Лабораторная работа №4

«Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)»

Выполнила: Рулева В.О.

Группа: ПИН-41

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

Изучение процедур ode.. в MATLAB или Python.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ:

2.1. ОДУ первого порядка

2.1.1. Задание:

Возьмем функцию y=t.^2 и будем считать ее решением задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Получим это дифференциальное уравнение y'=2*t и начальное условие y(0)=0. Изучим порядок использования процедур ode.. (например, help ode45) и другие сопутствующие команды. Создадим m-файл функцию yp.m, описывающую правую часть нашего дифференциального уравнения:

```
function yp=yp(t,y)
%
yp=2*t;
```

Запустите какую-либо процедуру решения этой задачи Коши, например

```
[t,Y]=ode45('yp',[0 3],0);
```

и выполните построение графиков известной функции y=t.^2 и результата численного решения задачи Коши Y(t) (Y в верхнем регистре)

```
plot(t,t^2,'g+',t,Y,'r')
```

Спланируйте и проведите исследование процедур ode.., используя то, что ответ Вам известен.

Теперь правую часть дифференциального уравнения можно записать и другим способом: 2*sqrt(y).

Создадим другой m-файл функцию yp2.m, описывающую правую часть нашего дифференциального уравнения:

```
function yp=yp2(t,y)
%
yp=2*sqrt(y);
```

и снова решим задачу Коши с нулевым начальным условием. Построим соответствующие графики. Что, шокированы? Попытайтесь найти причину такого результата.

Подсказка: измените начальное условие, возьмите, например, t=1, y(1)=? Теперь все в порядке?

Сделайте практический вывод для себя.

2.1.2. Постановка задачи:

Решение ОДУ первого порядка.

2.1.3. Алгоритм решения:

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется некое алгебраическое выражение $F\left(\frac{d}{dx}y(x), y(x), x, k\right) = 0$, в состав которого входят: производная от функции $\frac{d}{dx}y(x)$, сама функция $y(x)$, аргумент функции x и некоторый параметр k. Необходимо найти функцию, которая удовлетворяла бы этому уравнению $(y(x) = ?)$.

Для решения уравнения необходимо задать диапазон изменения переменной $x \in x_1..x_2$ и знать значение искомой функции в начале этого диапазона $y(x_1) = y_1$.

Для решения ОДУ первого порядка необходимо общее алгебраическое выражение преобразовать к нормальному виду $\frac{d}{dx}y(x) = f(y(x), x, k)$.

Заданное уравнение уже приведено к нормальному виду $y' = 2x$ с начальным условием $y(0) = 0$.

Также можно немного иначе записать правую часть нормального вида $y' = 2\sqrt{y}$, но уже с другим начальным условием $y(1) = 1$.

