Лабораторная работа №2

«Моделирование проблем ракетостроения»

Выполнила: Рулева В.О.

Группа: ПИН-41

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

1. Исследование одноступенчатой ракеты.

Задайте параметры: u - скорость истечения сгорающего топлива (3 км/с); m0 - масса ракеты на старте; mp - "полезная" нагрузка; lambda - коэффициент структурной массы (ms). Вычислите ms, mt - массу топлива. Задайте закон изменения массы топлива mtt в процессе полета.

Исследуйте скорость ракеты v в зависимости от Ваших параметров. Обоснуйте выбор параметров и зависимость уменьшения массы топлива.

Сделайте выводы из своего исследования и отчет.

2. Исследуйте полет многоступенчатой ракеты. Идеализированную модель опишите самостоятельною

Сделайте выводы из своего исследования и отчет.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ:

2.1. Модель одноступенчатой ракеты

2.1.1. Описание модели:

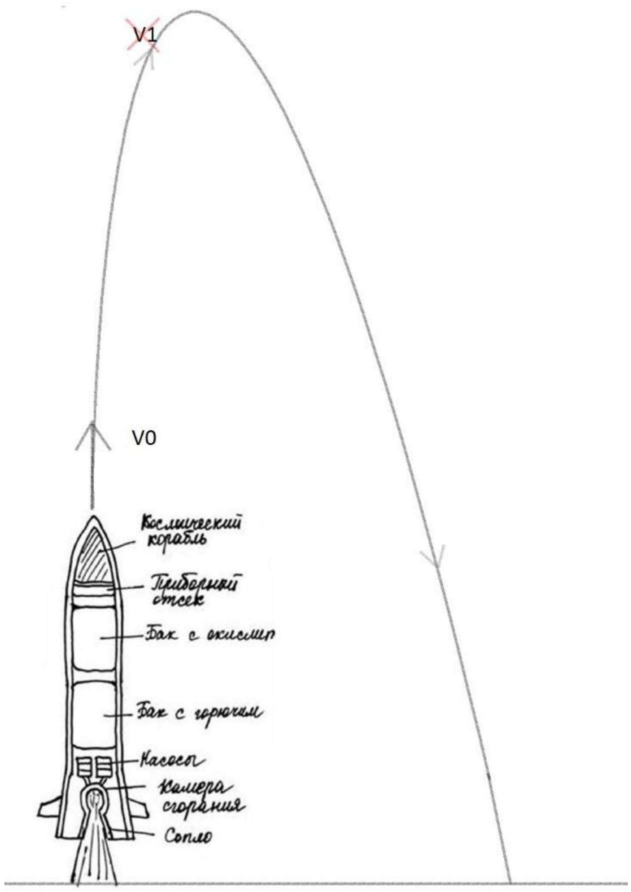
Параметры модели:

- m_0 – масса ракеты на старте, т;
- m_p – полезная нагрузка, т;
- m_s - структурная масса, т;
- lambda - коэффициент структурной массы;
- v_0 – начальная скорость ракеты, $v_0 = 0$ км/с;
- u - скорость истечения сгорающего топлива, u = 3 км/с;
- g – ускорение свободного падения, g = 9.80665 м/с^2.

Пространство состояний:

- v – текущая скорость ракеты, км/с;
- m_{tt} – текущая масса топлива, т.

Рисунок:



2.1.2. Постановка задачи:

Исследование скорости одноступенчатой ракеты в зависимости от заданных параметров.

Объект исследования: скорость полёта ракеты.

2.1.3. Идеализация объекта:

- Пренебрегаем сопротивлением воздуха;
- Пренебрегаем гравитацией;
- Действие иных внешних сил на ракету незначительно;
- Скорость сгорания топлива величина постоянная;
- Ускорение свободного падения величина постоянная.

2.1.4. Алгоритм решения:

Пусть продукты сгорания ракетного топлива покидают расположенные в кормовой части выхлопные сопла со скоростью u. За малый промежуток времени dt между моментами t и t + dt часть топлива выгорела, и масса ракеты изменилась на величину dm. Изменился также импульс ракеты, однако суммарный импульс системы «ракета плюс продукты сгорания» остался тем же, что и в момент t, т. е.

$$m(t) \cdot v(t) = m(t + dt) \cdot v(t + dt) - dm[v(t + \xi \cdot dt) - u]$$

Учитывая, что $m(t + dt) = m(t) + \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot dt + \theta(dt^2)$, закон сохранения импульса можно переписать в виде дифференциального уравнения:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} \cdot u$$

в котором член $-\frac{dm}{dt} \cdot u$ – сила тяги ракетных двигателей, и которое, будучи преобразованным к виду: $\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt}$, легко интегрируется:

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

Если $v_0 = 0$, то максимальная скорость ракеты, достигаемая при полном сгорании топлива, равна

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m_p + m_s}$$

где m_p – полезная масса, m_s – структурная масса.

