FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 06

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

10 de Noviembre de 2023

Ejercicio 1

Sean V un F-espacio vectorial de dimensión finita con base ordenada $\beta = \{x_1, \cdots x_n\}$ y $x_0 = 0_V$. Demostrar que existe una transformación lineal $T : V \to V$ que satisface $T(x_j) = x_j - x_{j-1}$ para $j = 1, \cdots, n$ y calcular $[T]_\beta$

Solución:

Tenemos a V como el espacio vectorial con la base $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y la transformación $T : V \to V$ definida por $T(x_j) = x_j - x_{j-1}$ y $x_0 = 0$

Usando esto, calculemos $T(v_1)$ y $T(v_2)$:

$$\begin{aligned} T(x_1) =& x_1 - x_0 \\ =& x_0 - 0 \\ =& x_1 \end{aligned}$$

$$T(x_2) = x_2 - x_1, T(x_3) = x_3 - x_2, \cdots, T(x_n) = x_n - x_{n-1}$$

Sean V y W espacios vectoriales sobre F, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es la base de V.

Para n vectores cualesquiera $w_1, w_2, \ldots, w_n$ en W, existe exactamente una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Las combinaciones lineales de vectores en un espacio vectorial V son nuevamente un vector en V. Por eso $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ es un subconjunto de n vectores en V.

Entonces hay una transformación lineal única $T : V \to W$ tal que $T(x_j) = x_j - x_{j-1}$.

Entonces, la base para V es $\beta = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ y el conjunto de imágenes de vectores bajo T es

$$\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

Ahora escribiremos estos vectores como combinaciones lineales de los vectores base.

$$\begin{aligned} x_1 =& 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots 0x_n \\ x_2 - x_1 =& -1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots 0x_n \\ x_3 - x_2 =& 0x_1 + (-1x_2) + 1x_3 + \ldots 0x_n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} =& 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + (-1x_{n-1}) + 1x_n \end{aligned}$$

Escribimos los coeficientes de las combinaciones lineales como las columnas de la matriz. Entonces esta es la matriz requerida $[T]_\beta$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Sean V un F-espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de V y $T : V \to V$ una proyección sobre W. Escoger una base ordenada adecuada de V tal que $[T]_\beta$ sea la matriz diagonal.

Solución:

Proyección sobre un subespacio vectorial: Una proyección sobre un subespacio vectorial W es una transformación lineal $T : V \to V$ tal que para cualquier vector v en V, $T(v)$ es el punto más cercano a v que está en el subespacio W. En otras palabras, $T(v)$ es el vector en W que está más cerca de v.

Matriz de transformación lineal: Cualquier transformación lineal $T : V \to V$ puede representarse mediante una matriz. En particular, si tenemos una base ordenada β de V, la matriz de T respecto a β, denotada como $[T]_\beta$, es la matriz que describe cómo T actúa sobre los vectores en V cuando se expresan en términos de la base β.

Paso 1: Encontrar una base ordenada para W

Supongamos que para $\beta_W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es base de W. Sea la cantidad de vectores que pueda tener forsozamente deben ser linealmente independiente y generar W.

Paso 2: Ampliar β_W a una base ordenada de V

Tomamos los vectores de β_W para formar una base ordenada de V. Supongamos que

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$$

es una base para V, donde n es la dimensión de V. Esta base tiene k vectores de W y $(n-k)$ vectores adicionales que completan la base de V.

Paso 3: Proyección T en términos de la base β

Para cualquier vector v en V, la proyección $T(v)$ es igual a v si v está en W, y es igual a $\mathbf{0}$ si v está en el complemento ortogonal de W. Podemos expresar $T(v)$ en términos de la base β de la siguiente manera:

$$T(v) = \begin{cases} v, & \text{si } v \in W \\ \mathbf{0}, & \text{si } v \in \text{complemento ortogonal de } W \end{cases}$$

Paso 4: Matriz $[T]_\beta$

La matriz $[T]_\beta$ tendrá una forma diagonal, donde los bloques correspondientes a W serán matrices identidad y los bloques correspondientes al complemento ortogonal de W serán matrices nulas. Es decir,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_k es la matriz identidad de tamaño $k \times k$, y 0 representa una matriz nula de tamaño $(n-k) \times (n-k)$.

Ahora vamos a considerar el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ con la proyección $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio W generado por $(1, 0, 0)$.

- $\beta_W = \{(1, 0, 0)\}$ es una base para W.
- Ampliando β_W, obtenemos la base $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ para V.

La matriz $[T]_\beta$ en esta base es:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que $[T]_\beta$ tiene una forma diagonal, consideremos cómo actúa T sobre los vectores en V expresados en la base β. Para cualquier v en V, $T(v)$ tiene dos posibles casos:

1. Si v está en W, entonces $T(v) = v$. En términos de la matriz $[T]_\beta$, esto corresponde a multiplicar $[T]_\beta$ por v y obtener v. Esto se logra usando el bloque I_k en la esquina superior izquierda de $[T]_\beta$.
2. Si v está en el complemento ortogonal de W, entonces $T(v) = \mathbf{0}$. En términos de la matriz $[T]_\beta$, esto corresponde a multiplicar $[T]_\beta$ por v y obtener el vector nulo. Esto se logra usando los bloques de 0 en la parte inferior de $[T]_\beta$.

