Лабораторная работа №3

«Противоракетная оборона»

Выполнила: Рулева В.О.

Группа: ПИН-41

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

"Противник" производит пуск ракеты класса "земля-земля" из т. А со скоростью v0=1000 м/с под углом pi/4 по цели в т. Д, расположенной на Вашей территории (расстояние L между тт. А и Д можно рассчитать). Старт мгновенно фиксируется со спутника и после принятия решения о противодействии начинается телеметрия траектории ракеты. Ежесекундно измеряются (к сожалению, с неизбежными ошибками) координаты траектории движения ракеты на пассивном участке траектории с 15-й по 40-ю секунды полета. Полученные данные обрабатываются для получения уравнения движения ракеты. Одна антиракета должна стартовать из точки С, расположенной на расстоянии 0.75L от т. А (или 0.25L от т. Д) не позднее, чем ракета пройдет через максимальную по высоте точку своей траектории) и поразить ракету в полете, другая антиракета из этой же точки С должна накрыть пусковую площадку противника (оцененное по измерениям положение т. А). Стартовая Скорость антиракеты u0=2000 м/с, а угол старта и момент старта Вам необходимо определить.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ:

2.1. Моделирование движения тела (ракеты), брошенного под углом к горизонту

2.1.1. Задание

Опишите уравнениями движение тела, брошенного под углом к горизонту с начальной скоростью v_0 под углом а (сопротивлением воздуха пренебрегаем, т.е. в полете на ракету действует только сила тяжести). Докажите, что максимальная дальность полета получается при стрельбе под углом pi/4. Рассчитайте траекторию движения ракеты "противника" с расчетом на максимальную дальность полета. Определите время подъема на максимальную высоту T_1, время полета T_2, дальность полета L, начальные скорости по осям v0x, v0y и координаты ракеты x и y для моментов времени t=0:1:T2; Убедитесь в правильности построений с помощью графика plot(x,y)

2.1.2. Описание модели:

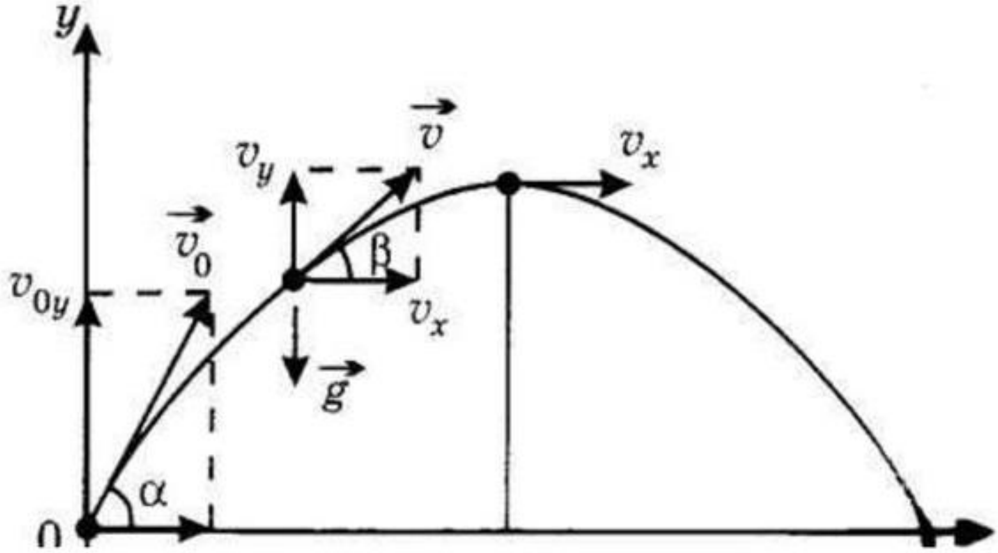
Параметры модели:

- v_0 – начальная скорость ракеты, v_0 = 1000 м/с;
- v_{0x} – начальная скорость ракеты по оси x, м/с;
- v_{0y} - начальная скорость ракеты по оси y, м/с;
- α – начальный угол запуска ракеты, рад или °;
- g – ускорение свободного падения, g = 9.80665 м/с^2.

Пространство состояний:

- $x(t)$, $y(t)$ – текущие координаты ракеты в пространстве;
- $v_x(t)$ – текущая скорость ракеты по оси x, м/с;
- $v_y(t)$ – текущая скорость ракеты по оси y, м/с;
- $v(t)$ – текущая скорость ракеты, м/с;
- T_1 – время подъёма на максимальную высоту, с;
- T_2 – время полёта ракеты, с;
- L – дальность полёта;
- H – высота подъёма тела.

Рисунок:



2.1.3. Постановка задачи:

Исследование дальности полёта тела (ракеты), брошенного под углом к горизонту при различных значениях начального угла запуска ракеты.

Объект исследования: дальность полёта тела (ракеты).

