Angewandte Numerik Zusammenfassung

Maximilian Wolf

19. Februar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

- Unvermeidbarkeit von **Datenfehlern**
- **Konditionierung**: Unvermeidliche Fehler, mit denen man (bei Störung von Daten) in jedem Fall rechnen muss

2 Fehleranalyse

Definition 2.1: Kondition

Empfindlichkeit für Störungen eines Problems bzw. welche Ergebnisschwankungen unvermeidbar sind.

- $\cdot$ und / sind für alle Eingangsdaten gut konditionierte Operationen
- $\pm$ kann schlecht konditioniert sein

Definition 2.2: Stabilität

Ein Algorithmus heißt gutartig oder stabil, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems bedingten unvermeidbaren Fehlers bleiben.

Definition 2.3: Effizienz

Anzahl der Rechenoperationen und der Speicherbedarf eines Lösungsverfahren bzw. der numerische Aufwand, der nötig ist, um mit dem jeweiligen Verfahren eine gewünschte Genauigkeit zu erzielen

2.1 Kondition eines Problems

2.1.1 Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden:

$$G_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 = x_1\}$$

$$G_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 = x_2\}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems mit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$Ay = x \quad \text{bzw.} \quad y = A^{-1}x$$

Ist die Matrix A regulär ($\det(a) \neq 0$), dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

- Bei Eingabefehlern lassen sich die Geraden als zwei Schläuche darstellen, wobei deren Dicke der Variation der Eingabedaten entsprechen

- Bei orthogonalen Geraden bildet der Schnittbereich ein Quadrat mit geringem Flächeninhalt, bei (nahezu) parallelen Geraden bilden die Geraden ein Parallelogramm mit größerem Flächeninhalt. Ersteres ist in diesem Fall besser **besser konditioniert** als letzteres

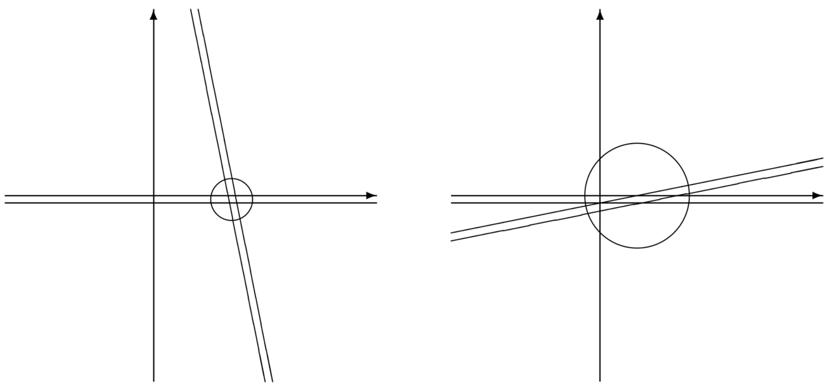

Abbildung 1: Konditionierung von Schnittgeraden

2.2 Normen

Definition 2.4: Norm

Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf V, falls:

1. **Positive Semidefinitheit**: $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ und $||v|| = 0 \implies v = 0$

2. **Homogenität**: $\forall a \in \mathbb{K}, v \in V : ||av|| = |a| \cdot ||v||$

3. **Dreiecksungleichung**: $\forall v, w \in V : ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Wenn eine Norm auf V definiert ist, nennt man V einen **linear normierten Raum**

Definition 2.5: Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

Für zwei beliebige Vektoren u, v in einem Vektorraum mit Skalarpodukt gilt: $|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$

Definition 2.6: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Abbildung f eines linear normierten Raumes V mit Norm $|| \cdot ||_V$ in einem linear normierten Raum W mit Norm $|| \cdot ||_W$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls eine Konstante L - die **Lipschitz-Konstante** - existiert, s.d. gilt: $\forall v, w \in V : ||f(v) - f(w)||_W \leq L||v - w||_V$. Lipschitz-Stetigkeit ist stärker als Stetigkeit, sozusagen "fast Differenzierbarkeit", da Differenzquotienten $\frac{||f(v)-f(w)||_w}{||v-w||_V}$ durch die Lipschitz-Konstante beschränkt bleiben

