MNUM – Projekt 4.56

Wojciech Rokicki gr. AR2

Zadanie 1

Ruch punktu opisany jest równaniami:

$$x_1' = x_2 + x_1(0{,}2 - {x_1}^2 - {x_2}^2)$$

$$x_2' = -x_1 + x_2(0{,}2 - {x_1}^2 - {x_2}^2)$$

Obliczyć przebieg trajektorii ruchu na przedziale $[0, 20]$ dla podanych warunków początkowych, z użyciem metod: Rungego-Kutty czwartego rzędu oraz wielokrokowej predyktor-korektor Adamsa czwartego rzędu ze stałym krokiem.

Metoda RK4:

Metodę tę można zdefiniować następująco:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Współczynnik k_1 jest pochodną rozwiązania w punkcie (x_n, y_n). Wartość k_2 wyznaczamy jak w zmodyfikowanej metodzie Eulera - jako pochodną rozwiązania wyznaczanego zwykłą metodą Eulera w punkcie $(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$ (środkowym przedziału). Następnie, wartość k_3 wyznaczamy podobnie, jak k_2, ale tym razem w punkcie $(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2)$, tzn. startując z początku przedziału z nachyleniem k_2. W końcu, z nachyleniem tej stycznej startujemy z punktu początkowego do punktu $(x_n + h, y_n + hk_3)$, tzn. wyznaczamy pochodną rozwiązania k_4 w punkcie $(x_n + h, y_n + hk_3)$. Mamy w ten sposób wyznaczone 4 wartości pochodnej rozwiązania: po jednej na końcach przedziału i dwie w jego środku. Aproksymacja pochodnej dla pełnego kroku metody wyznaczana jest jako ważona średnia arytmetyczna tych wartości, z wagami 1 na krańcach i wagą 2 w punkcie środkowym.

Krok był zmniejszany do momentu aż wykres prezentował wystarczającą dokładność (gładkość). Błąd pojedynczego kroku był szacowany na podstawie wzoru:

$$\delta_n(h) = \frac{2^p}{2^p - 1}({y_n}^{(2)} - {y_n}^{(1)})$$

Gdzie:

${y_n}^{(1)}$ – nowy punkt uzyskany w kroku o długości h

${y_n}^{(2)}$ – nowy punkt wyznaczony przez dwa dodatkowe kroki o długościach $0.5h$

p – rząd metody.

Kod algorytmu:

```
function[y] = rk4()
h = 0.002; %krok
x1=8; %pierwszy pkt
x2=7; %drugi pkt
%% 8 7; 0 0.4; 5 0; 0.01 0.001
tic;
t=0:h:20; %ilosc kroków

y(:,1) = [x1 x2]; %dane do wykresu

for i=1:(length(t)-1)
    k11=dx1(x1,x2);
    k12=dx2(x1,x2);

    k21=dx1(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k11);
    k22=dx2(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k12);

    k31=dx1(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k21);
    k32=dx2(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k22);

    k41=dx1(x1+h,x2+h*k31);
    k42=dx2(x1+h,x2+h*k31);

    x1=x1+(h/6)*(k11+k41+2*(k21+k31));
    x2=x2+(h/6)*(k12+k42+2*(k22+k32));

    y(:,i+1)=[x1 x2]; %zapisanie danych
end
plot(y(1,:),y(2,:));
toc;
end
```

Metoda predyktor-korektor Adamsa czwartego rzędu:

Metody Adamsa:

Równanie różniczkowe

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$
$$y(a) = y_a, x \in [a, b]$$

Równoważne jest równaniu całkowemu

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(t, y(t)dt$$

Metody Adamsa dostajemy, rozważając to równanie na przedziale $[x_{n-1}, x_n]$:

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y(t)dt$$

Metody jawne:

Funkcję podcałkową przybliżamy wielomianem interpolacyjnym $W(x)$ stopnia co najwyżej k-1 opartym na węzłach $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Przyjmując przybliżenie Lagrange'a mamy:

$$f(x, y(x)) \approx W(x) = \sum_{j=1}^{k} f(x_{n-j}, y_{n-j})\, L_j(x)$$

$$y_n = y_{n-1} + \sum_{j=1}^{k} f(x_{n-j}, y_{n-j}) \int_{x_{n-1}}^{x_n} L_j(t)dt$$

Gdzie $L_j(x)$ to wielomiany Lagrange'a:

$$L_j(x) = \prod_{m=1, m\neq j}^{k} \frac{x - x_{n-m}}{x_{n-j} - x_{n-m}}$$

Stąd po scałkowaniu, przy założeniu $x_{n-1} = x_n - hj, j = 1,2, \dots, k$ otrzymujemy:

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

Wartości β_j są stablicowane.

Metody niejawne:

Funkcję podcałkową przybliżamy wielomianem interpolacyjnym stopnia co najwyżej k opartym na węzłach $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$, z wartościami rozwiązania $y(x_{n-j}) \approx y_{n-j}$. Następnie postępując tak jak w przypadku metody jawnej otrzymujemy

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* f(x_{n-j}, y_{n-j}) = y_{n-1} + \beta_0^* f(x_n, y_n) + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

Wartości β_j^* są stablicowane.

