Zad 1 (Ciągi - rozszerzenie)

Wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n:

1. $a_n = \sqrt{3n^2-2n} - \sqrt{3n^2-1}$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
2. $a_n = \sqrt{2n^2+10n-3} - \sqrt{2n^2-2n+3}$ $(3\sqrt{2})$
3. $a_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}-n}{n+2-\sqrt{n(n+2)}}$ (1)
4. $a_n = \dfrac{3^n-4^{n+1}}{4^{n+1}}$ (-1)
5. $a_n = \dfrac{(2\cdot 3^n-1)^2}{(3^n+2^n)^2}$ (4)
6. $a_n = \dfrac{16^n+4}{(2^{2n}-2)(2^{2n}+2)}$ (1)
7. $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$ (e^{-1})
8. $a_n = \left(\dfrac{n^3+3}{n^3}\right)^{3n^3}$ (e^9)
9. $a_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-n}$ (e^2)
10. $a_n = \sqrt{\dfrac{(2n+1)(3n-2)}{(n+4)(n+5)}}$ $(\sqrt{6})$
11. $a_n = \dfrac{2n^2\cdot\cos(4n)}{n^3+3n+5}$ (0)
12. $a_n = \dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{n!+(n+2)!}$ (-1)

1 z 8

Zad 2.

Dla jakich wartości parametru p ciąg

$$a_n = \sqrt{4n^2+3n+5} - (pn+1)$$

a) ma granicę $+\infty$ $\quad (p \in (-\infty; 2))$

b) ma granicę właściwą (oblicz tę granicę) $\quad \left(p=2, -\frac{1}{4}\right)$

c) ma granicę niewłaściwą $-\infty$ $\quad (p \in (2; +\infty))$

Zad 3.

Oblicz granice ciągu a_n:

1) $a_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2}$ $\quad \left(\frac{1}{6}\right)$

2) $a_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{(2n-1)^2}$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)$

3) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}}$ $\quad \left(\frac{9}{8}\right)$

4) $a_n = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$ $\quad (2)$

5) $a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)$

6) $a_n = \dfrac{\sqrt{1+2n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n}$ $\quad (\sqrt{2}-2)$

228

7) $a_n = \sqrt{n\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Zad 4.

 vdf

Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x)=\frac{x+2}{x}+\left(\frac{x+2}{x}\right)^2+\left(\frac{x+2}{x}\right)^3+\ldots$$

a następnie:

1) narysuj wykres funkcji f
2) podaj D_f^{-1}
3) rozwiąż nierówność $f(x)\le 0$

$D_f=(-\infty;-1)$

$D_f^{-1}=(-\frac{1}{2};+\infty)$

$x\in\langle-2;-1)$

Zad 5.

Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x)=x+3+\frac{(x+3)x}{x-2}+\frac{(x+3)x^2}{(x-2)^2}+\ldots$$

a następnie:

1) narysuj wykres funkcji f
2) podaj D_f^{-1}
3) ustal, ile miejsc zerowych ma funkcja f

$D_f=(-\infty;1)$

$D_f^{-1}=(-\infty;\frac{25}{8}\rangle$

1 – miejsce zerowe

Zad 6.

Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x)=1+\frac{2}{x+3}+\frac{2^2}{(x+3)^2}+\ldots$$

a następnie:

1) narysuj wykres funkcji f
2) podaj D_f^{-1}
3) ustal (o ile istnieją) argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości największa i najmniejszą

$D_f=(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$

$D_f^{-1}=(\frac{1}{2};1)\cup(1;+\infty)$

nie istnieją.

Zad 7.

Rozwiąż równania bądź nierówności:

1) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\ldots>2$ $\qquad x\in(-2;0)$

2) $-1+(\sqrt{x})^2+(\sqrt{x})^3+(\sqrt{x})^4+\ldots<\sqrt{x}$ $\qquad x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

3) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots\leq 3x-2$ $\qquad x\in\langle 1;+\infty)$

4) $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^3+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^5-\ldots=\frac{2}{3}$ $\qquad x=1$, $x=-1$

5) $\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{(x+2)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3}+\ldots\geq 3$ $\qquad x\in\langle\frac{2}{3},1)$

6) $2^{\sin x}+4^{\sin x}+8^{\sin x}+\ldots\leq 1$ $\qquad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

7) $2^{-\cos x}+4^{-\cos x}+8^{-\cos x}+\ldots\leq 1$ $\qquad x=2k\pi$

Zad 8.

