



FACULTAD DE CIENCIAS  
ÁLGEBRA LINEAL 1

---

## Tarea 07

---

**Semestre 2024 – 1**

*Profesora:*

Mindy Yaneli Huerta Pérez

*Ayudantes:*

Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado

Gilbert Raúl Avendaño Aguilar

Aldair Reyes González

*Alumnos:*

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

24 de Noviembre de 2023

## Ejercicio 1

Considérense las siguientes bases de  $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\gamma = \{(1, 0, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$$

Y la transformación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(x, y, z) = (2x, x + y, y + z)$

1. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base  $\beta$  y  $\gamma$

**Solución:**

2. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base  $\gamma$  y  $\beta$

**Solución:**

3. Comprueba que  $[T]_\gamma = Q^{-1} [T]_\beta Q$

**Solución:**

## Ejercicio 2

Considera la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y, z) = (2x - y, 3y - z)$  Considérense las siguientes bases de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\beta' = \{(1, 3, 2), (0, 1, 2), (1, 0, 1)\}$$

$$\gamma = \{(1, 1), (2, 1)\}$$

$$\gamma' = \{(3, 1), (1, 4)\}$$

1. Encuentra las matrices de cambios de coordenadas

**Solución:**

2. Calcula las bases duales de  $\beta$  y  $\gamma$

**Solución:**

3. Dada  $T^t$  la función transpuesta de  $T$ , comprueba que  $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$

**Solución:**

## Ejercicio 3

1. Encuentra la base dual de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\beta = \{(1, 2), (3, 4)\}$

**Solución:**

La base dual de un espacio vectorial es un conjunto de formas lineales (funciones lineales que toman vectores y devuelven escalares) que actúan sobre los vectores de la base original. Para una base  $\beta = \{v_1, v_2\}$  en  $\mathbb{R}^2$ , la base dual  $\beta^* = \{f_1, f_2\}$  se define tal que  $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker que es 1 si  $i = j$  y 0 en caso contrario.

Para nuestra base  $\beta = \{(1, 2), (3, 4)\}$  podemos encontrar la base dual resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para  $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ .

$$f_1((1, 2)) = 1$$

$$f_1((3, 4)) = 0$$

$$f_2((1, 2)) = 0$$

$$f_2((3, 4)) = 1$$

Esto se puede escribir como un sistema de ecuaciones lineales donde  $f_1 = a_1x + b_1y$  y  $f_2 = a_2x + b_2y$

Entonces tenemos:

$$a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 2 = 1$$

$$a_1 \cdot 3 + b_1 \cdot 4 = 0$$

$$a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 = 0$$

$$a_2 \cdot 3 + b_2 \cdot 4 = 1$$

$$a_1 + 2 \cdot b_1 = 1$$

$$a_1 \cdot 3 + 4 \cdot b_1 = 0$$

$$a_2 + 2 \cdot b_2 = 0$$

$$a_2 \cdot 3 + 4 \cdot b_2 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = -1$$

$$a_2 = -\frac{3}{2}$$

$$b_2 = 1$$

Resolviendo este sistema, obtenemos la base dual

$$\beta^* = \left[ (2, -1), \left( \frac{-3}{2}, 1 \right) \right]$$

2. Encuentra la base  $\beta$  de  $V = P_1(\mathbb{R})$  cuya base dual es  $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ , siendo  $f_1[p(x)] = \int_0^1 p(x) dx$  y  $f_2[p(x)] = \int_0^2 p(x) dx$

**Solución:**

Necesitamos encontrar dos polinomios  $p_1(x), p_2(x) \in P_1(R)$  tal que  $f_i(p_j(x)) = \delta_{ij}$

Esto significa que necesitamos encontrar  $p_1(x), p_2(x)$  tal que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 p_1(x) dx &= 1 \\ \int_0^2 p_1(x) dx &= 0 \\ \int_0^1 p_2(x) dx &= 0 \\ \int_0^2 p_2(x) dx &= 1\end{aligned}$$

Para  $p_1(x)$ :

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = [x - x^2]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 (1 - 2x) dx = [x - x^2]_0^2 = 0$$

Para  $p_2(x)$ :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 0$$

$$\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 0$$

Entonces:

$$\beta = \left[1 - 2x, x - \frac{x^2}{2}\right]$$