Metoda predyktor-korektor:

Realizacja metody PK polega na połączeniu metod jawnych i niejawnych w jeden algorytm. W naszym przypadku:

P: $y_n^{[0]} = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j f_{n-j}$

E: $f_n^{[0]} = f(x_n, y_n^{[0]})$

K: $y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^* f_{n-j} + h \beta_0^* f_n^{[0]}$

E: $f_n = f(x_n, y_n)$

Dla metody PK oszacowanie błędu:

$$\delta_n(h_{n-1}) = -\frac{19}{270}(y_n^{[0]} - y_n)$$

Kod algorytmu:

```
function [y] = pc()
tic;
h = 0.005; %krok
x1=8; %pierwszy pkt
x2=7; %drugi pkt
t=0:h:20; %ilosc kroków

y(:,1) = [x1 x2]; %zapis pierwszych danych do wykresu

for i=1:3
    k11=dx1(x1,x2);
    k12=dx2(x1,x2);

    k21=dx1(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k11);
    k22=dx2(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k12);

    k31=dx1(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k21);
    k32=dx2(x1+0.5*h,x2+0.5*h*k22);

    k41=dx1(x1+h,x2+h*k31);
    k42=dx2(x1+h,x2+h*k31);

    x1=x1+(h/6)*(k11+k41+2*(k21+k31));
    x2=x2+(h/6)*(k12+k42+2*(k22+k32));

    y(:,i+1)=[x1 x2]; %zapisanie danych
end
for i = 4:(length(t))
    %predykcja z ewaluacja
    tmp1 = x1 + (h/24)*55*dx1(x1,x2) - 59*(h/24)*dx1(y(1,i-
1),y(2,i-1)) + 37*(h/24)*dx1(y(1,i-2),y(2,i-2)) -
9*(h/24)*dx1(y(1,i-3),y(2,i-3));
    tmp2 = x2 + (h/24)*55*dx2(x1,x2) - 59*(h/24)*dx2(y(1,i-
1),y(2,i-1)) + 37*(h/24)*dx2(y(1,i-2),y(2,i-2)) -
9*(h/24)*dx2(y(1,i-3),y(2,i-3));
    %korekcja z ewaluacja
    x1 = x1 + (h/720)*646*dx1(x1,x2) - 264*(h/720)*dx1(y(1,i-
1),y(2,i-1)) + 106*(h/720)*dx1(y(1,i-2),y(2,i-2)) -
19*(h/720)*dx1(y(1,i-3),y(2,i-3)) + h*(251/720)*dx1(tmp1,
tmp2);
    x2 = x2 + (h/720)*646*dx2(x1,x2) - 264*(h/720)*dx2(y(1,i-
1),y(2,i-1)) + 106*(h/720)*dx2(y(1,i-2),y(2,i-2)) -
19*(h/720)*dx2(y(1,i-3),y(2,i-3)) + h*(251/720)*dx2(tmp1,
tmp2);

    y(:,i)=[x1 x2];
end
plot(y(1,:),y(2,:));
%plot(0:h:20,y(1,:),'-',0:h:20,y(2,:),'-')
toc;
end
```

Metoda RK4 ze zmiennym krokiem:

Aby zmniejszyć liczbę iteracji w tych momentach w których nie jest potrzeba ich duża ilość wykorzystuje się zmienną długość kroku dla metody RK4. Polega ona na obliczaniu błędu aproksymacji w każdej iteracji, a następnie na jego podstawie obliczany jest współczynnik przez który mnożony jest poprzedni krok. Jeśli okazuje się, ze obecny krok nie jest wystarczająco dokładny, żeby osiągnąć wynik z zadaną dokładnością należy powtórzyć iterację z pomniejszonym o wyliczony współczynnik krokiem.

W celu oszacowania błędu, oprócz kroku o długości h wykonujemy również 2 kroki o dwa razy mniejszej długości. Wprowadzając oznaczenia $y_n^{(1)}$– punkt uzyskany po kroku o długości h, oraz $y_n^{(2)}$– punkt uzyskany po 2 krokach o długości 0.5h – ze wzoru na błąd oszacowania otrzymujemy (po przekształceniach) ostateczny wzór na oszacowanie błędu pojedynczego kroku o długościach h oraz 0.5h:

$$\delta_n(h) = \frac{2^p}{2^p - 1}\left(y_n^{(2)} - y_n^{(1)}\right)$$

$$\delta_n\left(2 \times \frac{h}{2}\right) = \frac{y_n^{(2)} - y_n^{(1)}}{2^p - 1}$$

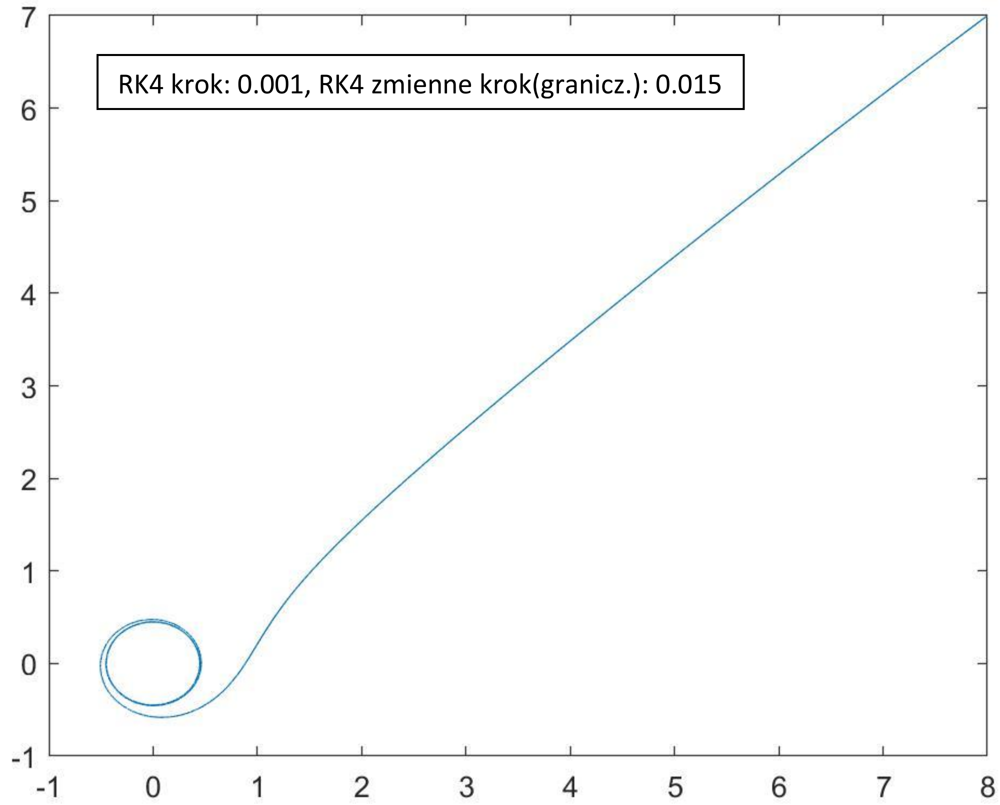
Mówimy, że funkcja jest rzędu p, gdy wartość rn(0) oraz wszystkie jego pochodne od 1 do p-tej włącznie w punkcie 0, są równe 0, natomiast pochodna p+1 rzędu w punkcie 0 jest różna od zera.

