

# Projekt Egzaminacyjny

Jan Milewczyk, Maciej Wojciechowski, Kajetan Lach

December 5, 2024

## 1 Analizy log-zwrotów spółek

### 1.1 Vigo Photonics

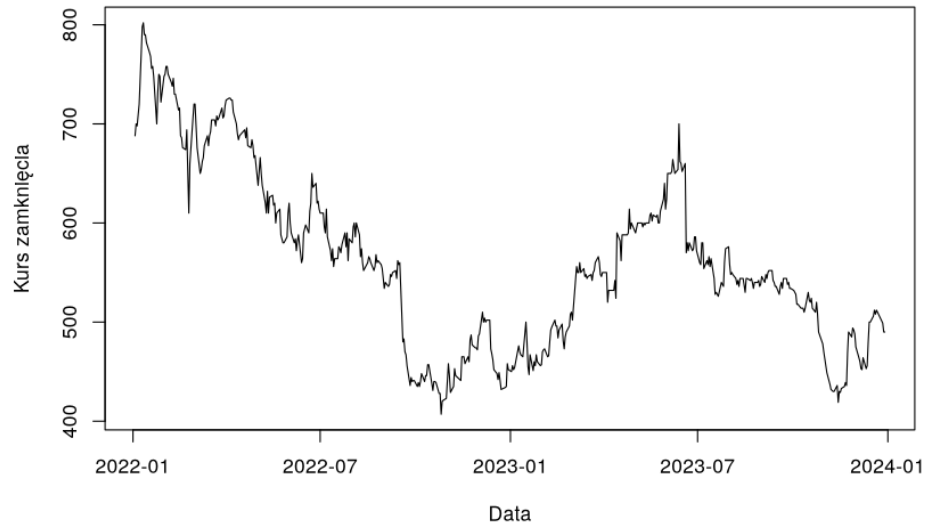
#### 1.1.1 Wstęp

**Vigo Photonics** to polskie przedsiębiorstwo specjalizujące się w wytwarzaniu materiałów i przyrządów półprzewodnikowych do zastosowań fotonicznych i mikroelektronicznych. Spółka jest liderem na światowym rynku fotonowych detektorów średniej podczerwieni, a wszystkie produkty opiera na własnej, unikalnej technologii.

#### 1.1.2 Analiza log-zwrotów spółki (Vigo Photonics)

Pierwszy rozdział zawiera analizę log-zwrotów spółki.

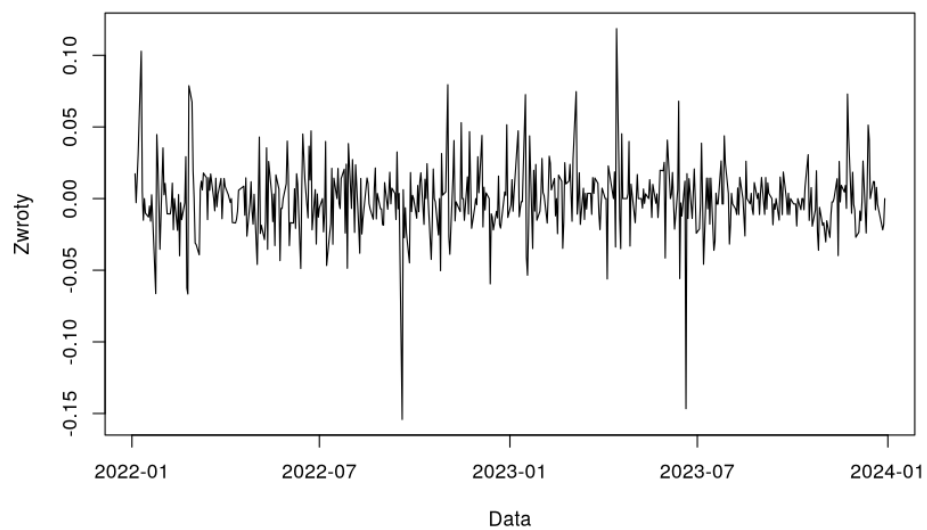
**Wykresy kursów zamknięcia oraz log-zwrotów:** Poniższy wykres ilustruje zmianę cen zamknięcia akcji w czasie.



Zmianę log-zwrotów, wyliczonych według wzoru

$$r_1 = \ln \frac{S_0}{S_1}, r_2 = \ln \frac{S_2}{S_1}, \dots, r_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

gdzie  $s_0, s_1, \dots, s_n$  są kursami zamknięcia z kolejnych dni, na osi czasu ilustruje wykres poniżej.



**Wartość oczekiwana:** Zakładając, że log-zwroty  $r_1, r_2, \dots, r_n$  są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej  $X$ , wyliczamy  $\mu$  przy użyciu nieobciążonego estymatora wartości oczekiwanej:

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu$$

w wyniku czego otrzymujemy wynik

$$\mu = -0.0006787669$$

**Wariancja i odchylenie standardowe:** Korzystając ze wzoru na nieobciążony estymator wariancji

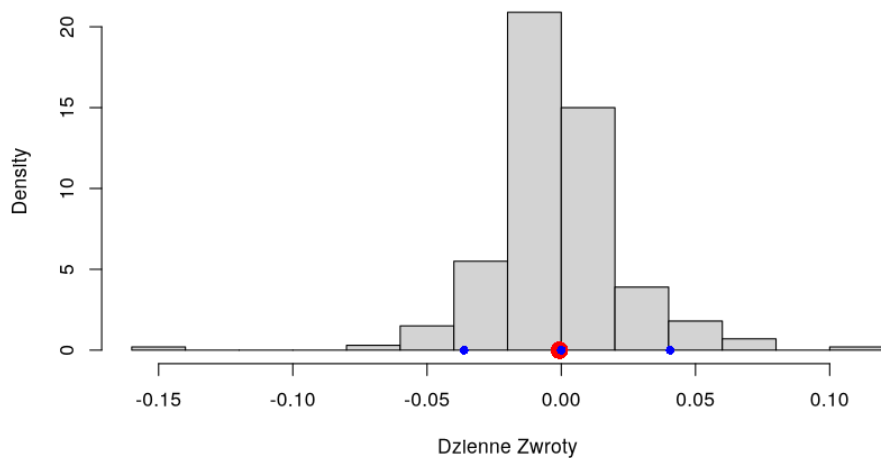
$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

otrzymujemy  $\sigma^2 = 0.0006189792$  oraz  $\sigma = 0.02487929$ .

**Kwantyle:** Z wykorzystaniem klasycznego estymatora kwantyli wyestymowano kwantyle rzędu  $\alpha = 5\%, 50\% \text{ i } 95\%$ . Wyniki przedstawione zostały w tabeli poniżej:

$\bar{x}_n$	$s_n^2$	$s_n$	$q(5\%)$	$q(50\%)$	$q(95\%)$
-0.0006787669	0.0006189792	0.02487929	-0.03620640	0	0.04055989

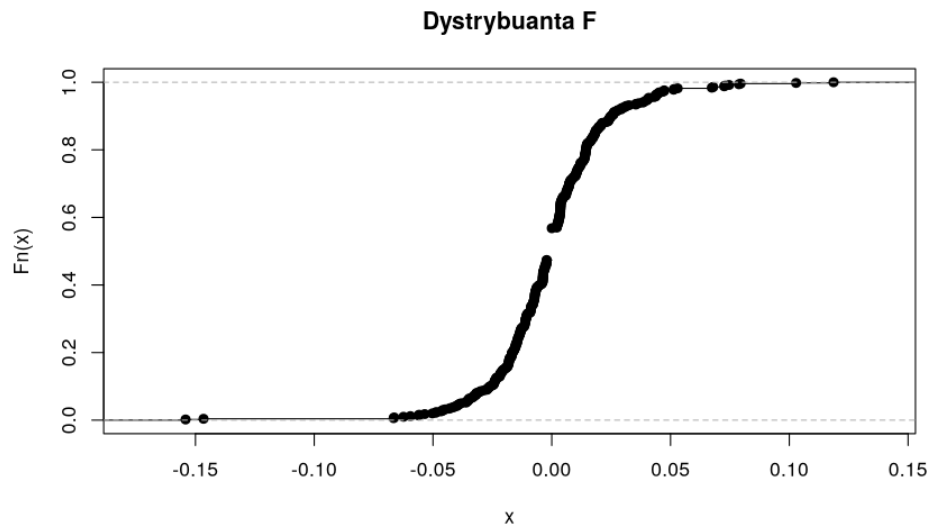
**Histogram log-zwrotów:** Na histogramie dziennych log-zwrotów cen akcji na czerwono i niebiesko oznaczono odpowiednio wartość wyestymowanej średniej oraz wartości kwantyli przedstawionych wcześniej.



