FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 03

Semestre $2024 - 1$

Profesora:
Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:
Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado
Gilbert Raúl Avendaño Aguilar
Aldair Reyes Gónzalez

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

29 de Semptiembre de 2023

Tarea 03

Ejercicio 1

Determina si los siguientes conjuntos son base para $P_2(\mathbb{R})$:
Solución:

1. $\{1 - x + 2x^2,\ 2 + x - 2x^2,\ 1 - 2x + 4x^2\}$

   Para verificar si el conjunto $\{1 - x + 2x, 2 + x - 2x, 1 - 2x + 4x\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$, debemos comprobar dos cosas:

   1 **¿El conjunto es linealmente independiente?** Para contestar esto comprobaremos si los 3 polinomios en el conjunto son linealmente independientes, para ello la combinación lineal de los 3 polinomios tiene como resultado el polinomio cero. Sean a, b y c coeficientes escalares tenemos que comprobar que $a = b = c = 0$ en la ecuación:

$$a(1 - x + 2x^2) + b(2 + x - 2x^2) + c(1 - 2x + 4x^2)$$

Desarrollamos

$$\begin{aligned}
a(1 - x + 2x^2) + b(2 + x - 2x^2) + c(1 - 2x + 4x^2) &= 0 \\
a - ax + 2ax^2 + 2b + bx - 2bx^2 + c - 2cx + 4cx^2 &= 0 \\
(a + 2b + c) + (-ax + bx - 2cx) + (2ax^2 - 2bx^2 + 4cx^2) &= 0 \\
(a + 2b + c) + (-a + b - 2c)x + (2a - 2b + 4c)x^2 &= 0
\end{aligned}$$

Obteniendo así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + 2b + c = 0 \tag{1}$$

$$-a + b - 2c = 0 \tag{2}$$

$$2a - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

Para resolverlo, despejamos a de la ecuación (1) : $a = -2b - c$.
Sustituimos a en (2) y (3) para tener:

$$-(-2b - c) + b - 2c = 0 \tag{2}$$

$$2(-2b - c) - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

Simplificamos y agrupamos términos semejantes:

$$2b + c + b - 2c = 0 \tag{2}$$

$$-4b - 2c - 2b + 4c = 0 \tag{3}$$

$$\downarrow$$

$$3b - c = 0 \tag{2}$$

$$-6b + 2c = 0 \tag{3}$$

Ahora tenemos un sistema de 2 ecuaciones con incógnitas b y c. Despejamos c de (2) y tenemos $c = 3b$, sustituimos c en 3 y tenemos $-6b + 2(3b) = 0$, despejamos b y obtenemos:

$$\begin{aligned} -6b + 2(3b) &= 0 \\ -6b + 6b &= 0 \\ 0 &= \\ b &= ? \end{aligned}$$

Lo que significa que b puede ser cualquier número real. Y como $b \neq 0$, el conjunto no cumple con ser linealmente independiente y, por lo tanto, no es una base para $P_2(\mathbb{R})$

2. $\{1 + 2x + x^2,\, 3 + x^2,\, x + x^2\}$

Sabemos que $\dim(P_n) = n + 1$, por lo que $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$. Y por un teorema *Si V es un espacio vectorial de dimensión n y si S es un conjunto en V con exactamente n vectores, entonces S es una base para V si S genera a V o si S es linealmente independiente*
Por lo tanto, el conjunto $\{1 + 2x + x^2,\, 3 + x^2,\, x + x^2\}$ es base para $P_2(\mathbb{R})$ si contiene tres vectores linealmente independientes.

Comprobemos la independencia lineal del conjunto dado. El conjunto de polinomios es linealmente independiente si la única combinación lineal que da como resultado el polinomio nulo (cero) es la combinación en la que todos los coeficientes son cero. En otras palabras, los polinomios son linealmente independientes si la ecuación:

$$\alpha(1 + 2x + x^2) + \beta(3 + x^2) + \gamma(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

donde α, β y γ son escalares; solo tiene solución trivial, es decir, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Desarrollamos: $\alpha(1 + 2x + x^2) + \beta(3 + x^2) + \gamma(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2 = 0$ y tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha x + \alpha x^2 + 3\beta + \beta x^2 + \gamma x + \gamma x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \\ (\alpha + 3\beta) + (2\alpha x + \gamma x) + \alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \\ (\alpha + 3\beta) + (2\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Y resolvemos:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta = 0 &\implies \alpha = -3\beta \\ 2\alpha + \gamma = 0 &\implies \gamma = -2\alpha = -2(-3\beta) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 &\implies -3\beta + \beta + (-2(-3\beta)) = 0 \implies -3\beta + \beta + 6\beta = 0 \implies 4\beta = 0 \implies \beta = 0 \end{aligned}$$

