



FACULTAD DE CIENCIAS
ÁLGEBRA LINEAL 1

Tarea 05

Semestre 2024 – 1

Profesora:

Mindy Yaneli Huerta Pérez

Ayudantes:

Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado

Gilbert Raúl Avendaño Aguilar

Aldair Reyes González

Alumnos:

Paul César Cabañas Segura

Marco Silva Huerta

José Luis Cruz Mayen

27 de Octubre de 2023

Tarea 05

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal. Sean $\beta = \{(2, 3), (-1, 4)\}$ y $\gamma = \{3 + 2x, 4\}$ bases ordenadas de los respectivos espacios vectoriales. Si

$$[T]_{\beta}^{\gamma} \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ -23 & -19 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Hallar $T(3, -1)$
2. Encuentre la regla de correspondencia de dicha transformación lineal.
3. Determine el nucleo y la imagen de bases para cada uno de estos subespacios.

Ejercicio 2

Dé bases para los tres espacios vectoriales distintas de las canónicas β, β', γ y compruebe que:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \quad (2)$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (2a + b, -3a - 2b, 3b)$

- **Base para β** El espacio de partida es \mathbb{R}^2 , por lo que la base canónica es $\{(1, 0), (0, 1)\}$ Dado que el mapeo de T esta definido como $T(a, b) = (2a + b, -3a - 2b, 3b)$, los vectores de la base para β son $(2, -3, 0)$ y $(1, -2, 3)$
- **Base para β'** El espacio de llegada es \mathbb{R}^3 por lo que la base canónica es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, entonces podemos tomar los vectores resultantes de T en la base canónica de \mathbb{R}^3 , que son $(2, -3, 0)$, $(-1, -2, 3)$ y $(0, 0, 3)$
- **Base para γ** Similar al caso de arriba, la base canónica \mathbb{R}^3 es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ los vectores resultantes son $(2, -3, 0)$, $(-1, -2, 3)$ y $(0, 0, 3)$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta'}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz de T respecto a las bases β y β' es:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz U respecto de las bases β y γ es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica a la base γ

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- La matriz UT respecto a las bases β y γ se obtiene multiplicando $[U]_{\beta}^{\gamma}$ y $[T]_{\beta}^{\beta'}$

$$[UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces la igualdad queda:

$$[U]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(R)$ tal que $U(a, b, c) = (a + c) + (3b - 2c)x + (-2a + b - 4c)x^2$

- **Base para β** Para el espacio \mathbb{R}^3 , la base canónica es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- **Base para β'** El espacio de llegada es $P_2(R)$, que es el espacio del polinomio de grado 2 o menos. La base canónica es $\{1, x - 1, x^2\}$
- **Base para γ** La base canónica $P_2(R)$ es $\{1, x, x^2\}$

Ahora vamos a comprobar:

$$[U]_{\beta}^{\gamma} [T]_{\beta}^{\beta'} = [UT]_{\beta}^{\gamma}$$

- La matriz U respecto a las bases β y β'

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- La matriz de T respecto a las bases β' y γ

$$[T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$[U]_{\beta}^{\beta'} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} [T]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [UT]_{\beta}^{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

¿Las siguientes transformaciones son inyectivas, suprayectivas o ambas?

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$

Recordando el teorema 1.22 (Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F . Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si $\text{Ker}(T) = \{0v\}$.) Por lo cual calcularemos el núcleo de T .

El núcleo de T es el conjunto de todos los vectores (a, b) en \mathbb{R}^2 que se mapean a $(0, 0, 0)$ en \mathbb{R}^3 . En otras palabras, necesitamos encontrar todas las soluciones de la ecuación $T(a, b) = (0, 0, 0)$.

La transformación T se define como: $T(a, b) = (a + b, 0, 2a - b)$ y para encontrar el núcleo resolveremos $T(a, b) = (0, 0, 0)$. Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ 0 & = & 0 \rightarrow \\ 2a - b & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ 2a - b & = & 0 \end{array}$$

Lo que nos da

$$\begin{array}{rcl} & & b = -a \\ 2a - (-a) & = & 0 \rightarrow 3a = 0 \rightarrow a = 0 \\ & & b = 0 \end{array}$$

Esto significa que la única solución al sistema $T(a, b) = (0, 0, 0)$ es $(a, b) = (0, 0)$. En otras palabras, el núcleo de T consiste únicamente en el vector nulo $(0, 0)$.