2.1.4. Идеализация объекта:

- Пренебрегаем сопротивлением воздуха;
- Двигатели ракеты отработали на старте, т.е. всю скорость она получает сразу;
- Ракета – материальная точка;
- Земля – бесконечно плоская;
- Ускорение свободного падения величина постоянная.

2.1.5. Алгоритм решения:

Пусть тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v0. Составим уравнения движения тела:

Проекции начальных скоростей: $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cdot sin\alpha \end{cases}$

Проекции скоростей в каждый момент времени:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha \\ v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \cdot sin\alpha - gt \end{cases}$$

Уравнения координат:

$$\begin{cases} x(t) = v_x(t)t = v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y(t) = v_y(t)t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Так как ракета стартует и падает при y = 0, то можем выразить время полёта ракеты из уравнения координаты y:

$$0 = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$t = T_2 = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$$

Ракета достигнет максимальной высоты в половину времени от всего полета:

$$t = T_1 = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$$

Зная время всего полёта T_2, можем получить высоту подъема тела H и дальность полета L:

$$H = v_0 sin\alpha \frac{v_0 sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2\, sin^2\alpha}{2g}$$

$$L = v_x(t)t = v_x(t)T_2 = \frac{2v_0 sin\alpha\; v_0 cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

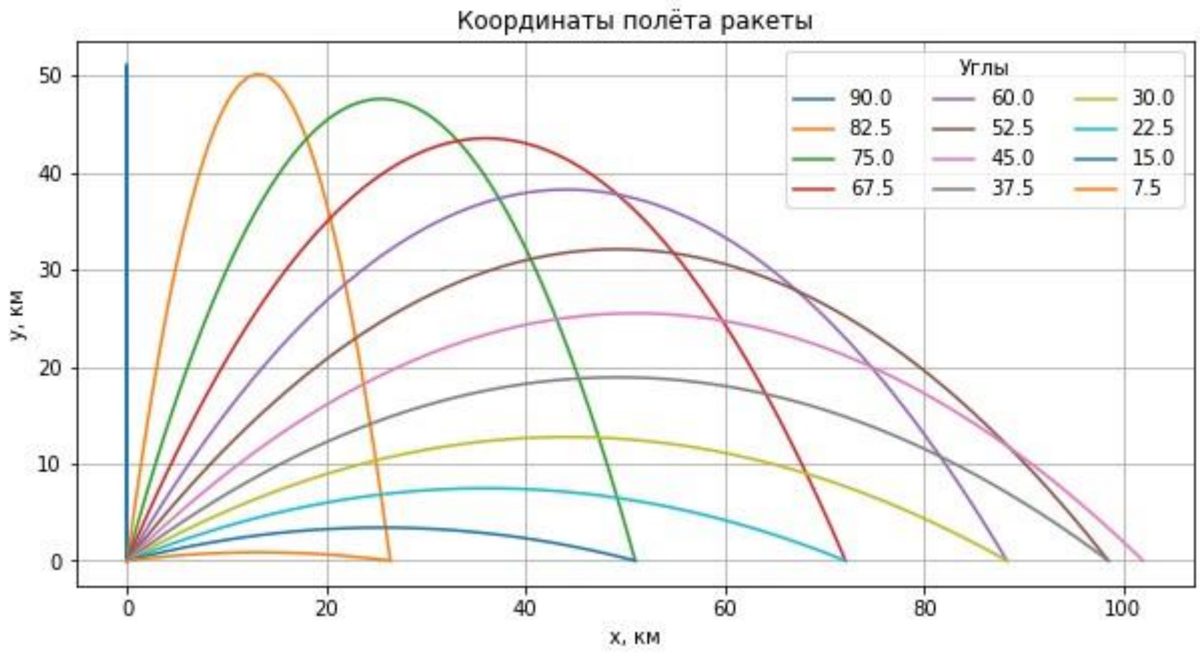
Как видно из последней формулы максимальная дальность полета достигается только в том случае, если $\sin(2\alpha) = 1$, а это может быть, только если угол равен Pi/2. Получаем максимальную дальность полета ракеты:

$$L = \frac{v_0^2}{g}$$

2.1.6. Реализация

Запускаемый файл task1.ipynb

Сохраненный пример в файле task1.html



Не трудно заметить, что наибольшая дальность полёта ракеты L будет при угле запуска ракеты $\alpha = 45°$ (розовая).