**Dystrybuanta:** Z wykorzystaniem dystrybuanty empirycznej jako nieobciążonego estymatora

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}} = \left( \frac{\text{liczba elementów w próbie} \leq x}{n} \right)$$

estymujemy dystrybuantę F zaprezentowaną na wykresie poniżej

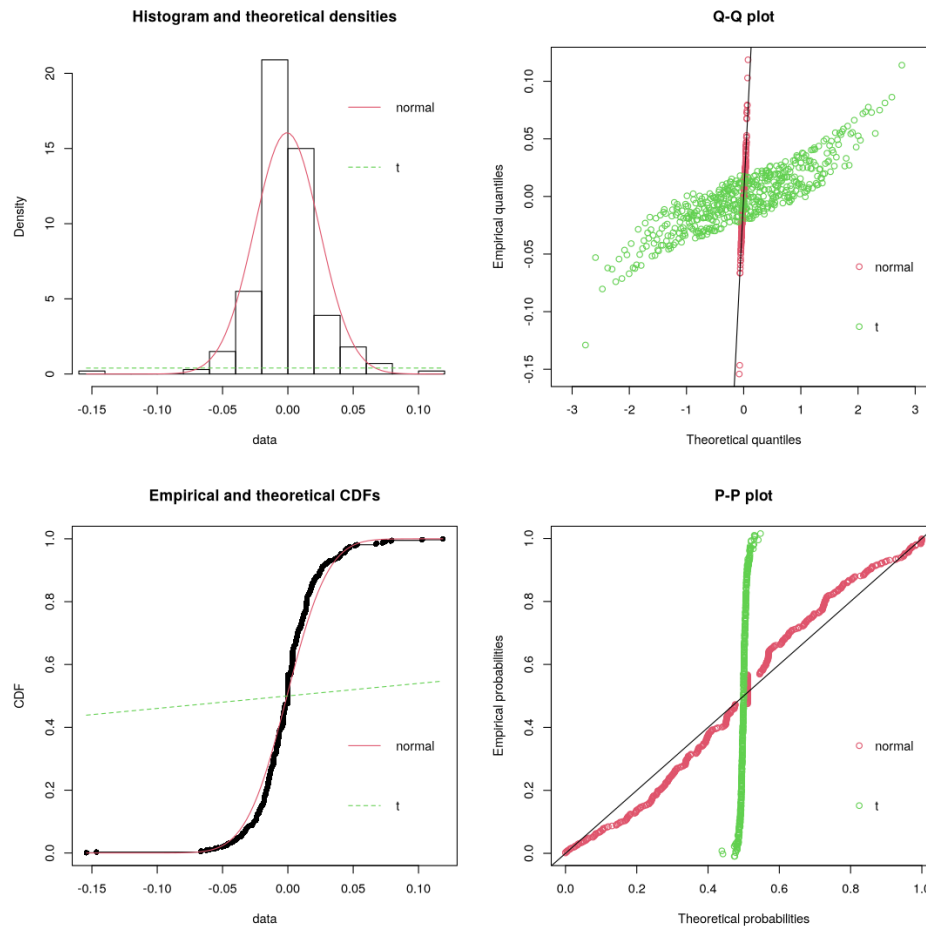


**Analiza dobroci dopasowania rozkładu normalnego i t-Studenta:**  
 Korzystając z estymatora największej wiarygodności (MLE) parametru estymujemy parametry rozkładu normalnego i t-Studenta.

$m$	$s$	$df$
-0.0006787669	0.0248544	314.3698

### 1.1.3 Wykresy diagnostyczne

Poniższe wykresy prezentują kolejno porównania: histogram-gęstość wybranych rozkładów, kwantyl-kwantyl, dystrybuanta empiryczna-dystrybuanta teoretyczna wybranych rozkładów oraz prawdopodobieństwo teoretyczne wybranych rozkładów-prawdopodobieństwo empiryczne.



Na ich podstawie można stwierdzić, że rozkład normalny lepiej dopasowuje się do danych.

**Weryfikacja wyboru z wykorzystaniem statystyk oraz kryteriów informacyjnych:** Poniższe tabele prezentują wyniki testów statystycznych oraz kryteriów informacyjnych dla rozkładów normalnego i t-Studenta.

Statystyki	Rozkład normalny	Rozkład t-Studenta
Kolmogorov-Smirnov	0.08251589	0.469477
Cramer-von Mises	1.18780300	39.177553
Anderson-Darling	6.95700925	183.184800

Kryteria	Rozkład normalny	Rozkład t-Studenta
AIC	-2271.782	922.0439
BIC	-2263.353	926.2585

Powyższe wyniki potwierdzają, że rozkład normalny lepiej dopasowuje się do danych.

**Test hipotezy równości rozkładów metodą Monte Carlo:** Testujemy hipotezę zerową o równości dystrybuant

$$H_0 : F = F_0$$

przeciwko hipotezie alternatywnej (kontrhipotezie)

$$H_1 : F \neq F_0$$

gdzie  $F_0$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego wybranego w poprzedniej podsekcji, a  $F$  dystrybuantą nieznaną.

Do przetestowania hipotezy zerowej o równości dystrybuant wykorzystamy metodę Monte Carlo przy użyciu statystyki Kołmogorowa-Smirnowa.

W tym celu generujemy  $N = 10000$  prób z rozkładu normalnego o parametrach

$$m = -0.0006787669 \text{ oraz } s = 0.0248544$$

wyestymowanych wcześniej oraz obliczamy wartość statystyki Kołmogorowa-Smirnowa dla każdej z nich.

Następnie obliczamy prawdopodobieństwo

$$p = P(D_n > d_n)$$

gdzie  $D_n$  to wartość statystyki dla wygenerowanych prób a  $d_n$  to jej wartość dla log-zwrotów spółki.

Ustalamy poziom istotności  $\alpha = 0.05$  i sprawdzamy czy  $p < \alpha$ . W naszym przypadku

$$p = 0.0025 < \alpha = 0.05$$

co pozwala nam odrzucić hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej.

