FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 07

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

24 de Noviembre de 2023

Ejercicio 1

Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\gamma = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$$

Y la transformación $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (2x, x+y, y+z)$

1. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base β y γ

   Solución:

   Escribimos los vectores de β como columnas de una matriz

   $$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Multiplicamos esta matriz por P

   $$P\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   El resultado debe ser la matriz que contiene los vectores de γ como columnas.

   $$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, la matriz de cambio de coordenadas es la siguiente:

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base γ y β

   Solución:

Escribimos los vectores de γ como columnas de una matriz.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversamos esta matriz.

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos esta matriz por γ

$$Q\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado debe ser la matriz que contiene los vectores de β

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Comprueba que $[T]_\gamma = Q^{-1} [T]_\beta Q$

   `Solución:`

   Matriz de T en la base β

   La matriz de T en la base β es la matriz que representa el operador lineal T cuando se expresan los vectores en la base β. Esta matriz se puede encontrar multiplicando la matriz de T por la matriz de cambio de coordenadas de γ a β.

   $$[T]_\beta = P^{-1}[T]P$$

   Donde P es la matriz de cambio de coordenadas de γ a β y $[T]$ es la matriz de T en la base estándar. Sabemos que P es la siguiente matriz:

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Y sabemos que $[T]$ es la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base β es la siguiente:

$$[T]_\beta = P^{-1}[T]P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matriz de T en la base γ

La matriz de T en la base γ es la matriz que representa el operador lineal T cuando se expresan los vectores en la base γ. Esta matriz se puede encontrar multiplicando la matriz de T por la matriz de cambio de coordenadas de β a γ.

$$[T]_\gamma = Q[T]Q^{-1}$$

Donde Q es la matriz de cambio de coordenadas de β a γ y $[T]$ es la matriz de T en la base estándar. Sabemos que Q es la siguiente matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y sabemos que $[T]$ es la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base γ es la siguiente:

$$[T]_\gamma = Q[T]Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos comprobar si la ecuación $[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q$

$$Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación $[T]_\gamma = Q^{-1}\,[T]_\beta\,Q$ se cumple. Esto significa que la matriz de T en la base γ se puede obtener multiplicando la matriz de T en la base β por la matriz de cambio de coordenadas de β a γ, y luego multiplicando por la inversa de la matriz de cambio de coordenadas.

Ejercicio 2

Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y, 3y - z)$ Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\beta' = \{(1,3,2),(0,1,2),(1,0,1)\}$$
$$\gamma = \{(1,1),(2,1)\}$$
$$\gamma' = \{(3,1),(1,4)\}$$

1. Encuentra las matrices de cambios de coordenadas

   `Solución:`

   Para encontrar la matriz de cambio de coordenadas, tenemos que encontrar los escalares únicos que cumplan lo siguiente:

$$(1,3,2) = \_(1,0,0) + \_(0,1,0) + \_(0,0,1)$$
$$(0,1,2) = \_(1,0,0) + \_(0,1,0) + \_(0,0,1)$$
$$(1,0,1) = \_(1,0,0) + \_(0,1,0) + \_(0,0,1)$$

   Y también:

$$(3,1) = \_(1,1) + \_(2,1)$$
$$(1,4) = \_(1,1) + \_(2,1)$$

   Resolvemos, y obtenemos lo siguiente:

$$(1,3,2) = 1(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1)$$
$$(0,1,2) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$
$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

   Y de γ a γ':

$$(3,1) = -1(1,1) + 2(2,1)$$
$$(1,4) = 7(1,1) + (-3)(2,1)$$

   Tenemos entonces que:

$$Q_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Es la matriz de cambio de coordenadas de β' a β

$$Q_{\gamma'}^{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Calcula las bases duales de β y γ

   Solución:

   Tenemos que $\beta * = \{f_1, f_2, f_3\}$ es la base dual de β, donde f_i es la i-esima función coordenada con respecto a β, que cumple que para cada j-esimo elemento de β, cumple que: $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, siendo δ la delta de Kronecker
   Calculemos las funciones f_1, f_2, f_3 que cumplan lo siguiente:

$$f_1(1,0,0) = 1, f_1(0,1,0) = 0, f_1(0,0,1) = 0$$
$$f_2(1,0,0) = 0, f_2(0,1,0) = 1, f_2(0,0,1) = 0$$
$$f_3(1,0,0) = 0, f_3(0,1,0) = 0, f_3(0,0,1) = 1$$

   Tenemos que $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$, con f_i:

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x,y,z) = x$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f_2(x,y,z) = y$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f_3(x,y,z) = z$$

   Ahora, calculamos la base dual de γ, las funciones coordenada que cumplen que:

$$g_1(1,1) = 1, g_1(2,1) = 0$$
$$g_2(1,1) = 0, g_2(2,1) = 1$$

   Obtenemos el siguiente sistema de funciones:

$$g_1(1,0) + g_1(0,1) = 1$$
$$2g_1(1,0) + g_1(0,1) = 0$$
$$g_2(1,0) + g_2(0,1) = 0$$
$$2g_2(1,0) + g_2(0,1) = 1$$

   Resolvemos, y tenemos que:

$$g_1(1,0) = -1, g_1(0,1) = 2$$
$$g_2(1,0) = 1, g_2(0,1) = -1$$

   Tenemos entonces que $\gamma^* = \{g_1, g_2\}$, con f_i:

