FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 03

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

29 de Semptiembre de 2023

Tarea 03

Ejercicio 1

Determina si los siguientes conjuntos son base para $P_2(\mathbb{R})$:

1. $\{1 - x + 2x^2,\, 2 + x - 2x^2,\, 1 - 2x + 4x^2\}$

   Para verificar si el conjunto $\{1 - x + 2x, 2 + x - 2x, 1 - 2x + 4x\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$, debemos comprobar dos cosas:

   1 **¿El conjunto es linealmente independiente?** Para contestar esto comprobaremos si los 3 polinomios en el conjunto son linealmente independientes, para ello la combinación lineal de los 3 polinomios tiene como resultado el polinomio cero. Sean a, b y c coeficientes escalares tenemos que comprobar que $a = b = c = 0$ en la ecuación:

   $$a(1 - x + 2x^2) + b(2 + x - 2x^2) + c(1 - 2x + 4x^2)$$

   Desarrollamos

   $$\begin{aligned} a(1 - x + 2x^2) + b(2 + x - 2x^2) + c(1 - 2x + 4x^2) &= 0 \\ a - ax + 2ax^2 + 2b + bx - 2bx^2 + c - 2cx + 4cx^2 &= 0 \\ (a + 2b + c) + (-ax + bx - 2cx) + (2ax^2 - 2bx^2 + 4cx^2) &= 0 \\ (a + 2b + c) + (-a + b - 2c)x + (2a - 2b + 4c)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

   Obteniendo así el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$a + 2b + c = 0 \tag{1}$$
   $$-a + b - 2c = 0 \tag{2}$$
   $$2a - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

   Para resolverlo, despejamos a de la ecuación (1) : $a = -2b - c$.
   Sustituimos a en (2) y (3) para tener:

   $$-(-2b - c) + b - 2c = 0 \tag{2}$$
   $$2(-2b - c) - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

   Simplificamos y agrupamos términos semejantes:

   $$2b + c + b - 2c = 0 \tag{2}$$

   $$-4b - 2c - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

   $$\downarrow$$

$$3b - c = 0 \tag{2}$$

$$-6b + 2c = 0 \tag{3}$$

Ahora tenemos un sistema de 2 ecuaciones con incógnitas b y c. Despejamos c de (2) y tenemos $c = 3b$, sustituimos c en 3 y tenemos $-6b + 2(3b) = 0$, despejamos b y obtenemos:

$$\begin{aligned} -6b + 2(3b) &= 0 \\ -6b + 6b &= 0 \\ 0 &= \\ b &=? \end{aligned}$$

Lo que significa que b puede ser cualquier número real. Y como $b \neq 0$, el conjunto no cumple con ser linealmente independiente y, por lo tanto, no es una base para $P_2(\mathbb{R})$

2. $\{1 + 2x + x^2,\, 3 + x^2,\, x + x^2\}$

Sabemos que $\dim(P_n) = n + 1$, por lo que $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$. Y por un teorema *Si V es un espacio vectorial de dimensión n y si S es un conjunto en V con exactamente n vectores, entonces S es una base para V si S genera a V o si S es linealmente independiente*
Por lo tanto, el conjunto $\{1 + 2x + x^2,\, 3 + x^2,\, x + x^2\}$ es base para $P_2(\mathbb{R})$ si contiene tres vectores linealmente independientes.

Comprobemos la independencia lineal del conjunto dado. El conjunto de polinomios es linealmente independiente si la única combinación lineal que da como resultado el polinomio nulo (cero) es la combinación en la que todos los coeficientes son cero. En otras palabras, los polinomios son linealmente independientes si la ecuación:

$$\alpha(1 + 2x + x^2) + \beta(3 + x^2) + \gamma(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

donde α, β y γ son escalares; solo tiene solución trivial, es decir, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Desarrollamos: $\alpha(1 + 2x + x^2) + \beta(3 + x^2) + \gamma(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 = 0$ y tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha x + \alpha x^2 + 3\beta + \beta x^2 + \gamma x + \gamma x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \\ (\alpha + 3\beta) + (2\alpha x + \gamma x) + \alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \\ (\alpha + 3\beta) + (2\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Y resolvemos:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta = 0 &\implies \alpha = -3\beta \\ 2\alpha + \gamma = 0 &\implies \gamma = -2\alpha = -2(-3\beta) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 &\implies -3\beta + \beta + (-2(-3\beta)) = 0 \implies -3\beta + \beta + 6\beta = 0 \implies 4\beta = 0 \implies \beta = 0 \end{aligned}$$

Como $\beta = 0$, sustituimos β en: $\alpha + 3\beta = 0 \implies \alpha + 3(0) = 0 \implies \alpha = 0$

Sustituimos α en: $2\alpha + \gamma = 0 \implies \gamma = 0$

Por lo tanto: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, podemos decir que es un conjunto linealmente independiente de 3 vectores.

Dado que estos polinomios son linealmente independientes y forman un conjunto de 3 polinomios en $P_2(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ es un espacio con dimensión 3 Entonces por el teorema anteriormente citado tenemos que estos polinomios generan $P_2(\mathbb{R})$. Y el conjunto es una base para $P_2(\mathbb{R})$

Ejercicio 2

Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(T) = Im(T)$.

Ejercicio 3

Dar un ejemplo de dos transformaciones lineales (diferentes) $U, T : V \to W$ tales que

$$Ker(T) = Ker(U)$$

$$Im(T) = Im(U)$$

Ejercicio 4

Dada la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y, z) = (x - 2y,\ 0,\ 2x - 4)$$

Buscar el núcleo y la imagen.

Ejercicio 5

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$. Calcula $Ker(D)$ e $Im(D)$.

Solución:

Sean $T : V \to W$ un operador lineal.

- El núcleo de T, $Ker(T)$, es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = 0$.
- La imagen de T, $Im(T)$, es el conjunto de todos los vectores $w \in W$ que se pueden escribir como la imagen de algún vector $v \in V$ por T.

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$.

Cálculo de $Ker(D)$

Si $f \in Ker(D)$. Entonces, $D(f) = 0$, significa que $f' = 0$, nos queda entonces que f es una constante, de esta forma, $Ker(D) = \boxed{\{k \in \mathbb{R}\}}$.

Cálculo de $Im(D)$

Sea $g \in P_3(\mathbb{R})$. Tenemos que para g se puede escribir de la forma $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces, $D(g) = (3a)x^2 + (2b)x + c$ de esta forma la $Im(D) = \boxed{P_2(\mathbb{R})}$.

1. Definimos $Ker(D)$ e $Im(D)$.

$$\begin{aligned} Ker(D) &= \{f \in P_3(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\} \\ Im(D) &= \{g \in P_3(\mathbb{R}) \mid g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

2. Calculamos $Ker(D)$.

$$\begin{aligned} f \in Ker(D) &\iff D(f) = 0 \\ &\iff f' = 0 \\ &\iff f(x) = k \text{ para algún } k \in \mathbb{R} \\ &\iff f \in \{k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. Calculamos $Im(D)$.

$$\begin{aligned} g \in Im(D) &\iff g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R}) \\ &\iff g(x) = (3a)x^2 + (2b)x + c \text{ para algún } a, b, c \in \mathbb{R} \\ &\iff g \in P_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$\therefore$ Hemos calculado que $Ker(D) = k \in \mathbb{R}$ e $Im(D) = P_2(\mathbb{R})$.