Лабораторная работа №5

«Хищник-Жертва»

Выполнила: Рулева В.О.

Группа: ПИН-41

1. ЗАДАНИЕ:

Изучить материал по книге Самарского, Михайлова стр. 171. Предложите усложнения модели и проведите исследование.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ:

2.1. Модель системы «Хищник-Жертва»

2.1.1. Описание модели:

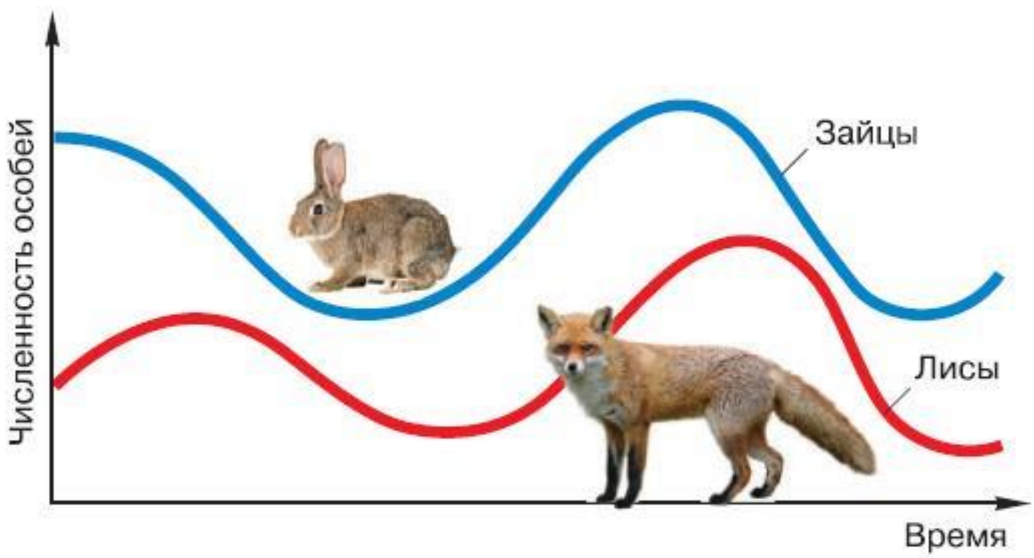
Параметры модели:

- N(0) – начальная численность популяции жертв;
- M(0) – начальная численность популяции хищников;
- α – коэффициент рождаемости жертв;
- β – коэффициент смертности хищников;
- c – коэффициент влияния численности хищников на численность жертв;
- d – коэффициент влияния численности жертв на численность хищников.

Пространство состояний:

- t – время;
- N(t) – численность популяции жертв;
- M(t) – численность популяции хищников.

2.1.2. Рисунок:



2.1.3. Постановка задачи:

Исследование изменения численности жертвы, которая в свою очередь сказывается на численности хищника.

Объект исследования: численность двухвидовой системы «хищник-жертва».

2.1.4. Идеализация объекта:

- Численности популяций жертв и хищников зависят только от времени (точечная модель, не учитывающая пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
- В отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса; при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает, так как им в этом случае нечем питаться:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \qquad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0;$$

- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными, т.е. смертность жертв обуславливается тем, что их поедают хищники, а рождаемость хищников обуславливается тем, что они поедают жертв;
- Эффект насыщения численности обоих популяций не учитывается;
- Скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников, т.е. величине

$$cM,\ c > 0.$$

  А темп роста хищников увеличивается пропорционально численности жертвы, т.е. величине

$$dN,\ d > 0.$$

2.1.5. Алгоритм решения:

Объединяя упрощающие предположения, приходим к системе уравнений Лотки - Вольтера:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM)N,$$
$$\frac{dM}{dt} = (-\beta + dN)M.$$

Из этой системы по начальным численностям N(0) при t=0 и M(0) при t=0 определяется численность популяции в любой момент t>0.

