FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 05

Semestre $2024 - 1$

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

27 de Octubre de 2023

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal. Sean $\beta = \{(2,3),(-1,4)\}$ y $\gamma = \{3+2x, 4\}$ bases ordenadas de los respectivos espacios vectoriales. Si

$$[T]_\beta^\gamma \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Hallar $T(3,-1)$

   Se tiene que, por la observación $1{,}39$ de la matriz de representación matricial:

   $$[T(2,3)]_\gamma = 1/4 \begin{pmatrix} 48 \\ -23 \end{pmatrix}$$

   $$[T((-1,4))]_\gamma = 1/4 \begin{pmatrix} 48 \\ -19 \end{pmatrix}$$

   Dado a que T es lineal, se cumple que

   - $-1T(a) = T(-a)$, para algún a $\in \mathbb{R}^2$
   - $T(a) + T(b) = T(a+b)$, para a,b $\in \mathbb{R}^2$

   Por lo tanto, tenemos que $T((2,3)) - 1T((-1,4)) = T((2,3) - (-1,4)) = T((3,-1))$. Para obtener el valor de $T((3,-1))$, veamos que:

   $$[T((3,-1))]_\gamma = [T((2,3)-(-1,4))]_\gamma = [T(2,3)]_\gamma - [T((-1,4))]_\gamma$$

   $$= 1/4 \begin{pmatrix} 48 \\ -23 \end{pmatrix} - 1/4 \begin{pmatrix} 48 \\ -19 \end{pmatrix}$$

   $$1/4 \begin{pmatrix} 48 - 48 \\ -23 - 19 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Por lo que $T((3,-1)) = (0)(3+2x) + (-1)(4) = -4$

2. Encuentre la regla de correspondencia de dicha transformación lineal.

   Por el Teorema $1{,}54$, para cualquier v=(a,b)$\in \mathbb{R}^2$, se tiene que:

   $$[T(v)]_\gamma = [T]_\gamma^\beta [v]_\beta$$

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones, para encontrar a $[v]_\beta$:

   $$2\alpha - \beta = a$$

   $$3\alpha + 4\beta = b$$

   $$\beta = 2\alpha - a$$

   $$3\alpha + 4(2\alpha - a) = b$$

$$11\alpha - 4a = b$$
$$\alpha = \frac{4a+b}{11}$$
$$\beta = 2(\frac{4a+b}{11}) - a$$
$$\beta = \frac{8a+2b}{11} - a$$
$$\beta = \frac{-3a+2b}{11}$$

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{4a+b}{11} \\ \frac{-3a+2b}{11} \end{pmatrix} = 1/11 \begin{pmatrix} 4a+b \\ -3a+2b \end{pmatrix}$$

Ya que tenemos el vector columna de v en γ, lo multiplicamos por la matriz de representación de β a γ:

$$[T]_\gamma^\beta [v]_\beta = 1/4 \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} 1/11 \begin{pmatrix} 4a+b \\ -3a+2b \end{pmatrix}$$

$$[T]_\gamma^\beta [v]_\beta = 1/44 \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a+b \\ -3a+2b \end{pmatrix}$$

$$[T]_\gamma^\beta [v]_\beta = 1/44 \begin{pmatrix} 48a+144b \\ -35a-61b \end{pmatrix}$$

Ya que tenemos esto, multiplicamos por los vectores de la base γ:

$$1/44(48a+144b)(3+2x) = \frac{(12)(a+3b)(3+2x)}{11}$$
$$1/44(-35a-61b)(4) = \frac{-35a-61b}{11}$$

Entonces se tiene que:

$$T((a,b)) = \frac{(12)(a+3b)(3+2x)}{11} + \frac{-35a-61b}{11} = \frac{(12)(a+3b)(3+2x)-35a-61b}{11}$$

3. Determine el núcleo y la imagen de bases para cada uno de estos subespacios.

   De la regla de correspondencia, se tiene que, para que T(a,b)=0, se debe cumplir lo siguiente: $(12)(a+3b)(3+2x) = 0$, pues es el Único con termino de 1er grado, y $-35a-61b = 0$. Se tiene entonces que:

$$(12)(a+3b)(3+2x) = 0 \longrightarrow a+3b = 0 \longrightarrow a = -3b$$

$$-35(-3b) - 61b = 0$$
$$44b = 0 \longrightarrow b = 0$$
$$a + 3(0) = 0 \longrightarrow a = 0$$

   Por lo tanto, para que la transformación dé el vector 0, v tiene que ser el vector $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $Ker(T) = \{0\}$, cuya base es $\emptyset$. Dado que el $Ker(T) = \{0\}$, se tiene que T es inyectiva, y ya que $dim(\mathbb{R}^2) = dim(P_1(\mathbb{R}))$, y por el teorema 1,25, T es suprayectiva, por lo tanto, su imagen es $P_1(\mathbb{R})$, cuya base propuesta es $\Theta = \{x, 1\}$

Ejercicio 2

Dé bases para los tres espacios vectoriales distintas de las canónicas β, β', γ y compruebe que:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma}\,[T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \tag{2}$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$