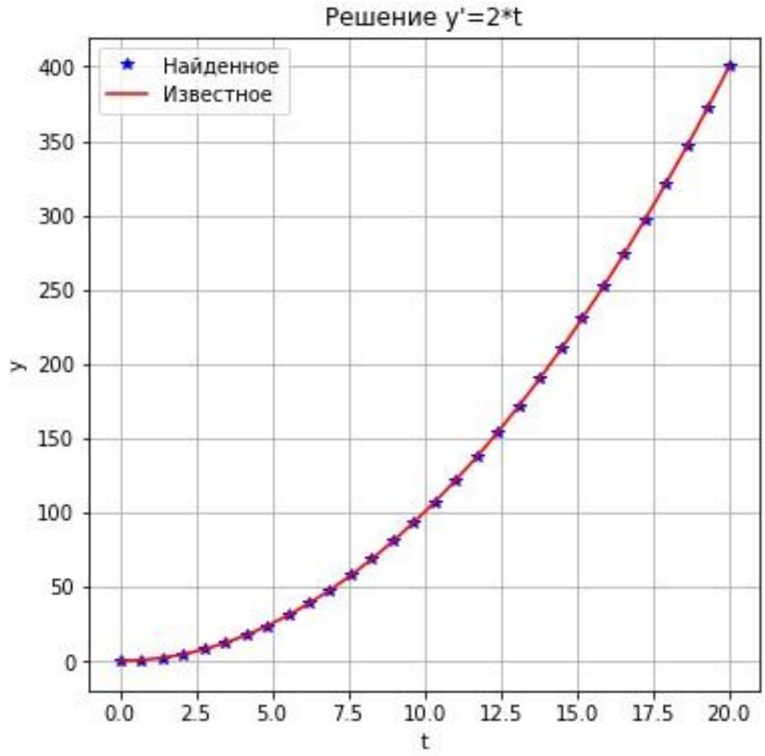
2.1.4. Реализация

Запускаемый файл task1.ipynb

Сохраненный пример в файле task1.html

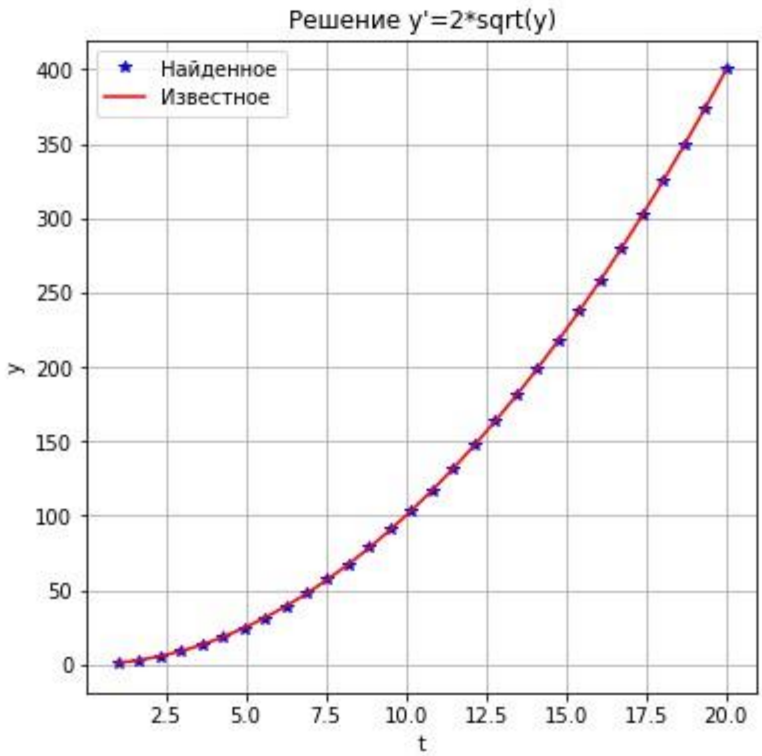
Поскольку нам известно, что искомая функция $y = t^2$, можно её графически сравнить с функцией найденной путем решения ОДУ.

При задании нормального вида дифференциального уравнения таким образом $y' = 2t$, получается график:



Очевидно, что на заданном интервале всё совпало.

При задании нормального вида дифференциального уравнения таким образом $y' = 2\sqrt{y}$, получается график:



Также всё совпало, но график начинается не с t = 0, а с t = 1, ведь нам пришлось поменять начальное условие $y(0) = 0$ на $y(1) = 1$, потому что с 0 функция ode решения не находит.

2.2. ОДУ второго порядка

2.2.1. Задание:

Попробуем теперь решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Возьмем известную функцию, например, y=cos(t):

y"=-cos(t) или y"=-y

y(0)=1

y'(0)=0

Чтобы можно было воспользоваться MATLABом сначала сведем эту задачу к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Будем считать саму функцию y первой координатой двумерной функции Y (т.е. Y(1) или на языке MATLAB Y(:,1)), а ее первую производную y' второй (т.е. Y(2) или на языке MATLAB Y(:,2)). Тогда с учетом того, что y мы придумали сами имеем первое уравнение системы

Y'(1)=-sin(t)

второе

Y'(2)=-cos(t) или Y'(2)=-Y(1)

Если эту систему записать в матричной форме, то слева получим вектор-столбец из производных компонент вектор-функции Y, а справа вектор-столбец из функций

[-sin(t); -cos(t)] или чтобы выглядело пострашнее [-sin(t); -Y(1)].

Создадим m-файл функцию yp3.m, описывающую правую часть нашей системы дифференциальных уравнений:

```
function yp=yp3(t,y)
%
yp=[-sin(t);-y(1)];
```

Исследуем решения, например так:

```
[t,YY]=ode45('yp3',[0 2*pi],[1 0]);
plot(t,cos(t),'r+',t,YY)
plot(t,cos(t),'r+',t,YY(:,1))
```

В чем разница между последними графиками?

2.2.2. Постановка задачи:

Решение ОДУ второго порядка.

2.2.3. Алгоритм решения:

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка выглядит следующим образом: $\frac{d^2}{dt^2}u(t) + b\frac{d}{dt}u(t) + c * u(t) = 0$. Для решения уравнения необходимо задать диапазон изменения переменной $t \in t_1..t_2$, указать значение искомой функции в начале этого диапазона $u(t_1) = u_1$ и значение производной искомой функции в этой точке $\frac{d}{dt}u(t_1) = u'_1$.

