ЗАДАНИЕ

Задача 1

Для линейно упругого материала, представленного на рисунке 1х записать общий вид матрицы жёсткости в двух декартовых ортогональных системах координат. Общий вид должен показывать априори равные друг-другу значения и нулевые значения коэффициентов матриц жёсткости. Охарактеризовать тип материала.

Вариант	Рисунок	СК_1	СК_2
5	1б	$x_3x_2x_1$	$x_3^*x_1^*x_2^*$

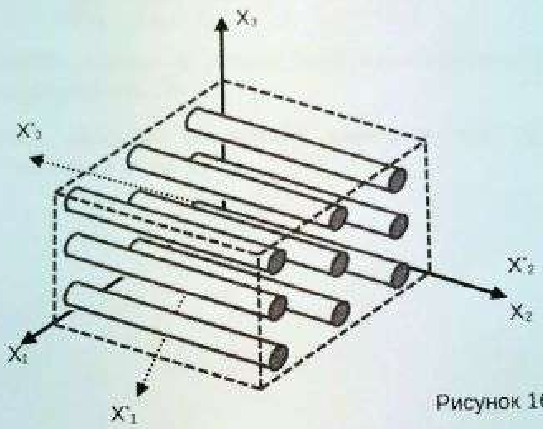


Рисунок 1б

Задача 2

Построить область допустимых состояний многослойного композиционного материала в системе координат σ11 — σ22 – τ12 многослойного композиционного материала, работающего в условиях плоского напряжённого состояния. Указать характерные значения напряжений. Схема армирования [φ1 δ1 / φ2 δ2]. Материал монослоёв ортотропный, технические характеристики упругости которого заданы в осях ортотропии. Модули упругости 1о рода E1 Па и E2 Па, сдвиговой модуль G12 Па, коэффициент Пуассона ν12 ед. Гипотеза прочности материала монослоя согласно теории максимальных нормальных напряжений. В системе координат монослоя предел прочности на растяжение в направлении 1 F+1 Па, предел прочности на сжатие в направлении 1 F-1 Па, предел прочности на растяжение в направлении 2 F+2 Па, предел прочности на сжатие в направлении 2 F-2 Па. Предел прочности на сдвиг каждого монослоя F12 = 1 Па.

Допускается изображение области допустимого состояния многослойного композиционного материала в проекции только на одну плоскость σ11 — σ22 и по наступлению предельного состояния каждого из монослоёв отдельно

Вар	φ_1	φ_2	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	F_{+1}	F_{-1}	F_{+2}	F_{-2}	δ_1	δ_2
5	0	0	10	4	0,1	4	10	-6	4	-6	0,5	0,5

Решение: Задача 1

Соотношения закона Гука, записанные в матричном виде, имеют вид:

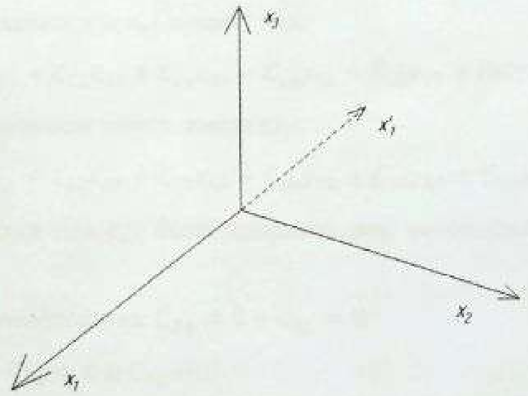
$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

Рассмотрим общий вид матрицы жесткости для общего случая линейно-упругого тела:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

Постараемся определить нулевые и равные элементы матрицы, пронаблюдав за материалом, изображенным на рисунке 1б.

Заметим в материале свойства симметрии: плоскость x_2x_3 есть плоскость симметрии. Рассмотрим поворот оси x_1 на 180^0:



При этом значение напряжения σ_{11}, в силу симметрии материала, должно иметь то же значение и в новой системе координат $x_1'x_2x_3$.