Definition 2.7: Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist. Dann ex. min eine Stelle $\xi \in (a, b)$, für die gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

- ∞-/ **Max-Norm**: $||x||_\infty := max_{i=1,...,n}|x_i|, x \in \mathbb{K}^n$ bzw. $||f||_\infty := ||f||_{L_\infty(I)} := max_{t\in I}|f(t)|, f \in C(I)$
- **p-Normen**: $||x||_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ mit $1 \leq p < \infty$, für $p = 2$ nennt man die **Euklidische Norm**, wobei diese genau die Euklische Distanz eines n-Tupels vom Ursprung angibt.
  - **1-Norm** (Manhattan-Norm): $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
  - **2-Norm** (Euklidische-Norm): $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

2.2.1 Relative und absolute Kondition

$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x)$

Absoluter Fehler $||\Delta x||_X, ||\Delta y||_Y$

Relativer Fehler $\delta_x = \frac{||\Delta x||_X}{||x||_X}, \delta_y = \frac{||\Delta y||_Y}{||y||_Y}$

2.3 Landau Symbol

Definition 2.8: Landau-Symbol

Gibt es Konstanten $C > 0, \delta > 0$, s.d. für alle $|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ gilt: $||g(x)||_{\mathbb{R}^m} \leq C||h(x)||_{R_m}$ Zu überprüfen hierbei ist, ob $\lim_{x\to x_0} \frac{||g(x)||}{||h(x)||} = C < \infty$ existiert, d.h. $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ gilt

2.4 Satz von Taylor

Seien $n \in \mathbb{N}_0, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b, f \in C^{n+1}((a,b))$ und $x, x_0 \in (a,b)$.
Taylorpolynom n-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Es existiert ein $\xi \in (0,1)$ für das **Restglied**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \xi(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, so folgt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

2.4.1 Operatornormen

Definition 2.9: Lineare Abbildung

Eine Abbildung $\mathcal{L} : X \to Y$ heißt linear, falls für alle $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathcal{L}(\alpha x, \beta y) = \alpha\mathcal{L}(x) + \beta\mathcal{L}(y)$

Definition 2.10: Operatornorm

Die Operatornorm $\mathcal{L}$ ist wie folgt definiert: $||\mathcal{L}||_{X\to Y} := \sup_{||x||=1} ||\mathcal{L}(x)$
Sie gibt ein Maß für die Deformation der Einheitskugel

2.5 Matrixnormen

Definition 2.11: Matrixnorm

Für die Vektorräume $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$, ausgestattet mit der p-Norm $1 \leq p \leq \infty$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert man die von der **Vektornorm induzierte Matrixnorm** als:

$$||B||_p := ||B||_{X \to Y} = \sup_{x \neq 0} \frac{||Bx||_{Y,p}}{||x||_{X,p}} = \sup_{||x||_{X,p}=1} ||Bx||_{Y,p}$$

Da der Vektorraum $X = \mathbb{R}^n$ endlichdimensional ist, wird das Maximum angenommen, also:

$$||B||_p = ||B||_{X \to Y} = \max_{x \neq 0} \frac{||Bx||_{Y,p}}{||x||_{X,p}} = \max_{||x||_{X,p}=1} ||Bx||_{Y,p}$$

∞-Norm induziert **Zeilensummen-Norm**: $||B||_\infty = \max_{i=1,\cdots,m} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|$

1-Norm induziert **Spaltensummen-Norm**: $||B||_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|$

Nicht von der Vektornorm induzierte Matrixnormen sind:

Frobeniusnorm: $||A||_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$

diese ist jedoch mit der Euklidischen-Norm **verträglich**, d.h. es gilt $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n : ||Ax||_2 \leq ||A||_F \cdot ||x||_2$