Для решения ОДУ второго порядка необходимо привести к системе ОДУ первого порядка. Введём новую функцию $v(t)$ равную первой производной и получим систему:

$$\frac{d}{dt}u(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = -b * v(t) - c * u(t)$$

При условиях:

$$u(t_1) = u_1$$
$$v(t_1) = u'_1$$

Заданное ОДУ $\frac{d^2}{dt^2}u(t) + \cos(t) = 0$ или $\frac{d^2}{dt^2}u(t) + u(t) = 0$. Полученная система:

$$\frac{d}{dt}u(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\cos(t) = -u(t)$$

При условиях:

$$u(0) = 1$$
$$v(0) = 0$$

Векторное представление задачи:

$$F_0(v, u, t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ -u(t) \end{bmatrix}$$

Зададим ещё один вектор $s = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$. И с учётом вектора s перепишем F_0:

$$F_0(s, t) = \begin{bmatrix} s(1) \\ -s(0) \end{bmatrix}$$

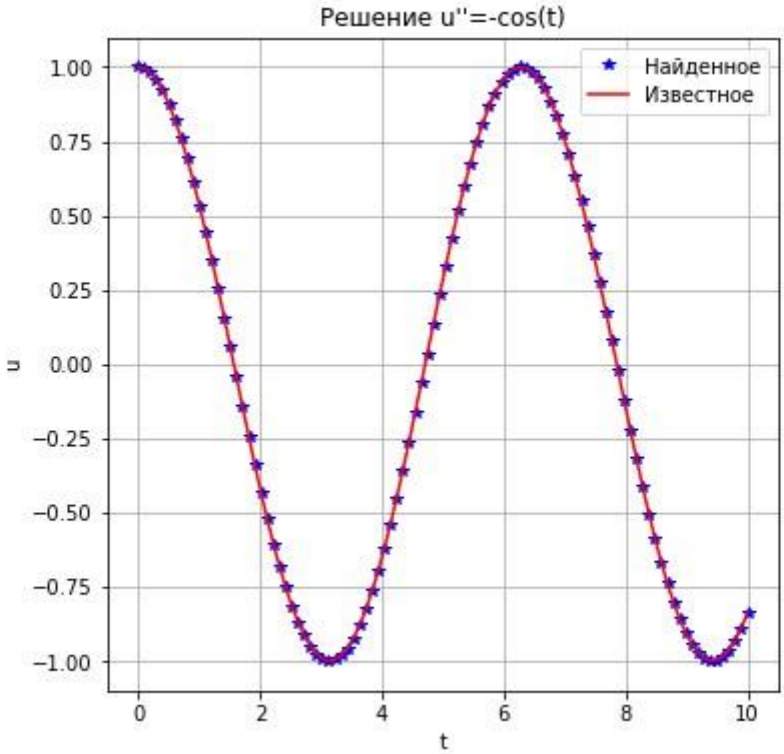
2.2.4. Реализация

Запускаемый файл task2.ipynb

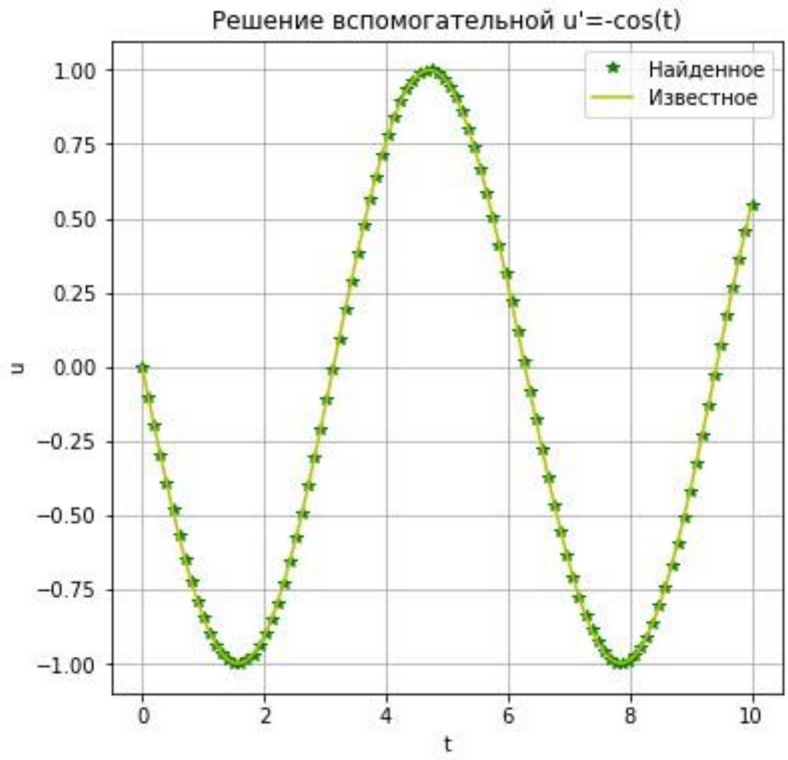
Сохраненный пример в файле task2.html

Поскольку нам известно, что искомая функция $u = \cos(t)$, можно её графически сравнить с функцией найденной путем решения ОДУ второго порядка.

