COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

EXPOSICIÓN 01

MARCO SILVA HUERTA

Fecha de entrega: 9 de Marzo del 2024

Semestre: 2024-2

1. Problema

10.3 COLOREACIÓN DE GRÁFICOS

Uno de los problemas clásicos de la teoría de grafos es el de colorear los vértices de un gráfico de tal manera que no se asigne el mismo color a dos vértices adyacentes (es decir, conectados por una arista). El número mínimo de colores necesarios para colorear G se llama número cromático, γ(G), de G.

En esta sección, mostraremos que este problema es NPC. El problema sigue siendo NPC incluso si todo lo que preguntamos es si γ(G) $\leq$ 3. Además, incluso si restringimos la pregunta al gráfico plano, el problema sigue siendo NPC. Incluso si restringimos el problema a una clase de gráficos planos con realización plana de buen comportamiento, el problema de si γ(G) $\leq$ 3 sigue siendo NPC. Uno de tales La definición para una realización con buen comportamiento es que todos los bordes son líneas rectas, ningún ángulo es inferior a 10 y las longitudes de los bordes están entre dos dados. límites.

Primero consideramos el problema de las 3 colores, (3C), que se define de la siguiente manera:

Entrada: Un gráfico G(V, E).

Pregunta: ¿Se puede asignar un color a cada vértice, de modo que solo se utilicen tres colores y no se asigne el mismo color a dos vértices adyacentes? (En resumen: ¿esγ(G) $\leq$ 3?)

Teorema 10.6: 3C es NPC.

Prueba: Demostramos que 3SAT α 3C. (La demostración de este teorema, y el siguiente, sigue los trabajos de Stockmeyer [2] y Garey, Johnson y Stockmeyer [3].) Sea el conjunto de literales, de la entrada I a 3SAT, $\{x_1, x_2, ..., X_n, \bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_n\}$ y las cláusulas sean C_1, C_2, ..., C_m.

El gráfico G(V. E), que es la entrada f(I) a 3C, se define de la siguiente manera:

$$V = \{a, b\} \cup \{x_i, \bar{x}_i \ \mid \ 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{ij} \ \mid \ 1 \leq i \leq 6y1 \leq j \leq m\}$$

$$\begin{aligned} E = &\{a - b\} \cup \{a - x_i, a - \bar{x}_i, x_i - \bar{x}_i \ \mid \ 1 \leq i \leq i\} \cup \\ &\{w_{1j}, -w_{2j}, w_{1j} - w_{4j}, w_{2j} - w_{4j}, w_{4j} - w_{5j}, \\ &w_{3j} - w_{5j}, w_{3j} - w_{6j}, w_{5j} - w_{6j}, w_{6j} - b \ \mid \ 1 \leq j \leq m\} \ \cup \\ &\{\xi_{1j} - w_{1j}, \xi_{2j} - w_{2j}, \xi_{3j} - w_{3j} \ \mid \ 1 \leq j \leq m \quad \text{and} \\ &C_j = \{\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}, \}\} \end{aligned}$$

ser coloreado 0, y por lo tanto debemos ser coloreados 0. Pero, como el lector puede comprobar por sí mismo, si al menos uno de $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}$, está coloreado 1 entonces w_{6j} se puede colorear 1. La estructura de las dos primeras partes de la definición de E se muestra en la figura 10.3. Claramente, si a tiene el color 2, entonces todos los vértices literales deben tener el color 0 y 1, uno de estos colores se usa para w_i y el otro para $\bar{w}_i$. Supongamos que I es satisfactoria mediante alguna asignación de valor de verdad a los literales. Para ver que *f(I)* tiene 3 colores, asigne a a el color 2. Asigne al literal ξ el color 1 si es 'verdadero' y 0 si es 'falso'. Ahora, dado que a ningún triple $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}$ se le asignan todos ceros, podemos colorear $w_{1i}, w_{2j}...w_{6j}$ de tal manera que w_{6j} tenga el color 1, para todo $j = 1, 2, ..., m$. Por lo tanto, b es coloreable 0 y la coloración 3 de G está completa. Por el contrario, si G tiene 3 colores, llame al color de a 2 y al color de b 0. Claramente, todos los vértices literales están coloreados 0 y 1, y w_{6j} no puede ser coloreado 0. Por lo tanto, para cada triple $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}$, no los tres están coloreados 0. Ahora, si asignamos un literal 'verdadero' si y sólo si su vértice correspondiente está coloreado 1, la asignación satisface todas las cláusulas.

1.1. Forma Canónica

1.2. Demostración

1.3. Demostrar transformación

1.4. Ejemplificar

1.5. Técnicas de demostración

1.6. Aplicación

Referencias

[1] R. G. Michael y S. J. David, *Computars and Intractability*. Bell Telephone Laboratories, 1979.

[2] J. Bang-Jesen y G. Gutin, *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2007.

[3] U. Manber, *Introduction to algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 2012.

[4] S. Even, *Graph Algorithms*. Computer Science Press, 1979.