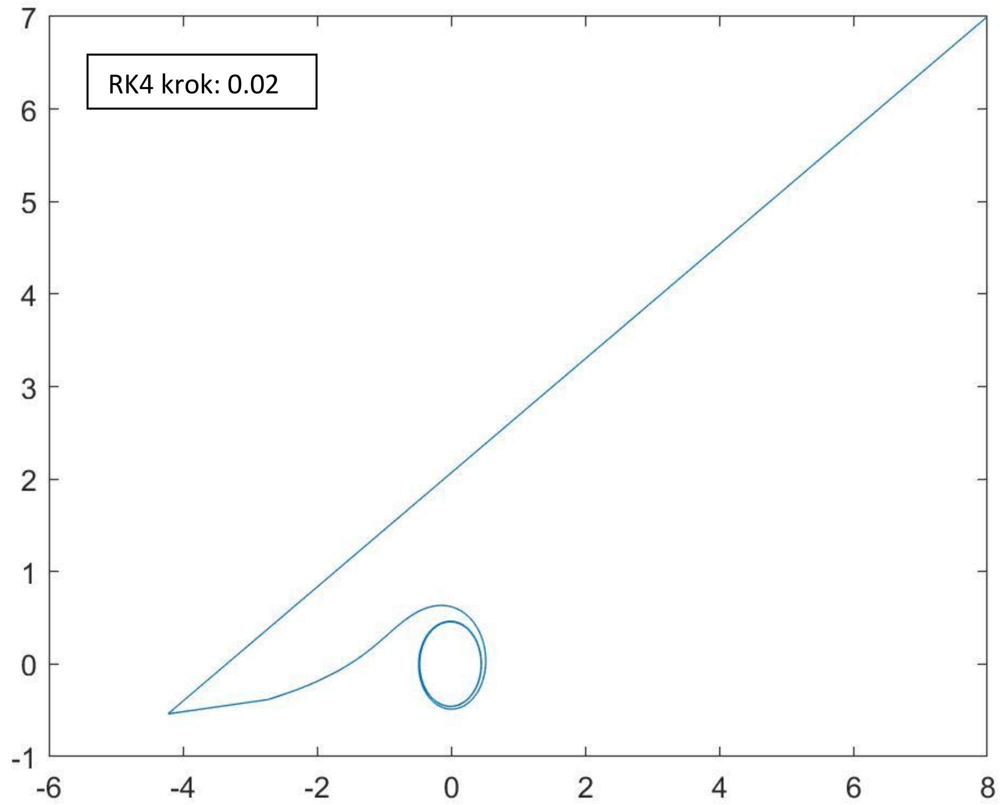
Kod algorytmu:

```
function [] = rk4zmien(xs1,xs2,step)
tic
stepd=step/2;                      %krok o dlugosci 2 razy mniejszej
i=int32(15/stepd);                 %ustalamy liczbe kroków, startowy przedzial
wynosi [0 15]
Error1=zeros(int32(i/2)+1,1);      %wektory na bledy aproksymacji
Error2=zeros(int32(i/2)+1,1);
X1=zeros(int32(i/2)+1,1);          %wektor na rozwiazania pierwszej zmiennej
X2=zeros(int32(i/2)+1,1);          %jw. na druga zmienna
Y=zeros(int32(i/2)+1,1);           %wektor ze zmienna czasu
x1=xs1;                            %x1,x2,x1d,x1d - punkty które bedziemy
obliczac dla pelnego
x2=xs2;                            %i polowicznego kroku
x1d=xs1;
x2d=xs2;
X1(1,1)=x1;
X2(1,1)=x2;
Y (1,1)=0;
Error1(1,1)=xs1;
Error2(1,1)=xs2;
halfstep=step/2;                   %"pólkroki" potrzebne w algorytmie
halfstepd=stepd/2;
for n=1:i
    if(mod(n,2) == 0)
    k11=dx1(x1,x2);
    k12=dx2(x1,x2);
    k21=dx1((x1+halfstep*k11),(x2+halfstep*k12));
    k22=dx2((x1+halfstep*k11),(x2+halfstep*k12));
    k31=dx1((x1+halfstep*k21),(x2+halfstep*k22));
    k32=dx2((x1+halfstep*k21),(x2+halfstep*k22));
    k41=dx1((x1+step*k31),(x2+step*k32));
    k42=dx2((x1+step*k31),(x2+step*k32));
    x1=x1+(1/6)*step*(k11+2*k21+2*k31+k41);
    x2=x2+(1/6)*step*(k12+2*k22+2*k32+k42);
    X1((n/2)+1,1)=x1;
    X2((n/2)+1,1)=x2;
    end
    k11d=dx1(x1d,x2d);
    k12d=dx2(x1d,x2d);
    k21d=dx1((x1d+halfstepd*k11d),(x2d+halfstepd*k12d));
    k22d=dx2((x1d+halfstepd*k11d),(x2d+halfstepd*k12d));
    k31d=dx1((x1d+halfstepd*k21d),(x2d+halfstepd*k22d));
    k32d=dx2((x1d+halfstepd*k21d),(x2d+halfstepd*k22d));
    k41d=dx1((x1d+stepd*k31d),(x2d+stepd*k32d));
    k42d=dx2((x1d+stepd*k31d),(x2d+stepd*k32d));
    x1d=x1d+(1/6)*stepd*(k11d+2*k21d+2*k31d+k41d);
    x2d=x2d+(1/6)*stepd*(k12d+2*k22d+2*k32d+k42d);
    if(mod(n,2) == 0)
        Error1((n/2)+1,1)=(16/15)*abs(x1d-X1((n/2)+1,1)); %15 to 2^k-1 ,
gdzie k to stopien (czyli 4)
        Error2((n/2)+1,1)=(16/15)*abs(x2d-X2((n/2)+1,1));
        Y ((n/2)+1,1)= double((n/2)+1)*step;
    end
end
toc;
%plot(Y,Error1,'--',Y,Error2,'-');
axis([0 15 0 0.2]); %ograniczenie skali x-ów i y-ów
%plot(Y,X1,'--',Y,X2,'-');
plot(X1,X2);
end
```

