



FACULTAD DE CIENCIAS
ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 05

Semestre 2024 – 1

Profesora:

Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:

Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado

Gilbert Raúl Avendaño Aguilar

Aldair Reyes González

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

27 de Octubre de 2023

Tarea 05

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal. Sean $\beta = \{(2, 3), (-1, 4)\}$ y $\gamma = \{3 + 2x, 4\}$ bases ordenadas de los respectivos espacios vectoriales. Si

$$[T]_{\beta}^{\gamma} \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Hallar $T(3, -1)$
2. Encuentre la regla de correspondencia de dicha transformación lineal.
3. Determine el nucleo y la imagen de bases para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 2

Dé bases para los tres espacios vectoriales distintas de las canónicas β, β', γ y compruebe que:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \quad (2)$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (2a + b, -3a - 2b, 3b)$

- **Base para β** El espacio de partida es \mathbb{R}^2 , por lo que la base canónica es $\{(1, 0), (0, 1)\}$ Dado que el mapeo de T esta definido como $T(a, b) = (2a + b, -3a - 2b, 3b)$, los vectores de la base para β son $(2, -3, 0)$ y $(1, -2, 3)$
- **Base para β'** El espacio de llegada es \mathbb{R}^3 por lo que la base canónica es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, entonces podemos tomar los vectores resultantes de T en la base canónica de \mathbb{R}^3 , que son $(2, -3, 0)$, $(-1, -2, 3)$ y $(0, 0, 3)$
- **Base para γ** Similar al caso de arriba, la base canónica \mathbb{R}^3 es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ los vectores resultantes son $(2, -3, 0)$, $(-1, -2, 3)$ y $(0, 0, 3)$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz de T respecto a las bases β y β' es:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz U respecto de las bases β y γ es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica a la base γ

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz UT respecto a las bases β y γ se obtiene multiplicando $[U]_{\beta}^{\gamma}$ y $[T]_{\beta}^{\beta'}$

$$[UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces la igualdad queda:

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(R)$ tal que $U(a, b, c) = (a + c) + (3b - 2c)x + (-2a + b - 4c)x^2$

- **Base para β** Para el espacio \mathbb{R}^3 , la base canónica es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- **Base para β'** El espacio de llegada es $P_2(R)$, que es el espacio del polinomio de grado 2 o menos. La base canónica es $\{1, x - 1, x^2\}$
- **Base para γ** La base canónica $P_2(R)$ es $\{1, x, x^2\}$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz U respecto a las bases β y β'

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- La matriz de T respecto a las base β' y γ

$$[T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Las siguientes transformaciones son inyectivas, suprayectivas o ambas?

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$
2. $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $T(a, b, c, d, e) = (a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e)$