FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

# Tarea 02

**Semestre** $2024 - 1$


*Profesora:*
Mindy Yaneli Huerta Pérez

*Ayudantes:*
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

*Alumnos:*

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

Luis


18 de Semptiembre de 2023

Tarea 02

# Ejercicio 1

En los siguientes incisos, describa las condiciones necesarias del vector v para que el conjunto sea un conjunto generador.

(a) En $\mathbb{R}^3$, el conjutno $\beta = \{v, (1,6,2), (3,-5,-1)\}$

(b) En $P_2(\mathbb{R})$, el conjunto $\beta = \{v, 2x^2 + x, -x + 3\}$

# Ejercicio 2

En cada uno de los siguientes incisos, determine (y demuestre, si es el caso) si el conjunto es linealmente independiente o no.

(a) En $P_2(\mathbb{R})$ el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$

Para comprobar si el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$ en $P_2(\mathbb{R})$ es linealmente independiente, primero, vemos la definición de *linealmente independiente*, donde para un conjunto de polinomios $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)\}$ se considera linealmente independiente en $P_n(\mathbb{R})$ si la única forma de escribir la combinación lineal igual a cero es haciendo que todos los coeficientes sean iguales a cero:

$$c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) + \cdots + c_np_n(x)$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son coeficientes reales y $p_i(x)$ son los polinomios en el conjunto.

Ahora la combinación lineal la igualamos a cero.

$$c_1(1) + c_2(1 - x + 2x^2) + c_3(2 + 3x - x^2) = 0$$

Donde $c_1, c_2, c_3$ son los coeficientes que queremos encontrar. Distribuimos los coeficientes en la ecuación y agrupamos términos semejantes:

$$c_1 + c_2(1 - x + 2x^2) + c_3(2 + 3x - x^2) = 0$$

Obtenemos:

$$c_1 + c_2 - c_2x + 2c_2x^2 + 2c_3 + 3c_3x - c_3x^2 = 0$$
$$(c_1 + c_2 + 2c_3) + (-c_2 - c_3)x + (2c_2 - c_3)x^2 = 0$$

Entonces la ecuación debe ser igual a cero para todo $x$, y como esta ecuación debe ser verdadera para todos los valores de $x$, los coeficientes de cada término deben ser igual a cero. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones:

1. $c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$
2. $-c_2 - c_3 = 0$
3. $2c_2 - c_3 = 0$

De la ecuación 2, tenemos:

$$\begin{aligned} -c_2 - c_3 &= 0 \\ \implies c_3 &= -c_2 \end{aligned}$$

Sustituimos este valor en la ecuación 3:

$$\begin{aligned} 2c_2 - c_3 &= 0 \\ 2c_2 - (-c_2) &= 0 \\ 2c_2 + c_2 &= 0 \\ 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_2 = 0$. Ahora, sustituimos $c_2 = 0$ en la ecuación 1:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 &= 0 \\ c_1 + 0 + 2(-c_2) = 0 &= 0 \\ c_1 - 2c_2 = 0 &= 0 \\ c_1 - 2(0) = 0 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hemos encontrado que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$, lo que significa que la única forma de obtener la combinación lineal igual a cero es haciendo que todos los coeficientes sean iguales a cero. Por lo tanto, el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2(\mathbb{R})$.

(b) En $M_{3\times 3}$, el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

Para determinar si el conjunto $S$ es linealmente independiente empezamos por verificar si la única combinación lineal que iguala el vector nulo $\mathbf{0}$ es la combinación lineal en la que todos los coeficientes son cero.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

donde $c_1$, $c_2$, y $c_3$ son coeficientes escalares y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$ son los vectores del conjunto $S$, así que:

$$c_1 \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, podemos escribir dos ecuaciones lineales a partir de esta igualdad. Para la primera fila de la matriz, tenemos:

$$6c_1 + 0c_2 + 3c_3 = 0 \quad (1)$$

Y para la segunda fila:

$$2c_1 + 3c_2 + 0c_3 = 0 \quad (2)$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones para encontrar los valores de $c_1$, $c_2$, y $c_3$ que hacen que la igualdad sea verdadera.

Comencemos con la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 6c_1 + 0c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 6c_1 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dividimos ambos lados por 3:

$$2c_1 + c_3 = 0$$

Ahora, vamos a la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 + 0c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$2c_1 + c_3 = 0 \qquad (1)$$
$$2c_1 + 3c_2 = 0 \qquad (2)$$

Para determinar si el conjunto es linealmente independiente o no, podemos usar el método de reducción por fila. Primero, restamos la ecuación (1) de la ecuación (2):

$$\begin{aligned} &(2) - (1) : \\ &\qquad (2c_1 + 3c_2) - (2c_1 + c_3) = 0 - 0 \end{aligned}$$

Esto simplifica a:

$$2c_1 + 3c_2 - 2c_1 - c_3 = 0$$

Los términos $2c_1$ y $-2c_1$ se cancelan

$$3c_2 - c_3 = 0$$

Se ha simplificado:

$$3c_2 - c_3 = 0 \qquad (3)$$
$$2c_1 + c_3 = 0 \qquad (1)$$

A partir de la ecuación (3), podemos despejar $c_3$:

$$c_3 = 3c_2$$

Y ahora podemos sustituir esto en la ecuación (1):

$$2c_1 + 3c_2 = 0$$
$$2c_1 + 9c_2 = 0$$

Dividimos por 2:

$$c_1 + 4{,}5c_2 = 0$$

Ahora tenemos un sistema en términos de $c_1$ y $c_2$:

$$c_1 + 4{,}5c_2 = 0 \tag{4}$$
$$3c_2 - c_3 = 0 \tag{3}$$

Para que el conjunto sea linealmente independiente, todos los coeficientes $c_1$, $c_2$, y $c_3$ deben ser iguales a cero. Sin embargo, podemos ver que las ecuaciones (3) y (4) son inconsistentes. Por ejemplo, si tomamos $c_2 = 1$, entonces la ecuación (3) nos dice que $c_3 = 3$, pero la ecuación (4) nos dice que $c_1 = -4{,}5$, lo cual no es posible. Dado que no podemos encontrar una solución en la que $c_1$, $c_2$, y $c_3$ sean todos iguales a cero, el conjunto $S$ es linealmente dependiente.

# Ejercicio 3

Demuestre si los siguientes conjuntos son un subespacio vectorial. En caada caso, proponga un conjunto generador de dicho conjunto.

(a) En $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, el conjunto $W = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$

(b) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x(y - z) = 0\}$

(c) En $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, el conjunto $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$