Матрица преобразования поворота будет иметь вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

При преобразовании координат тензор (мы рассматриваем тензоры напряжений и деформаций) в новой СК будет иметь вид:

$$[T_x'] = [T][T_x][T]^T$$

Тогда тензоры напряжений и деформации примут виды:

$$[T_\sigma'] = [T][T_\sigma][T]^T$$

$$[T_\sigma'] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{12} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} & -\tau_{12} & -\tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{12} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T'_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\tau_{12} & -\tau_{13} \\ -\tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ -\tau_{13} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Аналогично для тензора деформаций:

$$[T'_\sigma] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -\frac{1}{2}\gamma_{12} & -\frac{1}{2}\gamma_{13} \\ -\frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ -\frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Тогда выражение для закона гука будет иметь вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ -\tau_{12} \\ -\tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ -\gamma_{12} \\ -\gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Его алгебраическая запись для σ_{11} примет вид:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} - C_{14}\gamma_{12} - C_{15}\gamma_{13} + C_{16}\gamma_{23}$$

В старой СК алгебраическая запись имела вид:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\gamma_{12} + C_{15}\gamma_{13} + C_{16}\gamma_{23}$$

Для того, чтобы записи для σ_{11} были одинаковыми, необходим, чтобы $C_{15} = 0$ и $C_{16} = 0$.

Аналогично для σ_{22} необходимо: $C_{24} = 0$ и $C_{25} = 0$

Для σ_{33} необходимо: $C_{34} = 0$ и $C_{35} = 0$

Для τ_{12} необходимо $C_{46} = 0$

Для τ_{13} необходимо $C_{56} = 0$

Для τ_{22} необходимо $C_{66} = 0$

Тогда матрица жесткости примет вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Аналогичные выкладки можно провести заметив, что плоскость x_1x_3 тоже является плоскостью симметрии. Рассмотрим поворот оси x_2 на 180^0. Матрица преобразования примет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вновь воспользовавшись соотношением $[T_\sigma'] = [T][T_\sigma][T]^T$ и записав закон гука $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ получим алгебраические записи для напряжений. Приведем рассуждения для σ_{11}:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{12} + C_{13}\varepsilon_{33} - C_{16}\gamma_{23}$$

Запись в старой СК:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{12} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{16}\gamma_{23}$$

Для того, чтобы в обоих СК запись σ_{11} была идентичной, необходимо, чтобы $C_{16} = 0$

Из остальных алгебраических записей получим: $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$

Тогда матрица жесткости в СК $x_3x_2x_1$ примет вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Данное анизотропное тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Такое тело называется ортотропным. Его линейно упругие свойства описываются девятью параметрами. В системе координат, в которой координатные плоскости совпадают с плоскостями симметрии тела, закон Гука имеет вид (1). При этом оси системы координат, перпендикулярные плоскостям симметрии, являются осями симметрии 2-го порядка.

Для нас важно, что ортотропный материал – материал, чья матрица жесткости имеет вид (2) и как следствие: нормальные напряжения не зависят от угла деформации.

Рассмотрим теперь запись матрицы жесткости для СК $x_3^*x_1^*x_2^*$ - повернутой относительно исходной СК на угол φ. Для нее запись закона Гука будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11}' = C_{11}'\varepsilon_{11}' + C_{12}'\varepsilon_{22}' + C_{13}'\varepsilon_{33}' + C_{15}'\gamma_{13}' \\ \sigma_{22}' = C_{21}'\varepsilon_{11}' + C_{22}'\varepsilon_{22}' + C_{23}'\varepsilon_{33}' + C_{25}'\gamma_{13}' \\ \sigma_{33}' = C_{31}'\varepsilon_{11}' + C_{32}'\varepsilon_{22}' + C_{33}'\varepsilon_{33}' + C_{35}'\gamma_{13}' \\ \sigma_{12}' = C_{44}'\gamma_{12}' + C_{46}'\gamma_{23}' \\ \sigma_{13}' = C_{51}'\varepsilon_{11}' + C_{52}^{\prime\varepsilon_{22}'} + C_{53}^{\prime\varepsilon_{33}'} + C_{55}'\gamma_{13}' \\ \sigma_{23}' = C_{64}'\gamma_{12}' + C_{66}'\gamma_{23}' \end{cases}$$