2.6 Konditionszahl

$\kappa(\mathcal{L})$ heißt (relative) Konditionszahl von $\mathcal{L}$. Sie stellt eine obere Schranke für die relative Kondition des Problems der Auswertung der Funktion $\mathcal{L}(x)$ dar und ist unabhängig vom Auswertungspunkt x.

$$\frac{||\mathcal{L}(\tilde{x}) - \mathcal{L}(x)||_Y}{||\mathcal{L}(x)||_Y} \leq \kappa(\mathcal{L}) \frac{||\tilde{x} - x||_X}{||x||_X}$$

wobei

$$\kappa(\mathcal{L}) = \frac{\sup_{||x||=1} ||\mathcal{L}(x)||_Y}{\inf_{||x||=1} ||\mathcal{L}(x)||_Y} = \frac{||\mathcal{L}||_{X\to Y}}{\inf_{||x||=1} ||\mathcal{L}(x)||_Y}$$

ist $\mathcal{L} : X \to Y$ bijektiv, gilt:

$$\kappa(\mathcal{L}) = ||\mathcal{L}||_{X\to Y} ||\mathcal{L}^{-1}||_{Y\to X}$$

3 Rundungsfehler und Gleitpunktarithmetik

Definition 3.1: Zahlendarstellung

Für jedes feste $b \in \mathcal{N}, b > 1$ lässt sich jede beliebige reelle Zahl in der Form

$$x = \pm(\sum_{j=1}^{\infty} d_j \cdot b^{-j}) \cdot b^e$$

darstellen

Definition 3.2: Reduktionsabbildung

$$\left|\frac{fl(x) - x}{x}\right| \leq \frac{\frac{b^{-m}}{2} \cdot b^e}{b^{-1} \cdot b^e} = \frac{b^{1-m}}{2} = eps$$

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit eps sind die Daten mit relativen Fehlern $\leq$ eps behaftet.

Definition 3.3: Maschinenzahl

Das Tupel $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ bezeichnet die Menge aller darstellbaren Gleitpunktzahlen eines Systems. Dabei bezeichnet b die Basis, m die Mantissenlänge, r den minimalen und R den maximalen Exponent e

4 Lineare Gleichungssysteme

Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. A heißt **regulär bzw. nichtsingulär**, falls $\det(A) \neq 0$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Das System hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$
- Matrix A hat vollen Rang
- Das homogene System $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$
- Es gilt $\det(a) \neq 0$

4.1 Determinante

4.2 Kondition und Störungssätze

Sei $x + \Delta x$ die Lösung von $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Dann gilt:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \kappa(A) \frac{||\Delta b||}{||b||} \text{ wobei } \kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

4.3 LR-Zerlegung

$$A = LR$$

Sei A eine reguläre Matrix. Die auf dem Gauß-Verfahren basierende LR-Zerlegung mit ermöglicht es, A in eine **normierte untere Dreiecksmatrix** L und eine **rechte obere Dreiecksmatrix** R zu zerlegen.

- Dazu wird die Matrix A mit Frobeniusmatrizen L_i multipliziert, die die Eliminationsfaktoren unterhalb der Diagonalen in der jeweiligen Spalte enthält.
- Die Inversen der Frobeniusmatrizen sind dabei die negierten Eliminationsfaktoren.
- Die Matrix L ensteht durch die negierten Eliminationsfaktoren unterhalb der Diagonalen.
- **Eliminationsfaktoren** $l_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j)}}{a_{j,j}^{(j)}}$

Zur Lösung des LGS mittels LR-Zerlegung geht man wie folgt vor:

1. **Vorwärtseinsetzen**: Löse $Ly = b$ nach y auf
2. **Rückwärtseinsetzen**: Löse $Rx = y$ nach x auf

4.3.1 Skalierung und Spaltenpivotisierung

$PDA = LR$, wobei:

- Permutationsmatrix $P = P_n \cdot \ldots \cdot P_1$
- Skalierungsmatrix $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_i = (\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|)^{-1}$