a) $x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 7$

W tym przypadku krok, dla którego metoda RK4 dawała poprawne rezultaty wynosił 0.001

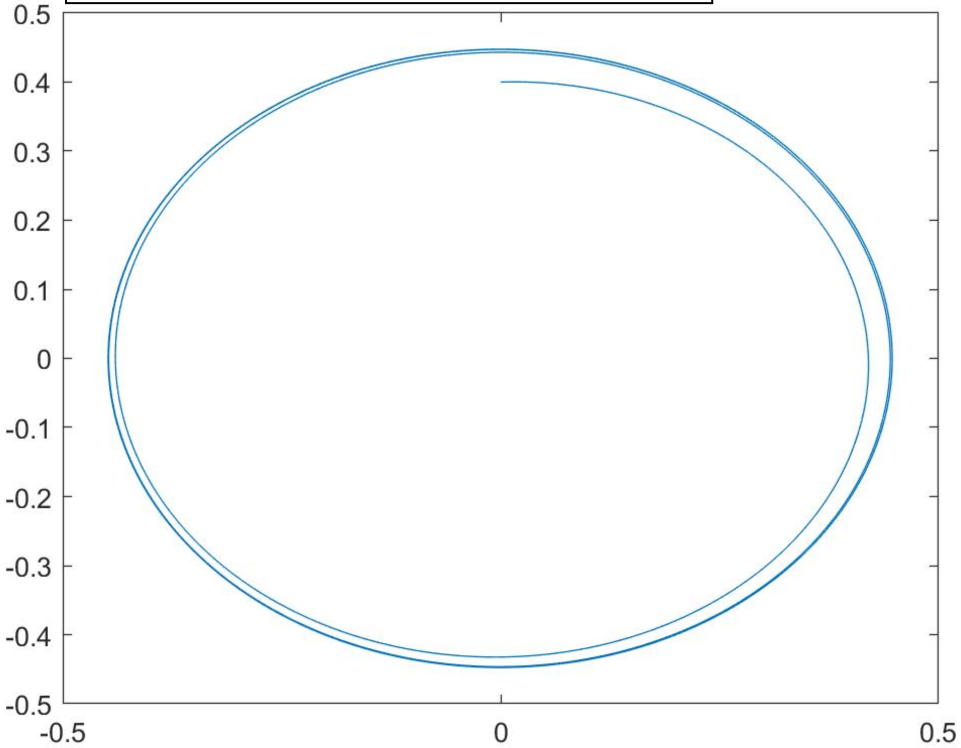




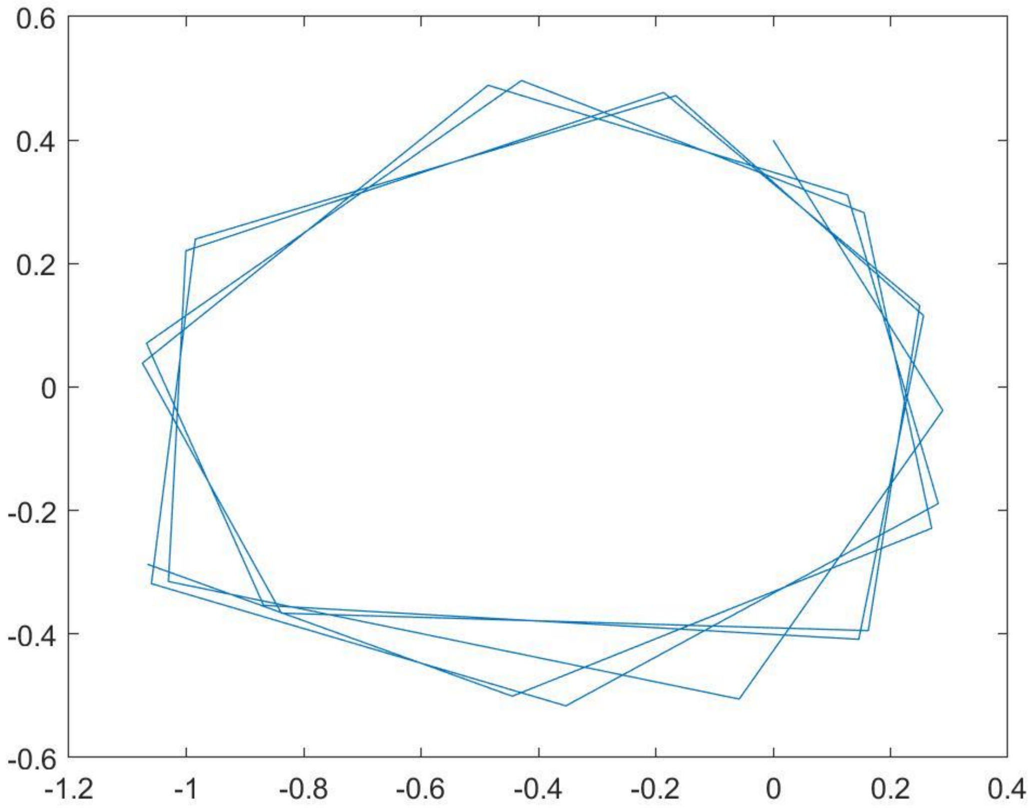
b) $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.4$