- **Base para** β El espacio de partida es $\mathbb{R}^2$, por lo que la base canónica es $\{(1,0),(0,1)\}$ Dado que el mapeo de T esta definido como $T(a,b) = (2a+b, -3a-2b, 3b)$, los vectores de la base para β son $(2,-3,0)$ y $(1,-2,3)$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ por lo que la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, entonces podemos tomar los vectores resultantes de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$
- **Base para** γ Similar al caso de arriba, la base canónica $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ los vectores resultantes son $(2,-3,0)$, $(-1,-2,3)$ y $(0,0,3)$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma}\,[T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz de T respecto a las bases β y β' es:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz U respecto de las bases β y γ es la matriz de cambio de cordenadas de la base canónica a la base γ

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz UT respecto a las bases β y γ se obtiene multiplicando $[U]_{\beta}^{\gamma}$ y $[T]_{\beta}^{\beta'}$

$$[UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces la igualdad queda:

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $U : \mathbb{R}^3 \to P_2(R)$ tal que $U(a,b,c) = (a+c) + (3b-2c)x + (-2a+b-4c)x^2$

- **Base para** β Para el espacio $\mathbb{R}^3$, la base canónica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- **Base para** β' El espacio de llegada es $P_2(R)$, que es el espacio del polinomio de grado 2 o menos. La base canónica es $\{1, x-1, x^2\}$
- **Base para** γ La base canónica $P_2(R)$ es $\{1, x, x^2\}$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma}\,[T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz U respecto a las bases β y β'

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- La matriz de T respecto a las base β' y γ

$$[T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta'}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Las siguientes transformaciones son inyectivas, suprayectivas o ambas?

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$

   Recordando el teorema 1.22 (Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si Ker$(T) = \{0v\}$.) Por lo cual calcularemos el núcleo de T.

   El núcleo de T es el conjunto de todos los vectores (a, b) en $\mathbb{R}^2$ que se mapean a $(0, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, necesitamos encontrar todas las soluciones de la ecuación $T(a, b) = (0, 0, 0)$.

   La transformación T se define como: $T(a, b) = (a+b, 0, 2a-b)$ y para encontrar el núcleo resolveremos $T(a, b) = (0, 0, 0)$. Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 0 &= 0 \to \\ 2a - b &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a - b &= 0 \end{aligned}$$

   Lo que nos da

$$2a - (-a) = 0 \to 3a = 0 \to \begin{aligned} b &= -\,a \\ a &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

   Esto significa que la única solución al sistema $T(a, b) = (0, 0, 0)$ es $(a, b) = (0, 0)$. En otras palabras, el núcleo de T consiste únicamente en el vector nulo $(0, 0)$.

Dado que el núcleo de T es igual al conjunto nulo, hemos demostrado que T es inyectiva según el teorema anteriormente citado, ya que no hay ningún otro par de vectores (a, b) que se mapee a $(0, 0, 0)$ aparte del vector nulo.

Una transformación lineal es sobreyectiva si la imagen de la transformación abarca todo el espacio de destino. Esto significa que, para cualquier vector (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, debe haber un vector (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(a, b) = (x, y, z)$.

Tomemos un vector genérico (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$. Queremos encontrar valores de a y b que hagan que $T(a, b) = (x, y, z)$, es decir:

$$\begin{aligned} a + b &= x \\ 0 &= y \\ 2a - b &= z \end{aligned}$$

Dado que $0 = y$, sabemos que y debe ser igual a 0. Esto implica las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b &= x \\ 2a - b &= z \end{aligned}$$

Y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$a + b = x \rightarrow b = x - a$$

$$\begin{aligned} 2a - b &= z \\ 2a - (x - a) &= z \\ 3a - x &= z \\ 3a &= z + x \\ a &= \frac{z + x}{3} \end{aligned}$$

$$b = x - a \rightarrow b = x - \frac{z + x}{3}$$

Entonces, hemos encontrado una expresión para a y b en términos de x y z. Por lo tanto, para cualquier vector (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar un vector (a, b) en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(a, b) = (x, y, z)$. Esto demuestra que T es una transformación sobreyectiva.

Citando el siguiente teorema:

> **Teorema 7.4.3**
>
> Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Suponga que dim $V = n$ y dim $W = m$. Entonces
>
> **i)** Si $n > m$, T no es 1-1.
>
> **ii)** Si $m > n$, T no es sobre.
>
> **Demostración**
>
> **i)** Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Sea $\mathbf{w}_i = T\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y observe el conjunto $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Como $m = \dim W < n$, el conjunto S es linealmente independiente. Así, existen escalares, no todos cero, tales que $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Como los elementos $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes y como no todos los coeficientes c_i son cero, se ve que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pero $T\mathbf{v} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathbf{v} \in$ nu T y nu $T \neq \{\mathbf{0}\}$.
>
> **ii)** Si $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $T\mathbf{v} = a_1T\mathbf{v}_1 + a_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + a_nT\mathbf{v}_n = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n$. Así, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} = \{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_n\}$ genera a la imagen de T. Entonces, del problema 5.5.34 de la página 359, $\rho(T) = \dim \operatorname{im} T \leq n$. Como $m > n$, esto muestra que im $T \neq W$. Entonces T no es sobre.