Коэффициенты (i,j=1,2,…,6) называются коэффициентами жёсткости линейно упругого тела. Они подлежат экспериментальному определению. Важно отметить, что равенства справедливы как для изотропного, так и для анизотропного тел. В матричном виде их записывают так: $\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}$

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

При этом в новой СК коэффициенты жесткости вычисляются как:

$$\begin{cases} C'_{11}=C_{11}\cdot\cos(\varphi)^4+C_{33}\cdot\sin(\varphi)^4+2\,(C_{13}+2\,C_{55})\cdot\sin(\varphi)^2\,\cos(\varphi)^2 \\ C'_{22}=C_{22} \\ C'_{33}=C_{33}\cdot\cos(\varphi)^2+C_{11}\cdot\sin(\varphi)^2+2\,(C_{13}+2\,C_{55})\cdot\sin(\varphi)^2\,\cos(\varphi)^2 \\ C'_{13}=C'_{31}=(C_{11}+C_{33}-2\,C_{13}-4\cdot C_{55})\cdot\sin(\varphi)^2\,\cos(\varphi)^2+C_{13} \\ C'_{55}=(C_{11}+C_{33}-2\,C_{13}-4\cdot C_{55})\cdot\sin(\varphi)^2\,\cos(\varphi)^2+C_{55} \\ C'_{15}=C'_{51}=\left(C_{33}\cdot\sin(\varphi)^2-C_{11}\cdot\cos(\varphi)^2+(C_{13}+2\,C_{55})\cdot\cos(2\,\varphi)\right)\cdot\sin(\varphi)\,\cos(\varphi) \\ C'_{35}=C'_{53}=\left(C_{33}\cdot\cos(\varphi)^2-C_{11}\cdot\sin(\varphi)^2-(C_{13}+2\,C_{55})\cdot\cos(2\,\varphi)\right)\cdot\sin(\varphi)\,\cos(\varphi) \\ C'_{12}=C'_{21}=C_{12}\cdot\cos(\varphi)^2+C_{23}\cdot\sin(\varphi)^2 \\ C'_{23}=C'_{32}=C_{12}\cdot\sin(\varphi)^2+C_{23}\cdot\cos(\varphi)^2 \\ C'_{25}=C'_{52}=(C_{23}-C_{12})\,\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \\ C'_{44}=C_{44}\cdot\cos(\varphi)^2+C_{66}\cdot\sin(\varphi)^2 \\ C'_{66}=C_{44}\cdot\sin(\varphi)^2+C_{44}\cdot\cos(\varphi)^2 \\ C'_{46}=C'_{64}=(C_{66}-C_{44})\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \end{cases}$$

Запишем обратный закон Гука через коэффициенты упругих податливостей:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}=S_{11}\cdot\sigma_{11}+S_{12}\cdot\sigma_{22}+S_{13}\cdot\sigma_{33} \\ \varepsilon_{22}=S_{21}\cdot\sigma_{11}+S_{22}\cdot\sigma_{22}+S_{23}\cdot\sigma_{33} \\ \varepsilon_{33}=S_{31}\cdot\sigma_{11}+S_{32}\cdot\sigma_{22}+S_{33}\cdot\sigma_{33} \\ \gamma_{12}=S_{44}\cdot\sigma_{12} \\ \gamma_{13}=S_{55}\cdot\sigma_{13} \\ \gamma_{23}=S_{66}\cdot\sigma_{23} \end{cases}$$