- Normierte untere Dreiecksmatrix $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -l_{m,1} & \dots & -l_{m,n-1} & 1 \end{pmatrix}$
- Rechte obere Dreiecksmatrix R

4.4 Cholesky Zerlegung

Damit für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^n$ eine Cholesky-Zerlegung LDL^T existiert, müssen folgende Bedingung gelten:

1. **Symmetrie**: $A^T = A$
2. **Positive Definitheit**: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : x^T A x > 0$ (auch zu überprüfen durch $\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_{i,i} > 0$)

Eigenschaften symmetrisch positiv definiter Matrizen

1. A ist invertierbar und $A1{-}1$ ist ebenfalls symmetrisch positiv definit
2. Die Determinante (und damit auch die Determinante aller Hauptuntermatrizen) ist ..

$$LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & 1 & l_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2 \cdot d_{j,j} \text{ und } l_{i,k} = (a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} \cdot d_{j,j} \cdot l_{k,j})/d_{k,k}$$

Beispiel für n = 3

j=1
1. $d_{1,1} = a_{1,1}$
2. $l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{d_{1,1}}$
3. $l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{d_{1,1}}$

j=2
1. $d_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}^2 \cdot d_{1,1}$
2. $l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1} \cdot d_{1,1} \cdot l_{2,1}}{d_{2,2}}$

j=3
1. $d_{3,3} = a_{3,3} - l_{3,1}^2 \cdot d_{1,1} - l_{3,2}^2 \cdot d_{2,2}$

4.5 Tridiagonalmatrizen

Thomas-Algorithmus zur Bestimmung der LR-Zerlegung

- $l_{j,j-1} = \frac{a_{j,j-1}}{r_{j-1,j-1}}$
- $r_{j-1,j} = a_{j-1,j}$
- $r_{j,j} = a_{j,j} - l_{j,j-1} \cdot r_{j-1,j}$

4.6 QR-Zerlegung

Definition 4.1: Ortogonale Matrizen

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls $Q^T Q = I$. Die Inverse lässt sich einfach bestimmen: $Q^{-1} = Q^T$. Weitere Eigenschaften:

1. $||Qx||_2 = ||x||_2$
2. $\kappa_2(Q) = 1$
3. Sei $\tilde{Q}$ orthogonal, dann ist auch $\tilde{Q}Q$ orthogonal

4.6.1 Householder-Transformation

Die House-Holder Transformation kosntruiert eine orthogonale Matrix Q_v

$$Q_v = I - 2 \cdot \frac{vv^T}{v^T v}$$

Es gilt:

$$QA = Q_{v_n} \cdot \ldots \cdot Q_{v_1} \cdot A = R$$

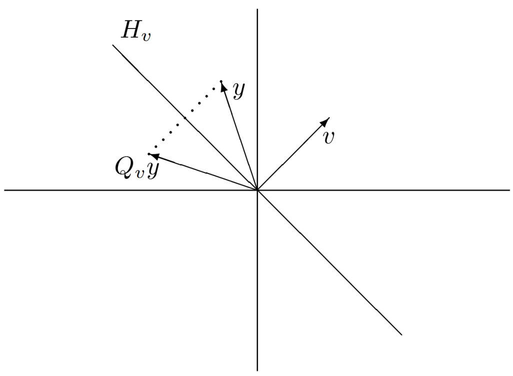

Abbildung 2: Householder Transformation

Zu $y \in \mathbb{R}^n, y \notin span(e_1)$ finde $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $Q_v y = \pm||y||_2 e_1$
Man erhält als Lösung: $v = y \pm ||y||_2 \cdot e_1$

Dazu geht man wie folgt vor:

1. $\alpha = sign(y_1) \cdot ||y||_2$ mit $sign(0) := 1$
2. $v = y + \alpha \cdot e_1$
3. $Q_v y = -\alpha \cdot e_1$
4. Ohne Aufstellen der Matrix Q_v erfolgt die Transformation eines Vektors x durch: $Q_v x = x - 2\frac{v^T x}{v^T v} v$