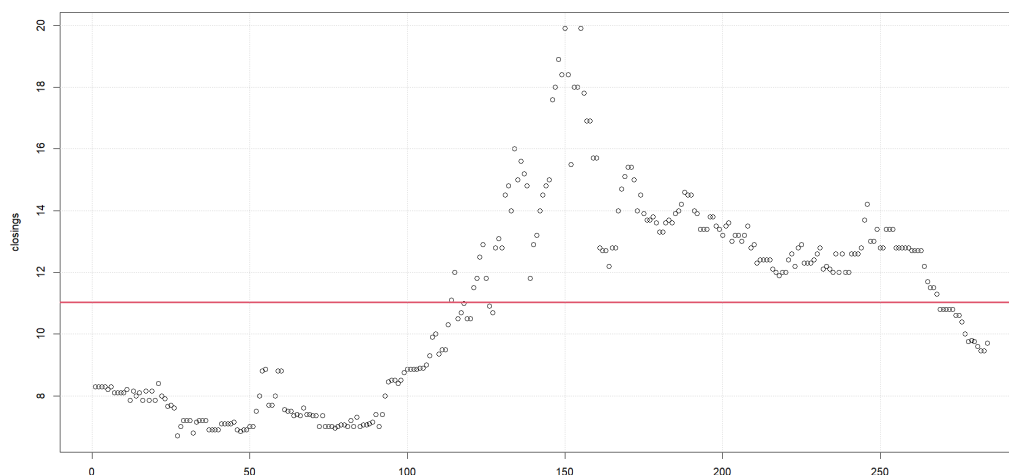
## 1.2 Digitree

### 1.2.1 Wstęp

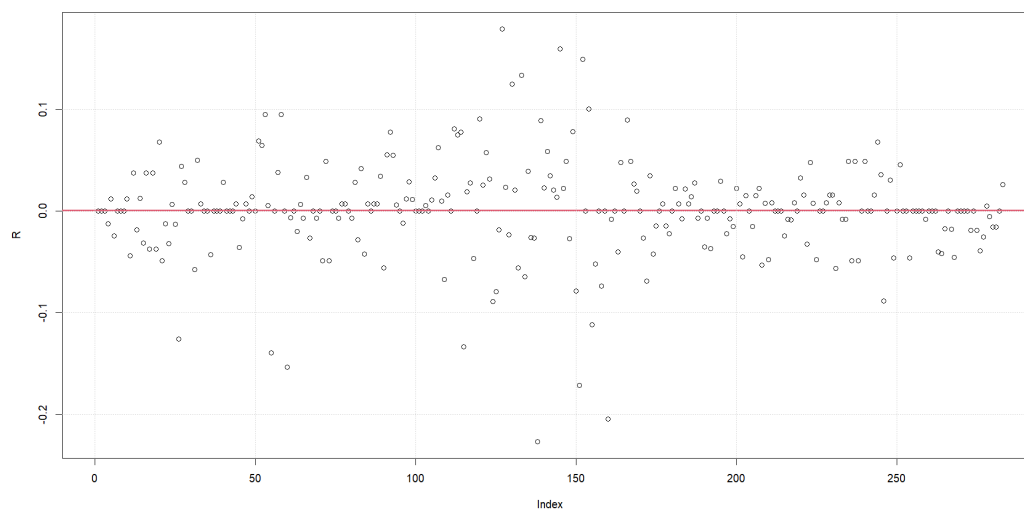
Digitree to polska spółka technologiczna specjalizująca się w kompleksowych rozwiązaniach z zakresu digital marketingu i wsparcia sprzedaży online.

### 1.2.2 Analiza log-zwrotów spółki DIGITREE

**Spółka DIGITREE:** Poniżej przedstawiam wykres kursów zamknięcia wybranej spółki



Poniżej przedstawiam wykres log-zwrotów wybranej spółki



**Podstawowa analiza statystyczna log-zwrotów:** Wartości log-zwrotów zostały obliczone jako różnice logarytmiczne dziennych kursów zamknięcia. Poniżej przedstawiono podstawowe statystyki log-zwrotów:

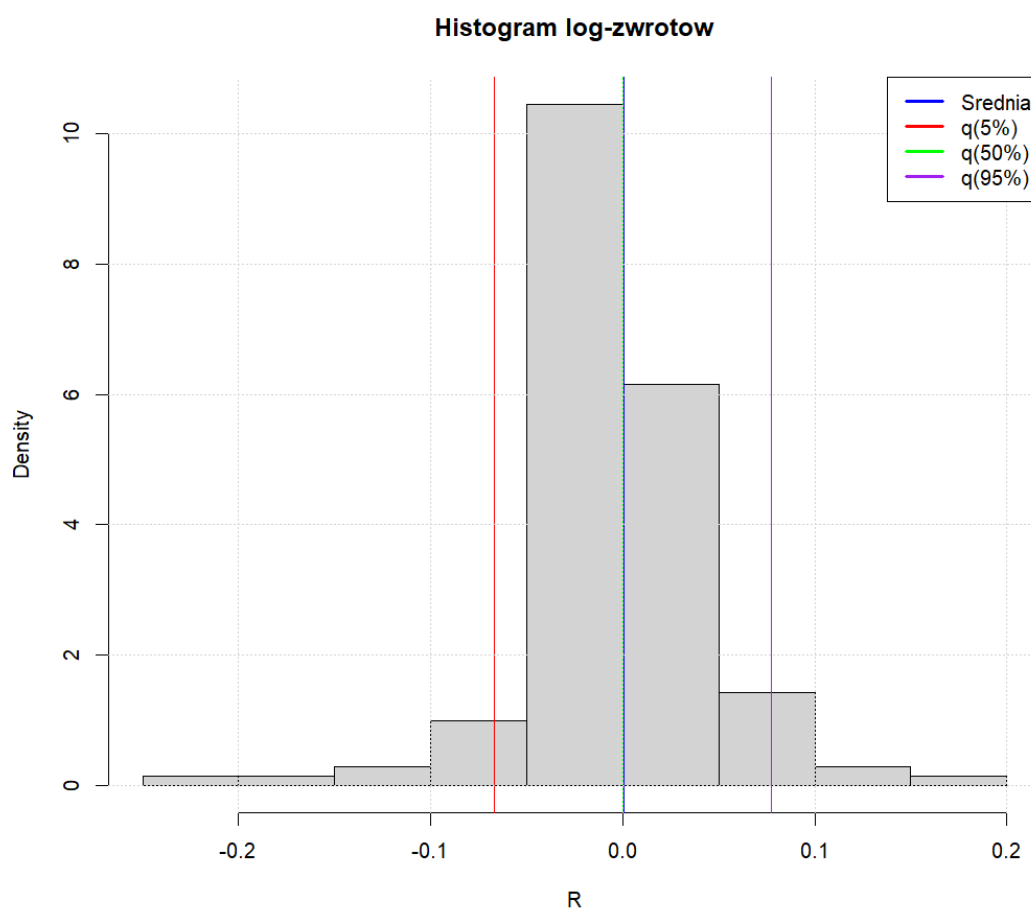
- Średnia log-zwrotów:  $\bar{x}_n = 0.0005507787$
- Wariancja log-zwrotów:  $s_n^2 = 0.0022445$
- Odchylenie standardowe log-zwrotów:  $s_n = 0.04737616$

Table 1: Estymacja parametrów log-zwrotów

$\bar{x}_n$	$s_n^2$	$s_n$	$q(5\%)$	$q(50\%)$	$q(95\%)$
0.0005507787	0.0022445	0.04737616	-0.06694173	0.000000000	0.07764551