W tym przypadku krok, dla którego metoda RK4 dawała poprawne rezultaty wynosił 0.2

RK4 krok: 0.2, RK4 zmienne krok(granicz.): 0.3

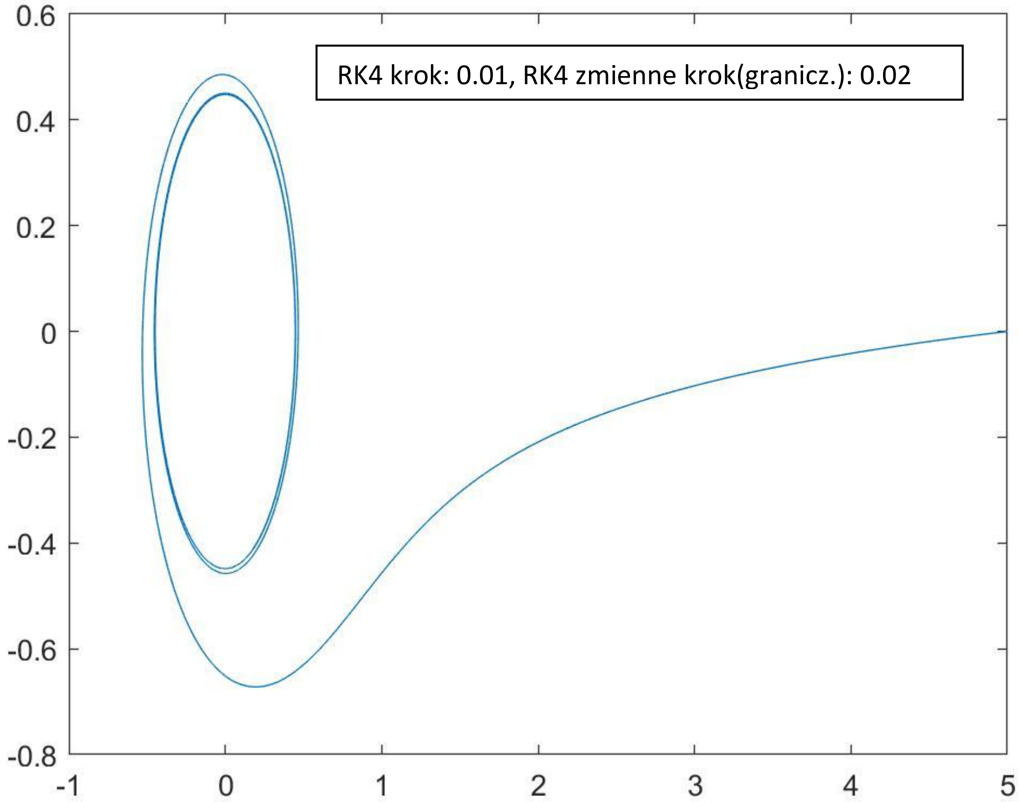


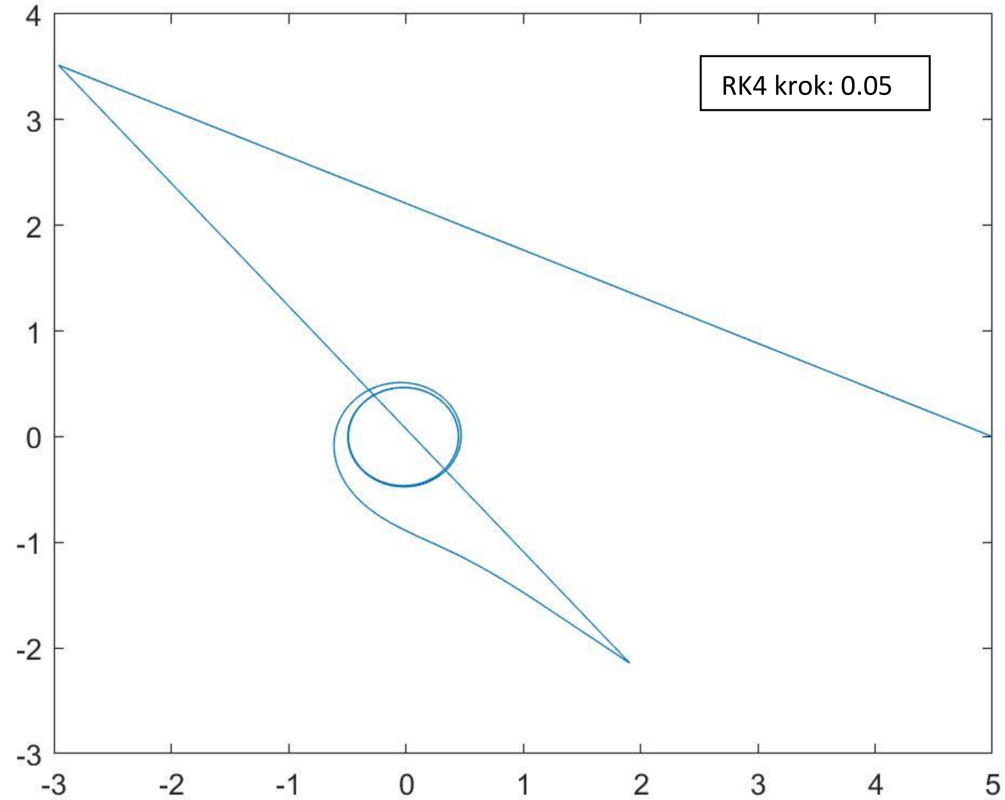
