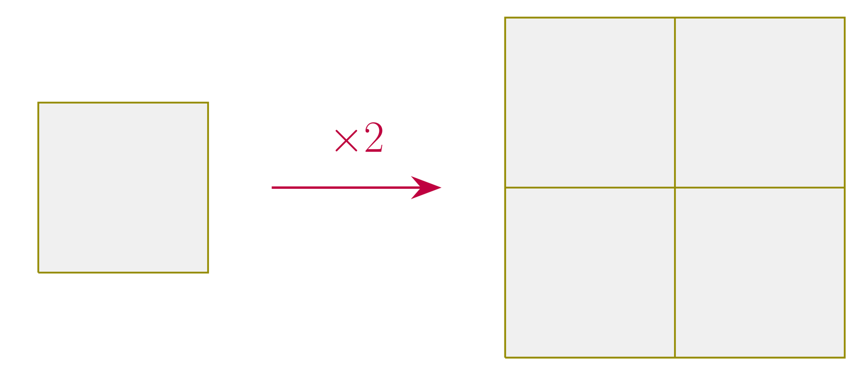
Wymiar fraktalny

Rozważmy F będące podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zastanówmy się jakie własności powinna spełniać liczba s będąca wymiarem F. Na pewno chcemy, aby s było nie większe niż wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Chcemy również, aby wymiar F w przypadku, gdy jest to odcinek, kwadrat, sześcian był równy odpowiednio jeden, dwa i trzy. Poczyńmy następujące obserwacje:

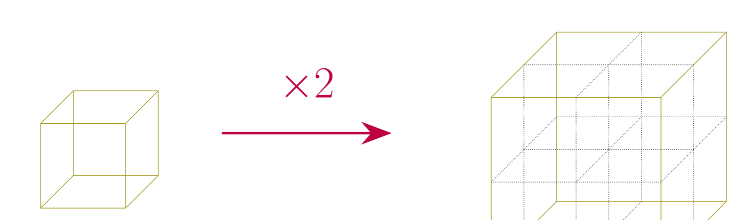
Gdy zwiększmy odcinek dwa razy, jego długość wzrośnie dwa razy.



Gdy zwiększmy kwadrat dwa razy (co rozumiemy jako zwiększenie długości każdego boku), jego pole wzrośnie cztery razy.



Gdy zwiększmy sześcian dwa razy, jego pole wzrośnie osiem razy.



Widzimy tu zależność, która jest związana z rodziną s wymiarowych miar Lebesgue. Zwiększając F dwuktornie, zwięszkamy s-wymiarowa miarę Lebesgue 2^s razy. Rozpatrzmy sytułację, gdyby mierzymy s_0-wymiarową miarą obiekt s-wymiarowy.

- Gdy $s < s_0$ wtedy sprowadza się to do pytania „jakie jest pole odcinka?", gdzie naturalną odpowiedzią jest zero.
- Gdy $s > s_0$ rozważmy analogiczne pytanie „jaka jest długość kwadratu?", (`intuicyjnie i nieformalnie!`) przyjmiemy, że wynosi ona ∞.
- Jak $s = s_0$, to s_0-wymiarową miarą F będzie liczbą z przedziału $[0, \infty]$, gdzie nieskończoność pojawi się tylko dla podzbiorów nieograniczonych.

W tym momencie, mamy już prawie cała potrzebną intuicję do wprowadzenia formalnej definicji wymiaru Hausdorffa. Natomiast zanim to zrobimy, należy odpowiedzieć na jeszcze jedno pytanie: „Po co nam to?".

Paradoks linii brzegowej

Tło historyczne: W 1951 roku Lewis F. Richardson formułuje Paradoks linii brzegowej.

Próbując zmierzyć długość wybrzeża np. wysp brytyjskich, okaże się, że otrzymana przez nas długość będzie rosnąc w zależności od użytej przez nas jednoski pomiaru!

