Mathe für Informatik II Zusammenfassung

Maximilian Wolf

July 28, 2025

Contents

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Allgemeine Form

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Menge aller Lösungen := $\mathcal{L}$(G)
- Homogen $\leftrightarrow$ Lösungsvektor b = $\mathcal{O}$ (Nullvektor)
- G' bezeichnet zu G *zugehöriges Homogenes lineares Gleichungssystem*

1.2 Elementare Zeilenumformungen

LGS abgeschlossen unter

- Vertauschung von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K}$
- Addition von Zeilen

1.3 Gaußsches Eliminationsverfahren

Durch Anwendung von Elementaren Zeilenumformungen 1.2 kann eine Matrix in *Normierte Zeilenstufenform* gebracht werden.

1.3.1 Bestimmen der inversen Matrix

- Bestimmen einer Inversen Matrix zu A durch Elementare Zeilenumformungen 1.2
- A invertierbar $\leftrightarrow det(A) \neq 0$ bzw. A quadratisch & $Rg(A) = n$ (Voller Rang)

1.4 Lösbarkeit

- $Ax = b$ lösbar $\leftrightarrow$ b im *Spaltenraum* von A
- $Ax = \mathcal{O}$:= *Kern* der linearen Abbildung

- Rang $Rg(A) :=$ Anzahl Zeilen, die von 0 verschiedene Zeilen enthalten
  - *Eindeutige* Lösung: $Rg(A) = Rg(A|B) = n$
  - *Keine* Lösung: $Rg(A) < Rg(A|B)$
  - *Allgemeingültige* Lösung: $Rg(A) = Rg(A|B) < n$

2 Skalarprodukte

2.1 Standardskalarprodukt

Das kanonische Skalarprodukt bzw. Standardskalarprodukt ist folgendermaßen definiert:

$$\beta(x, y) := x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Zwei Vektoren x, y mit $\langle x, y \rangle = 0$ sind *orthogonal* ($x \perp y$)
- Der Winkel α zweier Vektoren $x, y \in V \backslash \{\mathcal{O}\}$ berechnet sich durch $\alpha = arccos(\frac{\langle x,y \rangle}{||x|| \cdot ||y||})$

2.2 Bilinearform

Eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine *Bilinearform*, falls:

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$ (Linear im ersten Argument)
2. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$ (Linear im zweiten Argument)
3. $\beta(ax + y) = \beta(x, ay) = a\beta(x, y)$ (Multiplikativität in beiden Argumenten)

β heißt:

- *Symmetrisch*, falls $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
- *Positiv definit*, falls $\forall x \in V \backslash \{\mathcal{O}\} : \beta(x, x) > 0$
- *Positiv semidefinit*, falls $\forall x \in V : \beta(x, x) \geq 0$
- *Skalarprodukt*, falls β *symmetrisch* und *positiv definit* ist. (V, β) nennt man in diesem Fall einen *Euklidischen Vektorraum*.

Die Schreibweise für eine Bilinearform ist häufig auch: $\boxed{\langle x, y \rangle := \beta(x, y)}$

2.2.1 Matrixdarstellung

Eine Bilinearform lässt sich auch als Matrix darstellen: $\langle u, v\rangle = x^T Ay$
Die folgende Bilinearform lässt sich beispielsweise wie folgt als Matrix darstellen:

$$\langle\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2.3 Hermitesche Form

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum
Eine Abbildung $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *Hermitesche Form*, falls:

1. $\gamma(x_1 + x_2, y) = \gamma(x_1, y) + \gamma(x_2, y)$ (Linear im ersten Argument)
2. $\gamma(ax, y) = a\gamma(x, y)$ (Multiplikativ im ersten Argument)
3. $\gamma(x, y) = \overline{\gamma(y, x)}$ (Hermitesche Symmetrie)

- Eine Hermitsche Form ist *Positiv definit*, falls $\forall x \in V\backslash\{\mathcal{O}\} : \gamma(x, x) > 0$
- Eine *positiv definite* Hermitesche Form nennt man Skalarprodukt und (V, γ) einen *unitären Vektorraum*

2.3.1 Matrixdarstellung

Eine Hermitesche Form lässt sich ebenfalls in Matrixschreibweise angeben: $\langle u, v\rangle = x^T A\overline{y}$