Lösen des linearen Ausgleichsproblems $||Ax - b||_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$

$$||Ax - b||_2 \stackrel{A=QR}{=} ||QRx - b||_2 \stackrel{||Q^T||_2=1}{=} ||Q^T QRx - Q^T b||_2 \stackrel{Q^T Q=I}{=} ||Rx - Q^T b||_2$$

Da R die Form $\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat, zerfällt das Problem in:

$$\left\| \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} c \\ r \end{pmatrix} \right\|_2^2 = ||R_1 x - c||_2^2 + ||r||_2^2$$

Vorteile der Householder Transformation

- Erhaltung der Norm: Da Spiegelungen orthogonal sind ($Q^T Q = I$), bleibt die Euklidische Norm der Spaltenvektoren erhalten. Das bedeutet, wir "verbiegen"das Koordinatensystem nur, wir dehnen oder stauchen es nicht.
- Stabilität: Bei der Gauß-Elimination können durch Divisionen durch sehr kleine Zahlen (Pivot-Elemente) riesige Fehler entstehen. Spiegelungen sind numerisch extrem stabil, da sie die Kondition der Matrix nicht verschlechtern.

5 Lineare Ausgleichsrechnung

Allgemeine Form

$$||Ax - b||_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$, für das

$$||Ax^* - b||_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2$$

5.1 Geometrische Interpretation

$$\|Ax - b\|_2 = \min \iff Ax - b \perp \mathrm{Bild}(A)\,,$$

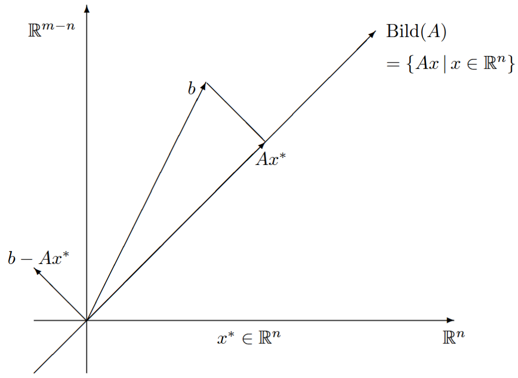

Abbildung 3: Geometrische Interpretation des linearen Ausgleichsproblems

Die Lösung Ax^* liegt gerade senkrecht zu b auf dem Bildraum von A

5.2 Kondition des linearen Ausgleichsproblems

$$\kappa_2(A) := \frac{\max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}}{\min_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}}$$

Ausgleichsproblem mit Störungen $||A\tilde{x} - \tilde{b}||_2 \to \min$

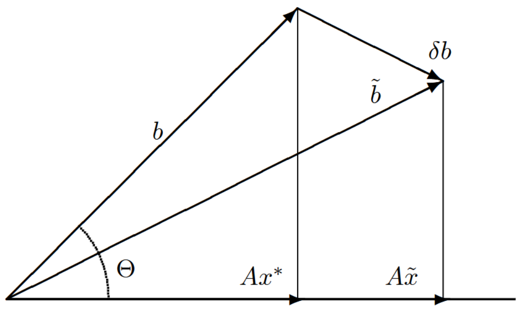

Abbildung 4: Kondition des linearen Ausgleichsproblems

Für die Kondition bezüglich **Störungen in b** gilt:

$$\frac{||\tilde{x} - x^*||_2}{||x^*||_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \cdot \frac{||\tilde{b} - b||_2}{||b||_2}$$

Für die Kondition bezüglich **Störungen in A** gilt:

$$\frac{||\tilde{x} - x^*||_2}{||x^*||_2} \leq (\kappa_2(A) + \kappa_2(A)^2 \cdot \tan\Theta) \cdot \frac{||\tilde{b} - b||_2}{||b||_2}$$