С данным углом запуска и при начальной скорости ракеты $v_0 = 1000$ м/с получаем следующие значения времени подъёма на максимальную высоту (T_1), высоты подъёма тела (H), времени полёта ракеты (T_2) и дальности полёта (L):

```
A = 45°
T1 = 72.10 с
H = 25.49 км
T2 = 144.21 с
L = 101.97 км
```

2.2. Моделирование телеметрии траектории ракеты противника

2.2.1. Задание

Смоделируйте результаты измерений траектории в 26 последовательных точках, начиная с 15-й секунды полета

xe=x(15:40);

for i=1:26,ye(i)=y(i+14)(1+alfa*randn);end

здесь alfa - параметр, характеризующий ошибку измерений. Выберем его для начала равным .01 и в дальнейшем изучите его влияние на результат. Рассмотрите результаты на графике

plot(xe,ye,'+',x(15:40),y(15:40))

Для нахождения коэффициентов параболы (траектории) по измеренным значениям ye решим переопределенную систему уравнений с матрицей

```
xe=xe'; ye=ye';A=[xe.^2 xe ones(26,1)];
```

(A*koef=ye, где вектор koef - вектор коэффициентов квадратного трехчлена, описывающего исследуемую траекторию движения ракеты. Решать эту систему будем методом наименьших квадратов. Найдем матрицу нормальной системы уравнений

```
AA=A'*A
```

С грустью констатируем, что она плохо обусловлена (вычислим число обусловленности матрицы)

```
cond(AA)
```

Домножим слева на A' и правую часть ye

```
A'*ye;
```

и найдем вектор искомых коэффициентов

```
koef=inv(AA)*A'*ye'
```

Вычислим "искомые" координаты траектории

```
yet=A*koef;
```

и сравним графически траектории

```
plot(xe,ye,'+',x(15:40),y(15:40),x(15:40),yet)
```

и оценим все отклонения, например:

```
max(abs(ye'-y(15:40)))
```

Восстановим всю траекторию

```
yey=[(x.^2)' x' ones(145,1)]*koef;
```

и сравним истинную и восстановленную траектории

```
plot(x,yey,'+',x,y,'r*')
```

Задумаемся о роли величины ошибки (см. alfa) и возможности решить поставленную задачу.

Получит у преподавателя индивидуальные значения параметров u0 и положение т. С

В отчет включите описание построения модели и обоснуйте упрощающие предположения.

2.2.2. Описание модели:

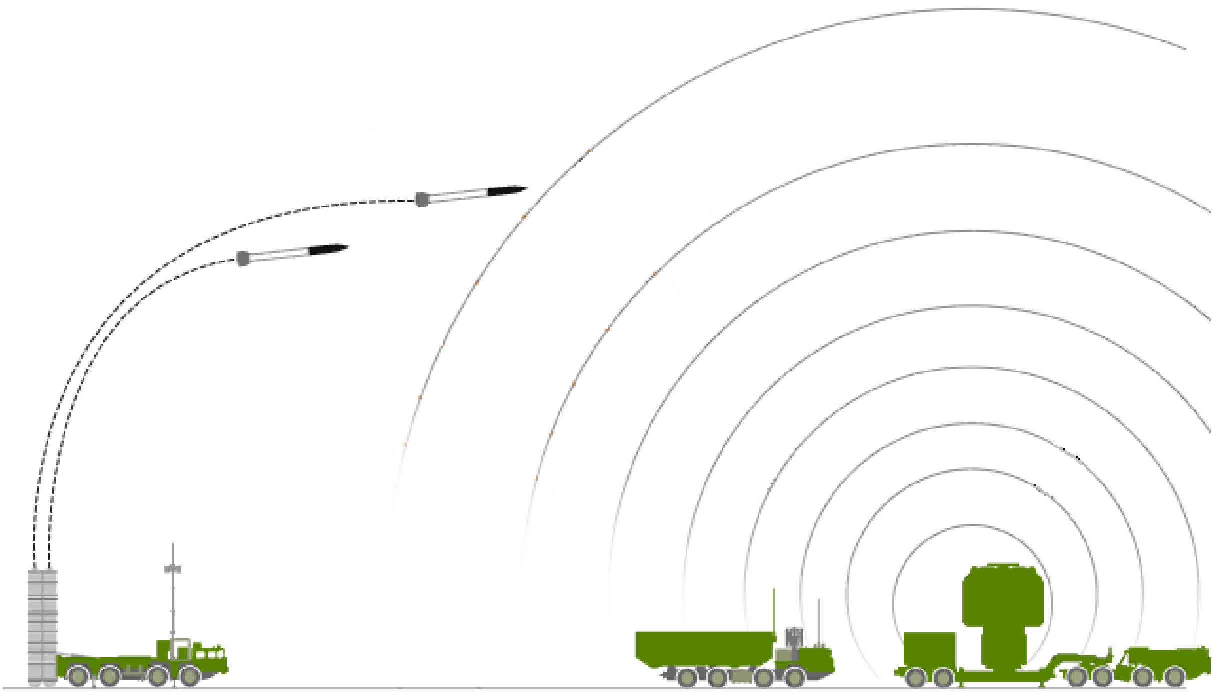
Параметры модели:

- v_0 – начальная скорость ракеты, $v_0 = 1000$ м/с;
- α – начальный угол запуска ракеты, $\alpha = 45°$;
- T_2 – время полёта ракеты, с = 144 с;
- g – ускорение свободного падения, g = 9.80665 м/с^2;
- alfa - параметр, характеризующий ошибку измерений.