2.4 Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

Sei $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder Unitärerer Vektorraum, dann gilt:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

2.5 Norm eines Vektors

Betrag / Länge / Norm eines Vektors: $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, gilt $||x|| = 1$, so nennt man x normiert.
Sei $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder Unitärerer $\mathbb{K}$-Vektorraum $\forall x, y \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ gilt:

- $||x|| \geq 0$ und $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)
- $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ (Homogenität)
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung)

2.5.1 p-Norm

$$f(x) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{für} p < \infty \\ \max\{|x_i| : i \in [n]\}, & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

2.6 Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder Unitärer Vektorraum und $\{a_1 ... a_n\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.
$b_1 \cdots b_n$ bezeichnen die *Orthogonalvektoren*, $c_1 \cdots c_n$ die *Orthonormalvektoren*

$$c_n = \frac{b_n}{||b_n||} \quad \text{wobei } c_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$$

$$b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_n, c_i \rangle c_i$$

3 Determinanten

3.1 Multilinearform

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ Eine n-fache Abbildung $\phi : V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$ heißt

1. *multilinear*, falls sie in jeder Koordinate *linear* ist
2. *alternierend*, falls $\phi(v_1, \cdots v_n) = 0$ für linear abhängige Vektoren $v_1 \cdots v_n$
3. *nicht ausgeartet*, falls ein $(v_1 \cdots v_n) \in V^n$ existiert mit $\phi(v_1 \cdots v_n) \neq 0$

Ist ϕ *alternierend*, so gilt: $\phi(v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(n)}) = sign(\pi)\phi(v_1 \cdots v_n)$

3.2 Determinante

Bestimmt *Orientierten Flächeninhalt* zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$
Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist:

$$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}$$

3.2.1 Dreiecksmatrix

Ist A eine *Obere bzw. Untere Dreiecksmatrix*, also:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

So folgt:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

3.2.2 Block-Dreiecksmatrix

Sei M eine *Obere bzw. Untere Block-Dreiecksmatrix*, also:

$$\text{Obere Blockdreiecksmatrix:} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\text{Untere Blockdreiecksmatrix:} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$$

So folgt $det(M) = det(A) * det(C)$

3.2.3 Rechenregeln

- $det(A^T) = det(A)$
- $det(A) \neq 0 \leftrightarrow$ A invertierbar
- Vertauscht man Zeilen / Spalten, ändert sich das Vorzeichen
- Multipliziert man Zeile / Spalte mit Konstante c, wird die Determinante mit c multipliziert, es gilt: $det(cA) = c^n det(A)$
- Addiert man zu einer Zeile / Spalte eine Linearkombination einer anderen, ändert sich die Determinante nicht
- $det(AB) = det(A) * det(B)$
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$, wenn A invertierbar

3.3 Laplacescher Entwicklungssatz

Gegeben sei eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$ und eine Matrix $M_{i,j}$, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Entwicklung der Determinante

$$\text{nach } i\text{-ter Zeile:} \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$$\text{nach } j\text{-ter Spalte:} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

3.4 Vandermonde Matrix

$$A(x_1 \cdots x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bestimmen der Determinante

$$det(A(x_1 \cdots x_n)) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

3.5 Cramersche Regel

Sei $Ax = b$ eindeutig lösbar, d.h.

$$Ax = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Der Eintrag von x_i ergibt sich durch:

$$x_i = \frac{det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \cdots & a_n \\ | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix}}{det(A)}$$

4 Eigenwerte

Bei der Transformation von Vektoren durch eine Matrix A existiert ein Vektor v (*Eigenvektor*), der seine Richtung beibehält und nur durch einen Wert λ (*Eigenwert*) gestreckt wird. Es gilt also: $\boxed{Av = \lambda v}$
Den von einem *Eigenwert* erzeugten Unterraum nennt man *Eigenraum*

4.1 Charakteristisches Polynom

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren:

$$charPol_A(\lambda) = det(A - \lambda E_n) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{c_i}$$

- c_i bezeichnet die *Algebraische Vielfachheit*
- $dim_{\mathbb{K}} Ker(A - \lambda E_n)$ (Dimension des Kerns) die *Geometrische Vielfachheit*

Die *Geometrische Vielfachheit* ist dabei höchstens die *Algebraische Vielfachheit* eines Eigenwerts