5.3 Normalgleichungen

Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$A^T A x = A^T b$$

5.3.1 Numerische Lösung

- Berechne $A^T A, A^T b$
- **Cholesky-Zerlegung**: $LDL^T = A^T A$
- Löse $Ly = A^T b, L^T x = D^{-1} y$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen

Nachteile des Verfahrens

- Berechnung von $A^T A$ für große m aufwendig, Gefahr von Auslöschungseffekten
- Lösung des Systems verstärkt Rundungsfehler um $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$

5.4 Lösung über QR-Zerlegung

Grundidee:

$$||Ax - b||_2^2 \overset{||Q||_2=1}{=} ||QAx - Qb||_2^2 \overset{R=QA}{=} ||Rx - Qb||_2^2 = ||\tilde{R}x - b_1||_2^2 + ||b_2||_2^2$$

Für $R = QA$ ergibt sich:

$$QA = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n \\ \}\, m-n \end{matrix} \quad (\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

Anwendung von Q auf b:

$$Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n \\ \}\, m-n \end{matrix}$$

- **Lösung**: $\tilde{R}x = b_1$ mittels Rückwärtseinsetzen
- **Residuum**: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2 = ||Ax^* - b||_2 = ||b_2||$
- **Kondition**: QR-Zerlegung ist sehr stabil, die Fehlerverstärkung wird durch $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$ beschrieben

6 Nichtlineare Gleichungssysteme

6.1 Banachscher Fixpunktsatz

Es existiert ein Fixpunkt x^* von ϕ in E und für beliebiges x_0 konvergiert $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^* g.d.w.

- **Selbstabbildung**: $\phi : E \to E$
- **Kontraktion**: $\forall x, y \in E : ||\phi(x) - \phi(y)|| \leq L||x - y||$ mit Lipschitz-Konstante $L := \max_{x \in E} |\phi'(x)| < 1$

Fehlerabschätzung

- **A-priori**: $||x_k - x^*|| \leq \frac{L^k}{1-L}||x_1 - x_0||$
- **A-posteriori**: $||x_k - x^*|| \leq \frac{L}{1-L}||x_k - x_{k-1}||$

6.2 Konvergenzordnung und Fehlerabschätzung

Definition 6.1: Konvergenzordnung

Eine konvergente Folge x_k mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p, falls:

$$\forall k \in \mathbb{N}, k_0 \in \mathbb{N}, k \geq k_0 : ||x_{k+1} - x^*|| \leq c||x_k - x^*||^p$$

wobei $0 < c < 1$, falls $p = 1$

- $p = 1$: Lineare Konvergenz, der Fehler im nächsten Schritt ist proportional zum aktuellen Fehler
- $p = 2$: Quadratische Konvergenz, Anzahl der korrekten Dezimalstellen verdoppelt sich pro Iterationsschritt
- $p > 1$: Superlineare Konvergenz, das Verfahren konvergiert schneller als geometrisch

6.3 Fixpunktverfahren

6.3.1 Bisektionsverfahren

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

- Falls $f(x_k) \cdot f(a_k) \leq 0$:
  - $a_{k+1} = a_k$
  - $b_{k+1} = x_k$
- Sonst:
  - $a_{k+1} = x_k$
  - $b_{k+1} = b_k$

Konvergenzordnung $p = 1$

6.3.2 Newton-Verfahren

Konvergenzordnung $p = 2$

$$\phi(x) = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

6.3.3 Sekantenverfahren

Konvergenzordnung $p \approx 1.6$

$$\phi(x) = x_{k+1} = x_k - f(x_k)(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})})$$

6.3.4 Newton-Verfahren für Systeme

Taylorentwicklung:

$$f(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \mathcal{O}(||x - x^k||_2^2)$$

wobei

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{(Jacobimatrix)}$$

Hieraus erhält man:

$$x^{k+1} = x^k - (f'(x^k))^{-1} \cdot f(x^k)$$

Zur stabilen Berechnung dient der folgende Algorithmus (Newton-Iteration)

- Berechne $f(x_k), f'(x_k)$
- Löse das Lineare Gleichungssystem $f'(x_k)s_k = -f(x_k)$
- Newton Korrektur: $x_{k+1} = x_k + s_k$

6.3.5 Gedämpftes Newton-Verfahren

Globalisierung der Konvergenz

$$x_{k+1} = x_k + \lambda s_k$$

für ein passendes $\lambda = \lambda_k, 0 \leq \lambda \leq 1$

7 Interpolation

7.1 Lagrange-Interpolation

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_{j,n}(x)$$

wobei

$$l_{jn}(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die Lagrange-Basispolynome sind.

