FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 04

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

13 de Octubre de 2023

Tarea 04

Ejercicio 1

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una función tal que $T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix}$ Realice lo siguiente

1. Demuestre que T es una transformación lineal

   Para demostrar que T es una transformación lineal, debemos verificar que cumple las dos condiciones siguientes:

   Condición de additividad:

   $$T(a,b,c) + T(d,e,f) = T((a,b,c) + (d,e,f))$$

   $$\begin{aligned} T(a,b,c) + T(d,e,f) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ f & d+e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ c+f & a+b+d+e \end{pmatrix} \\ &= T((a,b,c) + (d,e,f)) \end{aligned}$$

   Condición de homogeneidad:

   $$T(ka,kb,kc) = kT(a,b,c)$$

   $$\begin{aligned} T(ka,kb,kc) &= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & ka+kb \end{pmatrix} \\ &= k\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} \\ &= kT(a,b,c) \end{aligned}$$

   $\therefore$ Por lo tanto, T es una transformación lineal.

2. Verifique el *Teorema de la Dimensión*

   El dominio de T es $\mathbb{R}^3$, que tiene dimensión 3. El rango de T es el conjunto de matrices 2×2 que se pueden obtener como imagen de algún vector en $\mathbb{R}^3$.

   Para demostrar que el rango de T es 3, debemos encontrar tres vectores v_1, v_2, v_3 en $\mathbb{R}^3$ tales que $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ sean linealmente independientes. Entonces, tomamos los vectores $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$.

   $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   $T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   $T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Estos vectores son linealmente independientes, ya que si $a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$, entonces $a = b = c = 0$.

Ejercicio 2

Supóngase que W es un subespacio del espacio vectorial de dimensión finita V. Demuestre que existe un subespacio W' y una función $T : V \to V$ tal que T es una proyección de W a lo largo de W'.

Ejercicio 3

1. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,3) = (1,1)$ y $T(-2,0,-6) = (2,1)$?
   De ser así, dé su regla de correspondencia y calcule $T(1,5,0)$
2. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,2)$ y $T(2,3) = (1,-1,4)$?
   De ser así, dé su regla de correspondencia y calcule $T(8,11)$