Dado que el núcleo de T es igual al conjunto nulo, hemos demostrado que T es inyectiva según el teorema anteriormente citado, ya que no hay ningún otro par de vectores (a, b) que se mapee a $(0, 0, 0)$ aparte del vector nulo.

Una transformación lineal es sobreyectiva si la imagen de la transformación abarca todo el espacio de destino. Esto significa que, para cualquier vector (x, y, z) en \mathbb{R}^3 , debe haber un vector (a, b) en \mathbb{R}^2 tal que $T(a, b) = (x, y, z)$.

Tomemos un vector genérico (x, y, z) en \mathbb{R}^3 . Queremos encontrar valores de a y b que hagan que $T(a, b) = (x, y, z)$, es decir:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & x \\ 0 & = & y \\ 2a - b & = & z \end{array}$$

Dado que $0 = y$, sabemos que y debe ser igual a 0. Esto implica las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & x \\ 2a - b & = & z \end{array}$$

Y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$a + b = x \rightarrow b = x - a$$

$$\begin{array}{rcl} 2a - b & = & z \\ 2a - (x - a) & = & z \\ 3a - x & = & z \\ 3a & = & z + x \\ a & = & \frac{z + x}{3} \end{array}$$

$$b = x - a \rightarrow b = x - \frac{z+x}{3}$$

Entonces, hemos encontrado una expresión para a y b en términos de x y z . Por lo tanto, para cualquier vector (x, y, z) en \mathbb{R}^3 , podemos encontrar un vector (a, b) en \mathbb{R}^2 tal que $T(a, b) = (x, y, z)$. Esto demuestra que T es una transformación sobreyectiva.

Citando el siguiente teorema:



Teorema 7.4.3

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Suponga que $\dim V = n$ y $\dim W = m$. Entonces

- i) Si $n > m$, T no es 1-1.
- ii) Si $m > n$, T no es sobre.



Demostración

- i) Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para V . Sea $w_i = Tv_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y observe el conjunto $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Como $m = \dim W < n$, el conjunto S es linealmente independiente. Así, existen escalares, no todos cero, tales que $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n = 0$. Sea $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$. Como los elementos v_i son linealmente independientes y como no todos los coeficientes c_i son cero, se ve que $v \neq 0$. Pero $Tv = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = c_1 Tv_1 + c_2 Tv_2 + \dots + c_n Tv_n = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n = 0$. Por lo tanto, $v \in \text{nu } T$ y $\text{nu } T \neq \{0\}$.
- ii) Si $v \in V$, entonces $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ para algunos escalares a_1, a_2, \dots, a_n y $Tv = a_1 Tv_1 + a_2 Tv_2 + \dots + a_n Tv_n = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$. Así, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$ genera a la imagen de T . Entonces, del problema 5.5.34 de la página 359, $\rho(T) = \dim \text{im } T \leq n$. Como $m > n$, esto muestra que $\text{im } T \neq W$. Entonces T no es sobre.

Podemos decir que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b) = (a+b, 0, 2a-b)$ no es sobreyectiva ya que la dimensión de $\mathbb{R}^2=2$ y la de $\mathbb{R}^3=3$ y como $3>2$ entonces T no es sobreyectiva.

2. $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $T(a, b, c, d, e) = (a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e)$

Para demostrar que la transformación lineal $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ es inyectiva, debemos demostrar que el núcleo (kernel) de T es el vector nulo $(0,0,0,0,0)$. Esto significa que si $T(a, b, c, d, e) = T(x, y, z, w, v)$, entonces $a = x, b = y, c = z, d = w, e = v$. En otras palabras $T(a, b, c, d, e) = T(x, y, z, w, v)$ implica que $(a, b, c, d, e) = (x, y, z, w, v)$