4.2 Ähnlichkeit

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls gilt: $\boxed{B = X^{-1} A X}$
Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom und daher die gleichen Eigenwerte
Eine Matrix A ist *ähnlich* zu einer *Oberen Dreiecksmatrix* B, wenn

$$charPol_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

wobei $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ die Diagonalelemente von B sind

4.2.1 Diagonalisierbarkeit

Seien $\lambda_i \cdots \lambda_k$ Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $c_1 \cdots c_k$ die algebraische Vielfachheit bzw. $d_1 \cdots d_k$ die geometrische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\mathbb{K}^n$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren
- $c_i = d_i$, algebraische und geometrische Vielfachheit stimmen überein
- $c_1 + \cdots + c_k = d_1 + \cdots + d_k = n$
- $P^{-1} A P = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, d.h. A ist *diagonalisierbar*

Seien $v_1 \cdots v_n$ Eigenvektoren von A, $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ Eigenwerte von A, dann gilt:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

5 Stetigkeit und Grenzwerte

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $x_0 \in D$. f ist *stetig* in x_0, falls:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

5.1 Rechenregeln

Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$

- $\lambda f(x) + g(x)$ stetig in x_0
- $f(x) \cdot g(x)$ stetig in x_0
- $g(x_0) \neq 0 \to \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x_0

5.2 Beschränktheit

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ für $a \leq b$, dann gilt: f ist auf $[a, b]$ beschränkt, d.h. es existiert eine Obere Schranke für f in $[a, b]$

5.3 Satz von Bolzano

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ für $a < b$ und gilt $f(a) < 0 < f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$

5.3.1 Zwischenwertsatz

Aus dem Satz von Bolzano folgt der Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$. Dann gilt für jedes $y \in (f(a), f(b))$: Es existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = y$ Diese Aussage folgt direkt aus der Funktion $g(x) := f(x) - y$. Da $f(a) < y < f(b)$ gilt:

- $g(a) = f(a) - y < 0$
- $g(b) = f(b) - y > 0$

5.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{C}$. f ist *gleichmäßig stetig* auf D, falls:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

5.5 Grenzwerte

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt, falls $\forall \epsilon > 0 : \exists y \in A \backslash \{x\} : y \in U_\epsilon(x)$, d.h. x ist in der ϵ-Umgebung von x

$$\begin{array}{rl} \text{Linkseitiger Grenzwert} & \lim\limits_{x \to x0+} f(x) = y_0 \\ \text{Rechtseitiger Grenzwert} & \lim\limits_{x \to x0-} f(x) = y_1 \end{array}$$

5.5.1 Rechenregeln

- $\lim\limits_{x \to x_0} (af(x) + b) = a \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right) + b$,
  falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,
  falls die beiden Grenzwerte auf den rechten Seiten existieren
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(x_1)$,
  falls die Grenzwerte $x_1 := \lim_{x \to x_0} g(x)$ und $y := \lim_{x \to x_1} f(x)$ existieren und $y = f(x_1)$ gilt

5.6 Approximationssatz von Weierstraß

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ für $a \leq b$ Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein Polynom p in $\mathbb{R}[x]$ mit $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$

5.7 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom p aus $\mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

$$p(z) = p_0(z - z_1)^{\lambda_1} \cdots (z - z_k)^{\lambda_k}$$

5.8 Faktorisierung reeler Polynome

Es gilt $\deg(p) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein nicht konstantes Polynom. Dann lässt sich p schreiben als Produkt von Linearfaktoren und irreduziblen quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = p_0(x - x_1)^{\lambda_1} \cdots (x - x_k)^{\lambda_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{\rho_1} \cdots (x^2 + \alpha_\ell x + \beta_\ell)^{\rho_\ell}$$

Komplexe Nullstellen treten paarweise konjugiert auf und liefern reelle quadratische Faktoren.

5.9 Partialbruchzerlegung

Für zwei Polynome p und q aus $\mathbb{C}[z]$ mit $0 \leq \deg(q) < \deg(p)$

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{\lambda_r} \frac{a_{r,s}}{(z - z_r)^s}$$

6 Differenzialrechnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, falls:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f ist differenzierbar auf I, falls f für jedes $x \in I$ differenzierbar ist.