RK4 krok: 0.8



c) $x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0$

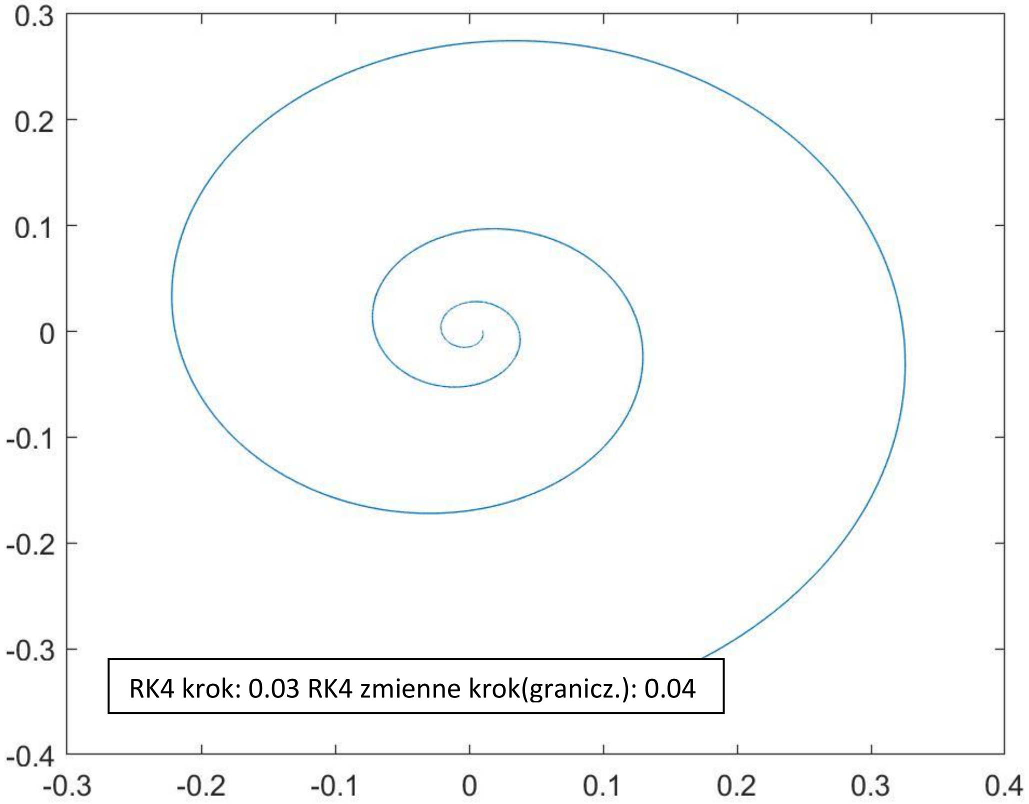
W tym przypadku krok, dla którego metoda dawała poprawne rezultaty wynosił 0.01

