

α -Hölderowska ciągłość

Pokażemy, że $w(x)$ jest $2-D$ -Hölderowsko ciągła tzn. że $2-D > 0$ oraz istnieje taka $C > 0$, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x - y|^{2-D}$$

Dowód. Z postaci D mamy $a = b^{(D-2)}$ oraz $1 < D < 2$ zatem

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} \cos(2\pi b^n x)$$

Ustalmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ i szacujmy po kolei z nierówności trójkąta, Lipschitzowości i zbioru wartości cosinusa, własności minimum oraz wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} |w(x) - w(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} |\cos(2\pi b^n x) - \cos(2\pi b^n y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} \min(2, 2\pi b^n |x - y|) \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2\pi b^{(D-1)n} |x - y| + \sum_{n=0}^{m-1} 2b^{(D-2)n} \\ &\leq 2\pi \frac{b^{(D-1)m} - 1}{b^{(D-1)} - 1} |x - y| + 2 \frac{b^{(D-1)m}}{1 - b^{(D-2)}} \end{aligned}$$

Gdy $|x - y| \leq 1$ dobierzmy $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $b^{-m} < |x - y| \leq b^{-m+1}$. Wynika stąd, że

$$b^{-m(2-D)} < |x - y|^{(2-D)} \text{ oraz } b^m \leq \frac{b}{|x - y|}$$

Zatem

$$|w(x) - w(y)| \leq 2\pi \frac{(|x - y|/b)^{1-D}}{b^{(D-1)} - 1} |x - y| + 2 \frac{|x - y|^{2-D}}{1 - b^{(D-2)}} < C|x - y|^{2-D}$$

Gdy $|x - y| \geq 1$ oszacowanie również zachodzi, bo $w(x)$ ma okres długości 1. ■

Nieróżniczkowalność

Pokażemy, że $w(x)$ jest nieróżniczkowalna: Dodatkowe założenia: $b \in 2\mathbb{N} + 1$ oraz $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Dowód. Ustalmy dowolne $x_0 \in \mathbb{R}$, weźmy $\hat{x} = \frac{x_0}{2}$ oraz dla każdego $m \in \mathbb{N}$ połóżmy k_m będący najbliższą liczbą całkowitą do $b^m x_0$ co daje

$$b^m x_0 - \frac{1}{2} \leq k_m \leq b^m x_0 + \frac{1}{2}$$

Definiujemy

$$x_m = \frac{k_m + 1}{b^m}$$

I z powyższej nierówności dostajemy

$$x_0 \leq x_m \leq x_0 + \frac{3}{2b^m}$$

i z tw. o trzech ciągach dostajemy, że ciąg $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0$.

Rozpiszmy

$$w(x_m/2) - w(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (\cos(\pi b^n x_m) - \cos(\pi b^n x_0)) = A + B$$

gdzie

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} a^n (\cos(b^n \pi x_m) - \cos(b^n \pi x_0))$$

$$B = \sum_{n=m}^{\infty} a^n (\cos(b^n \pi x_m) - \cos(b^n \pi x_0))$$

Wyraz $|A|$ szacujemy z góry analogicznie jak w poprzednim dowodzie, co daje

$$|A| \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} (x_m - x_0)$$

Wyraz $|B|$ szacujemy z dołu. Zauważmy, że

$$\cos(\pi b^n x_m) = \cos(b^{n-m} (k_m + 1) \pi) = (-1)^{(k_m+1)b^{n-m}} = -(-1)^{k_m}$$

bo, b^{n-m} nieparzyste oraz, że

$$\cos(\pi b^n x_0) = \cos(b^n \pi \frac{k_m + b^m x_0 - k_m}{b^m}) = \cos(b^{n-m} k_m \pi + b^{n-m} y_m \pi)$$

gdzie $y_m = b^m x_0 - k_m$ i ponownie z nieparzystości b^{n-m} mamy

$$\cos(\pi b^n x_0) = (-1)^{b^{n-m} k_m} \cos(b^{n-m} y_m \pi) = (-1)^{k_m} \cos(b^{n-m} y_m \pi)$$

Zatem

$$|B| = \left| \sum_{n=m}^{\infty} a^n (-(-1)^{k_m}) - (-1)^{k_m} \cos(b^{n-m} y_m \pi) \right|$$

$$= \left| -(-1)^{k_m} \right| \sum_{n=m}^{\infty} a^n (1 + \cos(b^{n-m} y_m \pi)) \geq a^m (1 + \cos(y_m \pi)) \geq a^m$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu $y_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ więc $\pi y_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ więc $\cos(y_m \pi) \geq 0$. Ponieważ $(x_m - x_0) \leq \frac{3}{2b^m}$ dostajemy

$$|B| \geq a^m \cdot 1 \geq \frac{2(ab)^m}{3} (x_m - x_0)$$

Wykorzystując odwrotną nierówność trójkąta i $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ mamy

$$|A + B| \geq ||B| - |A|| \geq (ab)^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) (x_m - x_0)$$

W efekcie dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w(x_m/2) - w(\hat{x})}{x_m/2 - \hat{x}} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) \frac{1}{2} = \infty. \blacksquare$$

Wymiar Hausdorffa

Wykres funkcji $f : X \rightarrow Y$ oznaczamy, jako $Graph(f)$ i definiujemy, jako

$$Graph(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$. Wtedy $\dim(Graph(f)) \leq 2 - \alpha$.

Dowód. Nasz cel to znaleźć dostatecznie dobre pokrycie $Graph(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Rozpatrzmy sytuację gdy $[a, b] = [0, 1]$.

Dzielimy przedział na n przedziałów długości $\frac{1}{n}$ i każdy z nich oznaczamy przez J_k gdzie $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla każdych $x, y \in J_k$ mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq Cn^{-\alpha}$$

gdzie $C > 0$.

By pokryć cały wykres funkcji f na przedziale J_k potrzebujemy użyć $Cn^{1-\alpha}$ kwadratów o boku długości n^{-1} . Ponieważ, mamy n przedziałów, by pokryć cały wykres potrzebujemy $Cn^{2-\alpha}$ kwadratów o boku n^{-1} . Zatem

$$H^{2-\alpha}(Graph(f)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Cn^{2-\alpha} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \right)^{2-\alpha} \leq \infty. \blacksquare$$

Na mocy lematu $\dim(Graph(w(x))) \leq D$.