IMA/Ciencias.png

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 07

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

24 de Noviembre de 2023

Ejercicio 1

Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\gamma = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$$

Y la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (2x, x+y, y+z)$

1. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base β y γ

   `Solución:`

   Escribimos los vectores de β como columnas de una matriz

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Multiplicamos esta matriz por P

$$P\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   El resultado debe ser la matriz que contiene los vectores de γ como columnas.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, la matriz de cambio de coordenadas es la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base γ y β

   `Solución:`

Escribimos los vectores de γ como columnas de una matriz.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversamos esta matriz.

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos esta matriz por γ

$$Q\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado debe ser la matriz que contiene los vectores de β

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Comprueba que $[T]_\gamma = Q^{-1} [T]_\beta Q$

   `Solución:`

   Matriz de T en la base β

   La matriz de T en la base β es la matriz que representa el operador lineal T cuando se expresan los vectores en la base β. Esta matriz se puede encontrar multiplicando la matriz de T por la matriz de cambio de coordenadas de γ a β.

$$[T]_\beta = P^{-1}[T]P$$

   Donde P es la matriz de cambio de coordenadas de γ a β y $[T]$ es la matriz de T en la base estándar. Sabemos que P es la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Y sabemos que $[T]$ es la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base β es la siguiente:

$$[T]_\beta = P^{-1}[T]P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matriz de T en la base γ

La matriz de T en la base γ es la matriz que representa el operador lineal T cuando se expresan los vectores en la base γ. Esta matriz se puede encontrar multiplicando la matriz de T por la matriz de cambio de coordenadas de β a γ.

$$[T]_\gamma = Q[T]Q^{-1}$$

Donde Q es la matriz de cambio de coordenadas de β a γ y $[T]$ es la matriz de T en la base estándar. Sabemos que Q es la siguiente matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y sabemos que $[T]$ es la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base γ es la siguiente:

$$[T]_\gamma = Q[T]Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos comprobar si la ecuación $[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q$

$$Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación $[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q$ se cumple. Esto significa que la matriz de T en la base γ se puede obtener multiplicando la matriz de T en la base β por la matriz de cambio de coordenadas de β a γ, y luego multiplicando por la inversa de la matriz de cambio de coordenadas.

Ejercicio 2

Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y, 3y - z)$ Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$
$$\beta' = \{(1,3,2), (0,1,2), (1,0,1)\}$$
$$\gamma = \{(1,1), (2,1)\}$$
$$\gamma' = \{(3,1), (1,4)\}$$

1. Encuentra las matrices de cambios de coordenadas

   Solución:

2. Calcula las bases duales de β y γ

   Solución:

3. Dada T^t la función transpuesta de T, comprueba que $[T^t]_{\gamma*}^{\beta*} = \left([T]_{\beta}^{\gamma}\right)^t$

   Solución:

Ejercicio 3

1. Encuentra la base dual de $\mathbb{R}^2, \beta = \{(1,2), (3,4)\}$

   Solución:

   La base dual de un espacio vectorial es un conjunto de formas lineales (funciones lineales que toman vectores y devuelven escalares) que actúan sobre los vectores de la base original. Para una base $\beta = \{v_1, v_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, la base dual $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ se define tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que es 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

   Para nuestra base $\beta = \{(1,2), (3,4)\}$ podemos encontrar la base dual resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

$$f_1((1,2)) = 1$$
$$f_1((3,4)) = 0$$
$$f_2((1,2)) = 0$$
$$f_2((3,4)) = 1$$

   Esto se puede escribir como un sistema de ecuaciones lineales donde $f_1 = a_1x + b_1y$ y $f_2 = a_2x + b_2y$

   Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 2 &= 1 \\
a_1 \cdot 3 + b_1 \cdot 4 &= 0 \\
a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 &= 0 \\
a_2 \cdot 3 + b_2 \cdot 4 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 + 2 \cdot b_1 &= 1 \\
a_1 \cdot 3 + 4 \cdot b_1 &= 0 \\
a_2 + 2 \cdot b_2 &= 0 \\
a_2 \cdot 3 + 4 \cdot b_2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
b_1 &= -1 \\
a_2 &= -\frac{3}{2} \\
b_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema, obtenemos la base dual

$$\beta^* = \left[(2,-1), \left(\frac{-3}{2}, 1\right)\right]$$

2. Encuentra la base β de $V = P_1(\mathbb{R})$ cuya base dual es $\beta^* = \{f_1, f_2\}$, siendo $f_1\left[p(x)\right] = \int_0^1 p(x)\,dx$ y $f_2\left[p(x)\right] = \int_0^2 p(x)\,dx$

   `Solución:`

   Necesitamos encontrar dos polinomios $p_1(x), p_2(x) \in p_1(R)$ tal que $f_i(p_j(x)) = \delta_{ij}$

   Esto significa que necesitamos encontrar $p_1(x), p_2(x)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 p_1(x)\,dx &= 1 \\
\int_0^2 p_1(x)\,dx &= 0 \\
\int_0^1 p_2(x)\,dx &= 0 \\
\int_0^2 p_2(x)\,dx &= 1
\end{aligned}
$$

Para $p_1(x)$:

$$\int_0^1 (1-2x)\,dx = \left[x - x^2\right]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 (1-2x)\,dx = \left[x - x^2\right]_0^2 = 0$$

Para $p_2(x)$:

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 0$$

$$\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 0$$

Entonces:

$$\beta = \left[1 - 2x, x - \frac{x^2}{2}\right]$$