W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło, w które wpisano trójkąt równoboczny a w ten trójkąt znów koło itd. Oblicz sumę:

a) długości promieni $\qquad\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

b) obwodów $\qquad\left(\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\right)$

c) pól

wszystkich kół. $\qquad\left(\frac{\pi a^2}{9}\right)$

wj

Zad 9.

W kwadrat o boku długości a wpisano koło, w które wpisano kwadrat, a w ten kwadrat znów koło itd. Oblicz sumę:

a) obwodów $\left(\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$

b) pól $\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)$

wszystkich kół.

Zad 10.

W kwadrat o boku długości a wpisano drugi kwadrat tak, że jego wierzchołki znajdowały się w środkach boków kwadratu poprzedniego. W ten drugi kwadrat wpisano w ten sam sposób trzeci kwadrat, w trzeci - czwarty itd.

Oblicz sumę:

a) obwodów $\left(4a\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$

b) pól $\left(2a^2\right)$

wszystkich kwadratów

Zad 11. $\left(q=\frac{1}{6}\right)$

Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym $a_1 \neq 0$ i $S = 7 \cdot S_p$, gdzie

S jest sumą wszystkich wyrazów ciągu a

S_p sumą wyrazów o numerach parzystych

vy

Zad 12.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest bokiem drugiego trójkąta równobocznego, a wysokość tego trójkąta jest znów bokiem trzeciego trójkąta równobocznego itd.

Oblicz sumę:

a) obwodów $\left(6a\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$

b) pól $\left(a^2 \cdot \sqrt{3}\right)$

wszystkich trójkątów.

Zad 13. $\left(a_n = \frac{1}{3^n}\right)$

W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa $\frac{3}{8}$, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa $\frac{1}{8}$. Wyznacz ten ciąg.

Zad 14. (6000m)

Balon wzniósł się w ciągu godziny na wysokość 4000m. Jaka jest graniczna wysokość, którą mógłby osiągnąć balon, gdyby w ciągu każdej następnej godziny wznosił się na wysokość równą $\frac{1}{3}$ wysokości z godziny poprzedniej?

Zad 15. $\left(a_n = 3^{2-n} \vee a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego wynosi $\frac{9}{2}$ a drugi wyraz ciągu równa się 1. Wyznacz ten ciąg.

Zad 16.

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$$

a) Ile wyrazów tego ciągu jest większych od $\frac{1}{64}$ (7)

b) Wyznacz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. (4)

Zad 17. (33, 517)

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

a) Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 102.

b) Wyznacz wartość wyrażenia:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20}$$

Zad 18. $\left(a_1 = 6,\ q = \frac{1}{2} \quad a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 12, a suma kwadratów jego wyrazów 48. Wyznacz ten ciąg

Zad 18* (tak) (wskazówka $q = \frac{1}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$) **7 z 8** VI

Czy nieskończony ciąg geometryczny, którego wyrazy spełniają warunku:

$a_{k-1} - 9a_{k+1} = 0$ dla $k \geq 2$ i $a_1 q \neq 0$ jest zbieżny?

Zad 19. $(q=-\frac{1}{3})$

Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego nieskończonego, w którym $a_1=2$, suma zaś wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.

Zad 20. $(a_1=8 \quad q=\frac{1}{3} \quad a_n=8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$

W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 9, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.

Zad 21.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o różnych wyrazach. Wykaż, że ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym:

a) $b_n = a_{n+1} - a_n$

b) $b_n = a_{2n}$

c) $b_n = a_{3n}$

jest również ciągiem geometrycznym

8z8

Zad 22. $(q=\frac{1}{3})$

Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a+b+c}$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.