Пространство состояний:

- x(t), y(t) – текущие координаты ракеты в пространстве;
- v(t) – текущая скорость ракеты, м/с.

Рисунок:



2.2.3. Постановка задачи:

Смоделировать результаты измерений траектории ракеты в 26 последовательных точках, начиная с 15-й секунды полета. Восстановить полную траекторию полёта ракеты.

2.2.4. Идеализация объекта:

- Пренебрегаем сопротивлением воздуха;
- Двигатели ракеты отработали на старте, т.е. всю скорость она получает сразу;

- Ракета – материальная точка;
- Ракета запущена ровно под углом α;
- Земля – бесконечно плоская;
- Ускорение свободного падения величина постоянная.

2.2.5. Алгоритм решения:

Отследим полет ракеты в определённый промежуток времени с помощью спутника/локатора. Ежесекундно измеряются (с погрешностью alfa) координаты траектории движения ракеты на пассивном участке траектории с 15-й по 40-ю секунды полета.

Мы знаем, что ракета имеет баллистический характер движения и можем оценить параметры ее движения. Решать эту систему будем методом наименьших квадратов. Пусть $\overline{xe}$ и $\overline{ye}$ – вектора-столбцы замеров спутника. Тогда A * $\overline{koef}$ = $\overline{ye}$, где $\overline{koef}$ - вектор-столбец коэффициентов квадратного трехчлена и

$$A = \begin{bmatrix} xe_1^2 & xe_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ xe_{26}^2 & xe_{26} & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу нормальной системы уравнений: AA=A'·A.

Вычисляя число обусловленности матрицы AA, понимаем, что она плохо обусловлена. Домножаем A * $\overline{koef}$ = $\overline{ye}$ слева и справа на A' и найдем $\overline{koef}$: $\overline{koef}$ = inv(AA) *A' * $\overline{ye}$.

Вычисляем восстановленную траекторию: $\overline{ye}$' = A * $\overline{koef}$.