7.2 Neville-Aitken-Schema

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1})$$

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$\cdots$		
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$				
x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$			
x_3	$f(x_3)$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$\ddots$		
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	
x_n	$f(x_n)$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$P_{n,n}$

Abbildung 5: Neville Aitken Schema

7.3 Newtonsche Interpolationsformel - dividierte Differenzen

7.4 Horner-Schema

Effiziente Methode zur Auswertung eines Polynoms in der Potenzform

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x a_n) \ldots))$$

8 Numerische Differentiation

Mit der Taylor-Entwicklung ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi)$$

8.1 Auslöschung bei Numerischer Differentiation

- **Diskretisierungsfehler** durch Approximation der Ableitung durch den Differenzenquotienten $\Delta_h = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$. Der Fehler ist von der Ordnung $O(h^2)$, d.h., er wird kleiner, wenn h kleiner wird
- **Rundungsfehler** durch endliche Genauigkeit der Maschinenzahlen (ϵ), nimmt zu wenn h kleiner wird

9 Numerische Integration

9.1 Methoden

9.1.1 Trapezregel

$$T(h) = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right] \text{ wobei } h = \frac{b-a}{n}$$

Fehlerabschätzung

$$E(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^{n} h f''(\xi_k) \approx \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a))$$

Fehlerschranke

$$|T(h) - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

9.1.2 Newton-Cotes-Formeln

Summierte Simpson-Regel

$$\begin{aligned} S(h) = \frac{h}{6}\Bigg[& f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) + 2f(t_1) \\ & + 4f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) \\ & + 4f\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + f(t_n)\Bigg] \end{aligned}$$

Verfahrensfehler

$$E(h) \approx \frac{h^4}{2880}(f'''(b) - f'''(a))$$

9.1.3 Gauß-Quadratur

Integration der Lagrange-Basispolynome

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b P(f|x_0,\dots,x_n)(x)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)\cdot l_{i,n}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_{i,n}(x)\,dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^n f(x_i)\cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b l_{i,n}(x)\,dx \\
&= (b-a)\cdot \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot f(x_i)
\end{aligned}$$

Alternativ

$$\int_a^b m_k(x)dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i m_k(x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot f(x_i)$$

9.2 Legendre-Polynome

Polynome, die orthogonal auf dem Intervall $[-1,1]$ bezüglich des L2-Skalarpodukts sind:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ für } n \neq m$$

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

- **Stützstellen**: Optimale Stützstellen x_i für Gauß-Quadratur auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind exakt die Nullstellen des $(n + 1)$-ten Legendre-Polynoms

- **Exaktheit**: durch die Wahl dieser Stützstellen erreicht man den Exaktheitsgrad von $2n + 1$

- **Nullstellen**: Die Nullstellen eines Legendre-Polynoms liegen alle im Intervall $[-1, 1]$

9.3 Exaktheitsgrad

Definition 9.1: Exaktheitsgrad

Eine Quadraturformel $Q(f) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i)$ besitzt den Exaktheitsgrad n, wenn gilt:

1. $Q(P) = \int_a^b P(x)dx$ für Polynome P vom Grad $\leq n$

2. $Q(P) \neq \int_a^b P(x)dx$ für mindestens ein Polynom P vom Grad $n+1$

Da die Integration eine lineare Operation ist, reicht es aus, die Formel für die Monom-Basis $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$

10 Wichtige Formeln

$$(AB)^T = B^T A^T$$