|  |  |
| --- | --- |
| *Filip Szczepanek 242544*  *Miłosz Wojtaszczyk 242567* | Rok akademicki *2023/24*  *środa, 14:45* |

**METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM**

Zadanie 4

**Opis rozwiązania**

Naszym celem była implementacja dwóch metod całkowania numerycznego na przedziale [a, b) całek postaci :złożonej kwadratury Newtona-Cotesa opartej na trzech węzłach (wzór simpsona) oraz kwadratury Gaussa-Legendre’a.

Wartość kwadratury Newtona-Cotesa obliczaliśmy za pomocą wzoru:

gdzie:

N - ilość parzystych podprzedziałów równej długości zwiększana dwukrotnie w każdej kolejnej iteracji algorytmu, h = (b - a)/N, .

Wartość kwadratury Gaussa-Legendre’a obliczaliśmy za pomocą wzoru:

gdzie:

N + 1– liczba węzłów (wprowadzana przez użytkownika). Wartości współczynników , oraz pierwiastków wielomianu - wczytywane były z pliku udostępnionego na stronie przedmiotu.

Wielomiany Legendre’a wyrażają się wzorami:

Wartości współczynników wyrażają się wzorem:

Przedział [a, b) sprowadziliśmy do przedziału [-1, 1) za pomocą wzoru:

**Wyniki**

Tabela 1. Wartości całki funkcji f(x) = |x| na przedziale [-3,10), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | 54.505208 | 54.5 | 0.1 | 5 |
| Newton-Cotes | 54.500051 | 0.001 | 9 |
| Gauss-Legendre | 48.786098 | 2 | 2 |
| Gauss-Legendre | 52.862153 | 5 | 5 |
| Gauss-Legendre | 54.494090 | 15 | 15 |
| Gauss-Legendre | 54.590221 | 16 | 16 |
| Gauss-Legendre | 54.496771 | 20 | 20 |

Tabela 2. Wartości całki funkcji f(x) = sin(x) + cos(x) na przedziale [0,2.5), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | 2.401749 | 2.399616 | 0.1 | 2 |
| Newton-Cotes | 2.399624 | 0.001 | 4 |
| Gauss-Legendre | 2.372762 | 2 | 2 |
| Gauss-Legendre | 2.399981 | 3 | 3 |
| Gauss-Legendre | 2.399613 | 4 | 4 |
| Gauss-Legendre | 2.399616 | 5 | 5 |

Tabela 3. Wartości całki funkcji f(x) = cos(20) na przedziale [0,6), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | -0.225830 | −0.237906 | 0.1 | 7 |
| Newton-Cotes | -0.237850 | 0.001 | 9 |
| Gauss-Legendre | 0.077682 | 2 | 2 |
| Gauss-Legendre | -1.793157 | 5 | 5 |
| Gauss-Legendre | -0.242415 | 15 | 15 |
| Gauss-Legendre | -0.237906 | 20 | 20 |

Tabela 4. Wartości całki funkcji f(x) = cos(20) na przedziale [6,200), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | 0.378674 | 0.378185 | 0.1 | 10 |
| Newton-Cotes | 0.378214 | 0.001 | 11 |
| Gauss-Legendre | -56.405658 | 5 | 5 |
| Gauss-Legendre | -1.669985 | 50 | 50 |
| Gauss-Legendre | 0.379162 | 70 | 70 |

Tabela 5. Wartości całki funkcji f(x) = cos(20) na przedziale [0,100), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | **2.986742** | −0.875861 | 0.1 | 6 |
| Newton-Cotes | -0.875796 | 0.001 | 13 |
| Gauss-Legendre | 6.162215 | 5 | 5 |
| Gauss-Legendre | -0.876150 | 57 | 57 |

Tabela 6. Wartości całki funkcji f(x) = na przedziale [-5,2), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | 98.5833 | 98,5833 | 0.1 | 2 |
| Gauss-Legendre | 98.5833 | 2 | 2 |

Tabela 7. Wartości całki funkcji f(x) = na przedziale [0,2), uzyskane za pomocą różnych dokładności i ilości węzłów za pomocą obu metod.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Metoda | Wynik uzyskany przez algorytm | Wynik uzyskany analitycznie | Dokładność / ilość węzłów | Ilość iteracji |
| Newton-Cotes | -70.092641 | −70.095238 | 0.1 | 5 |
| Newton-Cotes | -70.095228 | 0.001 | 7 |
| Gauss-Legendre | -97.185185 | 2 | 2 |
| Gauss-Legendre | -75.946667 | 3 | 3 |
| Gauss-Legendre | -70.095238 | 4 | 4 |

**Wnioski**

* Złożoną kwadraturę Newton’a - Cotes’a na trzech węzłach oraz kwadraturę Gauss’a-Legendre’a można stosować do przybliżania wartości całki każdej funkcji ciągłej na przedziale [a, b)
* Przy przybliżaniu wielomianu N stopnia należy dobrać co najmniej węzłów, aby kwadratura Gauss’a-Legendre’a była dokładna.
* Przybliżanie wielomianu kwadraturą Gauss’a-Legendre’a wymaga mniejszej ilości operacji niż metodą Simpsona (w naszym przypadku: ilość iteracji = ), a co za tym idzie jest bardziej wydajne.
* Przy przybliżaniu funkcji kwadraturą Gauss’a-Legendre’a innych niż wielomiany wymagane jest użycie większej ilości węzłów (w niektórych przypadkach nawet 70).
* W tabeli 5 można zanotować, że wynik uzyskany metodą Simpsona jest daleki od tego uzyskanego analitycznie, co najprawdopodobniej spowodowane było sytuacją, w której wynik metody Simpsona dla 32 podprzedziałów różnił się o mniej niż 0.1 od wyniku dla 64 podprzedziałów.
* W przypadku przybliżania całki funkcji |x| kwadraturą Gauss’a-Legendre’a możemy zobaczyć, że zwiększenie ilości węzłów z 15 do 16 nie zwiększyło dokładności wyniku, dopiero zwiększenie do ilości węzłów do 20 wpłynęło na poprawę dokładności