2.2.6. Реализация

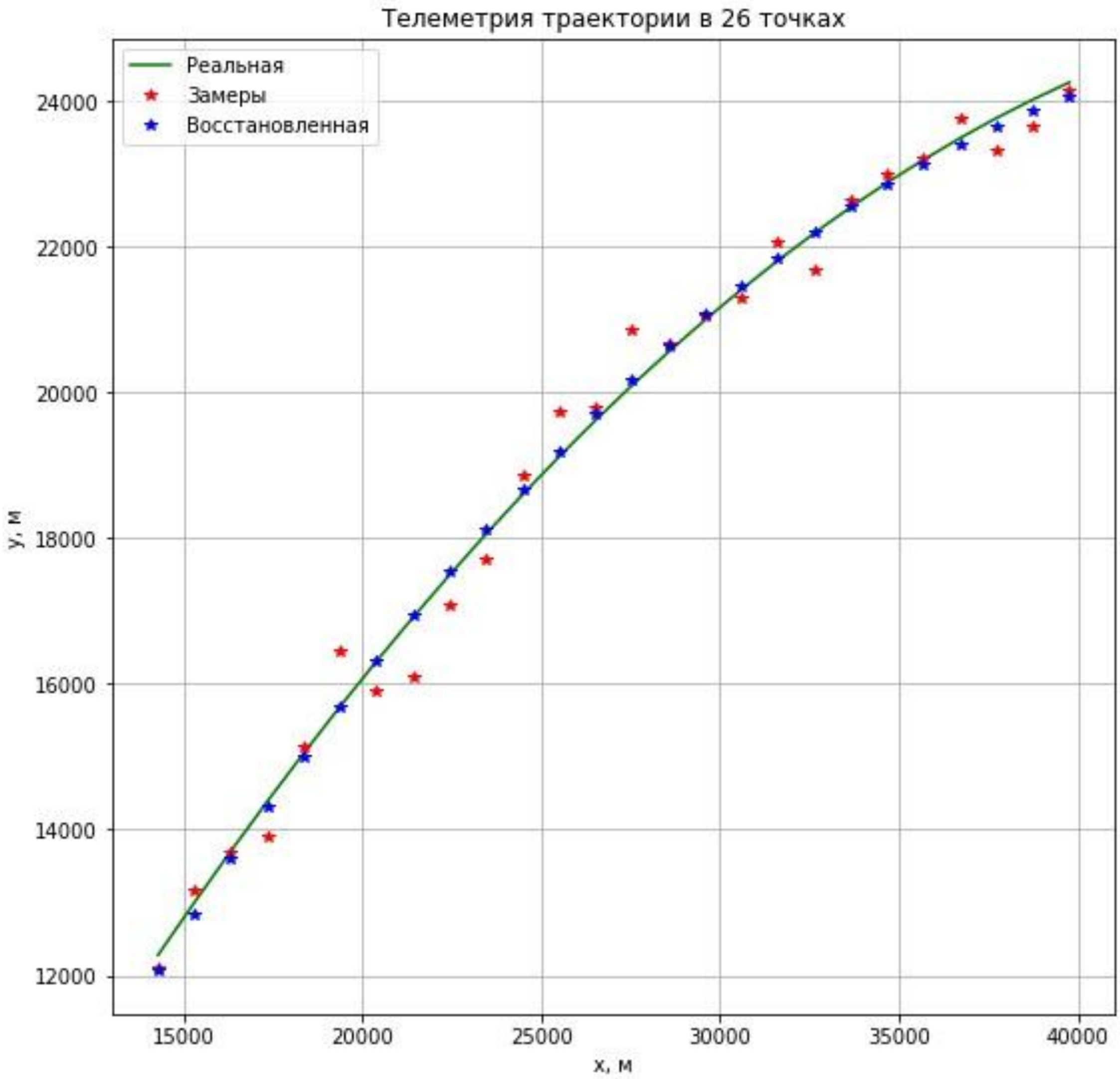
Запускаемый файл task2.ipynb

Сохраненный пример в файле task2.html

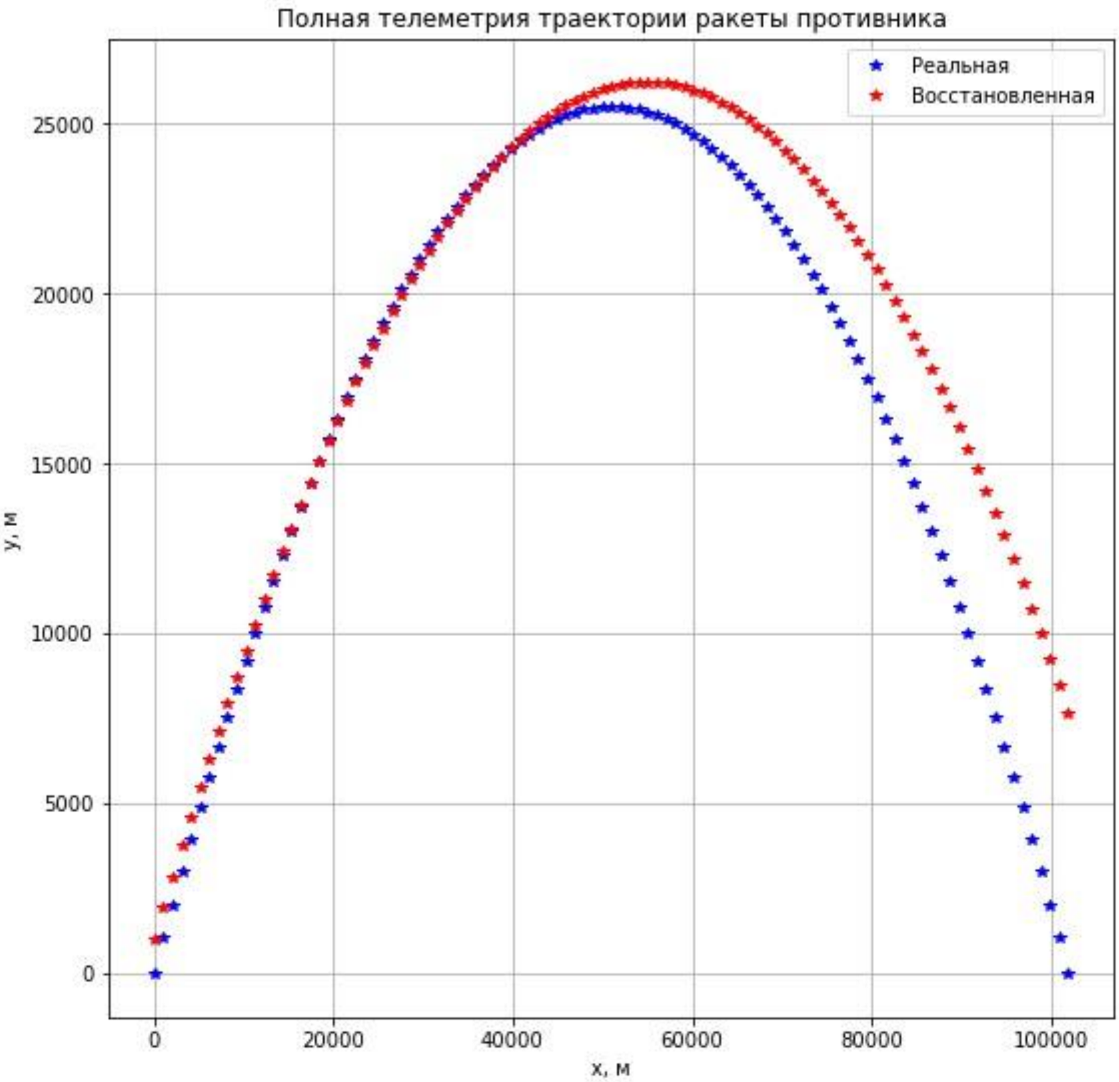
При погрешности alfa = 0,02 получаем такое максимальное отклонение измеренных координат от реальных:

```
Макс отклонение = 945.84 м
```