Поделим первое уравнение на второе, чтобы избавиться от t:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)N}{(-\beta + dN)M}$$

Уравнения имеют положение равновесия, т.е. стационарные, не зависящие от времени, решения:

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \qquad N_0 = \frac{\beta}{d}$$

Зададимся вопросом об устойчивости положения равновесия. Чтобы понять временную динамику функций N(t) и M(t), преобразуем полученное уравнение:

$$dN(-\beta + dN)M = dM(\alpha - cM)N$$

Поделим обе части уравнения на NM и перенесем всё в левую часть:

$$\beta \frac{dN}{N} - ddN + \alpha \frac{dM}{M} - cdM = 0$$

Проинтегрировав, получим соотношение:

$$\beta lnN - dN + \alpha lnM - cM = const$$

Константа в правой части определяется по начальным значениям N(0) и M(0). Другими словами, начальная система имеет интеграл вида

$$lnN^{\beta} + lne^{-dN} + lnM^{\alpha} + lne^{-cN} = C$$

Потенцируя последнее выражение, получаем интеграл вида:

$$N^{\beta} e^{-dN} = C_1 M^{-\alpha} e^{cM}, C_1 > 0$$

2.1.6. Реализация

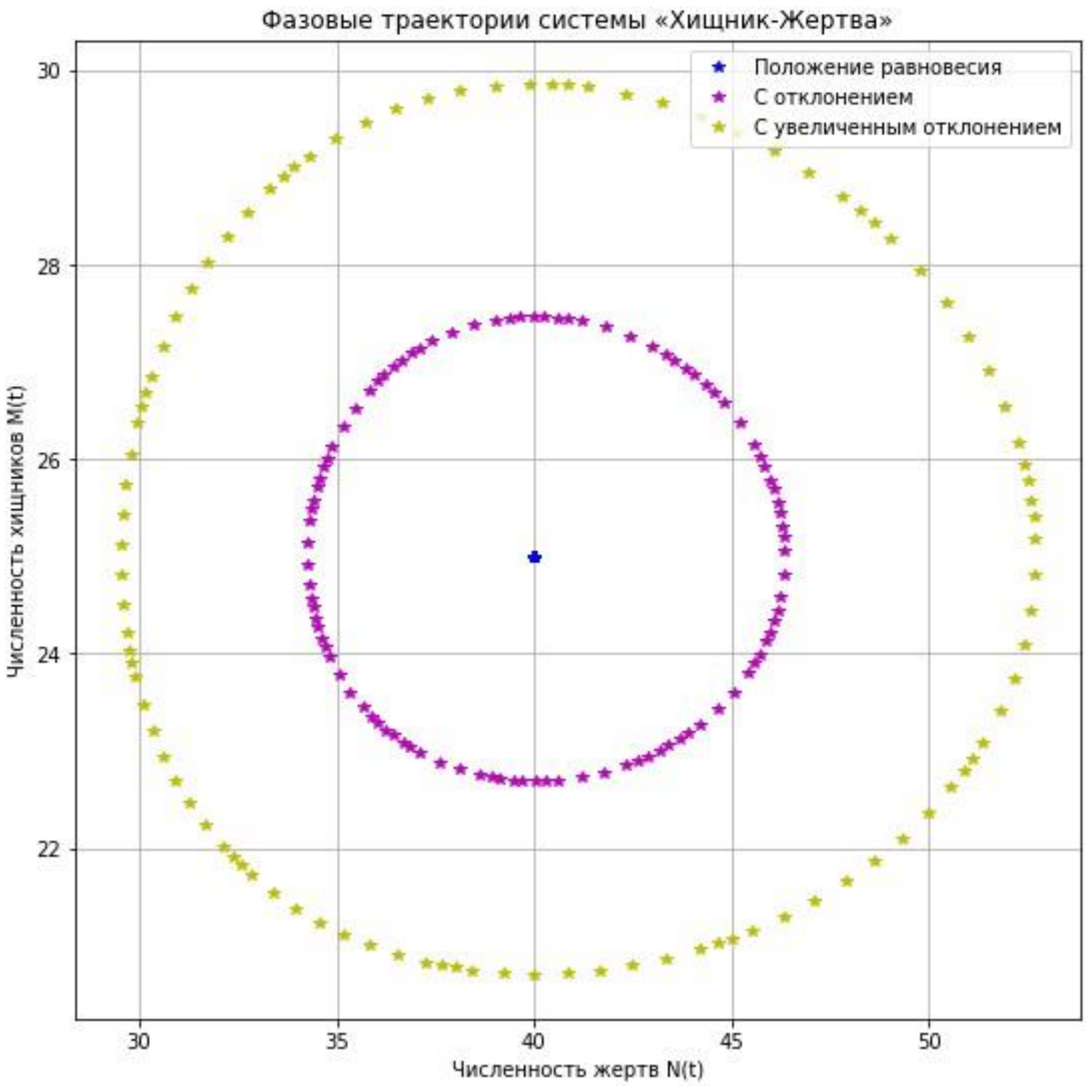
Запускаемый файл task1.ipynb

Сохраненный пример в файле task1.html

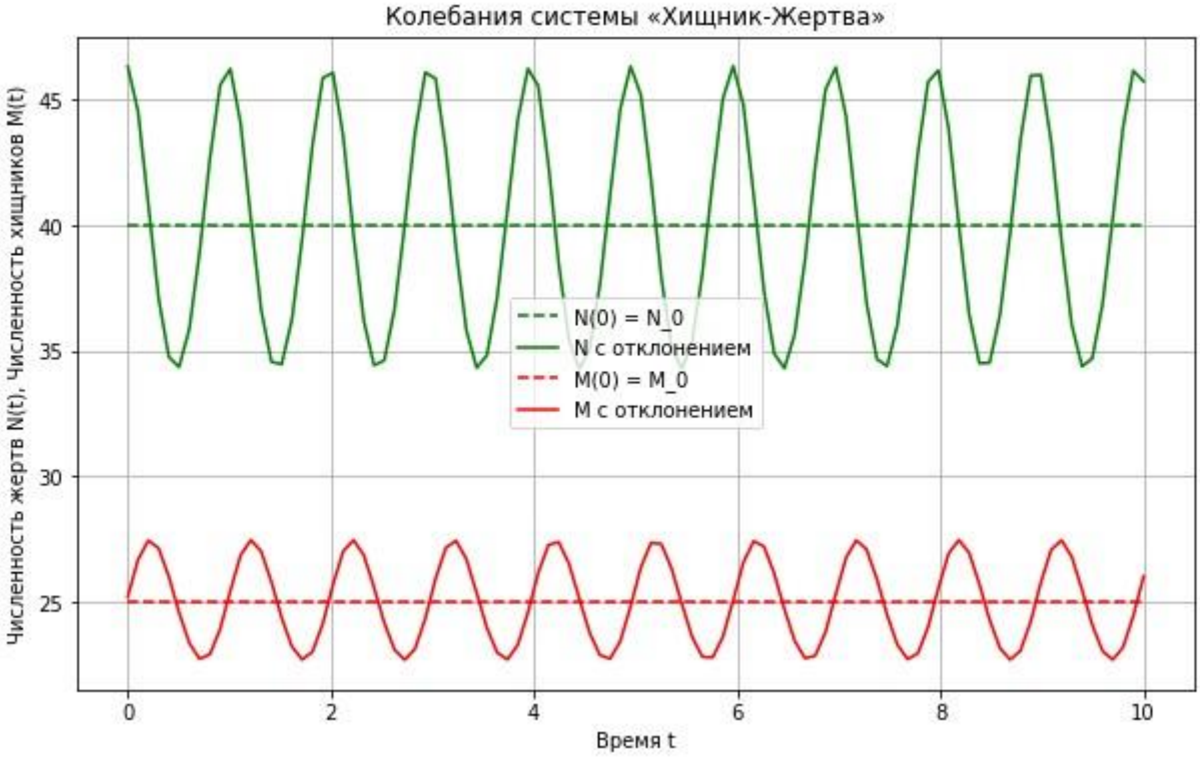
Рассчитав положения равновесия N_0 и M_0 в зависимости от коэффициентов α, β, c и d, получим:

```
Положение равновесия жертв = 40.0
Положение равновесия хищников = 25.0
```

На графике фазовых траекторий заметно, что, если численности даже ненамного отклоняются от равновесных, то система не вернётся в положение равновесия.