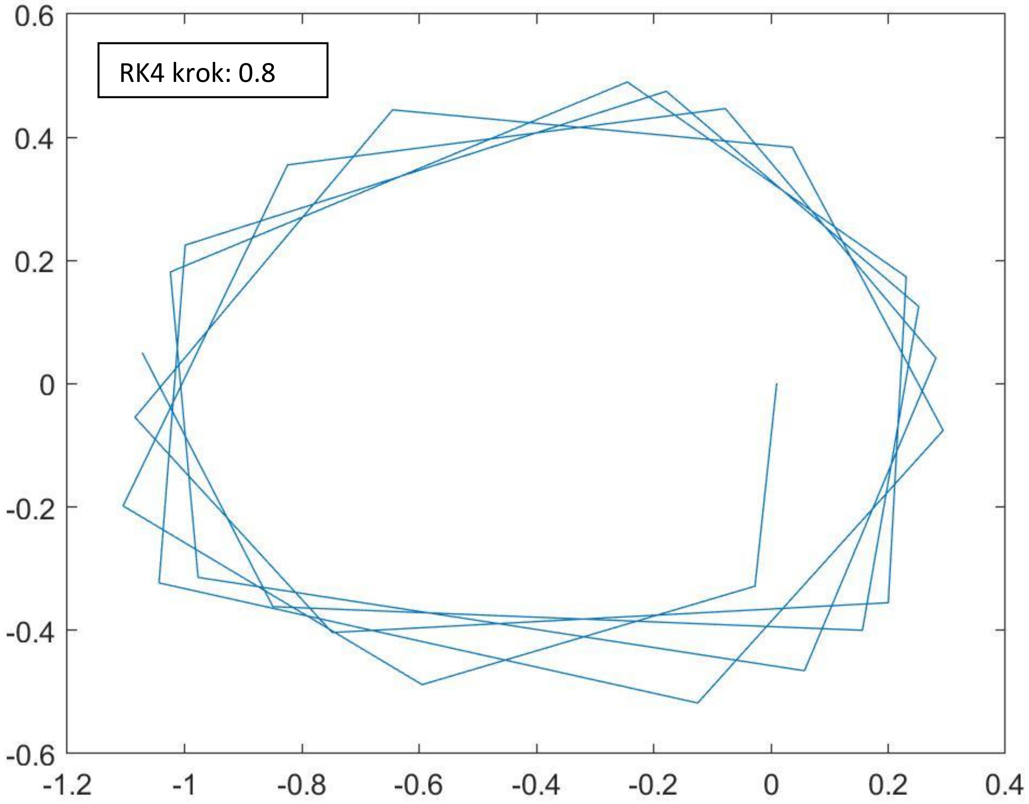




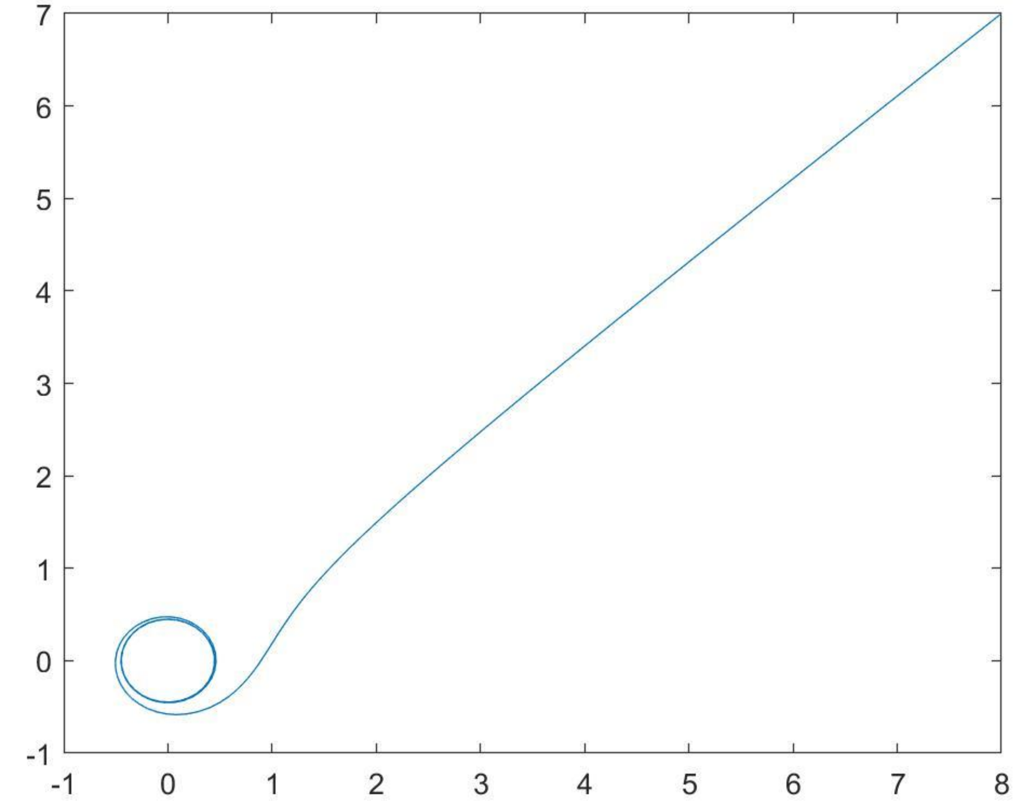
d) $x_1(0) = 0.01, \quad x_2(0) = 0.001$

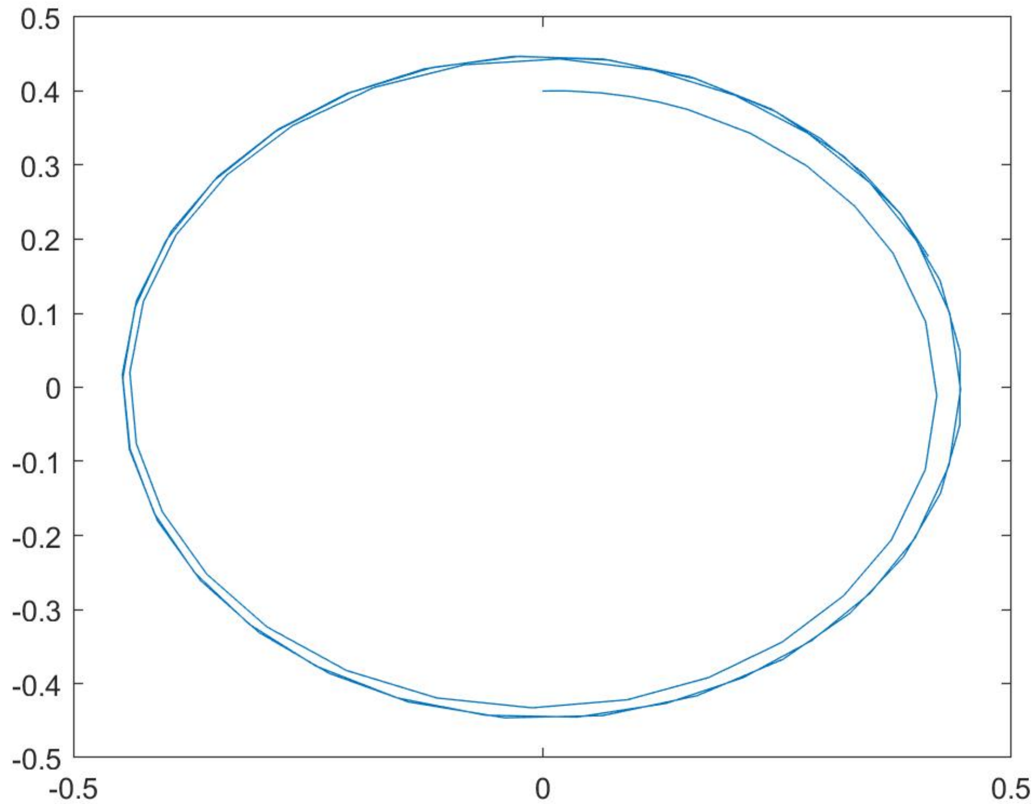
W tym przypadku krok, dla którego metoda dawała poprawne rezultaty wynosił 0.03