Измерив 26 точек локатором, восстанавливаем часть траектории полёта ракеты:



Потом восстанавливаем полную траекторию полета:



2.3. Моделирование полёта антиракет

2.3.1. Описание модели:

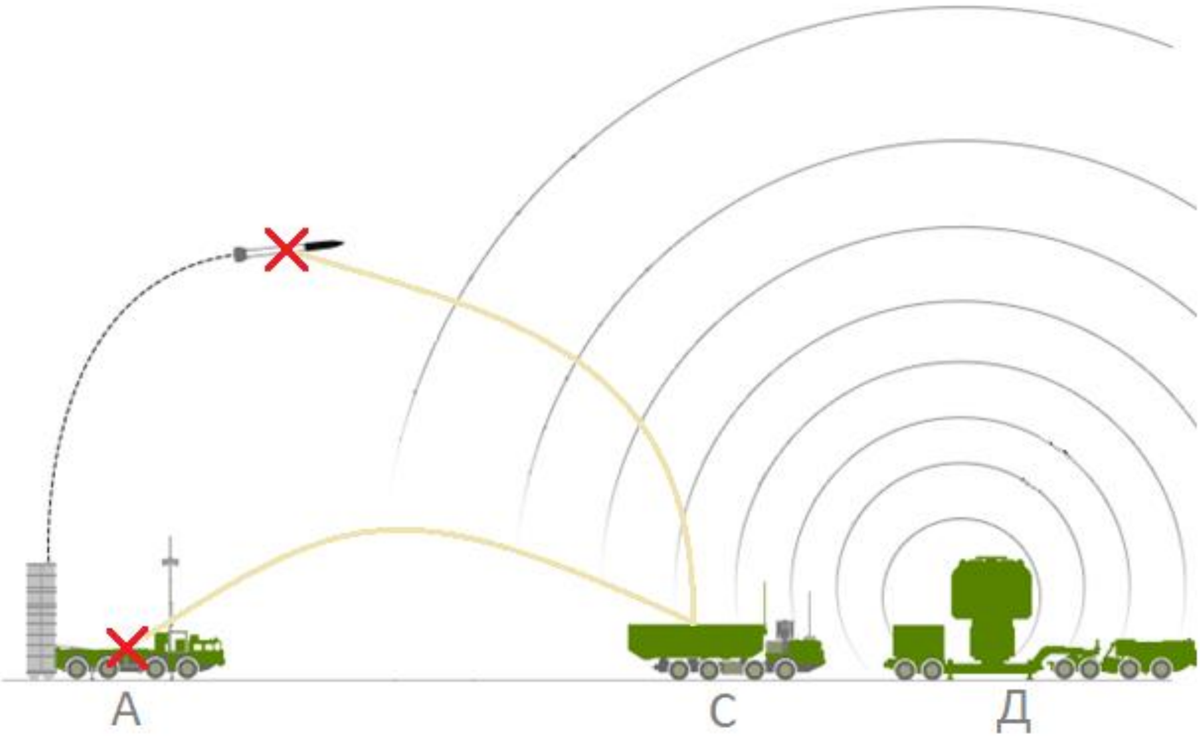
Параметры модели:

- v_0 – начальная скорость ракеты противника, $v_0 = 1000$ м/с;
- α – начальный угол запуска ракеты противника, $\alpha = 45°$;
- T_2 – время полёта ракеты противника, с = 144 с;
- u_0 – начальная скорость антиракеты $u_0 = 1000$ м/с;
- L – расстояние между точкой запуска вражеской ракеты (А) и её целью (Д), м;
- x_0 – точка запуска антиракеты, $x_0 = 0.75L$ от А (или 0.25L от Д);
- g – ускорение свободного падения, $g = 9.80665$ м/с^2;
- alfa - параметр, характеризующий ошибку измерений.

Пространство состояний:

- x(t), y(t) – текущие координаты ракет в пространстве;
- v(t), u(t) – текущая скорость ракет соответственно, м/с;
- β – начальный угол запуска антиракеты, рад или °;
- t_0 – момент запуска антиракеты, с.

Рисунок:



2.3.2. Постановка задачи:

Смоделировать уничтожение ракеты противника антиракетой и уничтожить место её запуска следующей ракетой.

2.3.3. Идеализация объекта:

- Пренебрегаем сопротивлением воздуха;
- Двигатели ракет отработали на старте, т.е. всю скорость она получает сразу;
- Ракета – материальная точка;
- Ракеты запущена ровно под углами α и β соответственно;
- Земля – бесконечно плоская;
- Ускорение свободного падения величина постоянная.

2.3.4. Алгоритм решения:

Отслеживаем в определенный промежуток времени ракету противника, получая ее координаты через спутник/локатор. По этой информации восстанавливаем ее траекторию полета с некоторой погрешностью.