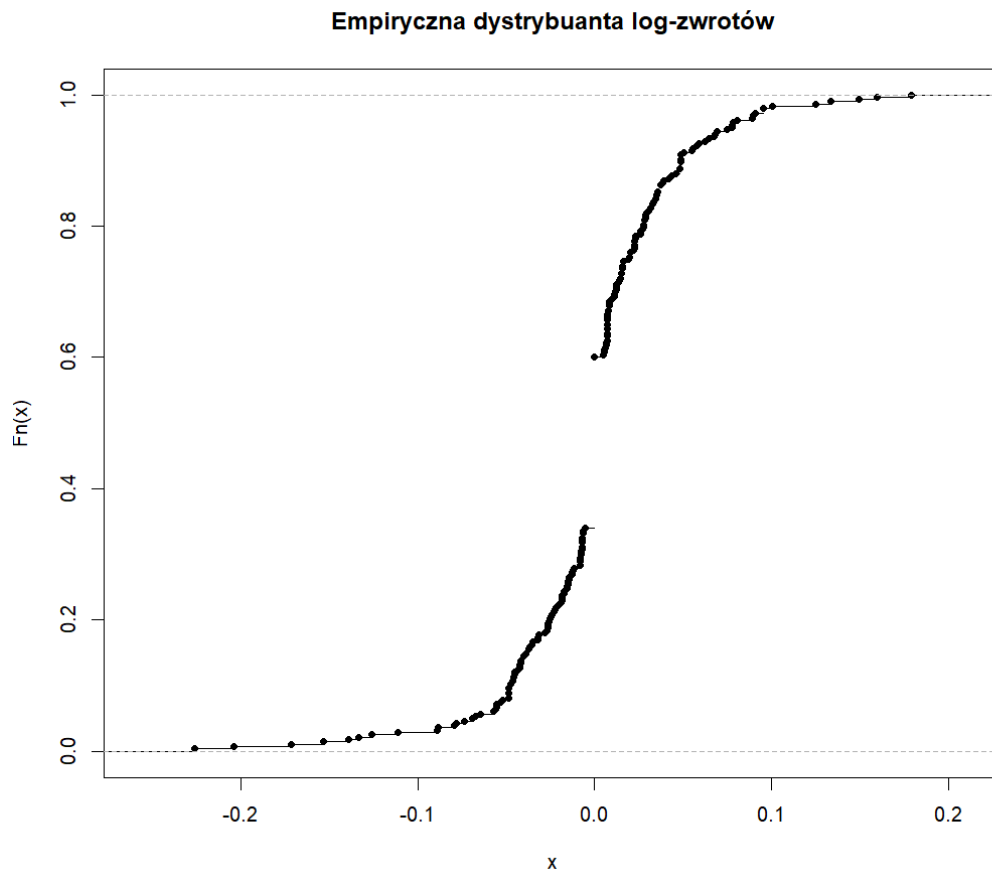
Kwantyle 5

**Histogram log-zwrotów z zaznaczoną średnią i kwantylami:** Poniżej zamieszczono histogram log-zwrotów z zaznaczonymi wartościami średniej oraz kwantyli 5





**Dystrybuanta empiryczna log-zwrotów:** Estymacja dystrybuanty empirycznej dla log-zwrotów została przeprowadzona przy użyciu wzoru empirycznej dystrybuanty  $F_n(x)$ . Wykres dystrybuanty empirycznej log-zwrotów znajduje się poniżej.



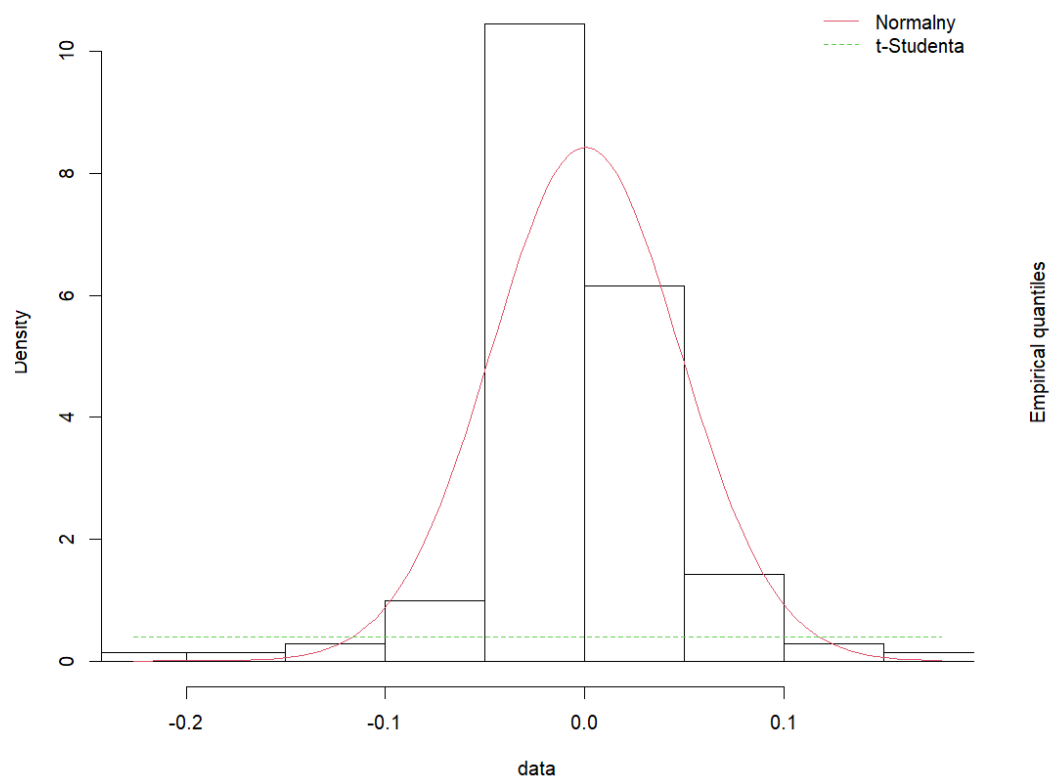
### 1.2.3 Analiza dobroci dopasowania rozkładów

**Estymacja parametrów rozkładu normalnego i t-Studenta:** Parametry rozkładu normalnego i t-Studenta zostały wyestymowane przy użyciu estymatora największej wiarygodności (MLE):

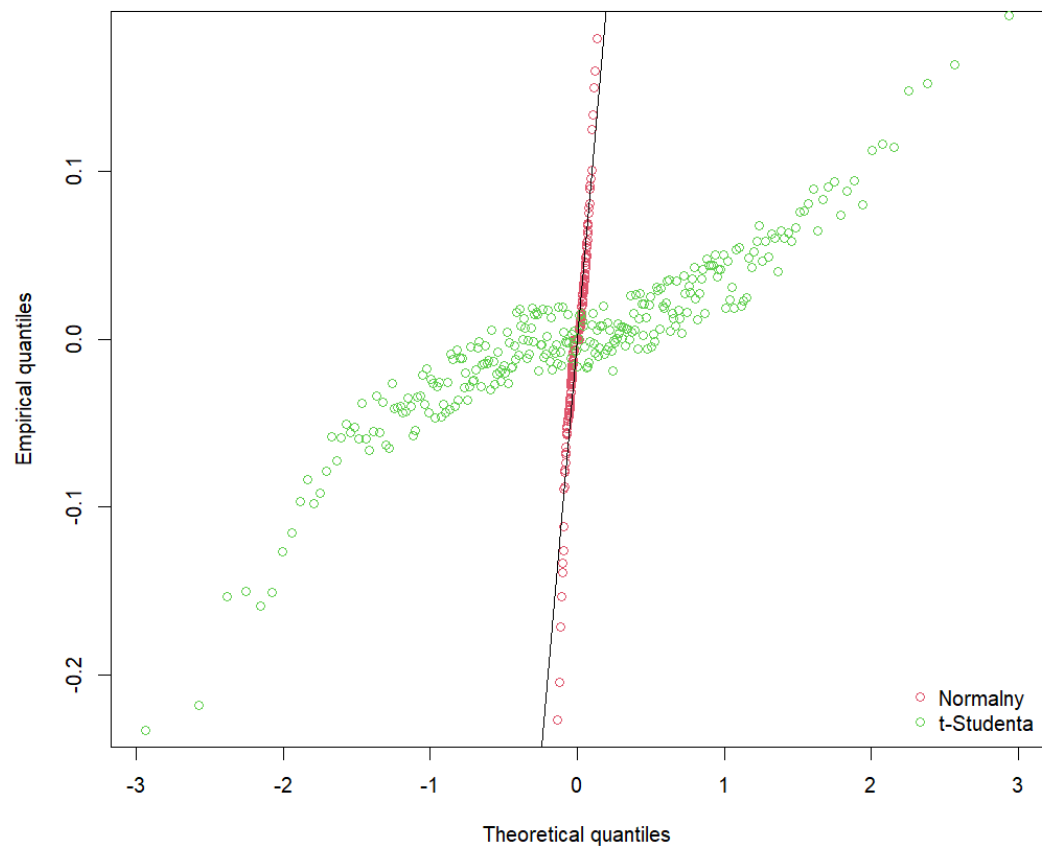
- Rozkład normalny: średnia = 0.0005507787, odchylenie standardowe = 0.0472923802
- Rozkład t-Studenta: liczba stopni swobody = 307.2041

**Wykresy diagnostyczne:** Poniżej przedstawiono wykresy diagnostyczne dla dopasowania rozkładów normalnego i t-Studenta do danych log-zwrotów, umożliwiające ocenę jakości dopasowania.