Como $\beta = 0$, sustituimos β en: $\alpha + 3\beta = 0 \implies \alpha + 3(0) = 0 \implies \alpha = 0$

Sustituimos α en: $2\alpha + \gamma = 0 \implies \gamma = 0$

Por lo tanto: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, podemos decir que es un conjunto linealmente independiente de 3 vectores.

Dado que estos polinomios son linealmente independientes y forman un conjunto de 3 polinomios en $P_2(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ es un espacio con dimensión 3 Entonces por el teorema anteriormente citado tenemos que estos polinomios generan $P_2(\mathbb{R})$. Y el conjunto es una base para $P_2(\mathbb{R})$

Ejercicio 2

Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(T) = Im(T)$.

Solución:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 0)$. Cumple con ser una transformación lineal y además cumple con que $Ker(T) = Im(T)$. Pongámoslo a prueba:

1 La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 0)$ es una transformación lineal. Para ello debemos verificar dos propiedades: Propiedad de la suma $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y la propiedad de la multiplicación por un escalar $T(cu) = cT(u)$ para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$.

Propiedad de la suma

Tenemos dos vectores $u = (x_1, y_1)$ y $u = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$. Aplicamos la transformación T a u y v de la siguiente manera

$$T(u) = (y_1, 0) \text{ y } T(v) = (y_2, 0)$$

Ahora sumemos u y v

$$u + v = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

Luego aplicamos $Tau + v$

$$T(u + v) = (y_1 + y_2,\ 0)$$

Ahora veamos $T(u) + T(v)$

$$T(u) + T(v) = (y_1, 0) + (y_2, 0) = (y_1 + y_2, 0)$$

Observamos que $T(u + v) = T(u) + T(v)$ por lo tanto hemos demostrado la propiedad de adición

Propiedad de la multiplicación por un escalar

Tenemos un vector $u = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ y un escalar c. Aplicamos la transformación T a u de la siguiente manera

$$T(u) = (y, 0)$$

luego multiplicamos u por c:

$$cu = (cx, cy)$$

Ahora aplicamos T a cu

$$T(cu) = (cy, 0)$$

Finalmente, multiplicamos $T(u)$ por c

$$cT(u) = c(y, 0) = (cy, 0)$$

Observamos que $T(cu) = cT(u)$, por lo tanto hemos demostrado la propiedad de multiplicación por escalar

2 Ahora probemos que $Ker(T) = Im(T)$

EL núcleo de una transformación linea T es el conjunto de vectores de entrada (x, y) que se mapean al vector nulo $(0, 0)$ en el espacio de salida $\mathbb{R}$. En otras palabras, es el conjunto de soluciones de la ecuación $T(x, y) = (0, 0)$

Para encontrar el núcleo, resolvemos la ecuación

$$T(x, y) = (y, 0) = (0, 0)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación nos dice que $y = 0$, que es una solución unica. La segunda ecuación es una identidad que siempre es verdadera

Por lo tanto el núcleo de T es el cojunto de todos los vectores (x, y) donde y es igual a 0 y x puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Esto se representa como $\{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ Por lo tanto $Ker(T) = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$

La imagen de la transformación lineal T es el conjunto de todos los vectores en el espacio $\mathbb{R}^2$ que se pueden obtener aplicando T a algún vector de entrada en el espacio de entrada $\mathbb{R}^2$

En este caso, $T(x, y) = (y, 0)$ lo que significa que la imagen de T consiste en todos los posibles vectores $(y, 0)$ donde y puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$

En otras palabras, la imagen de T es el conjunto de todos los vectores de la forma $(y, 0)$, donde y es el número real. Esto se representa como $\{(y, 0)|y \in \mathbb{R}\}$ Por lo tanto $Im(T) = \{(y, 0)|y \in \mathbb{R}\}$

Pero, ¿$Ker(T) = Im(T)$? Recordemos que $Ker(T) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $Im(T) = \{(y, 0)|y \in \mathbb{R}\}$

Esto sería como decir que $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(y, 0)|y \in \mathbb{R}\}$ y si es posible pues x y $y \in \mathbb{R}$, es decir pueden tomar cualquier valor, incluso pueden ser igual y viceversa. Más aún, notemos que si $(x, 0) = (y, 0)$, quiere decir que $y = x$.

