COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

EXPOSICIÓN 01

MARCO SILVA HUERTA

Fecha de entrega: 9 de Marzo del 2024

Semestre: 2024-2

1. Problema de la 3-Coloración (3C)

1.1. Forma Canónica

- **Problema**

  Dada una grafica $(G = (V, E))$ ¿Es posible asignar un color a cada vértice de manera que ningún par de vértices adyacentes comparta el mismo color, utilizando un máximo de tres colores?

- **Entrada**

  Un gráfica no dirigida $(G = (V, E))$, donde (V) es el conjunto de vértices y (E) es el conjunto de aristas.

- **Pregunta**

  ¿Es posible colorear cada vértice de G tal que ningún par de vértices adyacentes compartan el mismo color?

1.2. Demostrar que el problema esta en NP

Algoritmo No-determinístico P

```
entrada = Un grafica G=(V,E)

Inicio
1. Aleatoriamente asignar un color (de los 3 disponibles)
    a cada vertice de G
2. Verificamos la asignación
    para cada par de vértices adyacente
    a) Si u y v tienen el mismo color
        rechazar la asignación.
    b) Si no se rechazó en el paso anterior
        aceptar la asignación.

3. Si se encuentra una asignación válida, aceptar;
    de lo contrario, rechazar.
FIN
```

El algoritmo no determinista se ejecuta en tiempo polinomial porque sería la suma de los tiempos de ejecución de cada paso $O(|V|+|E|)$: La asignación de colores se puede realizar en tiempo $O(|V|)$, donde $|V|$ es la cantidad de vértices en la gráfica y la verificación se puede realizar en tiempo $O(|E|)$ donde $|E|$ son el total de aristas recorridas en toda la ejecución.

Esto quiere decir que como el algoritmo puede asignar aleatoriamente los colores y verificar la asignación, si existe una asignación valida de 3 colores para una grafica tal que dos vértices adyacentes no estan del mismo color significa que logramos encontrar una solución.

1.3. Demostrar transformación

Problema de Satisfacción Booleana (SAT)

Dada una expresión booleana E compuesta por variables booleanas $x_1, x_2, ..., x_n$ y cláusulas booleanas $C_1, C_2, ..., C_m$, el problema SAT busca determinar si existe una asignación de verdad a las variables que haga que la expresión E sea verdadera.

Problema de la 3-coloración

Dada una gráfica $G = (V, E)$, el problema de la 3-coloración busca determinar si es posible asignar un color a cada vértice de G de manera que ningún par de vértices adyacentes comparta el mismo color, utilizando un máximo de tres colores..

1. Descripción de la Transformación

   Dada una instancia de 3SAT con variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_m$, construimos un gráfico (G) de la siguiente manera:

   - Para cada variable x_i, creamos un vértice para x_i y un vértice para su negación $\bar{x}_i$.
   - Conectamos cada par de vértices x_i y $\bar{x}_i$ con una arista, ya que no pueden tener el mismo valor de verdad (color).
   - Para cada cláusula C_j, creamos un triángulo de cláusula conectando tres vértices que representan los literales de la cláusula.
   - Conectamos cada vértice del triángulo de cláusula con los vértices correspondientes de las variables o sus negaciones.

2. Demostración de la Equivalencia

   - Si 3SAT es satisfactorio: Si tenemos una asignación de verdad que satisface todas las cláusulas, asignamos colores de la siguiente manera:
     - Si x_i es verdadero, coloreamos el vértice x_i con color 1 y $\bar{x}_i$ con color 2.
     - Si x_i es falso, hacemos lo contrario.
     - Cada triángulo de cláusula puede ser coloreado con tres colores ya que al menos uno de sus vértices tendrá un color diferente debido a la asignación de verdad satisfactoria.
   - Si G puede ser coloreado con tres colores: La asignación de colores a los vértices de las variables nos da una asignación de verdad para 3SAT:
     - Si el vértice x_i tiene color 1, asignamos verdadero a x_i, si tiene color 2, asignamos falso.
     - Como los triángulos de cláusula están coloreados correctamente, al menos uno de los literales de cada cláusula debe ser verdadero, satisfaciendo así la instancia de 3SAT.