Если $N(0) = N_0$, $M(0) = M_0$, то во все моменты времени численности популяций не меняются. А при отклонении от положения равновесия численности как хищников, так и жертв с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а колеблются относительно равновесной численности.



2.2. Модель системы «Хищник-Жертва» с эффектом насыщения

2.2.1. Описание модели:

Параметры модели:

- N(0) – начальная численность популяции жертв;
- M(0) – начальная численность популяции хищников;
- α – коэффициент рождаемости жертв;
- β – коэффициент смертности хищников;
- c – коэффициент влияния численности хищников на численность жертв;
- d – коэффициент влияния численности жертв на численность хищников;
- $\gamma -$ коэффициент насыщения численности жертв;
- $\varphi -$ коэффициент насыщения численности хищников.

Пространство состояний:

- t – время;
- N(t) – численность популяции жертв;
- M(t) – численность популяции хищников.

2.2.2. Постановка задачи:

Исследование изменения численности жертвы, которая в свою очередь сказывается на численности хищника, но с учётом эффекта насыщения численности обоих популяций.

Объект исследования: численность двухвидовой системы «хищник-жертва».

2.2.3. Идеализация объекта:

- Численности популяций жертв и хищников зависят только от времени (точечная модель, не учитывающая пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
- В отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса; при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает, так как им в этом случае нечем питаться:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \qquad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0;$$

- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными, т.е. смертность жертв обуславливается тем, что их поедают хищники, а рождаемость хищников обуславливается тем, что они поедают жертв;
- Скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников, т.е. величине

$$cM,\ c > 0.$$

А темп роста хищников увеличивается пропорционально численности жертвы, т.е. величине

$$dN,\ d > 0.$$

2.2.4. Алгоритм решения:

Добавим в систему уравнений Лотки – Вольтера коэффициент насыщения численности жертв γ и коэффициент насыщения численности хищников φ:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM - \gamma N)N,$$
$$\frac{dM}{dt} = (-\beta + dN - \varphi M)M.$$