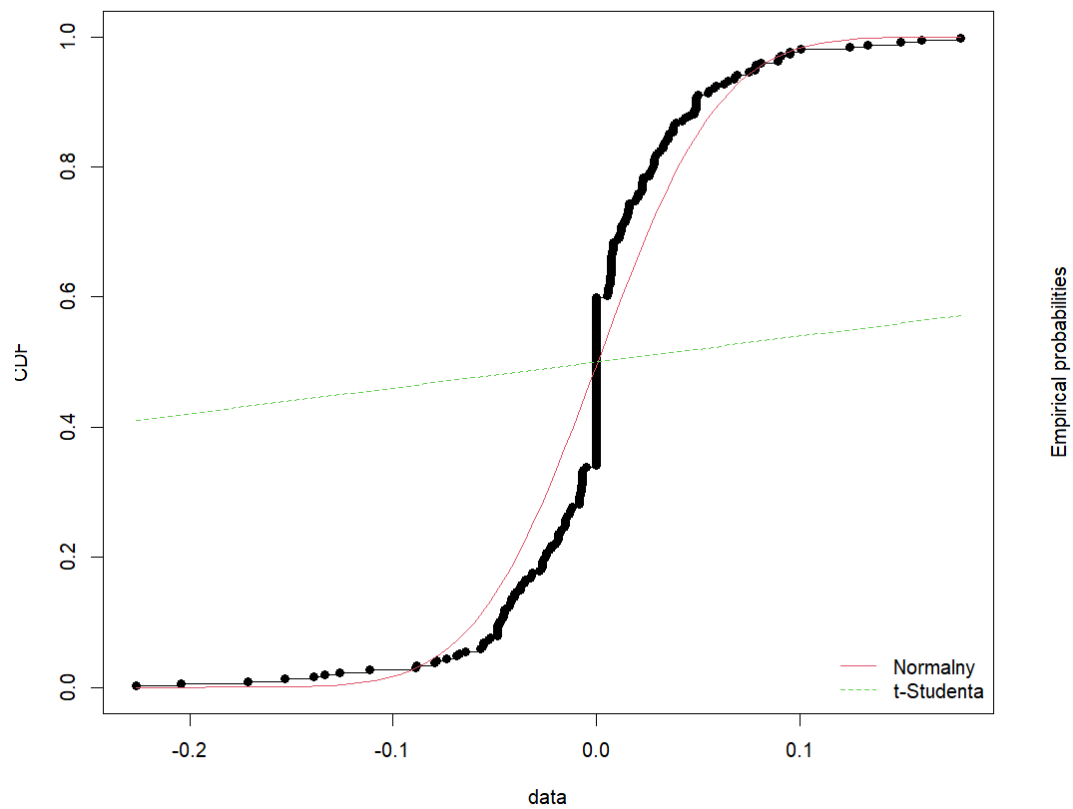
### Porównanie dopasowania - gestosc



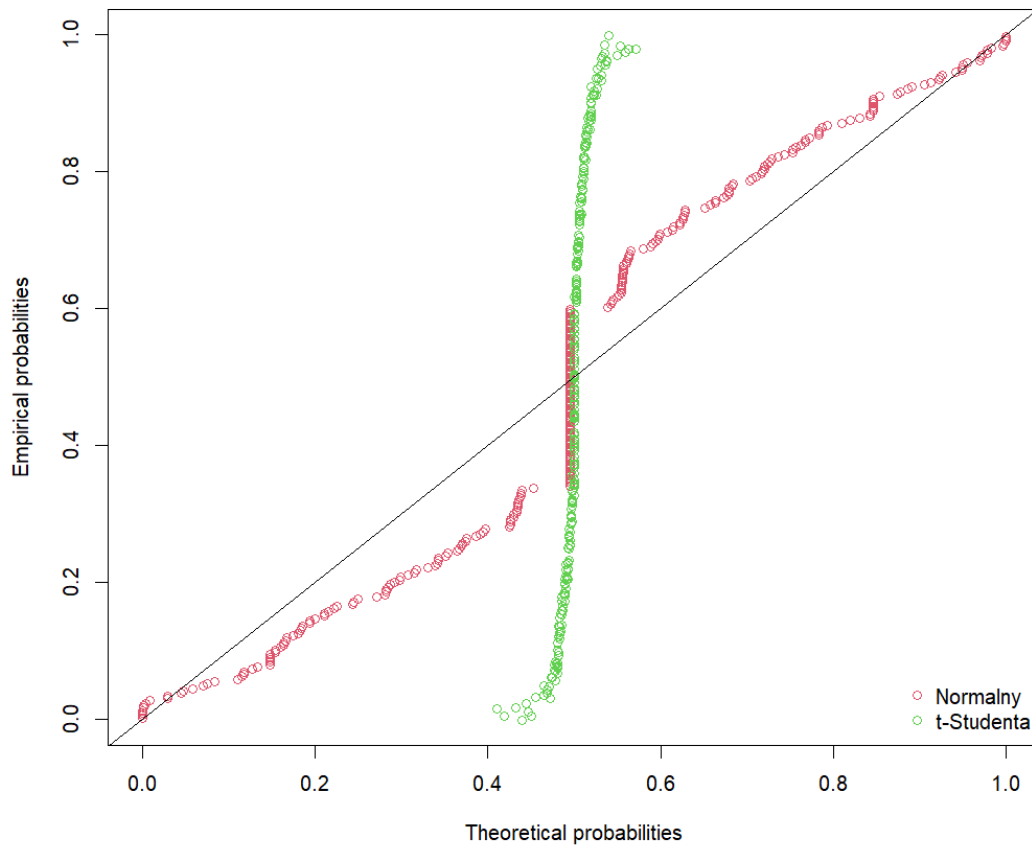
### Porównanie dopasowania - kwantyle



### Porównanie dopasowania - dystrybuanta



### Porównanie dopasowania - prawdopodobieństwo



#### 1.2.4 Ocena dopasowania rozkładów

Na podstawie wykresów diagnostycznych oraz statystyk dopasowania:

- Statystyki dla rozkładu normalnego:  $KS = 0.1561$ ,  $CM = 1.8659$ ,  $AD = 9.3673$ ,  $AIC = -919.9766$ ,  $BIC = -912.6857$
- Statystyki dla rozkładu t-Studenta:  $KS = 0.4424$ ,  $CM = 21.0334$ ,  $AD = 99.0999$ ,  $AIC = 523.2149$ ,  $BIC = 526.8603$

Wyniki sugerują, że rozkład normalny lepiej dopasowuje się do danych log-zwrotów niż rozkład t-Studenta. Wybór rozkładu normalnego uzasadniają niższe wartości AIC i BIC oraz lepsze dopasowanie na wykresach diagnostycznych.

**Test hipotezy o równości rozkładów:** Przeprowadzono test hipotezy o równości rozkładów dla wybranego rozkładu normalnego, wykorzystując statystykę Kolmogorova-Smirnova (KS). Wyniki testu przedstawiono poniżej:

- **Statystyka testowa  $D$ :** Obliczona wartość wynosi  $D = 0.1561313$ . Statystyka  $D$  mierzy maksymalną różnicę pomiędzy dystrybuantą empiryczną danych a teoretyczną dystrybuantą rozkładu normalnego. Wysoka wartość  $D$  wskazuje na większą różnicę, co może sugerować, że dane nie pochodzą z badanego rozkładu.
- **P-wartość ( $p$ ):** Obliczona p-wartość wynosi  $p = 0$ . Oznacza to, że przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, prawdopodobieństwo uzyskania tak dużej lub większej różnicy  $D$  wynosi praktycznie zero. W rezultacie, hipoteza zerowa o zgodności rozkładu danych z rozkładem normalnym zostaje odrzucona na dowolnym poziomie istotności.