Ракету противника будем сбивать в верхней точке её траектории (x_1, y_1), где $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$ и a, b, c – элементы вектор-столбца:

$$\overline{\mathrm{koef}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}$$

Опишем движение антиракеты:

$$\mathrm{x(t)} = -u_0 \cdot \cos(\beta) \cdot (\mathrm{t} - \mathrm{t_0}) + \mathrm{x_0}$$

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{u_0} \cdot \sin(\beta) \cdot (\mathrm{t} - \mathrm{t_0}) + \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t} - \mathrm{t_0})^2}{2}$$

Исключаем из уравнений $(\mathrm{t} - \mathrm{t_0})$:

$$\mathrm{y} = -(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}) \cdot \mathrm{tg}(\beta) - \frac{\mathrm{g}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})^2}{2u_0^2 \cos^2(\beta)}$$

Подставив x_1, y_1 в это уравнение, решаем уравнение с одним неизвестным и находим угол запуска антиракеты β. Затем угол β подставляем в x(t) или y(t) и находим.

Для ракеты, которая полетит на вражеский центр понадобятся те же уравнения, но координата (x_1, y_1) будет первой координатой восстановленной траектории.

2.3.5. Реализация

Запускаемый файл task3.ipynb

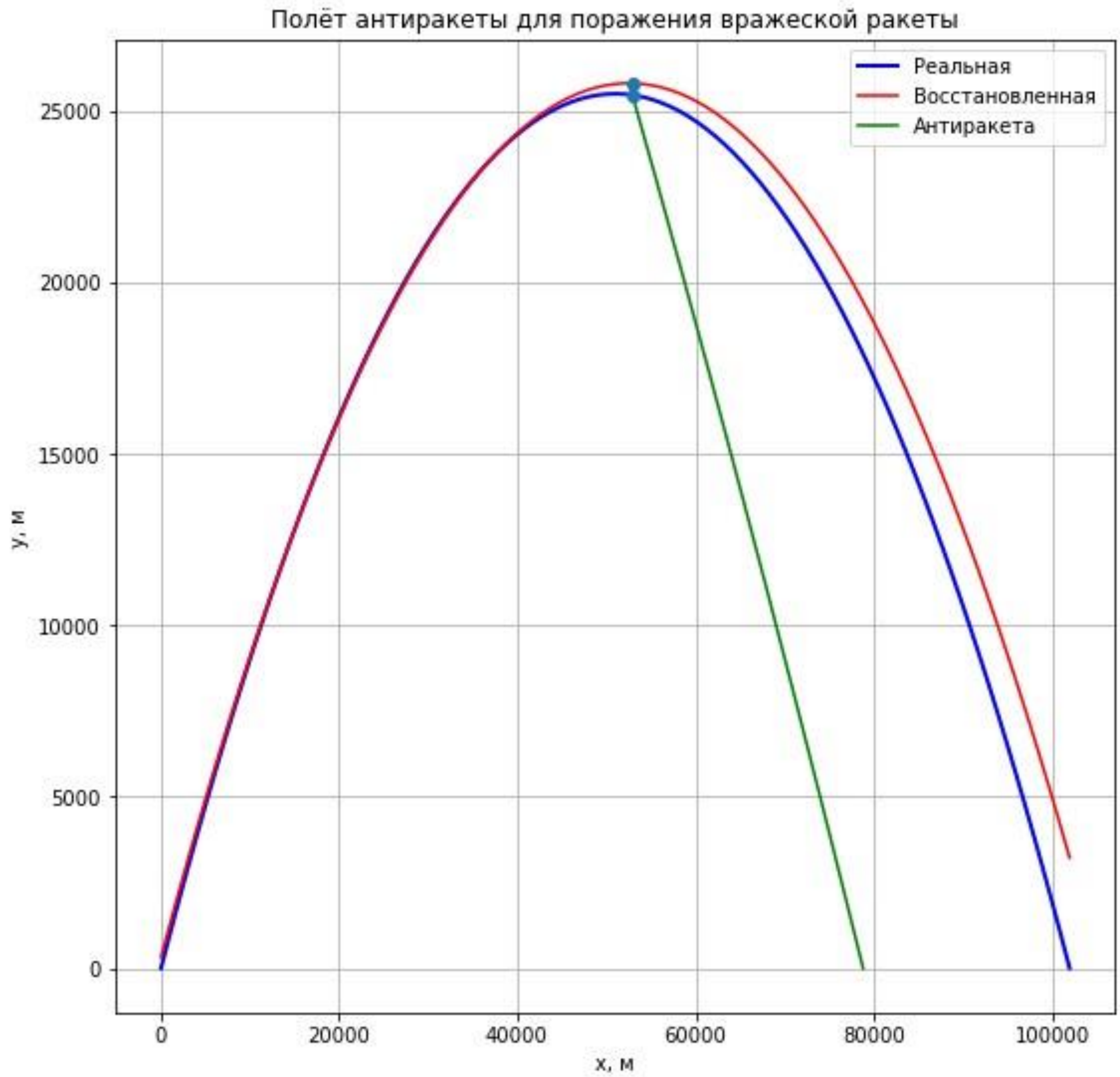
Сохраненный пример в файле task3.html

При погрешности alfa = 0,02 теперь получилось такое максимальное отклонение замеров 26 точек:

```
Макс отклонение замеров = 784.37 м
```