La clave de esta transformación es que una coloración válida de la gráfica G corresponderá a una asignación de verdad que satisface todas las cláusulas de E, y viceversa. Por lo tanto, esta transformación permite utilizar los algoritmos existentes para resolver el problema de la 3-coloración para determinar la satisfacibilidad de la expresión booleana E

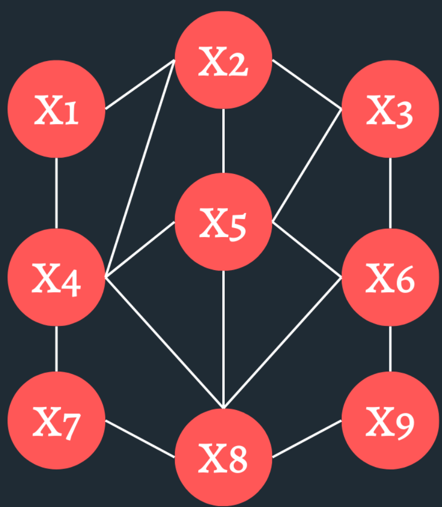
1.4. Ejemplificar

Transformación a 3-Coloración

Instancia de 3SAT: Supongamos que tenemos la siguiente expresión booleana con tres cláusulas:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$$

1. Variables
   - Para cada variable x_i, creamos dos vértices: uno para x_i y otro para $\bar{x}_i$.
   - Conectamos cada par de vértices correspondientes a una variable y su negación con una arista.
2. Cláusulas
   - Para cada cláusula, creamos un triángulo de cláusula conectando tres vértices que representan los literales de la cláusula.
3. Conexiones
   - Conectamos los vértices de las variables a los vértices correspondientes en los triángulos de cláusula según su aparición en las cláusulas.



   (x_1, x_2, x_4) representan los vértices para la primera cláusula ($(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$). (x_5, x_6, x_8) representan los vértices para la segunda cláusula ($(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$). (x_7, x_9, x_3) representan los vértices para la tercera cláusula ($(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$). Las aristas entre (x_1, x_2, x_4); (x_5, x_6, x_8); y (x_7, x_9, x_3) forman los triángulos de cláusula. Las aristas que conectan estos triángulos representan las relaciones entre las variables y las cláusulas.

4. Verificación de la Coloración

   Si podemos asignar colores a este gráfico de tal manera que los vértices conectados directamente no compartan el mismo color, entonces la instancia original de 3SAT es satisfactoria. Si no podemos encontrar tal asignación de colores, entonces la instancia de 3SAT no es satisfactoria.

1.5. Técnicas de demostración

Reducción

Se utiliza una reducción polinomial de 3SAT a 3-coloración. Esta reducción demuestra que 3-coloración es al menos tan difícil como 3SAT, ya que si se pudiera resolver 3-coloración en tiempo polinomial, también se podría resolver 3SAT en tiempo polinomial.

Diseño de componentes

Se utilizan triángulos como componentes básicos para construir la instancia de 3-coloración a partir de la instancia de 3SAT. Los triángulos permiten representar las variables y las cláusulas de una manera que se puede colorear de manera válida si y solo si la instancia de 3SAT es satisfactible.

1.6. Aplicación

Imaginemos que una universidad que necesita programar exámenes finales para diferentes materias. Algunos estudiantes están inscritos en múltiples cursos, por lo que la universidad quiere asegurarse de que no haya exámenes encimados para los estudiantes.

Problema de 3-Coloración: Cada curso se representa como un vértice en una gráfica. Si dos cursos tienen estudiantes en común, se conectan con una arista. El objetivo es colorear la gráfica (es decir, programar los exámenes) de tal manera que ningún par de vértices adyacentes (cursos con estudiantes en común) tengan el mismo color (exámenes en el mismo día).

Solución

- Se crea un gráfica donde cada vértice representa un curso.
- Se añade una arista entre dos vértices si los cursos correspondientes tienen estudiantes en común.
- Se colorean los vértices de tal manera que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color.
- Cada color representa un día diferente de exámenes.

Ejemplo

Tenemos 7 materias: ICC, Modelado, Bases de datos, Complejidad, IA, Probabilidad, Autómatas

- ICC y Modelado comparten estudiantes.
- ICC y Bases de datos comparten estudiantes.
- ICC y Autómatas comparten estudiantes.
- Modelado y Autómatas comparten estudiantes.
- Bases de datos y Complejidad comparten estudiantes.
- Complejidad y IA comparten estudiantes.
- IA y Probabilidad comparten estudiantes.

Se asigna un color (día de examen) a cada curso de tal manera que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día.

Resultado:

Día 1 (Color 1): ICC, Bases de datos, IA

Día 2 (Color 2): Modelado, Autómatas

Día 3 (Color 3): Complejidad, Probabilidad

Este método asegura que todos los estudiantes puedan asistir a sus exámenes sin conflictos de horario.

Referencias

[1] U. Manber, *Introduction to algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 2012.

[2] S. Even, *Graph Algorithms*. Computer Science Press, 1979.