#### **Interpretacja:**

- Obliczona wartość statystyki  $D$  sugeruje, że istnieją istotne różnice pomiędzy rozkładem danych a teoretycznym rozkładem normalnym.
- Niska p-wartość ( $p = 0$ ) wskazuje, że te różnice są statystycznie istotne. Oznacza to, że dane najprawdopodobniej nie pochodzą z badanego rozkładu normalnego.

### **1.3 Wawel**

#### **1.3.1 Wprowadzenie**

Wawel SA (WWL) jest polskim producentem słodczy, znanym z produkcji czekolad, cukierków, wafli oraz innych wyrobów cukierniczych. Firma cieszy się długą tradycją na rynku i dostarcza wysokiej jakości produkty konsumentom zarówno w Polsce, jak i za granicą.

Przeprowadzona analiza stanowi pierwszą część projektu zaliczeniowego, w której skupimy się na analizie log-zwrotów akcji spółki Wawel SA.

### 1.3.2 Wykresy kursów zamknięcia oraz log-zwrotów

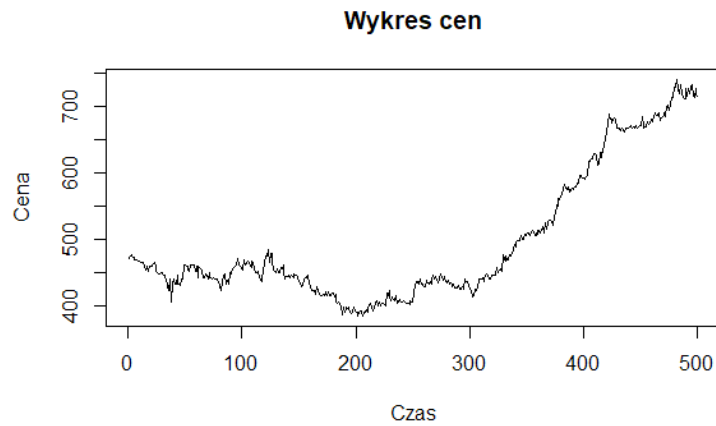


Figure 1: Wykres cen akcji spółki Wawel SA (WWL)

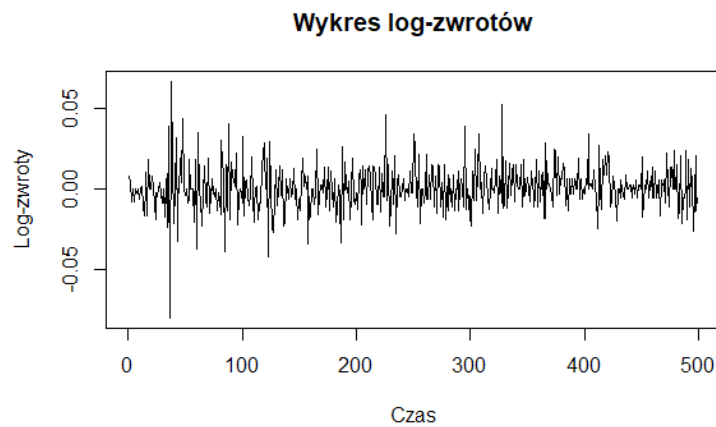


Figure 2: Wykres log-zwrotów akcji spółki Wawel SA (WWL)

Wykresy powyżej ilustrują zmiany kursów zamknięcia oraz log-zwrotów akcji spółki Wawel SA w czasie. Widać na nich zmienność cen akcji oraz ich wpływ na log-zwroty.

### 1.3.3 Analiza log-zwrotów

Zakładamy, że log-zwroty  $r_1, r_2, \dots, r_n$  są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej  $X$  o dystrybucji  $F$ , wartości oczekiwanej  $\mu$  i wariancji  $\sigma^2$ .

Odpowiednie estymatory użyte w analizie to:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{\mu})^2 \quad (2)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \quad (3)$$

Korzystając z klasycznego estymatora kwantyli, wyestymowano kwantyle rzędu  $\alpha = 5\%, 50\%, 95\%$ . Wyniki zostały przedstawione w tabeli poniżej:

Estymator	Wartość
Liczność próby ( $n$ )	499
Wartość oczekiwana ( $\hat{\mu}$ )	0,000837
Wariancja ( $\hat{\sigma}^2$ )	0,000202
Odchylenie standardowe ( $\hat{\sigma}$ )	0,014220
Kwantyl 5% ( $q_{5\%}$ )	-0,020416
Kwantyl 50% ( $q_{50\%}$ )	0,000000
Kwantyl 95% ( $q_{95\%}$ )	0,023786

Table 2: Podstawowe statystyki log-zwrotów akcji spółki Wawel SA (WWL)



Figure 3: Histogram log-zwrotów z zaznaczoną średnią i kwantylami

### 1.3.4 Interpretacja kwantyli

Każdy z kwantyli ma swoją specyficzną interpretację w kontekście log-zwrotów akcji:



- **Kwantyl 5%:** Wartość log-zwrotu, poniżej której znajduje się 5% najmniejszych obserwacji. Oznacza to, że istnieje 5% szans, że log-zwrot będzie niższy niż -0,020416.
- **Kwantyl 50% (mediana):** Wartość środkowa log-zwrotów. Oznacza to, że połowa log-zwrotów jest większa, a połowa mniejsza niż 0,000000.
- **Kwantyl 95%:** Wartość log-zwrotu, poniżej której znajduje się 95% obserwacji. Oznacza to, że tylko 5% log-zwrotów jest wyższych niż 0,023786.

### 1.3.5 Estymacja dystrybuanty

W celu estymacji dystrybuanty  $F$  wykorzystano empiryczny estymator dystrybuanty, którego wzór jest następujący:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(r_i \leq x), \quad (4)$$

gdzie  $I(r_i \leq x)$  jest funkcją indykatora, a  $n$  oznacza liczbę obserwacji.

Dystrybuanta empiryczna została przedstawiona na wykresie poniżej:

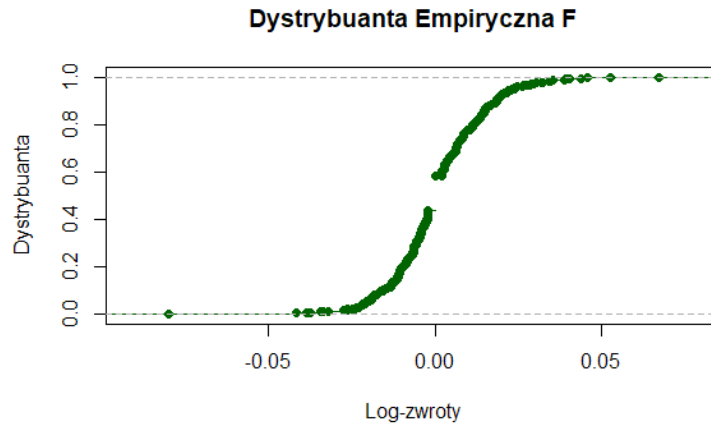


Figure 4: Dystrybuanta empiryczna  $\hat{F}(x)$  dla log-zwrotów

### 1.3.6 Analiza dobroci dopasowania rozkładu normalnego i t-Studenta

**Estymacja parametrów:** Wykorzystując estymator największej wiarygodności (MLE) oraz bibliotekę `fitdistrplus` w R, wyestymowano parametry rozkładu normalnego i t-Studenta dla danych log-zwrotów.