Por lo tanto, la matriz $[T]_\beta$ tiene una forma diagonal como se muestra en el paso 4.

Ejercicio 3

Sea $T : \mathbb{R}3 \to \mathbb{R}3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y + x, z)$.

1. Demuestre que T es una transformación lineal inyectiva y suprayectiva

   Veamos que para que T=$\overline{0}$, se tiene que cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{aligned} x &= 0 \\ 2y + x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

   $$x = 0 \implies 2y + 0 = 0 \implies y = 0/2 = 0$$

   $$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \implies x = y = z = 0$$

   Tenemos que T:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, por el Teorema 1.22, T es inyectiva, y dado a que ambos espacios son el mismo, su dimensión coincide, por lo que, por el Teorema 1.25, T es suprayectiva.

2. Calcular $[T]_\beta^\gamma$ y $\left([T]_\beta^\gamma\right)^{-1}$

$$\beta = \{(1,0,0),(1,2,0),(0,0,1)\}$$

y

$$\gamma = \{(0,0,1),(3,0,0),(0,1,0)\}$$

Necesitamos encontrar los escalares que cumplen con la definición de vectores de representación para cada T de β:

T((1, 0, 0))=[(1), 2(0)+(1), (0)]=(1,1,0)=_(0, 0, 1)+_(3, 0, 0)+_(0, 1, 0)

T((1, 2, 0))=[(1), 2(2)+(1), (0)]=(1,5,0)=_(0, 0, 1)+_(3, 0, 0)+_(0, 1, 0)

T((0, 0, 1))=[(0), 2(0)+(0), (1)]=(0,0,1)=_(0, 0, 1)+_(3, 0, 0)+_(0, 1, 0)

Tenemos que:
(1,1,0)=0(0, 0, 1)+1/3(3, 0, 0)+1(0, 1, 0)

(1,5,0)=0(0, 0, 1)+1/3(3, 0, 0)+5(0, 1, 0)

(0,0,1)=1(0, 0, 1)+0(3, 0, 0)+0(0, 1, 0)

Por lo tanto, la matriz de representación $[T]_\beta^\gamma$ es la siguiente:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos la inversa de $[T]_\beta^\gamma$:

$$([T]_\beta^\gamma)^{-1} = \frac{1}{det[T]_\beta^\gamma} Adj([T]_\beta^\gamma)$$

$$Adj([T]_\beta^\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \\ 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Det[T]_\beta^\gamma) = 1(5(1/3) - 1(1/3)) = 4/3$$

$$\frac{1}{4/3} Adj([T]_\beta^\gamma) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \\ 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$([T]_\beta^\gamma)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 15/4 & -1/4 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcule T^{-1} y verifique que $\left([T]_\beta^\gamma\right)^{-1} = [T]_\gamma^\beta$

   Dado a que T es biyectiva, es invertible, por lo que podemos calcular T^{-1}:

   T^{-1}(T(x,y,z))=(x,y,z)

   T^{-1}((x, 2y+x, z))=(x,y,z)

$$x = x$$
$$2y - x \Longrightarrow y = \frac{y-x}{2}$$
$$z = z$$
$$T^{-1} = (x, \frac{y-x}{2}, z)$$

   Hacemos la representación matricial en torno a γ y β
   T^{-1}((0, 0, 1))=[(0), $\frac{(0)-(0)}{2}$, (1)]=(0, 0, 1)=_(1, 0, 0)+_(1, 2, 0)+_(0, 0, 1)

   T^{-1}((3, 0, 0))=[(3), $\frac{(0)-(3)}{2}$, (0)]=(3,$-\frac{3}{2}$,0)=_(1, 0, 0)+_(1, 2, 0)+_(0, 0, 1)

   T^{-1}((0, 1, 0))=[(0), $\frac{(1)-(0)}{2}$, (1)]=(0,$\frac{1}{2}$,0)=_(1, 0, 0)+_(1, 2, 0)+_(0, 0, 1)

   Tenemos entonces que:
   (0, 0, 1)=0(1, 0, 0)+0(1, 2, 0)+1(0, 0, 1)

   (3,$-\frac{3}{2}$,0)=$\frac{15}{4}$(1, 0, 0)+$-\frac{3}{4}$(1, 2, 0)+(0, 0, 1)

   (0,$\frac{1}{2}$,0)=$-\frac{1}{4}$ (1, 0, 0)+ $\frac{1}{4}$ (1, 2, 0)+0(0, 0, 1)

   Tenemos que la matriz de representación de la inversa de T es:

$$[T^{-1}]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 15/4 & -1/4 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Tenemos entonces que:

$$[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}$$