6.1 Rechenregeln

- $\frac{d}{dx}(af(x) + g(x)) = af'(x) + g'(x)$
- $\frac{d}{dx}f(x) * g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (*Summenregel*)
- $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (*Quotientenregel*)
- $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$ (*Kettenregel*)

6.2 Lokale Extrema

Für lokale Extema gilt $f'(x) = 0$, man nennt:

- $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in U_\epsilon(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$ (*Lokales Minimum* in x_0)
- $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in U_\epsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ (*Lokales Maximum* in x_0)

6.3 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ stetig und differenzierbar auf (a, b) Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.3.1 Monotonie

f ist auf $[a, b]$...

- *monoton wachsend*, falls $\forall x \in [a, b] : f'(x) \geq 0$
- *streng monoton wachsend*, falls $\forall x \in [a, b] : f'(x) > 0$

6.4 Regel von l'Hospital

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar, gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und sei der Grenzwert $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

- $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$
- $\lim_{x \to b-} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$

Bei einer dieser Bedingungen gilt: $\boxed{\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

6.5 Satz von Taylor

Seien $n \in \mathbb{N}_0, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b, f \in C^{n+1}((a, b))$ und $x, x_0 \in (a, b)$.
Taylorpolynom n-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Es existiert ein $\xi \in (0, 1)$ für das **Restglied**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \xi(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Gilt $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$, so folgt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

6.6 Wichtige Ableitungen

1. $\frac{d}{dx}arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6.6.1 Maclaurin-Reihen

Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Sinusfunktion

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Kosinusfunktion

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Binomische Reihe (siehe Binomischer Lehrsatz)

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

7 Integralrechnung

7.1 Treppenfunktion

7.1.1 Definition

Eine Funktion $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf [a, b], wenn es Zahlen gibt $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$, Konstanten $c_1 \cdots c_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\rho(x) = c_k \text{ für } x \in (a_{k-1}, a_k)$$

Diese Funktion ist stückweise konstant, d.h. sie hat Stufen

7.1.2 Integral einer Treppenfunktion

Das Integral über eine Treppenfunktion auf $[a, b]$ wird definiert durch:

$$\int_a^b \rho(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(a_k - a_{k-1})$$

7.1.3 Charakteristische Funktion

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls x} \in I \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Treppenfunktionen kann man als Linearkombination von χ_i schreiben

7.1.4 Abgeschlossenheit

- Vielfachen $c * \phi$
- Summen $\phi + \psi$
- Produkte $\phi * \psi$
- Betrag $|\phi|$
- Maxima / Minima $\max(\phi, \psi), \min(\phi, \psi)$

7.1.5 Supremusnorm

Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die Supremusnorm

$$||f||_\infty = \sup |f(x)| : x \in [a, b]$$

- $\|f\|_\infty \geq 0$ und $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$
- $\|c \cdot f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

7.1.6 Approximationssatz

Für jedes $\epsilon > 0$ und jede *stetige* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert eine Treppenfunktion ψ mit:

$$||f - \psi||_\infty < \epsilon$$

7.2 (Regel-) Integrierbarkeit

Geht ψ_n für $n \to \infty$ gegen die Supremusnorm von f, d.h. gilt

$$\lim_{n \to \infty} ||f - \psi_n||_\infty = 0$$

dann nennt man f *(regel-) integrierbar*

7.3 Rechenregeln

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $f(x) \leq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)||f||_\infty$

7.4 Integralkriterium für Reihen

Eine monoton fallende Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ ist auf $[a, b]$ mit $0 < a < b$ integrierbar. Es gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \int_n^m f(\lceil x \rceil)dx \leq \int_n^m f(x)dx$$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\int_n^m f(x)dx| < \epsilon$$

7.5 Fundamentalsatz der Analysis

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

7.6 Stammfunktion

$$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} \cdot x^{n+1} + C \tag{1}$$

7.7 Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \tag{2}$$

7.8 Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx \tag{3}$$

7.9 Wichtige Integrale

1. $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctan(\frac{x}{a})$

8 Wiederholung

8.1 Logarithmengesetze

- $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$
- $\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$ (Basiswechsel)

8.2 Additionstheoreme Trigonometrischer Funktionen

- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (Doppelwinkel)
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ (Doppelwinkel)

8.3 Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{wobei} \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

8.4 Rechenregeln für komplexe Zahlen

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$