	Estymata	Błąd standardowy
Średnia ( $\hat{\mu}$ )	0,000837	0,000636
Odchylenie standardowe ( $\hat{\sigma}$ )	0,014205	0,000440

Table 3: Estymowane parametry rozkładu normalnego

## Rozkład normalny

	Estymata	Błąd standardowy
Liczba stopni swobody ( $\hat{\nu}$ )	4,9764	1,1504
Średnia ( $\hat{\mu}$ )	0,000344	0,000578
Skala ( $\hat{\sigma}$ )	0,011042	0,000611

Table 4: Estymowane parametry rozkładu t-Studenta

## Rozkład t-Studenta

### 1.3.7 Wykresy diagnostyczne

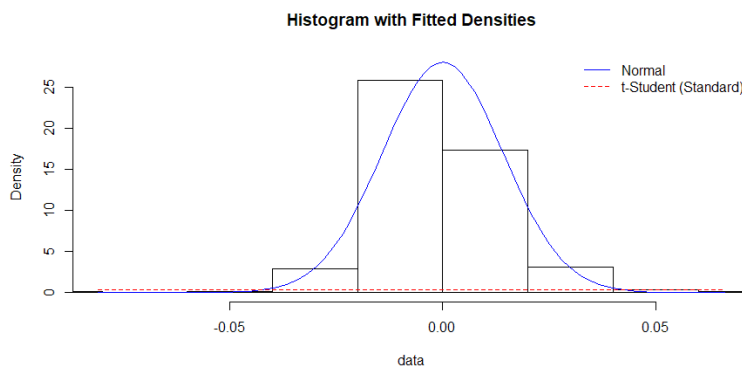


Figure 5: Histogram log-zwrotów z nałożonymi funkcjami gęstości rozkładów normalnego i t-Studenta

**Histogram z nałożonymi gęstościami** **Opis:** Wykres histogramu przedstawia empiryczny rozkład danych, na który nałożono dopasowane gęstości rozkładów normalnego (niebieska linia) i t-Studenta (czerwona linia przerywana). Analiza wykazuje, że:

- Rozkład normalny (niebieski) lepiej odwzorowuje dane empiryczne, szczególnie w centralnym zakresie wartości.
- Rozkład t-Studenta (czerwony) jest znacząco niedopasowany.

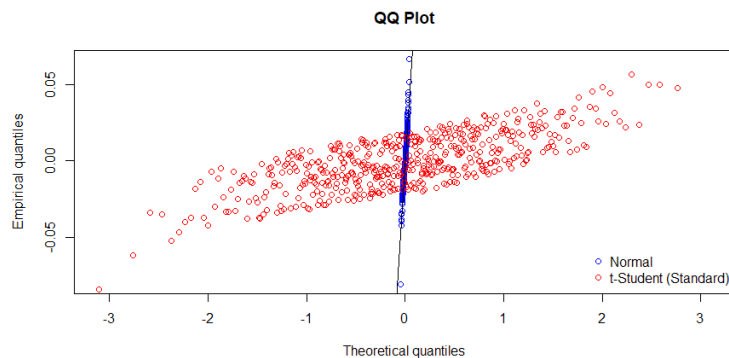


Figure 6: Wykres Q-Q dla rozkładów normalnego i t-Studenta

**Wykres kwantyl-kwantyl (Q-Q plot)** Opis: Wykres QQ porównuje kwantyle empiryczne danych z kwantylami teoretycznymi rozkładów normalnego i t-Studenta. Na wykresie zauważalne są następujące cechy:

- Punkty dla rozkładu normalnego (niebieskie) układają się niemal idealnie wzdłuż linii prostej, co sugeruje wysoką zgodność z danymi empirycznymi.
- Rozkład t-Studenta (czerwony) znacznie odstaje od linii prostej, wskazując na niedopasowanie tego rozkładu do danych.

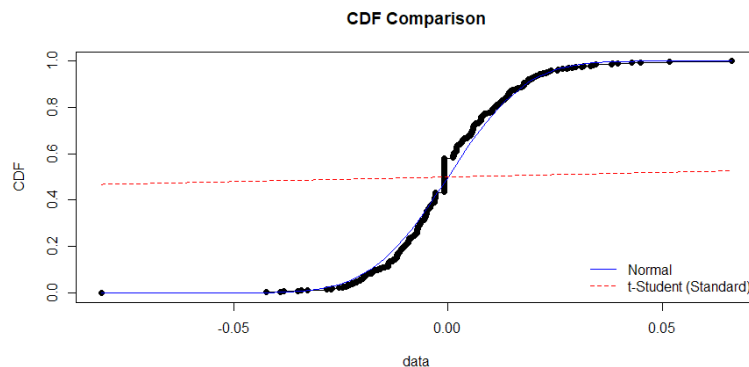


Figure 7: Porównanie dystrybuant empirycznej z teoretycznymi dla rozkładów normalnego i t-Studenta

**Porównanie dystrybuant (CDF)** Opis: Wykres porównuje empiryczną dystrybuantę danych z teoretycznymi dystrybuantami rozkładów normalnego i t-Studenta. Główne obserwacje:

- Dystrybuenta rozkładu normalnego (niebieska linia) doskonale pokrywa się z empiryczną dystrybuantą danych.

- Dystrybuanta rozkładu t-Studenta (czerwona linia przerywana) wykazuje znaczne rozbieżności, co wskazuje na niedopasowanie.

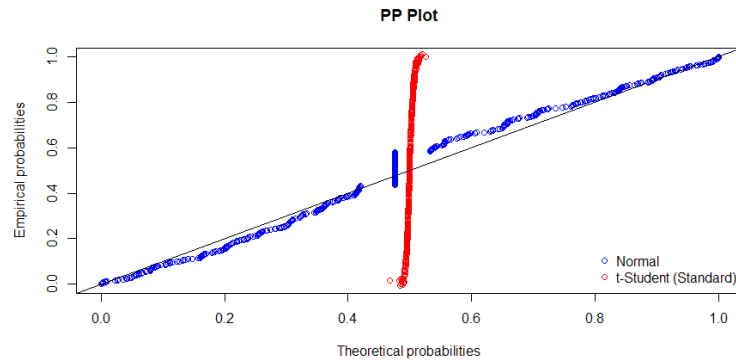


Figure 8: Wykres P-P dla rozkładów normalnego i t-Studenta

**Wykres P-P (Probability-Probability plot)** Opis: Wykres PP ilustruje zgodność empirycznych prawdopodobieństw z teoretycznymi dla rozkładu normalnego. Natomiast dane rozkładu T-Studenta znacząco odbiegają od danych rzeczywistych. Z analizy wynika:

- Punkty dla rozkładu normalnego (niebieskie) układają się niemal idealnie wzdłuż linii przekątnej, co potwierdza bardzo dobre dopasowanie do danych.
- Rozkład t-Studenta (czerwony) pokazuje znaczne odstępstwa od linii przekątnej, co sugeruje istotne niedopasowanie.

### 1.3.8 Ocena dopasowania rozkładów

Analiza jednoznacznie wskazuje, że dane empiryczne są znacznie lepiej modelowane przez rozkład **normalny** niż przez rozkład t-Studenta. **Wnioski:**

- Rozkład normalny charakteryzuje się bliskim dopasowaniem zarówno w centralnej części, jak i w ogonach.
- Rozkład t-Studenta znacząco odbiega od danych, co czyni go nieodpowiednim w tym przypadku.

## Interpretacja statystyk dopasowania rozkładów

### Statystyki dopasowania (*Goodness-of-fit statistics*)

Statystyka	Normalny	t-Studenta
Kolmogorov-Smirnov	0.1047	0.4811
Cramer-von Mises	0.6771	40.0829
Anderson-Darling	3.5170	186.7583

Table 5: Porównanie statystyk dopasowania rozkładów

#### Interpretacja:

- Rozkład normalny uzyskał znacznie niższe wartości dla wszystkich trzech statystyk, co wskazuje na lepsze dopasowanie do danych w porównaniu z rozkładem t-Studenta.
- Szczególnie wartość statystyki Andersona-Darlinga dla rozkładu t-Studenta (186.7583) podkreśla jego niedopasowanie.