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, g_1(x,y) = -x + 2y$$
$$g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, g_2(x,y) = x - y$$

3. Dada T^t la función transpuesta de T, comprueba que $[T^t]_{\gamma*}^{\beta*} = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$

   Solución:

   Calculamos $[T]_\beta^\gamma$, que es la matriz cuyas entradas son los escalares que cumplen lo siguiente:

$$T((1,0,0)) = (2(1) - (0), 3(0) - (0)) = (2,0)$$

$$T((0,1,0)) = (2(0) - (1), 3(1) - (0)) = (-1, 3)$$
$$T((0,0,1)) = (2(0) - (0), 3(0) - (1)) = (0, -1)$$

Construimos las matrices de representación:

$$(2,0) =_{(} 1,1) +_{(} 2,1)$$

$$(-1,3) =_{(} 1,1) +_{(} 2,1)$$

$$(0,-1) =_{(} 1,1) +_{(} 2,1)$$

Los escalares que cumplen esto son los siguientes:

$$(2,0) = -2(1,1) + 2(2,1)$$

$$(-1,3) = 7(1,1) + -4(2,1)$$

$$(0,-1) = -2(1,1) + 1(2,1)$$

Tenemos entonces que la matriz de representación es:

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Transpuesta, la matriz queda:

$$([T]_\beta^\gamma)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, encontremos T^t, para ello, para cada uno de los elementos de la base dual de γ, se tiene que:

$$T^t(g_1)(x,y,z) = g_1(T(x,y,z)) = g_1(2x - y, 3y - z) = -(2x - y) + 2(3y - z) = -2x + 7y - 2z$$

$$T^t(g_1)(x,y,z) = g_2(T(x,y,z)) = g_2(2x - y, 3y - z) = (2x - y) - (3y - z) = 2x - 4y + z$$

Para encontrar las columnas de $[T^t]_{\gamma*}^{\beta*}$, tenemos que encontrar los escalares que cumplan lo siguiente:

$$-2x + 7y - 2z = {}_{\_}(x) + {}_{\_}(y) + {}_{\_}(z)$$

$$2x - 4y + z = {}_{\_}(x) + {}_{\_}(y) + {}_{\_}(z)$$

Siendo los escalares que cumplen esto:

$$-2x + 7y - 2z = (-2)(x) + 7(y) + (-2)(z)$$

$$2x - 4y + z = 2(x) + (-4)(y) + 1(z)$$

Tenemos entonces que $[T^t]_{\gamma*}^{\beta*}$ es:

$$[T^t]_{\gamma*}^{\beta*} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos además que se cumple la siguiente igualdad:

$$([T]_\beta^\gamma)^t = [T^t]_{\gamma*}^{\beta*}$$

Ejercicio 3

1. Encuentra la base dual de $\mathbb{R}^2, \beta = \{(1,2),(3,4)\}$

   Solución:

   La base dual de un espacio vectorial es un conjunto de formas lineales (funciones lineales que toman vectores y devuelven escalares) que actúan sobre los vectores de la base original. Para una base $\beta = \{v_1, v_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, la base dual $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ se define tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que es 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

   Para nuestra base $\beta = \{(1,2),(3,4)\}$ podemos encontrar la base dual resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} f_1((1,2)) &= 1 \\ f_1((3,4)) &= 0 \\ f_2((1,2)) &= 0 \\ f_2((3,4)) &= 1 \end{aligned}$$

   Esto se puede escribir como un sistema de ecuaciones lineales donde $f_1 = a_1x + b_1y$ y $f_2 = a_2x + b_2y$

   Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 2 &= 1 \\ a_1 \cdot 3 + b_1 \cdot 4 &= 0 \\ a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 &= 0 \\ a_2 \cdot 3 + b_2 \cdot 4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + 2 \cdot b_1 &= 1 \\ a_1 \cdot 3 + 4 \cdot b_1 &= 0 \\ a_2 + 2 \cdot b_2 &= 0 \\ a_2 \cdot 3 + 4 \cdot b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ b_1 &= -1 \\ a_2 &= -\frac{3}{2} \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

   Resolviendo este sistema, obtenemos la base dual

$$\beta^* = \left[(2,-1), \left(\frac{-3}{2}, 1\right)\right]$$

2. Encuentra la base β de $V = P_1(\mathbb{R})$ cuya base dual es $\beta^* = \{f_1, f_2\}$, siendo $f_1\left[p(x)\right] = \int_0^1 p(x)\,dx$ y $f_2\left[p(x)\right] = \int_0^2 p(x)\,dx$

   Solución:

   Necesitamos encontrar dos polinomios $p_1(x), p_2(x) \in p_1(R)$ tal que $f_i(p_j(x)) = \delta_{ij}$

   Esto significa que necesitamos encontrar $p_1(x), p_2(x)$ tal que:

$$\int_0^1 p_1(x)\,dx = 1$$
$$\int_0^2 p_1(x)\,dx = 0$$
$$\int_0^1 p_2(x)\,dx = 0$$
$$\int_0^2 p_2(x)\,dx = 1$$

   Para $p_1(x)$:

$$\int_0^1 (1-2x)\,dx = \left[x - x^2\right]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 (1-2x)\,dx = \left[x - x^2\right]_0^2 = 0$$

   Para $p_2(x)$:

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 0$$

$$\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 0$$

   Entonces:

$$\beta = \left[1 - 2x, x - \frac{x^2}{2}\right]$$