2.2.5. Реализация

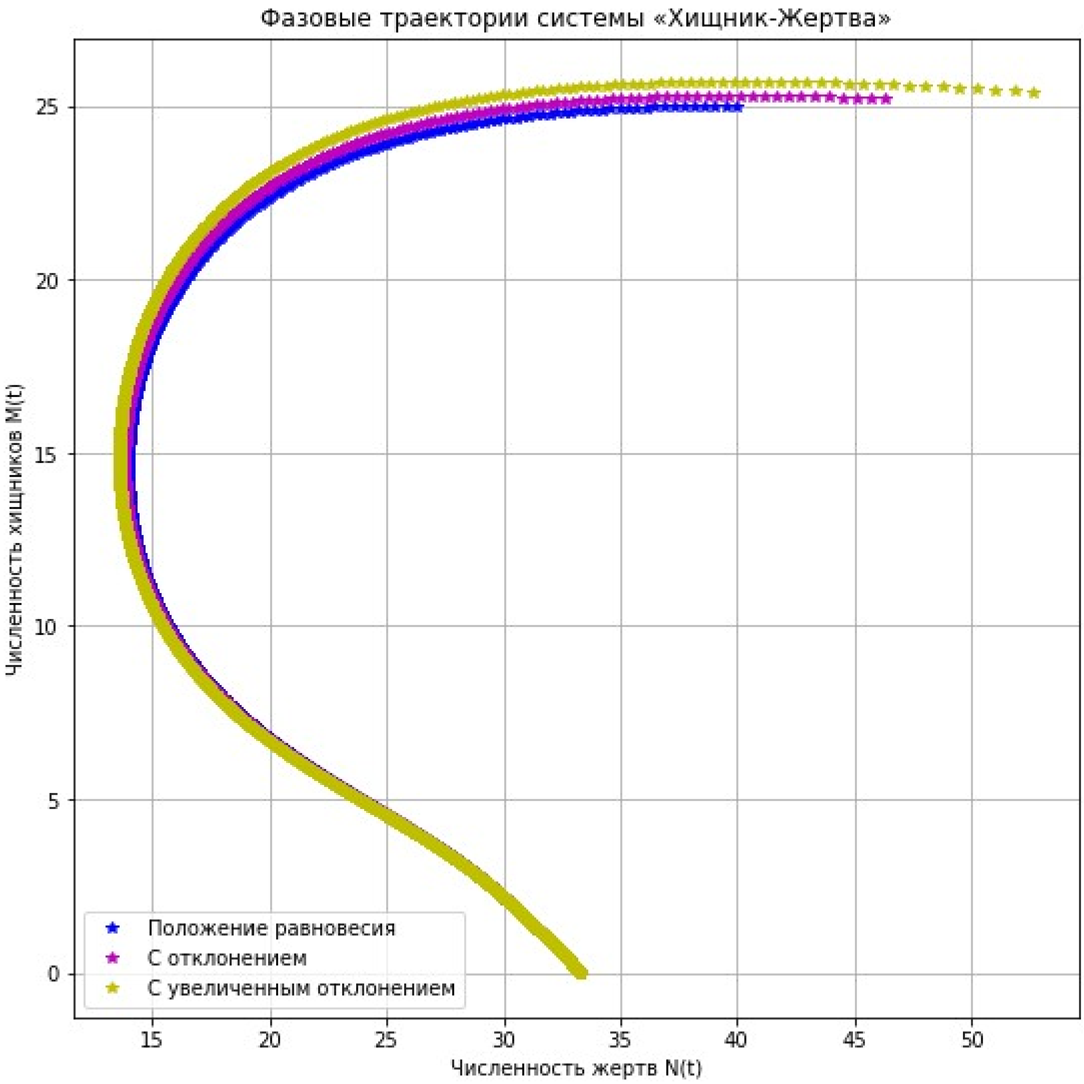
Запускаемый файл task2.ipynb

Сохраненный пример в файле task2.html

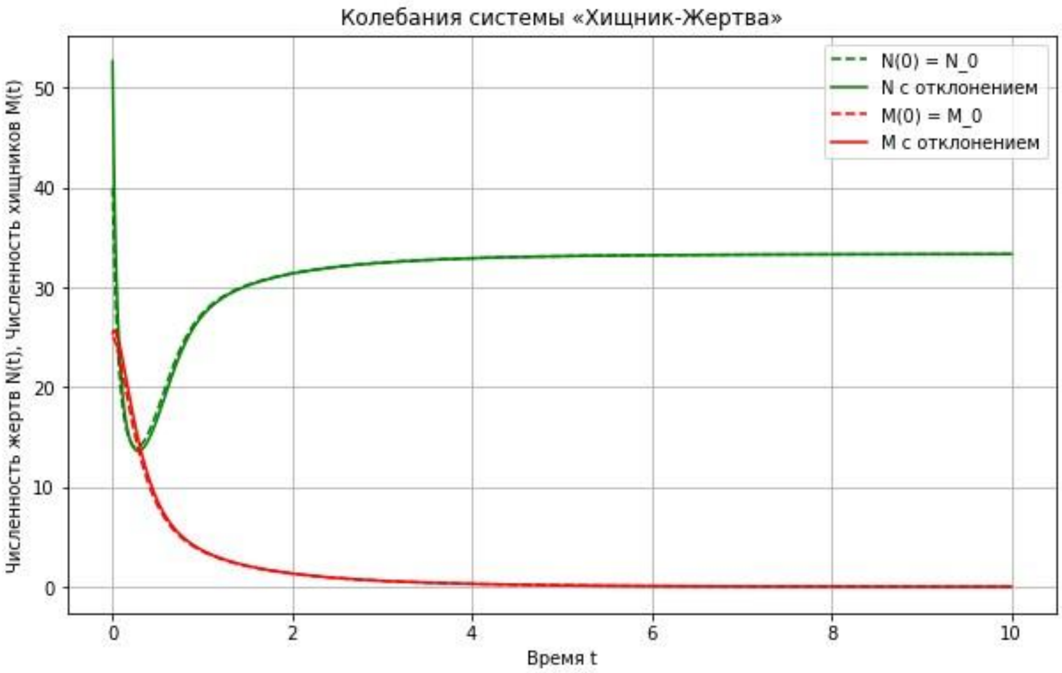
Берём такие же значения, как и в предыдущей реализации:

```
Положение равновесия жертв = 40.0
Положение равновесия хищников = 25.0
```