La transformación lineal T se define como:

$$T(a, b, c, d, e) = (a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e)$$

Para demostrar la inyectividad, supongamos que $T(a, b, c, d, e) = T(x, y, z, w, v)$, lo que significa que:

$$(a + 2b - c, -3a + b + 4c, a - b + 2d, b + c + 3e, 2a + b + d - e) = T(x, y, z, w, v)$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales:

$$a + 2b - c = x \tag{3.1}$$

$$-3a + b + 4c = y \tag{3.2}$$

$$a - b + 2d = z \quad (3.3)$$

$$b + c + 3e = w \quad (3.4)$$

$$2a + b + d - e = v \quad (3.5)$$

Queremos demostrar que la única solución para este sistema es $(a, b, c, d, e) = (x, y, z, w, v)$. Para hacerlo, podemos utilizar álgebra lineal y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Conocemos la primera ecuación (3.1)

Restamos la primera ecuación (3.1) de la segunda (3.2)

$$(-3a + b + 4c) - (a + 2b - c) = y - x$$

Simplificamos

$$-2a - b + 5c = y - x$$

Despejamos a

$$a = \frac{y - x + b + 5c}{-2}$$

Ahora, utilicemos esta expresión para a en la tercera ecuación (3.3)

$$\left(\frac{y - x + b + 5c}{(-2)} \right) - b + 2d = z$$

Simplifiquemos:

$$(-y + x - b - 5c) - 3b + 4d = 2z$$

Despejamos b

$$b = \frac{x - y - 5c - 2z}{3} + 2d$$

Ahora sustituyamos esta expresión para b en la cuarta ecuación (3.4)

$$\left(\frac{x - y - 5c - 2z}{3} \right) + c + 3e = w$$

Simplificamos

$$\frac{x - y - 2z}{3} + 2d + 4c + 3e = w$$

Despejamos c

$$c = \frac{(3w - x + y2z - 6d - 9e)}{4}$$

Finalmente, utilicemos estas expresiones para a , b y c en la quinta ecuación (3.5)

$$2 \left(\frac{y - x + b + 5c}{2} \right) + \left(\frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e} \right) = v$$

Simplifiquemos

$$\begin{aligned}
 & -(y - x + b + 5c) + \frac{x - y - 5c - 2z}{3 + 2d - e} = v \\
 & -\left(y - x + \left(\frac{x - y - 5c - 2z}{3}\right) + 5c\right) + 2d - 3 = v \\
 & -\left(y - x + \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{5c}{3} - \frac{2z}{3} + 5c\right) + 2d - e = v \\
 & \quad -\frac{2y}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{7c}{3} - \frac{2z}{3} + 2d - e = v \\
 & \quad \frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3e)}{3} = v
 \end{aligned}$$

De esta ecuación, podemos despejar e

$$e = \frac{(2x - 2y - 7c - 2z + 6d - 3v)}{3}$$

Hemos expresado todas las variables a, b, c, d, e en términos de (x, y, z, w, v) . Esto demuestra que para cualquier conjunto de valores (x, y, z, w, v) en \mathbb{R}^5 existe un conjunto correspondiente de valores (a, b, c, d, e) en \mathbb{R}^5 que satisface el sistema de ecuaciones. \therefore Hemos demostrado que T es inyectiva.

Sabemos que $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$ y además T es inyectiva, por lo que por el teorema 1,25 podemos decir que T también es Sobreyectiva.

EJEMPLO 5.5.4 La dimensión de \mathbb{R}^n

Como n vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n constituyen una base, se observa que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Teorema 7.4.2

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal y suponga que $\dim V = \dim W = n$.

- i) Si T es 1-1 entonces T es sobre.
- ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Teorema 1.22 Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F . Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces, T es inyectiva si y solo si $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$

Teorema 1.23 Sean V y W espacio vectoriales sobre un campo F . Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva;
2. Para cualquier subconjunto $S \subseteq V$, se tiene que S es linealmente independiente en V si y solo si $T(S) := \{T(s) : s \in S\}$ es linealmente independiente en W

Teorema 1.25⁷ Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F con $\dim_F(V) = \dim_F(W)$. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T es inyectiva
2. T es suprayectiva
3. T es biyectiva