### Kryteria dopasowania (*Goodness-of-fit criteria*)

Kryterium	Normalny	t-Studenta
Akaike's Information Criterion (AIC)	-2825.534	919.8094
Bayesian Information Criterion (BIC)	-2817.109	924.0220

Table 6: Porównanie kryteriów dopasowania rozkładów

#### Interpretacja:

- Zarówno kryterium Akaike'go (AIC), jak i kryterium Bayesowskie (BIC) wskazują, że rozkład normalny jest znacznie lepiej dopasowany niż rozkład t-Studenta.
- Niższe wartości dla rozkładu normalnego ( $-2825.534$  dla AIC oraz  $-2817.109$  dla BIC) wskazują na przewagę tego modelu w uwzględnianiu dopasowania i prostoty modelu.

## Podsumowanie

Na podstawie przedstawionych statystyk i kryteriów dopasowania:

- Rozkład **normalny** jest znacznie lepszy w modelowaniu danych niż rozkład t-Studenta.
- Rozkład t-Studenta charakteryzuje się dużymi odstępstwami w dopasowaniu, co czyni go nieodpowiednim w tym przypadku.

### 1.3.9 Test hipotezy metodą Monte Carlo

Dla wybranego rozkładu t-Studenta przeprowadzono test hipotezy o równości rozkładów, wykorzystując statystykę Kolmogorowa-Smirnowa (KS) oraz metodę Monte Carlo. Wyniki testu przedstawiono w tabeli 5.

Wynik	Wartość
Zaobserwowana statystyka KS	0,0893735
P-wartość z symulacji Monte Carlo	0

Table 7: Wyniki testu hipotezy metodą Monte Carlo

**Interpretacja:** P-wartość równa 0 wskazuje na silne podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej, że dane pochodzą z rozkładu t-Studenta z wyestymowanymi parametrami. Oznacza to, że mimo lepszego dopasowania w porównaniu z rozkładem normalnym, rozkład t-Studenta nie jest w stanie w pełni opisać danych log-zwrotów.

### Histogram logarytmicznych zwrotów

**Opis:** Histogram przedstawia empiryczny rozkład logarytmicznych zwrotów danych:

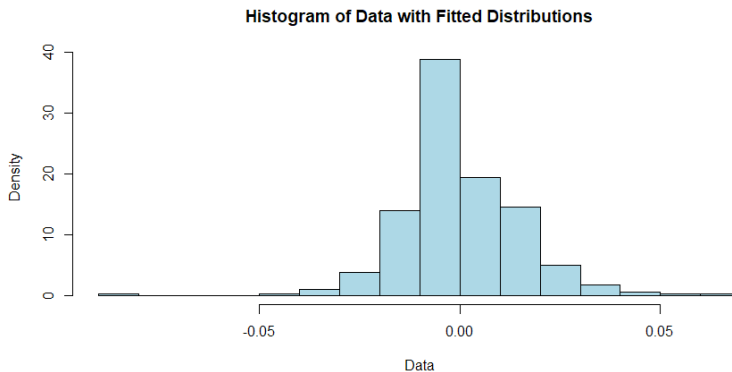


Figure 9: Histogram logarytmicznych zwrotów

**Podsumowanie:** Przeprowadzona analiza log-zwrotów akcji spółki Wawel SA wykazała, że:

- Średnia log-zwrotów jest bliska zeru, co sugeruje brak wyraźnego trendu wzrostowego lub spadkowego w badanym okresie.
- Odchylenie standardowe wskazuje na umiarkowaną zmienność log-zwrotów.
- Kwantyle pokazują asymetrię w rozkładzie log-zwrotów, co jest typowe dla danych finansowych.
- Rozkład normalny lepiej dopasowuje się do danych niż rozkład T-Studenta, co potwierdzają statystyki dobroci dopasowania i kryteria informacyjne.
- Test hipotezy metodą Monte Carlo sugeruje odrzucenie hipotezy, że dane pochodzą z rozkładu t-Studenta, wskazując na lepsze dopasowanie wyników otrzymanych z rozkładu normalnego.

## 2 Analiza łącznego rozkładu log-zwrotów

### 2.1 Wstęp

Poniższy rozdział poświęcony jest analizie wektorów log-zwrotów trzech akcji spółek: Wawel SA, Digitree oraz Vigo Photonics. Analiza zostanie przeprowadzona na parach spółek, tak aby zbadać zależności między każdą z nich.

Zakładamy, że log-zwroty akcji spółek są realizacjami zmiennych losowych, które oznaczamy jako  $W, D, V$  - kolejno: Wawel, Digitree oraz Vigo Photonics. Zakładamy, że log-zwroty dwóch akcji są niezależnymi realizacjami wektora losowego  $(X, Y)$  o nieznannej gęstości  $f$ , wektorze średnich  $(\mu_1, \mu_2)$ , współczynnika korelacji  $\rho$ , macierzy kowariancji  $\Sigma$  i macierzy korelacji  $P$ .

### 2.2 Estymacja wektora srednich

Z wykorzystaniem estymatora wartości oczekiwanej

$$\hat{\mu} = (\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right)$$

estymujemy wektor średnich log-zwrotów dla każdej pary. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\hat{\mu}_1 = (\bar{W}_n, \bar{D}_n) =$$

$$\hat{\mu}_2 = (\bar{W}_n, \bar{V}_n) =$$

$$\hat{\mu}_3 = (\bar{V}_n, \bar{D}_n) =$$

### 2.3 Estymacja współczynnika korelacji

Korzystając z estymatora współczynnika korelacji

$$\hat{\rho} = R_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}},$$

gdzie  $S_x^2$  i  $S_y^2$  są nieobciążonymi estymatorami wariancji

$$S_x^2 = \sigma_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, S_y^2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$$

wyestymowujemy współczynnik korelacji dla każdej pary. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\hat{\rho}_1 = R_{wd} =$$

$$\hat{\rho}_2 = R_{wv} =$$

$$\hat{\rho}_3 = R_{vd} =$$



## 2.4 Estymacja macierzy kowariancji

Korzystając z estymatora macierzy kowariancji

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} S_x^2 & S_{xy}^2 \\ S_{xy}^2 & S_y^2 \end{bmatrix}$$

estymujemy macierz kowariancji dla każdej pary. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} S_w^2 & S_{wd}^2 \\ S_{wd}^2 & S_d^2 \end{bmatrix} =$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} S_w^2 & S_{wv}^2 \\ S_{wv}^2 & S_v^2 \end{bmatrix} =$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} S_v^2 & S_{vd}^2 \\ S_{vd}^2 & S_d^2 \end{bmatrix} =$$

## 2.5 Estymacja macierzy korelacji

Macierze korelacji

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

dla każdej z par wyglądają następująco:

$$R_1 =$$

$$R_2 =$$

$$R_3 =$$

## 2.6 Wykres rozrzutu z histogramami rozkładów brzegowych

Poniżej przedstawiony został wykres rozrzutu z histogramami rozkładów brzegowych:

## 2.7 Wzór gęstości rozkładu normalnego

Wzór gęstości rozkładu normalnego o wyestymowanych wcześniej parametrach:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right)$$

dla każdej z par wygląda następująco:

$$f(w, d) =$$

$$f(w, v) =$$

$$f(v, d) =$$

Wykresy gęstości łącznej prezentują się następująco:

## 2.8 Wzory gęstości rozkładów brzegowych

Korzystając z zależności

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx,$$

wyznaczamy wzory gęstości rozkładów brzegowych dla każdej pary.  
Otrzymujemy:

## 2.9 Wstępna ocena dobroci rozkładu normalnego z wyestymowanymi parametrami