FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 01

Semestre 2024-1

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

01 de Semptiembre de 2023

Tarea 01

Ejercicio 1

Sean X un conjunto no vacío y F un campo. Sea $f[X] \coloneqq \{f : f\colon X \to F\}$ el conjunto de todas las funciones que van de X a F. Entonces $f[x]$ es un espacio vectorial sobre F con las siguientes operaciones para cualesquiera $x \in X$ y $a \in F$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = af(x)$$

Demuéstralo o escribe cuál es la propiedad que no cumple y justifica tu respuesta

1. Cerradura bajo la suma:

   Para demostrar que la suma de dos elementos en $f[x]$ sigue estando en $f[x]$, tomemos dos funciones arbitrarias f y g en $f[x]$. Entonces, para cualquier x en X, tenemos:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &\in F + F \quad \text{(porque } f(x) \text{ y } g(x) \text{ están en } F\text{)}\\ &\subseteq F \quad \text{(ya que } F \text{ es cerrado bajo la suma)}\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $(f+g)(x)$ está en F para todo x, lo que significa que la suma $f+g$ es una función de X a F y, por lo tanto, pertenece a $f[x]$. La cerradura bajo la suma se cumple.

2. Cerradura bajo la multiplicación por escalar: Para demostrar la cerradura bajo la multiplicación por escalar en $f[x]$, consideremos una función $f \in f[x]$ y un escalar $a \in F$. La multiplicación por escalar se define como:

$$(af)(x) = af(x) \in F \quad \text{(Definición de multiplicación por escalar)}$$

   Dado que $f(x)$ está en F (ya que $f \in f[x]$) y a también está en F, el producto $af(x)$ también estará en F. Esto significa que $(af)(x)$ está en F para todo x, y por lo tanto, la función $af(x)$ pertenece a $f[x]$. La cerradura bajo la multiplicación por escalar se cumple.

3. Asociatividad de la suma:

   La propiedad de asociatividad de la suma en $f[x]$ sigue directamente de la asociatividad de la suma en F, ya que estamos sumando funciones de X a F y, en cada punto x, estamos sumando elementos de F. Entonces para cualesquiera $f, g, h \in f[x]$ y $x \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)}\\ &= [f(x)+g(x)] + h(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)}\\ &= f(x) + [g(x)+h(x)] \quad \text{(Asociatividad en } F\text{)}\\ &= f(x) + (g+h)(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)}\\ &= [(f+(g+h))(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)}\end{aligned}$$

Como esta igualdad es válida para todo $x \in X$, concluimos que $(f+g)+h = f+(g+h)$ en $f[x]$. La propiedad de asociatividad se cumple.

4. Conmutatividad de la suma:

   La propiedad de conmutatividad de la suma en $f[x]$ se deriva de la conmutatividad de la suma en el campo F. Esto se debe a que, en cada punto $x \in X$, estamos sumando elementos del campo F, y estas sumas individuales se comportan de acuerdo con la conmutatividad de F. Formalmente, para cualesquiera $f, g \in f[x]$ y $x \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)} \\ &= g(x)+f(x) \quad \text{(Conmutatividad en } F\text{)} \\ &= (g+f)(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)}\end{aligned}$$

   Como esta igualdad es válida para todo $x \in X$, concluimos que $f+g = g+f$ en $f[x]$. La propiedad de conmutatividad se cumple.

5. Elemento neutro de la suma:

   La función nula o cero, que mapea todos los elementos de X a 0 en F, actúa como el elemento neutro de la suma en $f[x]$. Formalmente, para cualquier función $f \in f[x]$ y cualquier $x \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}(0+f)(x) &= 0(x)+f(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)} \\ &= 0+f(x) \quad \text{(Definición de la función nula)} \\ &= f(x) \quad \text{(Propiedad del elemento neutro en } F\text{)}\end{aligned}$$

   Como 0 es la función nula en $f[x]$ y esta igualdad se cumple para todo $x \in X$, concluimos que $0+f = f$ para toda $f \in f[x]$. La función nula actúa como el elemento neutro de la suma.

6. Inverso aditivo:

   Dada una función f en $f[x]$, su inverso aditivo sería la función $-f(x)$, que mapea cada x a $-f(x)$ en F. Esta función existe en $f[x]$ debido a la estructura del campo F. Formalmente, para cualquier función $f \in f[x]$ y cualquier $x \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}(f+(-f))(x) &= f(x)+(-f)(x) \quad \text{(Definición de suma en } f[x]\text{)} \\ &= f(x)-f(x) \quad \text{(Definición de } -f(x)\text{)} \\ &= 0 \quad \text{(Propiedad de inversos aditivos en } F\text{)}\end{aligned}$$

   Como esta igualdad se cumple para todo $x \in X$, concluimos que $f+(-f) = 0$ para toda $f \in f[x]$. El inverso aditivo existe y es la función $-f(x)$.

7. Distributividad de la suma de escalares sobre la suma de funciones:

   Dados $a \in F$ y funciones $f, g \in f[x]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
a(f+g)(x) &= a(f(x)+g(x)) \\
&= af(x)+ag(x) \\
&= (af)(x)+(ag)(x) \\
&= (af+ag)(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la distributividad se cumple.

8. Distributividad de la suma de escalares sobre la multiplicación de funciones:

   Dados $a, b \in F$ y una función $f \in f[x]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
(a+b)f(x) &= af(x)+bf(x) \\
&= (af)(x)+(bf)(x) \\
&= (af+bf)(x)
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, la distributividad se cumple.

Todas las propiedades necesarias para que $f[x]$ sea un espacio vectorial sobre F están satisfechas. Por lo tanto, las operaciones definidas cumplen con las condiciones requeridas para formar un espacio vectorial de funciones.

Ejercicio 3

El conjunto de matrices en $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ con entradas positivas o cero es un subespacio de $M_{m\times n}(\mathbf{R})$. Demuéstralo o escribe cuál es la propiedad que no cumple y justifica tu respuesta.

1. Cerradura bajo la adición de matrices

   Para que V sea un subespacio, la suma de dos matrices en V debe ser otra matriz en V.

   Sea A una matriz en V y B otra matriz en V. Entonces, las entradas de A y B son no negativas. Queremos mostrar que la matriz suma $A+B$ también tiene todas sus entradas no negativas.

   Dado que $a_{ij} \geq 0$ y $b_{ij} \geq 0$, la suma $a_{ij}+b_{ij}$ también es no negativa. Por lo tanto, $(A+B)_{ij} \geq 0$, lo que significa que $A+B$ tiene entradas no negativas. Esto demuestra que $A+B$ está en V y que V cumple con la cerradura bajo la adición de matrices.

2. Cerradura bajo la multiplicación por un escalar

   Falta por demostrar