2.1.5. Реализация

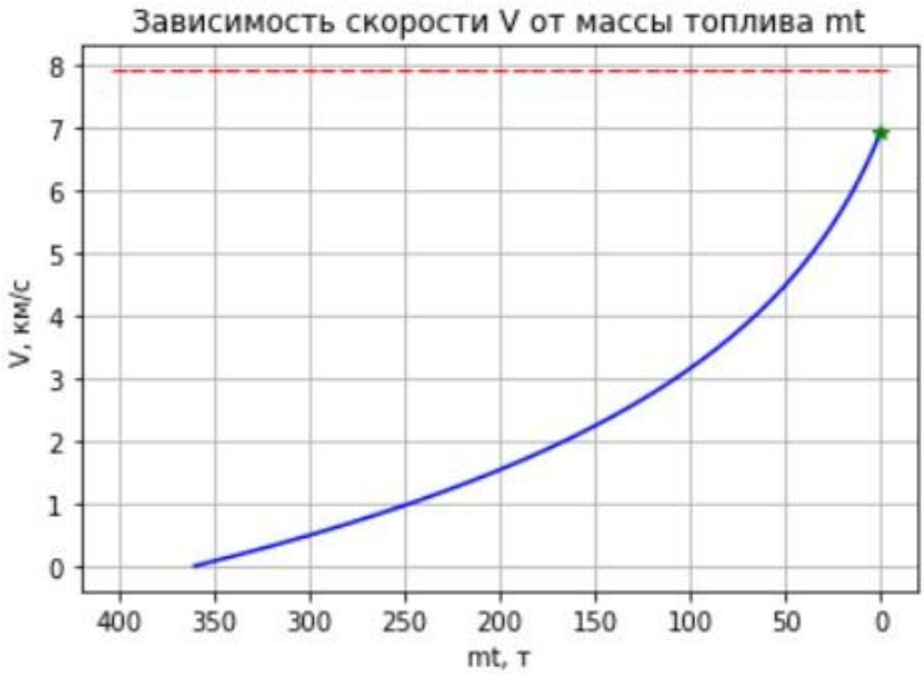
Запускаемый файл task1.ipynb

Сохраненный пример в файле task1.html

При m0 = 400 т, mp - 0% от m0, ms - 10% от m0, mt - 90% от m0.

Для практически реальных значений и при нулевой полезной нагрузке получаем такой график:

```
Vmax: 6.907380302393132
V1: 7.91
```



Чтобы увеличить скорость ракеты нужно увеличить массу топлива за счёт уменьшения полезной нагрузки и структурной массы. Но мы не можем настолько сильно уменьшить структурную массу, поэтому первую космическую скорость невозможно достичь одноступенчатой ракетой.

2.2. Модель многоступенчатой ракеты

2.2.1. Описание модели:

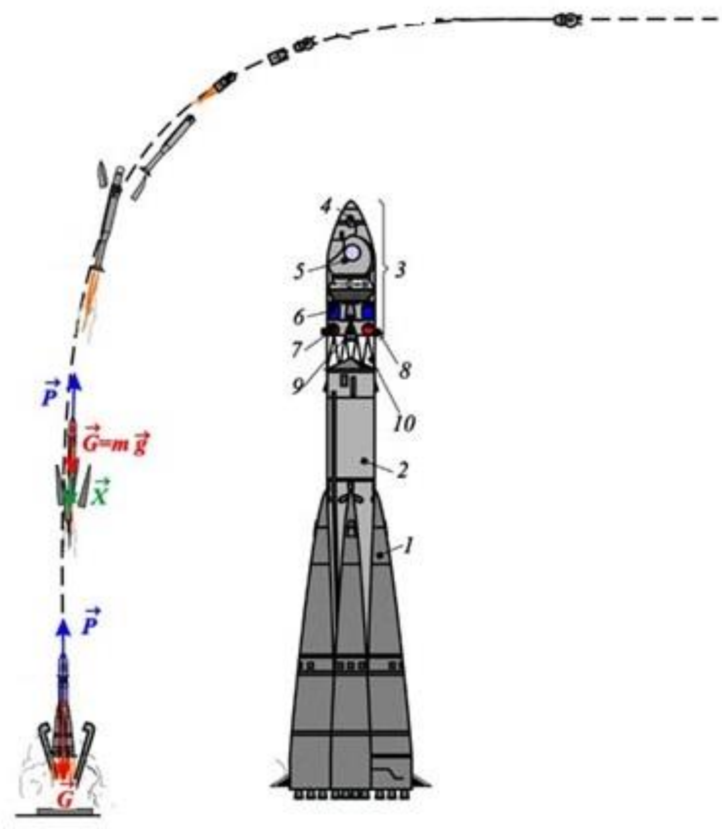
Параметры модели:

- m_0 – масса ракеты на старте, т;
- m_p – полезная нагрузка, т;
- m_i – масса i-й ступени, т;
- λ - коэффициент структурной массы;
- λm_i – i-я структурная масса, т;
- v_0 – начальная скорость ракеты, $v_0 = 0$ км/с;
- u - скорость истечения сгорающего топлива, u = 3 км/с;
- g – ускорение свободного падения, g = 9.80665 м/с^2.