Podemos decir que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a,b) = (a+b, 0, 2a-b)$ no es sobreyectiva ya que la dimensión de R^2=2 y la de R^3=3 y como 3>2 entonces T no es sobreyectiva.

2. $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $T(a,b,c,d,e) = (a+2b-c, -3a+b+4c, a-b+2d, b+c+3e, 2a+b+d-e)$

Para demostrar que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ es inyectiva, debemos demostrar que el núcleo (kernel) de T es el vector nulo (0,0,0,0,0). Esto significa que si $T(a,b,c,d,e) = T(x,y,z,w,v)$, entonces $a = x, b = y, c = z, d = w, e = v$. En otras palabras $T(a,b,c,d,e) = T(x,y,z,w,v)$ implica que $(a,b,c,d,e) = (x,y,z,w,v)$

La transformación lineal T se define como:

$$T(a,b,c,d,e) = (a+2b-c, -3a+b+4c, a-b+2d, b+c+3e, 2a+b+d-e)$$

Para demostrar la inyectividad, supongamos que $T(a,b,c,d,e) = T(x,y,z,w,v)$, lo que significa que:

$$(a+2b-c, -3a+b+4c, a-b+2d, b+c+3e, 2a+b+d-e) = T(x,y,z,w,v)$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales:

$$a + 2b - c = x \tag{3.1}$$

$$-3a + b + 4c = y \tag{3.2}$$

$$a - b + 2d = z \tag{3.3}$$

$$b + c + 3e = w \tag{3.4}$$

$$2a + b + d - e = v \tag{3.5}$$

Queremos demostrar que la única solución para este sistema es $(a,b,c,d,e) = (x,y,z,w,v)$. Para hacerlo, podemos utilizar álgebra lineal y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Conocemos la primera ecuación (3.1)

Restamos la primera ecuación (3.1) de la segunda (3.2)

$$(-3a + b + 4c) - (a + 2b - c) = y - x$$

Simplificamos

$$-2a - b + 5c = y - x$$

Despejamos a

$$a = \frac{y - x + b + 5c}{-2}$$

Ahora, utilicemos esta expresión para a en la tercera ecuación (3.3)

$$\left(\frac{y - x + b + 5c}{(-2)}\right) - b + 2d = z$$

Simplifiquemos:

$$(-y + x - b - 5c) - 3b + 4d = 2z$$

Despejamos b

$$b = \frac{x - y - 5c - 2z}{3} + 2d$$

Ahora sustituyamos esta expresión para b en la cuarta ecuación (3.4)

$$\left(\frac{x - y - 5c - 2}{3}\right) + c + 3e = w$$

Simplificamos

$$\frac{x - y - 2z}{3} + 2d + 4c + 3e = w$$

Despejamos c

$$c = \frac{(3w - x + y2z - 6d - 9e)}{4}$$

Finalmente, utilicemos estas expresiones para a, b y c en la quinta ecuación (3.5)

$$2\left(\frac{y - x + b + 5c}{2}\right) + \left(\frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e}\right) = v$$

Simplifiquemos

$$\begin{aligned}
-(y - x + b + 5c) + \frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e} &= v \\
-\left(y - x + (\frac{x - y - 5c - 2z}{3}) + 5c\right) + 2d - 3 &= v \\
-\left(y - x + \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{5c}{3} - \frac{2z}{3} + 5c\right) + 2d - e &= v \\
-\frac{2y}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{7c}{3} - \frac{2z}{3} + 2d - e &= v \\
\frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3e)}{3} &= v
\end{aligned}$$

De esta ecuación, podemos despejar e

$$e = \frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3v)}{3}$$

Hemos expresado todas las variables a, b, c, d, e en términos de $(x.y, z, w, v)$. Esto demuestra que para cualquier conjunto de valores $(x.y, z, w, v)$ en $\mathbb{R}^5$ existe un conjunto correspondiente de valores (a, b, c, d, e) en $\mathbb{R}^5$ que satisface el sistema de ecuaciones. $\therefore$ Hemos demostrado que T es inyectiva.

Sabemos que $dim(\mathbb{R}^5) = 5$ y además T es inyectiva, por lo que por el teorema $1{,}25$ podemos decir que T también es Sobreyectiva.

EJEMPLO 5.5.4 **La dimensión de $\mathbb{R}^n$**

Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, se observa que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Teorema 7.4.2

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal y suponga que $\dim V = \dim W = n$.

i) Si T es 1-1 entonces T es sobre.
ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Teorema 1.22 Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si $Ker(T) = \{0_V\}$

Teorema 1.23 Sean V y W espacio vectoriales sobre un campo F. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva;
2. Para cualquier subconjunto $S \subseteq V$, se tiene que S es linealmente independiente en V si y solo si $T(S) := \{T(s) : s \in S\}$ es linealmente independiente en W

Teorema 1.25[7] Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F con $dim_F(V) = dim_F(W)$. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T es inyectiva
2. T es suprayectiva
3. T es biyectiva