FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 05

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

27 de Octubre de 2023

Tarea 05

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal. Sean $\beta = \{(2,3), (-1,4)\}$ y $\gamma = \{3+2x, 4\}$ bases ordenadas de los respectivos espacios vectoriales. Si

$$[T]_\beta^\gamma \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Hallar $T(3,-1)$
2. Encuentre la regla de correspondencia de dicha tranformación lienal.
3. Determine el nucleo y la imagen de bases para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 2

Dé bases para los tres espacios vectoriales distintas de las canónicas β, β', γ y compruebe que:

$$[U]_{\beta'}^\gamma [T]_\beta^{\beta'} = [UT]_\beta^\gamma \tag{2}$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$

- **Base para** β El espacio de partida es $\mathbb{R}^2$, por lo que la base canónica es $\{(1,0),(0,1)\}$ Dado que el mapeo de T esta definido como $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$, los vectores de la base para β son $(2,-3,0)$ y $(1,-2,3)$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ por lo que la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, entonces podemos tomar los vectores resultantes de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$
- **Base para** γ Similar al caso de arriba, la base canónica $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ los vectores resultantes son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^\gamma [T]_\beta^{\beta'} = [UT]_\beta^\gamma$$

- La matriz de T respecto a las bases β y β' es:

$$[T]_\beta^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz U respecto de las bases β y γ es la matriz de cambio de cordenadas de la base canónica a la base γ

$$[U]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz UT respecto a las bases β y γ se obtiene multiplicando $[U]_\beta^\gamma$ y $[T]_\beta^{\beta'}$

$$[UT]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces la igualdad queda:

$$[U]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} [T]_\beta^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [UT]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $U : \mathbb{R}^3 \to P_2(R)$ tal que $U(a, b, c) = (a + c) + (3b - 2c)x + (-2a + b - 4c)x^2$

- **Base para** β Para el espacio $\mathbb{R}^3$, la base canónica es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $P_2(R)$, que es el espacio del polinomio de grado 2 o menos. La base canónica es $\{1, x - 1, x^2\}$
- **Base para** γ La base canónica $P_2(R)$ es $\{1, x, x^2\}$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^\gamma \, [T]_\beta^{\beta'} = [UT]_\beta^\gamma$$

- La matriz U respecto a las bases β y β'

$$[U]_\beta^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- La matriz de T respecto a las base β' y γ

$$[T]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$[U]_\beta^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} [T]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta'}^\gamma \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Las siguientes transformaciones son inyectivas, suprayectivas o ambas?

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$
2. $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $T(a, b, c, d, e) = (a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e)$

Para demostrar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ es inyectiva, debemos demostrar que el núcleo (kernel) de T es el vector nulo (0,0,0,0,0). Esto significa que si $T(a, b, c, d, e) = T(x, y, z, w, v)$, entonces $a = x, b = y, c = z, d = w, e = v$. En otras palabras $T(a, b, c, d, e) = T(x, y, z, w, v)$ implica que $(a, b, c, d, e) = (x, y, z, w, v)$

La transformación lineal T se define como:

$$T(a,b,c,d,e) = (a+2b-c, -3a+b+4c, a-b+2d, b+c+3e, 2a+b+d-e)$$

Para demostrar la inyectividad, supongamos que $T(a,b,c,d,e) = T(x,y,z,w,v)$, lo que significa que:

$$(a+2b-c, -3a+b+4c, a-b+2d, b+c+3e, 2a+b+d-e) = T(x,y,z,w,v)$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales:

$$a+2b-c = x \tag{3.1}$$

$$-3a+b+4c = y \tag{3.2}$$

$$a-b+2d = z \tag{3.3}$$

$$b+c+3e = w \tag{3.4}$$

$$2a+b+d-e = v \tag{3.5}$$

Queremos demostrar que la única solución para este sistema es $(a,b,c,d,e) = (x,y,z,w,v)$. Para hacerlo, podemos utilizar álgebra lineal y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Conocemos la primera ecuación (3.1)

Restamos la primera ecuación (3.1) de la segunda (3.2)

$$(-3a+b+4c) - (a+2b-c) = y-x$$

Simplificamos

$$-2a-b+5c = y-x$$

Despejamos a

$$a = \frac{y-x+b+5c}{-2}$$

Ahora, utilicemos esta expresión para a en la tercera ecuación (3.3)

$$\left(\frac{y-x+b+5c}{(-2)}\right) - b + 2d = z$$

Simplifiquemos:

$$(-y+x-b-5c) - 3b + 4d = 2z$$

Despejamos b

$$b = \frac{x-y-5c-2z}{3} + 2d$$

Ahora sustituyamos esta expresión para b en la cuarta ecuación (3.4)

$$\left(\frac{x-y-5c-2}{3}\right) + c + 3e = w$$

Simplificamos

$$\frac{x-y-2z}{3} + 2d + 4c + 3e = w$$

Despejamos c

$$c = \frac{(3w - x + y2z - 6d - 9e)}{4}$$

Finalmente, utilicemos estas expresiones para a, b y c en la quinta ecuación (3.5)

$$2\left(\frac{y - x + b + 5c}{2}\right) + \left(\frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e}\right) = v$$

Simplifiquemos

$$\begin{aligned}
-(y - x + b + 5c) + \frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e} &= v \\
-\left(y - x + (\frac{x - y - 5c - 2z}{3}) + 5c\right) + 2d - 3 &= v \\
-\left(y - x + \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{5c}{3} - \frac{2z}{3} + 5c\right) + 2d - e &= v \\
-\frac{2y}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{7c}{3} - \frac{2z}{3} + 2d - e &= v \\
\frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3e)}{3} &= v
\end{aligned}$$

De esta ecuación, podemos despejar e

$$e = \frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3v)}{3}$$

Hemos expresado todas las variables a, b, c, d, e en términos de $(x.y, z, w, v)$. Esto demuestra que para cualquier conjunto de valores $(x.y, z, w, v)$ en $\mathbb{R}^5$ existe un conjunto correspondiente de valores (a, b, c, d, e) en $\mathbb{R}^5$ que satisface el sistema de ecuaciones. $\therefore$ Hemos demostrado que T es inyectiva.

Sabemos que $dim(\mathbb{R}^5) = 5$ y además T es inyectiva, por lo que por el teorema $1{,}25$ podemos decir que T también es Sobreyectiva.

EJEMPLO 5.5.4 La dimensión de $\mathbb{R}^n$

Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, se observa que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Teorema 7.4.2

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y suponga que $\dim V = \dim W = n$.

i) Si T es 1-1 entonces T es sobre.
ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Teorema 1.22 Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si $Ker(T) = \{0_V\}$

Teorema 1.23 Sean V y W espacio vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva;
2. Para cualquier subconjunto $S \subseteq V$, se tiene que S es linealmente independiente en V si y solo si $T(S) := \{T(s) : s \in S\}$ es linealmente independiente en W

Teorema 1.25[7] Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F con $dim_F(V) = dim_F(W)$. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T es inyectiva
2. T es suprayectiva
3. T es biyectiva