Mówiąc bardziej matematycznie, jeżeli będziemy przybliżać linie wybrzeża łamaną złożoną z odcinków o długości l, to ze zmniejszaniem l długość wybrzeża d, będzie rosnąć. To jeszcze nie jest martwiące, ponieważ podobny efekt zachodzi, gdy przybliżamy tak krzywą regularną. Różnica polega na tym, że gdy

$$l \to 0, \text{ to } d \to \infty.$$

Okazuje się zatem, że wymiar wybrzeża powinien być większy niż jeden, ale mniejszy niż dwa, bo jego pole wynosi zero!

Powyższy przykład dopełnia naszą intuicję. Pokazuje on, że zamiast zwiększać badany zbiór F możemy zmniejszać „skale", w jakiej go mierzymy.

Wymiar Hausdorffa

Średnicą niepustego zbioru U przestrzeni metrycznej nazywamy liczbę

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Powiemy, że $\{U_i\}_i \in \mathbb{N}$ jest δ-pokryciem F gdy $\forall_i |U_i| \leq \delta$ oraz $F \subset \bigcup_i U_i$.

Niech F będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i niech $s \in [0, \infty)$, dla każdego $\delta > 0$ definiujemy

$$H^s_\delta(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ jest } \delta\text{-pokryciem } F\}$$

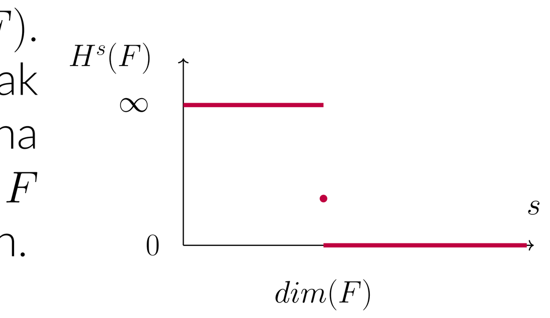
Biorąc coraz mniejsze δ, bierzemy infimum po coraz mniejszym zbiorze, zatem $H^s_\delta(F)$ rośnie. Definiujemy s-wymiarową miarę Hausdorffa

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$$

Z definicji $H^s_\delta(F)$ dla ustalonego F i $s < t$ mamy

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Rozważmy funkcje $[0, \infty) \ni s \to H^s(F)$. Widzimy, że istnieje dokładnie, jednak wartość krytyczna mająca szanse być różna od 0 lub ∞. Wymiar Hausdorffa zbioru F definiujemy jako tą wartość krytyczna, tzn.



$$dim(F) = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$$

`Uwaga! Istnieją inne definicje wymiaru fraktalnego.`

Wymiar Hausdorffa wykresu funkcji Weierstrassa

Zgadnięcie wymiaru Hausdorffa zbioru F bywa proste, natomiast formalne wykazanie ile on wynosi nie jest trywialnym problemem. Zastanówmy się ile jest równy wymiar Hausdorffa wykresu $w(x)$. Dzięki definicji i hölderowskiej ciągłości możemy oszacować z góry ten wymiar jako D. Szacowanie z dołu wymiaru Haudorffa jest nieporównywalnie trudniejsze i wymaga dodatkowych narzędzi. W przypadku funkcji Weierstrassa problem ten pozostawał otwarty aż do 2018, gdzie finalnie wykazano, że wymiar wykresu $w(x) = D$.

Tło historyczne: W 1998 roku Brian R. Hunt udowodnił, że wymiar wykresu funkcji $w_\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x + \theta_n)$ gdzie, θ_n jest wybierana losowo z przedziału $[0, 1]$ według rozkładu jednostajnego, jest równy D z prawdopodobieństwem jeden. Dla $w(x)$ dowód podał Weixiano Shen.

Źródła

Kenneth Falconer *Fractal Geometry*

Brian R. Hunt *The hausdorff dimension of graphs of weierstrass functions*

Godfrey. H. Hardy *Weierstrass non-differentiable function*

Jeff Calder *Weierstrass's non-differentiable function*

Jon Johnsen *simple proofs of nowhere-differentiability for Weierstrass's function and cases of slow growth*

Weixiano Shen *Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions*

wojtek.wdowski@gmail.com