FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 05

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

27 de Octubre de 2023

Tarea 05

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal. Sean $\beta = \{(2,3),(-1,4)\}$ y $\gamma = \{3+2x, 4\}$ bases ordenadas de los respectivos espacios vectoriales. Si

$$[T]_\beta^\gamma \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Hallar $T(3,-1)$
2. Encuentre la regla de correspondencia de dicha tranformación lienal.
3. Determine el nucleo y la imagen de bases para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 2

Dé bases para los tres espacios vectoriales distintas de las canónicas β, β', γ y compruebe que:

$$[U]_{\beta'}^\gamma [T]_\beta^{\beta'} = [UT]_\beta^\gamma \tag{2}$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$

- **Base para** β El espacio de partida es $\mathbb{R}^2$, por lo que la base canónica es $\{(1,0),(0,1)\}$ Dado que el mapeo de T esta definido como $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$, los vectores de la base para β son $(2,-3,0)$ y $(1,-2,3)$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ por lo que la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, entonces podemos tomar los vectores resultantes de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$
- **Base para** γ Similar al caso de arriba, la base canónica $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ los vectores resultantes son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^\gamma [T]_\beta^{\beta'} = [UT]_\beta^\gamma$$

- La matriz de T respecto a las bases β y β' es:

$$[T]_\beta^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz U respecto de las bases β y γ es la matriz de cambio de cordenadas de la base canónica a la base γ

$$[U]_\beta^\gamma \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz UT respecto a las bases β y γ se obtiene multiplicando $[U]_\beta^\gamma$ y $[T]_\beta^{\beta'}$

$$[UT]_{\beta}^{\gamma}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

- Entonces la igualdad queda:

$$[U]_{\beta}^{\gamma}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-3 & -2 & 0\\0 & 3 & 3\end{bmatrix}[T]_{\beta}^{\beta'}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & -2\\0 & 3\end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(b) $U : \mathbb{R}^3 \to P_2(R)$ tal que $U(a,b,c) = (a+c) + (3b-2c)x + (-2a+b-4c)x^2$

- **Base para** β Para el espacio $\mathbb{R}^3$, la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $P_2(R)$, que es el espacio del polinomio de grado 2 o menos. La base canónica es $\{1, x-1, x^2\}$
- **Base para** γ La base canónica $P_2(R)$ es $\{1, x, x^2\}$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma}[T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz U respecto a las bases β y β'

$$[U]_{\beta}^{\beta'}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\1 & -2 & 1\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

- La matriz de T respecto a las base β' y γ

$$[T]_{\beta}^{\gamma}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$[U]_{\beta}^{\beta'}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\1 & -2 & 1\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}[T]_{\beta}^{\gamma}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = [UT]_{\beta'}^{\gamma}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\-1 & 0 & 1\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Las siguientes transformaciones son inyectivas, suprayectivas o ambas?

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (a+b, 0, 2a-b)$

   Recordando el teorema 1.22 (Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si Ker$(T) = \{0v\}$.) Por lo cual calcularemos el núcleo de T. El núcleo de T es el conjunto de todos los vectores (a,b) en $\mathbb{R}^2$ que se mapean a $(0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, necesitamos encontrar todas las soluciones de la ecuación $T(a,b) = (0,0,0)$. La transformación T se define como: $T(a,b) = (a+b, 0, 2a-b)$ y para encontrar el núcleo resolveremos $T(a,b) = (0,0,0)$: Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 0 = 0 &\rightarrow \\ 2a - b &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a - b &= 0 \end{aligned}$$

Lo que nos da que

$$b = -a$$
$$2a - (-a) = 0 \rightarrow 3a = 0 \rightarrow a = 0$$
$$b = 0$$

2. $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $T(a, b, c, d, e) = (a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e)$