В практических расчётах коэффициенты упругих податливостей удобно записывать с помощью технических характеристик упругости, имеющих определённый физический смысл. Применив их, получим следующую запись закона Гука:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11}=\dfrac{\sigma_{11}}{E_1}-\dfrac{\upsilon_{21}}{E_2}\cdot\sigma_{22}-\dfrac{\upsilon_{31}}{E_3}\cdot\sigma_{33}\\
\varepsilon_{22}=-\dfrac{\upsilon_{12}}{E_1}\cdot\sigma_{11}+\dfrac{\sigma_{22}}{E_2}\cdot\sigma_{22}-\dfrac{\upsilon_{32}}{E_3}\cdot\sigma_{33}\\
\varepsilon_{33}=-\dfrac{\upsilon_{13}}{E_1}\cdot\sigma_{11}-\dfrac{\upsilon_{23}}{E_2}\cdot\sigma_{22}+\dfrac{\sigma_{33}}{E_3}\\
\gamma_{12}=\dfrac{\sigma_{12}}{G_{12}}\\
\gamma_{13}=\dfrac{\sigma_{13}}{G_{13}}\\
\gamma_{23}=\dfrac{\sigma_{23}}{G_{23}}
\end{cases}
$$

В формулах (5) введены такие обозначения для технических характеристик упругости: E_1, E_2, E_3 - модули упругости материала при растяжении в направлении осей x_1, x_2, x_3 соответственно; G_{12}, G_{23}, G_{13}- модули сдвига в плоскостях x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 соответственно; υ_{ij}- коэффициенты Пуассона, для которых первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации. В силу симметрии матрицы упругих податливостей должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\upsilon_{21}}{E_2}=\frac{\upsilon_{12}}{E_1} \qquad \frac{\upsilon_{31}}{E_3}=\frac{\upsilon_{13}}{E_1} \qquad \frac{\upsilon_{32}}{E_3}=\frac{\upsilon_{23}}{E_2}$$

Представленные технические характеристики упругости ортотропного тела определяются при обработке экспериментально полученных результатов. Равенства, записанные с помощью этих параметров будут иметь такой вид:

$$
\begin{cases}
\sigma_{11}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(1-\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{32}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(\upsilon_{12}+\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{32}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(\upsilon_{13}+\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{23}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
\sigma_{22}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(\upsilon_{21}+\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{31}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(1-\upsilon_{31}\cdot\upsilon_{13}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(\upsilon_{23}+\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{21}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
\sigma_{33}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(\upsilon_{31}+\upsilon_{32}\cdot\upsilon_{21}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(\upsilon_{32}+\upsilon_{31}\cdot\upsilon_{12}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(1-\upsilon_{21}\cdot\upsilon_{12}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
\sigma_{12}=G_{12}\cdot\gamma_{12}\\
\sigma_{13}=G_{13}\cdot\gamma_{13}\\
\sigma_{23}=G_{23}\cdot\gamma_{23}
\end{cases}
$$

где $\Delta=1-\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{21}-\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{32}-\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{31}-2\cdot\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{31}$

Вернемся теперь к записям коэффициентов жесткости в новой СК. Введем связь между коэффициентами жесткости и покажем, какой вид при введённых связях будет принимать матрица жесткости:

Пускай: $C_{11} = C_{33}$, $C_{21} = C_{23}$, $C_{44} = C_{66}$, $C_{11} = C_{13} + 2C_{55}$. С их учетом будем иметь:

$$\begin{cases} C'_{11} = C_{11} \\ C'_{22} = C_{22} \\ C_{33}{}' = C_{11} \\ C'_{13} = C_{31}{}' = C_{13} \\ C_{55}{}' = C_{55} \\ C'_{15} = C_{51}{}' = 0 \\ C'_{35} = C_{53}{}' = 0 \\ C'_{12} = C_{21}{}' = C_{12} \\ C'_{23} = C_{32}{}' = C_{11} \\ C'_{25} = C_{52}{}' = 0 \\ C_{44}{}' = C_{44} \\ C_{66}{}' = C_{44} \\ C_{46}{}' = 0 \end{cases} \tag{3}$$

