$k \geq 1$, $\varepsilon > 0$ e $c > 1$

a) $A = \log_k n$

$B = n^{\varepsilon}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log_k n}{n^{e}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(k)\, n^{e}}$$

$$= \ln(k) \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n^{e}}}_{\text{Aplicando regra de L'Hôpital}}$$

ignora

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{e \cdot n^{e-1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e \cdot n^{e}}$$

O limite tende a zero à medida que n tende ao infinito, desde que $e > 0$.

Portanto $\log_k n$ é $O(n^2)$

1°. Comparar o crescimento de A com o de B à medida que n se aproxima do infinito

2° - Se A for $O(B)$, significa que existe uma constante positiva C tal que $A \leq C \cdot B$ para todos os valores de n maiores que um certo valor de entrada n_0.

3°. Se o limite de $\frac{A}{B}$ for finito, A é $O(B)$

- L'Hôpital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]'}{[g(x)]'}$$

b) $A = n^k$

$B = c^n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{c^n}$$

Aplicando L'Hôpital

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{k \cdot n^{k-1}}{(c^n) \ln(c)}$$

↳ cresce exponencialmente, mais rápido que qualquer polinômio em n, logo o denominador cresce mais rápido que o numerador, resultando em um limite que tende a zero

Portanto, n^k é $O(c^n)$

c) $A = \sqrt{n}$

$B = n^{\sin(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\sin(n)}} \longrightarrow -1 < \sin(n) < 1$$

A medida que n aumenta, a função sin(n) oscila entre -1 e 1, então a função $n^{\sin(n)}$ pode se tornar arbitrareamente grande a medida que n cresce. Isso significa que $n^{\sin(n)}$ pode crescer mais rapidamente do que $\sqrt{n}$ para certos valores de n.

Portanto, $\sqrt{n}$ não é $O(n^{\sin(n)})$

d) $A = 2^n$
$B = 2^{n/2}$

2^n não é $O(2^{n/2})$ pois o expoente n faz crescer mais rapidamente do que em $2^{n/2}$

e) $A = n^{\log m}$
$B = m^{\log n}$

$$n^{\log m} = e^{\log n \cdot \log m}$$
$$m^{\log n} = e^{\log m \cdot \log n}$$

Isso significa que $A = B$, logo A é $O(B)$

f) $A = \log(n!)$
$B = \log(n^n)$

$$\log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n)$$
$$= \log(1) + \log(2) + \log(3) + \ldots + \log(n)$$

$$\log(n^n) = n \cdot \log(n) \Rightarrow \underbrace{\log(n) + \log(n) + \log(n)}_{n \text{ vezes}}$$

Sendo $\log(n)$ o maior termo em $\log(n!)$, temos que
$$\log(n!) \leq \log(n^n)$$

Portanto $\log(n!)$ é $O(n^n)$