FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 07

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

24 de Noviembre de 2023

Ejercicio 1

Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\gamma = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$$

Y la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (2x, x+y, y+z)$

1. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base β y γ

   Solución:

2. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base γ y β

   Solución:

3. Comprueba que $[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\, Q$

   Solución:

Ejercicio 2

Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x-y, 3y-z)$ Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\beta' = \{(1,3,2),(0,1,2),(1,0,1)\}$$

$$\gamma = \{(1,1),(2,1)\}$$

$$\gamma' = \{(3,1),(1,4)\}$$

1. Encuentra las matrices de cambios de coordenadas

   Solución:

2. Calcula las bases duales de β y γ

   Solución:

3. Dada T^t la función transpuesta de T, comprueba que $[T^t]_{\gamma*}^{\beta*} = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$

   Solución:

Ejercicio 3

1. Encuentra la base dual de $\mathbb{R}^2, \beta = \{(1,2),(3,4)\}$

   Solución:

   La base dual de un espacio vectorial es un conjunto de formas lineales (funciones lineales que toman vectores y devuelven escalares) que actúan sobre los vectores de la base original. Para una base $\beta = \{v_1, v_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, la base dual $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ se define tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que es 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

   Para nuestra base $\beta = \{(1,2),(3,4)\}$ podemos encontrar la base dual resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

$$
\begin{gathered}
f_1((1,2)) = 1 \\
f_1((3,4)) = 0 \\
f_2((1,2)) = 0 \\
f_2((3,4)) = 1
\end{gathered}
$$

   Resolviendo este sistema, obtenemos la base dual

$$\beta^* = \{(2,-1), \left(\frac{-3}{2}, 1\right)\}$$

2. Encuentra la base β de $V = P_1(\mathbb{R})$ cuya base dual es $\beta^* = \{f_1, f_2\}$, siendo $f_1[p(x)] = \int_0^1 p(x)\,dx$ y $f_2[p(x)] = \int_0^2 p(x)\,dx$

   Solución: