Computerphysik-Vorlesung

30.05.18

Der Saturnmond Hyperion

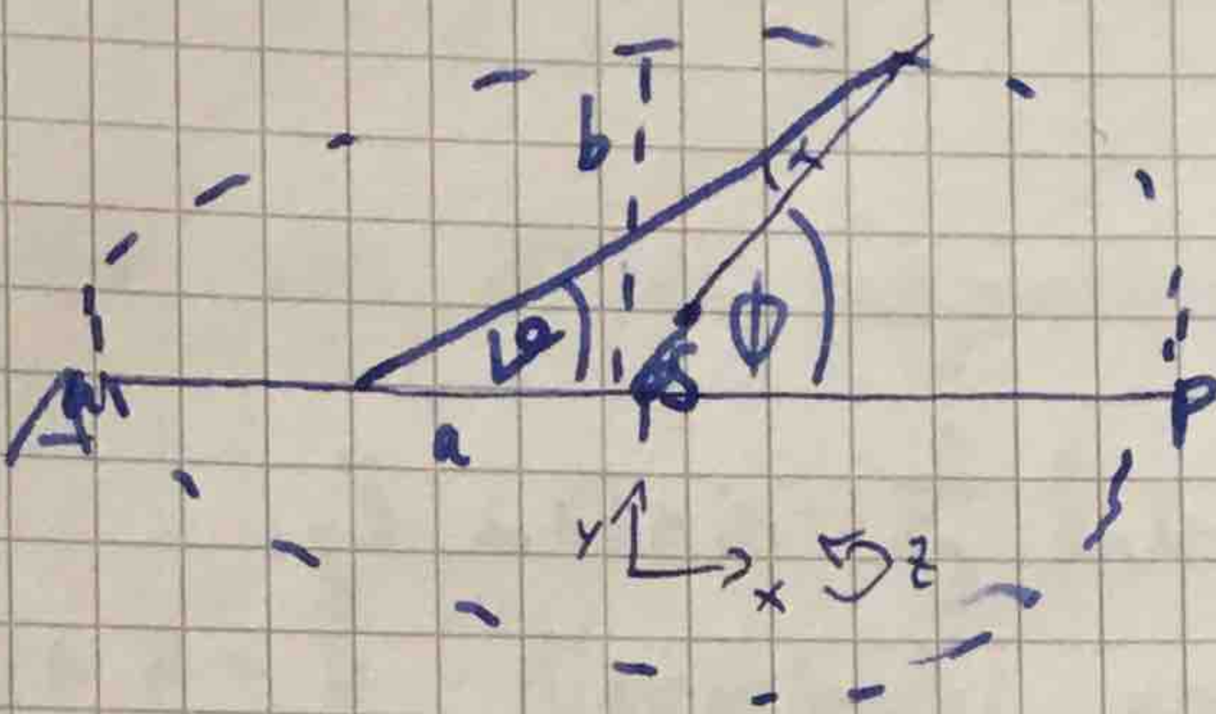
Beispiel für chaotische Bewegung

Umlaufzeit von 21 Tagen,

Skizze: 

Maße: $190 \times 145 \times 114\ km^3$

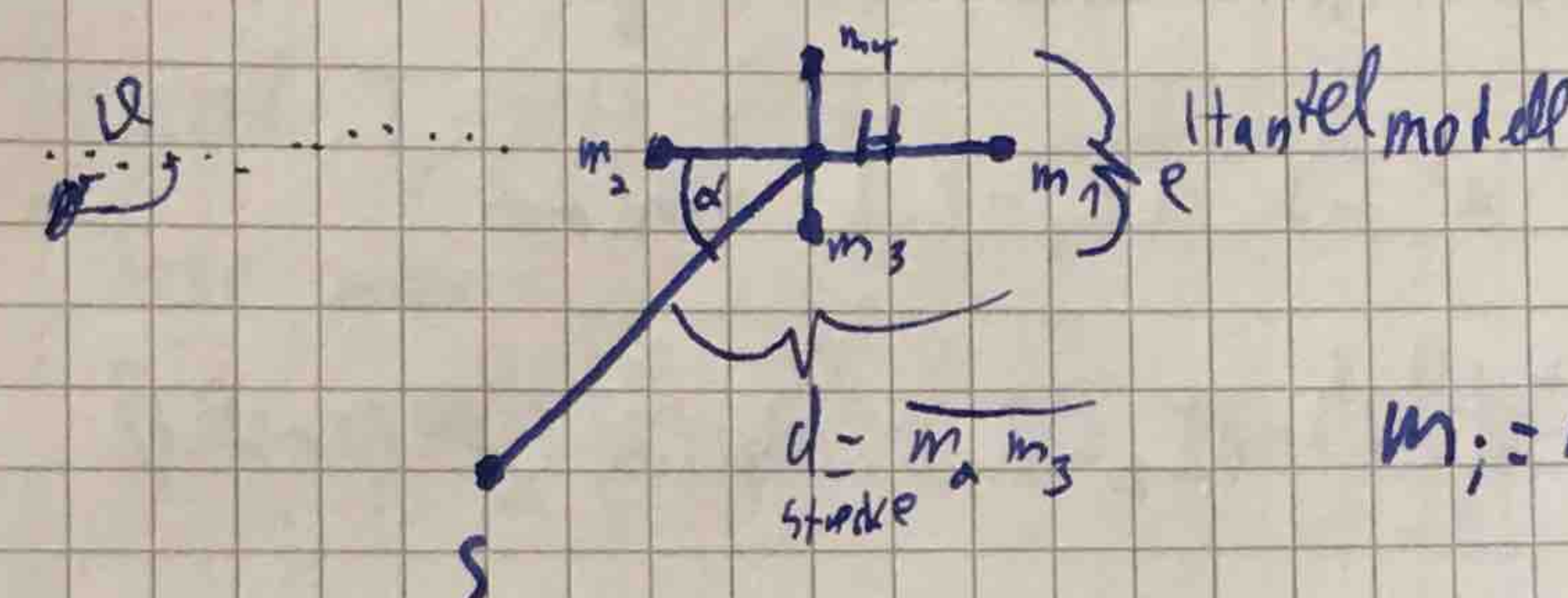
Exzentrizität der Ellipsenbahn: $\varepsilon = 0{,}1$.



φ: Polarwinkel

ϑ: Rot. winkel relativ zur Wagerechten

α: Rot. winkel relativ zu S-H



Drehung von H beschreibt ϑ

$m_i = m \quad , i = 1,2,3,4$

Die Trägheitmomente sind wie folgt gegeben:

$I_1 = \frac{1}{2} m e^2 < I_2 = \frac{1}{2} m d^2 < I_3 = \frac{1}{2} m (e^2 + d^2)$, mit $e < d$

Hyperion rotiert um z-Achse (3-Achse)

Für $I_1 \neq I_2$ bekommt man ein Bahnpunkt abhängiges Drehmoment

Zuerst für System m_1, m_2 mit Abstand $\vec{d}$:

$\vec{D}^d = \frac{\vec{d}}{2} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ mit Kräften $\vec{F}_i = -g \cdot m_i \cdot M_s \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}$

Für $|\vec{d}| = d << |\vec{r}| = r$, $r \equiv$ Abstand Saturn-Hyperion

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 \pm \frac{r}{d}\cos(\alpha) + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3}\left(1 \pm \frac{3d}{2r}\cos(\alpha)\right)$$

Vorzeichen: $i = 1 \Rightarrow +$; $i = 2 \Rightarrow -$

Einsetzen in Drehmoment und nutze $\vec{r} \times \vec{d} = -rd\sin(\alpha)\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \vec{D}^d \approx \left(3 \cdot d^2 m M \frac{g}{4r^3}\right) \cdot \sin(2\alpha)\,\vec{e}_3$$

$= \left(3 g \cdot M \, I_2 \frac{1}{2r^3} \right) \sin(2\alpha) \cdot \vec{e}_3$

Benutze 3. keplersches Gesetz und Gesamtmasse des Systems $\approx M$, da $m << M$

$\Rightarrow g \cdot M \simeq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3$

Genauso für $\vec{D}^e$.

$\Rightarrow$ gesamtdrehmoment:

$$\vec{D} = \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 \, (I_2 - I_1) \frac{1}{r^3} \cdot \sin(2\alpha) \, \vec{e}_3$$

Für $I_2 = I_1$ verschwindet $\vec{D}$ wie erwartet.

$\Rightarrow \ddot{\varphi} \cdot I_3 = \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 \frac{1}{r^3} \cdot (I_2 - I_1) \sin(2\alpha$

$\phi = \alpha + \varphi \Rightarrow -\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 (I_2 - I_1) \sin(2 \cdot (\phi - \varphi))$

Rechte Seite hängt über $r(t)$ und $\phi(t)$ implizit von der Zeit ab und lässt sich nicht analytisch integrieren.

Für den Fall der Kreisbewegung ($\varepsilon = 0$)

$\Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$: Variablen wechsel: $\varphi' = \varphi - \frac{2\pi}{T} t$

$\hookrightarrow \ddot{\varphi}' I_3 = +\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (I_2 - I_1) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2\varphi')$

Zur Lösung:

Zunächst $\phi(t)$ und $r(t)$

Keplerproblem: $\hat{r} = \frac{r}{a}$ und t in $0 \to 2\pi$ ansehen

$= \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos\phi} \equiv \hat{r}(\phi)$

Benutze Drehimpulserhaltung:

$p_\phi = m r^2 \dot{\phi} = \text{const}$

$\Rightarrow \ddot{\phi} = +\frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 = -2 \frac{\varepsilon \sin\phi}{1 + \varepsilon \cos(\phi)} \dot{\phi}^2$

2

dies ist numerisch lösbar ; $y_0 = \phi$, $y_1 = \dot{\phi}$

$$\dot{y}_0 = y_1 \quad ; \quad \dot{y}_1 = -2 \frac{\varepsilon \sin y_0}{\varepsilon \cos(y_0)+1} y_1^2$$

Int. $0 \to 2\pi$

Integrieren für einen Umlauf (2π) => $\phi(t_i)$ bei konkreten t_i

=> $\hat{r}(\phi(t_i))$

(Schrittweite sollte gleich sein irgendwas reicht auch einmal rechnen)

Ebenso aus dieser Integration: => Umlaufzeit T

(selber überlegen)

Mit $\hat{r} = \frac{r}{\alpha}$ dimensionslos und $\alpha \sqrt{3 \frac{I_2 - I_1}{I_3}} = 0{,}84$ dim.los

und T, $\phi(t)$, $\hat{r}(t)$ bekannt

löse man:

$$\dot{\psi} = +\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha \, 2\pi}{T}\right)^2 \frac{1}{\hat{r}^3} \sin(2(\phi - \psi))$$

Führe z_0 und z_1 ein (analog zu $\phi(t)$) und löse das System gekoppelter DGLs erster Ordnung.