Решение получилось в виде матрицы, для графика берём только первый столбец: plt.plot(t, sol[:,0]) # dudt



Всё совпало. Если же взять второй столбец: plt.plot(t, sol[:,1]), то на график выведется решение вспомогательной функции, которое получилось равным -sin(t).



2.3. Система ОДУ

2.3.1. Задание:

Придумать свои собственные тестовые примеры и показать преподавателю.

2.3.2. Постановка задачи:

Решить систему ОДУ.

2.3.3. Алгоритм решения:

Дана система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Оба уравнения уже приведены к нормальному виду:

$$\frac{d}{dt}v(t) = a * v(t) - b * \frac{u(t)}{u(t)+1} * v(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{u(t)}{u(t)+1} * v(t) - (u(t)+1)$$

Диапазон аргумента функции $t \in 0..20$, $a = 4, b = 7$.

Начальные значения: $u(0) = 20,\ v(0) = 5$.

Векторное представление задачи:

$$F_0(v,u,t) = \begin{bmatrix} a * v(t) - b * \dfrac{u(t)}{u(t)+1} * v(t) \\ \dfrac{u(t)}{u(t)+1} * v(t) - (u(t)+1) \end{bmatrix}$$

Зададим ещё вектор $s = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ и вектор начальных значений $s_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}$.

И с учётом вектора s перепишем F_0:

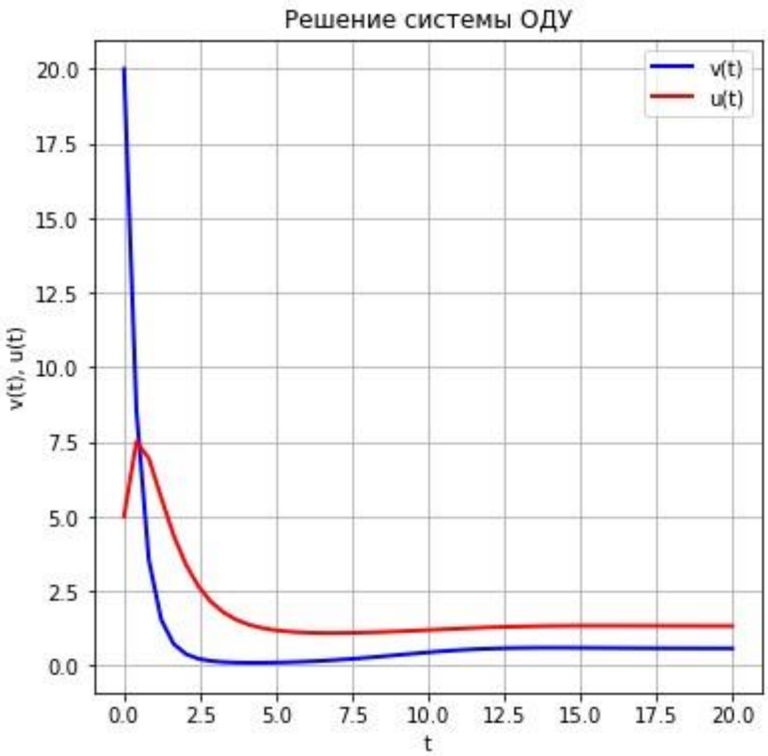
$$F_0(s,t) = \begin{bmatrix} a * s(0) - b * \dfrac{s(1)}{s(1)+1} * s(0) \\ \dfrac{s(1)}{s(1)+1} * s(0) - (s(1)+1) \end{bmatrix}$$

2.3.4. Реализация

Запускаемый файл task3.ipynb

Сохраненный пример в файле task3.html

При решении системы ОДУ через функцию odeint мы получили исходные функции v(t) и u(t). Вот их графическое представление:



3. ВЫВОД

С помощью функции odeint достаточно просто решаются обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Но для решения ОДУ второго порядка требуется провести некоторые преобразования к системе ОДУ первого порядка.