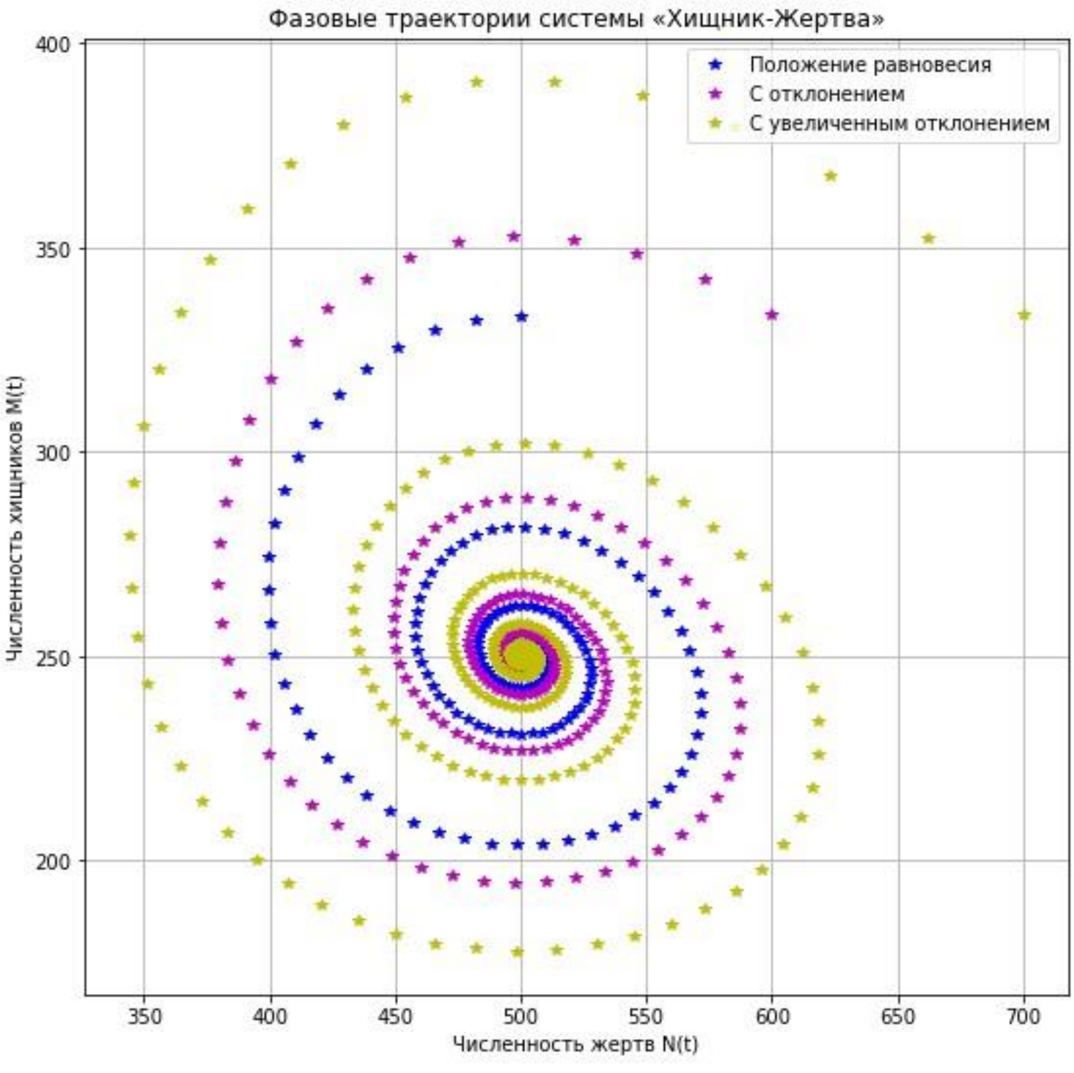
Задав только коэффициент насыщения численности жертв γ, получаем другие фазовые траектории. Можно заметить с течением времени, что численность жертв, что численность хищников сводятся к своим положениям равновесия.