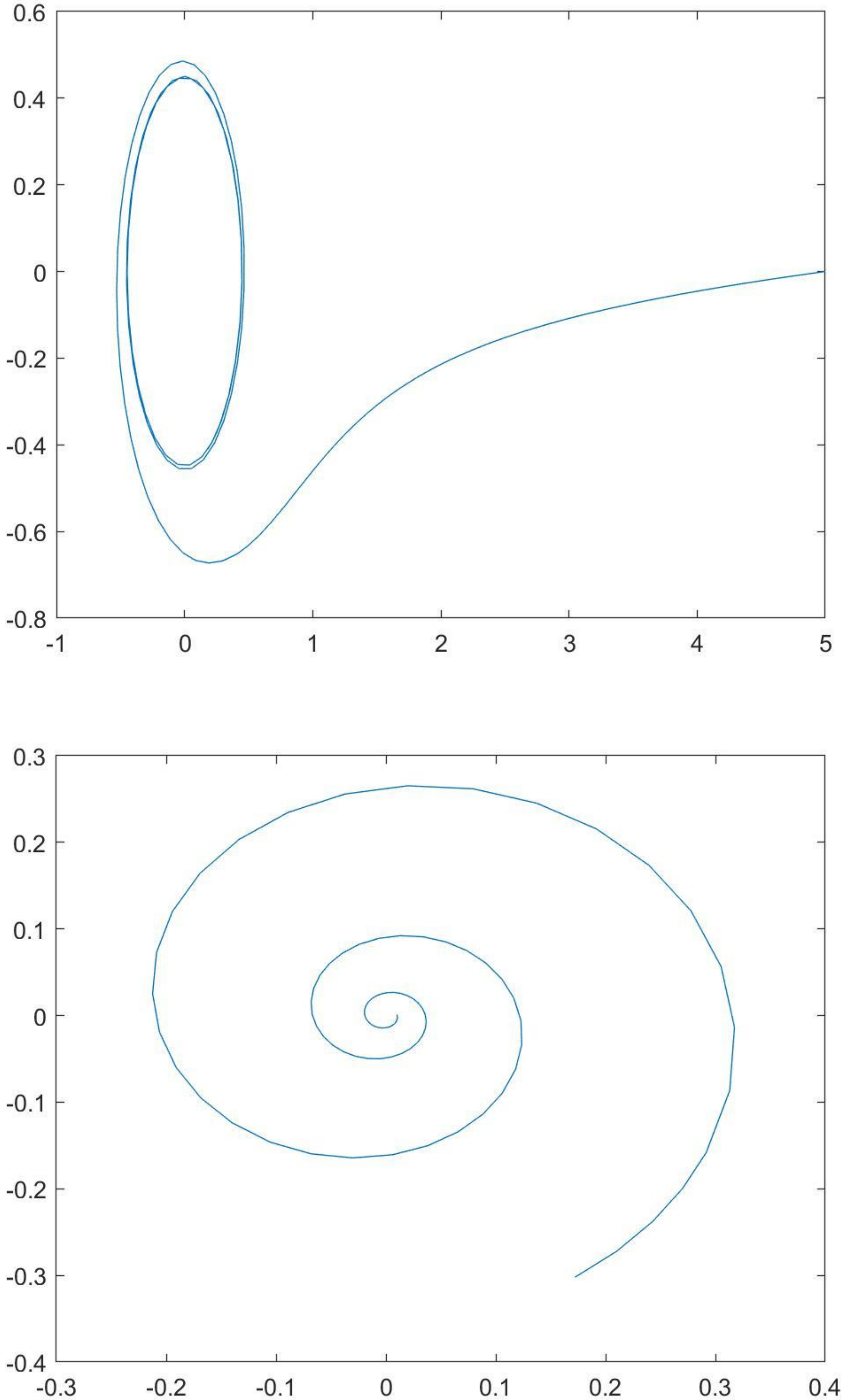




Funkcją ode45:






0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4

Wnioski:

RK4 ze stałym krokiem:

Możemy zaobserwować jak bardzo dobranie punktu początkowego ma wpływ na otrzymaną trajektorię i na stosunek wielkości błędu do długości kroku. Jeśli punkt startowy jest bliski początkowi układu współrzędnych, możemy używać bardzo dużych kroków (rzędu nawet liczb naturalnych), a jeśli punkt początkowy jest dalej, to konieczne jest zastosowanie mniejszego kroku czyli większej ilości iteracji.

Adams (predyktor/korektor):

Metoda ta daje bardzo zbliżone rezultaty jak metoda RK4 z zadania 1, jednakże zawodzi przy mniejszych długościach kroku niż dzieje się to w przypadku metody RK4.

RK4 ze zmiennym krokiem:

Metoda ta znacznie zmniejsza liczbę wykonywanych iteracji, w stosunku do metody niezmodyfikowanej (krok rośnie – liczba iteracji maleje a co za tym idzie również liczba związanych z nimi obliczeń i błędów numerycznych).

Jednakże w każdej iteracji dokonywanych jest więcej obliczeń, często wielokrotnie zmieniany jest krok na odpowiadający założonej dokładności. Zaletą tej metody jest fakt automatycznego dobierania kroku w zależności od przebiegu trajektorii, program sam dostosowuje się do warunków funkcji, np. w momentach przegięć funkcji zwiększa swoją dokładność, żeby lepiej ją zaproksymować. Metoda ta odciąża również użytkownika z obowiązku samodzielnego ustalania optymalnego kroku metodą prób i błędów, co jest dużo większą oszczędnością czasu niż ewentualne straty poniesione podczas obliczeń numerycznych.

Porównanie czasów wykonania (w sekundach):

Podpunkt/Metoda	RK4	Adams (predyktor/korektor)	RK4 zmienny krok
a)	0,0210	0,0132	0,0393
b)	0,0022	0,0016	0,0031
c)	0,0182	0,0130	0,0262
d)	0,0018	0,0013	0,0045

Jak widać w każdym przypadku metody dawały rezultaty podobne do rezultatów uzyskanych za pomocą polecenia *ode45().* Jednakże we wszystkich przypadkach metoda predyktor-korektor szybciej znajdowała wynik. Ponadto za każdym razem generowała ona mniejsze błędy: w przypadku pierwszych dwóch na samym początku są większe, lecz należy pamiętać że pierwsze cztery punkty w metodzie PK są obliczane za pomocą metody RK4, potem błędy szybko się stabilizują i osiągają bardzo małe wartości. W dwóch ostatnich podpunktach błędy są mniej więcej o rząd wielkości mniejsze. Jednakże metoda PK wymaga większego nakładu obliczeń niż RK4, ze względu na podwójną ewaluację wartości funkcji. Można ją zredukować badając zmienność funkcji i wprowadzając zmienny krok (większy dla mało zmiennych przedziałów i mniejszy dla przedziałów o dużej zmienności).