FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 02

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

18 de Semptiembre de 2023

Tarea 02

Ejercicio 2

En cada uno de los siguientes incisos, determine (y demuestre, si es el caso) si el conjunto es linealmente independiente o no.

(a) En $P_2(\mathbb{R})$ el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$

Para determinar si el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$ en $P_2(\mathbb{R})$ es linealmente independiente o no, sigamos los siguientes pasos:

Paso 1: Definición de linealmente independiente. Un conjunto de polinomios $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)\}$ se considera linealmente independiente en $P_n(\mathbb{R})$ si la única forma de escribir la combinación lineal igual a cero es haciendo que todos los coeficientes sean iguales a cero:

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) + \ldots + c_n p_n(x) = 0$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son coeficientes reales y $p_i(x)$ son los polinomios en el conjunto.

Paso 2: Considerar la combinación lineal igual a cero. Consideramos la siguiente combinación lineal de los polinomios en S:

$$c_1(1) + c_2(1 - x + 2x^2) + c_3(2 + 3x - x^2) = 0$$

Donde c_1, c_2, c_3 son los coeficientes que queremos encontrar.

Paso 3: Simplificar la ecuación. Distribuimos los coeficientes en la ecuación y agrupamos términos semejantes:

$$c_1 + c_2(1 - x + 2x^2) + c_3(2 + 3x - x^2) = 0$$

Esto nos da:

$$c_1 + c_2 - c_2 x + 2c_2 x^2 + 2c_3 + 3c_3 x - c_3 x^2 = 0$$

Paso 4: Agrupar términos semejantes. Agrupamos términos semejantes:

$$(c_1 + c_2 + 2c_3) + (-c_2 - c_3)x + (2c_2 - c_3)x^2 = 0$$

Paso 5: La ecuación debe ser igual a cero para todo x. Dado que esta ecuación debe ser verdadera para todos los valores de x, los coeficientes de cada término deben ser igual a cero. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones:

1. $c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$
2. $-c_2 - c_3 = 0$
3. $2c_2 - c_3 = 0$

Paso 6: Resolver el sistema de ecuaciones. Resolvamos el sistema de ecuaciones. Empezamos con la ecuación 2:

De la ecuación 2, tenemos:

$$-c_2 - c_3 = 0 \implies c_3 = -c_2$$

Ahora, sustituimos este valor en la ecuación 3:

$$2c_2 - c_3 = 0 \implies 2c_2 - (-c_2) = 0 \implies 2c_2 + c_2 = 0 \implies 3c_2 = 0$$

Por lo tanto, $c_2 = 0$. Ahora, sustituimos $c_2 = 0$ en la ecuación 1:

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \implies c_1 + 0 + 2(-c_2) = 0 \implies c_1 - 2c_2 = 0 \implies c_1 - 2(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

Hemos encontrado que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$, lo que significa que la única forma de obtener la combinación lineal igual a cero es haciendo que todos los coeficientes sean iguales a cero. Por lo tanto, el conjunto $S = \{1, 1 - x + 2x^2, 2 + 3x - x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2(\mathbb{R})$.

(b) En $M_{3\times 3}$, el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$