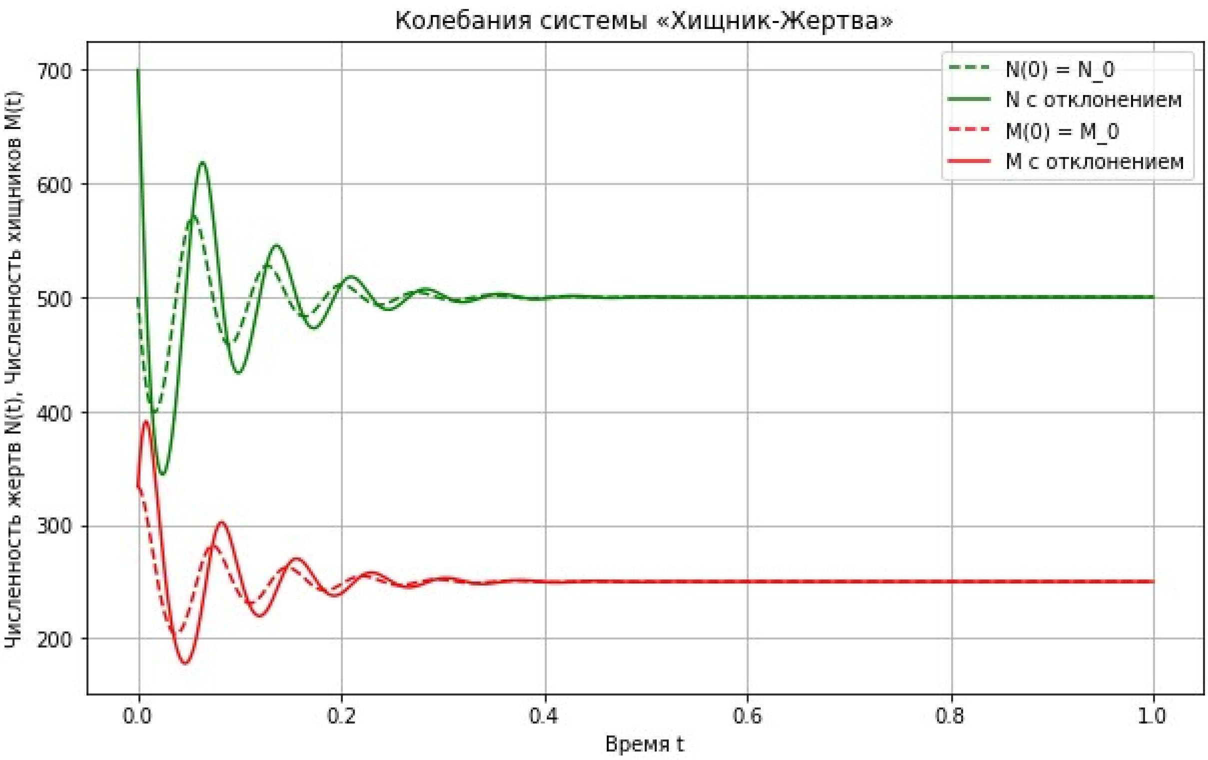
На графике колебаний же видно, что обе популяции довольно быстро сошлись к некоторым новым положениям равновесия.



Изменив начальные условия и добавив коэффициент насыщения численности хищников φ, теперь однозначно видно, что фазовые траектории имеют вид сходящихся спиралей:



А амплитуда колебаний уменьшается с течением времени.



3. ВЫВОД

Первая модель адекватна, но, конечно же, с учётом наших допущений и в рамках идеализации системы «Хищник-Жертва». Небольшое отклонение от равновесных значений и система уже не сможет прийти к положению равновесия, а будет лишь колебаться около него.

В реальности же система после отклонения может вернуться в положение равновесия, что и отражает вторая модель, в которой учитывается эффект насыщения численности популяций.