Пространство состояний:

- v – текущая скорость ракеты, км/с;
- m – текущая масса ракеты, т.

Рисунок:



2.2.2. Постановка задачи:

Исследование скорости многоступенчатой ракеты в зависимости от заданных параметров.

Объект исследования: скорость полёта ракеты.

2.2.3. Идеализация объекта:

- Пренебрегаем сопротивлением воздуха;
- Пренебрегаем гравитацией;
- Действие иных внешних сил на ракету незначительно;
- Скорость сгорания топлива величина постоянная;
- Ускорение свободного падения величина постоянная.

2.2.4. Алгоритм решения:

Возьмем для определенности число ступеней $n = 3$. Начальная масса такой ракеты равна

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

Рассмотрим момент, когда все топливо первой ступени израсходовано и масса ракеты равна

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

Тогда по формуле одноступенчатой модели скорость ракеты равна

$$v_1 = uln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

После достижения скорости v_1 структурная масса λm_1 отбрасывается и включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент равна

$$m_p + m_2 + m_3$$

Тогда после выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты

$$v_2 = v_1 + uln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$$

Аналогично для третьей ступени. После отключения ее двигателей скорость ракеты равна

$$v_3 = v_2 + uln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)$$

Эту цепочку нетрудно продолжить для любого числа ступеней и получить соответствующие формулы. В случае же $n = 3$ для окончательной скорости имеем

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)\right\}$$

Вводя величины

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$$

Получаем

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)}\right)\left(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)}\right)\left(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)}\right)\right\}$$

Данное выражение симметрично относительно α_i, и нетрудно показать, что его максимум достигается в симметричном случае, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При этом для $i = 3$

$$\alpha = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda}\right), P = \exp\left(-\frac{v_3}{3u}\right)$$

Произведение $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^3 = \frac{m_0}{\boldsymbol{m_p}} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3$

Для многоступенчатой ракеты имеем:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda}\right)^n, P = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)$$

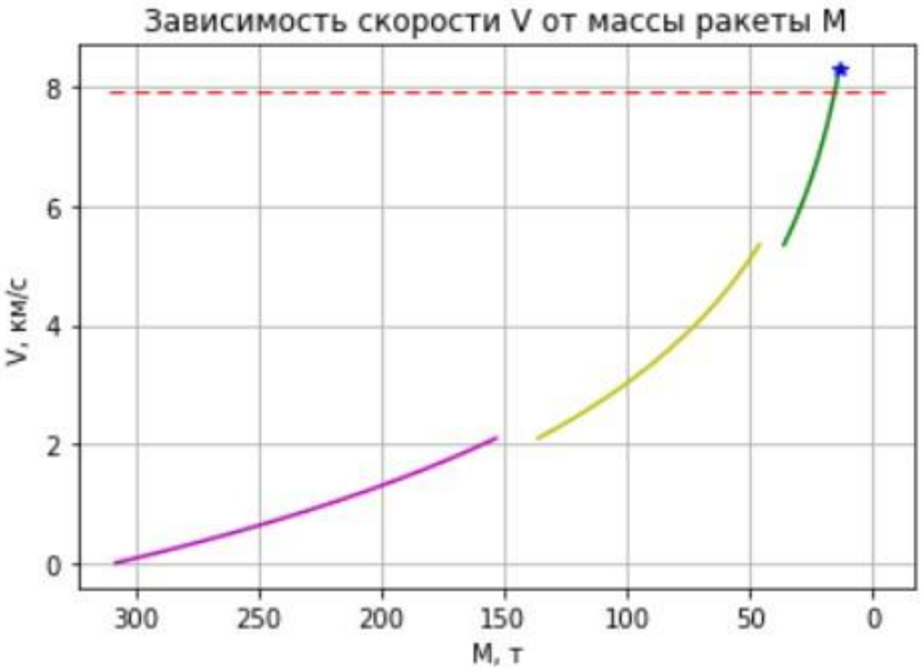
2.2.5. Реализация

Запускаемый файл task2.ipynb

Сохраненный пример в файле task2.html

Беру существующие значения масс трёхступенчатой ракеты и её ступеней: m0 = 308 т, m1 = 172 т, m2 = 100 т, m3 = 25 т. Получаем такой график:

```
Vmax1: 2.0949686673690735
Vmax2: 5.346683065868918
Vmax3: 8.288059919506068
V_1: 7.91
```



Первая космическая скорость достигнута!

3. ВЫВОД

Модель 1. Реальная одноступенчатая ракета неспособна развить первую космическую скорость. Причина этого — затраты горючего на разгон ненужной, отработавшей части структурной массы. Следовательно, при движении ракеты необходимо периодически избавляться от балласта.

В практической конструкции это означает, что ракета состоит из нескольких ступеней, отбрасываемых по мере их использования. Модель 2 представляет собой именно такую многоступенчатую ракету и доказывает, что при такой конструкции возможно достижение первой космической скорости.