FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 03

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

29 de Semptiembre de 2023

Tarea 03

Ejercicio 1

Determina si los siguientes conjuntos son base para $P_2(\mathbb{R})$:

1. $\{1 - x + 2x^2,\, 2 + x - 2x^2,\, 1 - 2x + 4x^2\}$
2. $\{1 + 2x + x^2,\, 3 + x^2,\, x + x^2\}$

Ejercicio 2

Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(T) = Im(T)$.

Ejercicio 3

Dar un ejemplo de dos transformaciones lineales (diferentes) $U, T : V \to W$ tales que

$$Ker(T) = Ker(U)$$

$$Im(T) = Im(U)$$

Ejercicio 4

Dada la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y, z) = (x - 2y,\, 0,\, 2x - 4)$$

Buscar el núcleo y la imagen.

Ejercicio 5

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$. Calcula $Ker(D)$ e $Im(D)$.

Solución:

Sean $T : V \to W$ un operador lineal.

- El núcleo de T, $Ker(T)$, es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = 0$.
- La imagen de T, $Im(T)$, es el conjunto de todos los vectores $w \in W$ que se pueden escribir como la imagen de algún vector $v \in V$ por T.

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$.

Cálculo de $Ker(D)$

Si $f \in Ker(D)$. Entonces, $D(f) = 0$, significa que $f' = 0$, nos queda entonces que f es una constante, de esta forma, $Ker(D) = \boxed{\{k \in \mathbb{R}\}}$.

Cálculo de $Im(D)$

Sea $g \in P_3(\mathbb{R})$. Tenemos que para g se puede escribir de la forma $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces, $D(g) = (3a)x^2 + (2b)x + c$ de esta forma la $Im(D) = \boxed{P_2(\mathbb{R})}$.

1. Definimos $Ker(D)$ e $Im(D)$.

$$\begin{aligned} Ker(D) &= \{f \in P_3(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\} \\ Im(D) &= \{g \in P_3(\mathbb{R}) \mid g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

2. Calculamos $Ker(D)$.

$$\begin{aligned} f \in Ker(D) &\iff D(f) = 0 \\ &\iff f' = 0 \\ &\iff f(x) = k \text{ para algún } k \in \mathbb{R} \\ &\iff f \in \{k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. Calculamos $Im(D)$.

$$\begin{aligned} g \in Im(D) &\iff g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R}) \\ &\iff g(x) = (3a)x^2 + (2b)x + c \text{ para algún } a, b, c \in \mathbb{R} \\ &\iff g \in P_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$\therefore$ Hemos calculado que $Ker(D) = k \in \mathbb{R}$ e $Im(D) = P_2(\mathbb{R})$.