Otra manera de verlo es que ambos conjuntos representan todos los pares ordenados en $\mathbb{R}^2$ donde el segundo componente es igual a cero y están parametrizados por el mismo conjunto de números reales (x en el primer conjunto y y en el segundo conjunto). En otras palabras, ambos conjuntos consisten en todos los puntos en el plano cartesiano donde la coordenada y (o la segunda coordenada) es igual a cero. Por lo tanto, son conjuntos idénticos y pueden escribirse de manera equivalente.

Ejercicio 3

Dar un ejemplo de dos transformaciones lineales (diferentes) $U, T : V \to W$ tales que

$$Ker(T) = Ker(U)$$

$$Im(T) = Im(U)$$

Solución: Sean las transformaciones $U, T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con la siguiente regla de correspondencia

- $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ U(x) = xy$

- $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $T(x) = 2x$

Tenemos que $Ker(U) = Ker(T)$, pues el unico elemento, tal que $T(x) = 0$, es el 0, igualmente para $U(x) = 0$, es decir, $Ker(U) = Ker(T) = \{0\}$
Tambien notemos que $Im(U) = \mathbb{R}$, pues U es la identidad en $\mathbb{R}$, y, de igual manera, como $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $2(\frac{x}{2}) = x$, por lo tanto, $Im(T) = \mathbb{R} = Im(U)$

Ejercicio 4

Dada la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y, z) = (x - 2y,\ 0,\ 2x - 4)$$

Buscar el núcleo y la imagen.

Solución:
Tenemos entonces que el nucleo de T, son aquellos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x, y, z) = (x - 2y, 0, 2x - 4y) = (0, 0, 0)$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces: $x = -2y$
Por lo tanto, el núcleo de T es $Ker(T) = \{(x, -\frac{x}{2}, z) \in \mathbb{R}^3 | x, z \in \mathbb{R}\}$
Veamos que $T(x, y, z) = (x - 2y, 0, 2x - 4y) = (x - 2y, 0, 2(x - 2y))$.
Dado que $(x - 2y)$ puede tomar cualquier valor en los reales, (en particular si $y = 0$), tenemos que la imagen de T es $Im(T) = \{(x, 0, 2x) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 5

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$. Calcula $Ker(D)$ e $Im(D)$.
Solución:
Sean $T : V \to W$ un operador lineal.

- El núcleo de T, $Ker(T)$, es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = 0$.
- La imagen de T, $Im(T)$, es el conjunto de todos los vectores $w \in W$ que se pueden escribir como la imagen de algún vector $v \in V$ por T.

Sea $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, donde $D(f) = f'$.

Cálculo de $Ker(D)$

Si $f \in Ker(D)$. Entonces, $D(f) = 0$, significa que $f' = 0$, nos queda entonces que f es una constante, de esta forma, $Ker(D) = \boxed{\{k \in \mathbb{R}\}}$.

Cálculo de $Im(D)$

Sea $g \in P_3(\mathbb{R})$. Tenemos que para g se puede escribir de la forma $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces, $D(g) = (3a)x^2 + (2b)x + c$ de esta forma la $Im(D) = \boxed{P_2(\mathbb{R})}$.

1. Definimos $Ker(D)$ e $Im(D)$.

$$\begin{aligned} Ker(D) &= \{f \in P_3(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\} \\ Im(D) &= \{g \in P_3(\mathbb{R}) \mid g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

2. Calculamos $Ker(D)$.

$$\begin{aligned} f \in Ker(D) &\iff D(f) = 0 \\ &\iff f' = 0 \\ &\iff f(x) = k \text{ para algún } k \in \mathbb{R} \\ &\iff f \in \{k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. Calculamos $Im(D)$.

$$\begin{aligned} g \in Im(D) &\iff g = D(f) \text{ para algún } f \in P_3(\mathbb{R}) \\ &\iff g(x) = (3a)x^2 + (2b)x + c \text{ para algún } a, b, c \in \mathbb{R} \\ &\iff g \in P_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$\therefore$ Hemos calculado que $Ker(D) = k \in \mathbb{R}$ e $Im(D) = P_2(\mathbb{R})$.