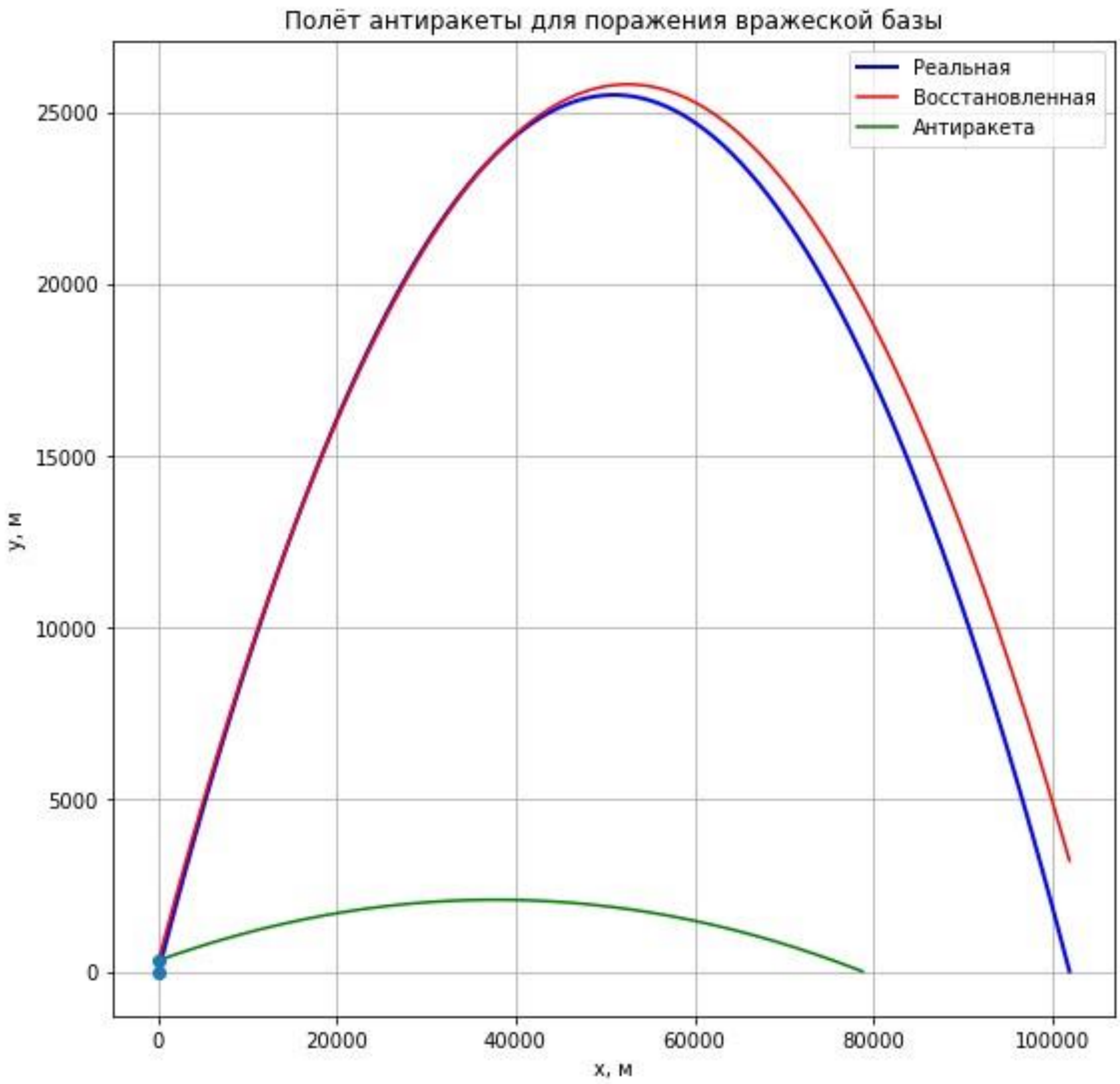
Для уничтожения вражеской ракеты требуется радиус взрыва:

```
Мин радиус взрыва (ракета) = 346.49 м
```



Для уничтожения вражеской базы требуется радиус взрыва:

Мин радиус взрыва (база) = 319.50 м



3. ВЫВОД

Метод наименьших квадратов позволяет достаточно точно восстановить реальную траекторию. Но при увеличении значения погрешности восстановленная траектория может начать сильно отличаться от реальной. Поэтому, конечно, чем меньше погрешность, тем лучше. Либо придётся сильно увеличивать радиус взрыва антиракеты, либо взрывать вражескую ракету как можно раньше, пока не накопилась ошибка.