При этом закон Гука будет иметь запись:

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = C'_{11}\varepsilon'_{11} + C'_{12}\varepsilon'_{22} + C'_{13}\varepsilon'_{33} \\ \sigma'_{22} = C'_{12}\varepsilon'_{11} + C'_{22}\varepsilon'_{22} + C'_{23}\varepsilon'_{33} \\ \sigma'_{33} = C'_{13}\varepsilon'_{11} + C'_{23}\varepsilon'_{22} + C'_{33}\varepsilon'_{33} \\ \sigma'_{12} = C'_{44}\gamma'_{12} \\ \sigma'_{13} = C'_{44}\gamma'_{13} \\ \sigma'_{23} = C'_{66}\gamma'_{23} \end{cases}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}{}' & C_{12}{}' & C_{13}{}' & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}{}' & C_{22}{}' & C_{23}{}' & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}{}' & C_{23}{}' & C_{33}{}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}{}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}{}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}{}' \end{bmatrix}$$

Как видно, при произвольном повороте системы координат на угол φ относительно оси X2 определяющие соотношения остаются неизменными и имеют вид, приведенный выше. Анизотропное тело, для которого выполняются равенства (3), называется трансверсально изотропным телом. Ось X2 является осью симметрии n-го порядка, перпендикулярная ей плоскость X1X3 – плоскостью симметрии. При этом количество независимых коэффициентов упругости равно 5:

$$[C] = [C]' = \begin{bmatrix} A & D & C & 0 & 0 & 0 \\ D & B & D & 0 & 0 & 0 \\ C & D & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{A-C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

ЗАДАЧА 2

Найде глобальные матрицы жесткости и упругих податливостей. Для этого запишем для начала матрицу жесткости первого монослоя в локальной СК:

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

Здесь:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \upsilon_{12} * \upsilon_{21}}$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \upsilon_{12} * \upsilon_{21}}$$

$$C_{12} = \frac{\upsilon_{12} E_2}{1 - \upsilon_{12} * \upsilon_{21}}$$

$$C_{33} = G_1, \ \upsilon_{21} = \upsilon_{12} * \frac{E_2}{E_1}$$

Тогда в глобальной СК матрица жесткости примет вид:

$$C_{1\Sigma} = T_{11} * C_1 * T_{11}^T$$

T_{11} – матрица T_1 перехода в глобальную СК для первого монослоя, имеющая вид:

$$T_{11} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_1))^2 & (\sin(\varphi_1))^2 & 2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ (\sin(\varphi_1))^2 & (\cos(\varphi_1))^2 & -2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & (\cos(\varphi_1))^2 - (\sin(\varphi_1))^2 \end{bmatrix}$$

В программной среде Mathcad подставим значения из дано и определим:

$$C_{1\Sigma} = \begin{bmatrix} 10{,}04 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}40 & 4{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Сразу же определим матрицу упругих податливостей как обратную матрице жесткости:

$$S_{1\Sigma} = C_{1\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}01 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

В локальной СК запись матрицы жесткости 2-го монослоя аналогична записи матрицы жесткости для 1-го монослоя:

$$C_2 = C_1$$

Матрица жесткости второго монослоя в глобальной СК:

$$C_{2\Sigma} = T_{12} * C_1 * T_{12}^T$$

$$T_{12} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_2))^2 & (\sin(\varphi_2))^2 & 2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ (\sin(\varphi_2))^2 & (\cos(\varphi_2))^2 & -2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & (\cos(\varphi_2))^2 - (\sin(\varphi_2))^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{2\Sigma} = \begin{bmatrix} 10{,}04 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}40 & 4{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Соответственно матрица упругих податливостей 2-го монослоя:

$$S_{2\Sigma} = C_{2\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}01 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Окончательно получим:

$$C_{\Sigma} = \delta_1 * C_{1\Sigma} + \delta_2 * C_{2\Sigma} = \begin{bmatrix} 10{,}04 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}40 & 4{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

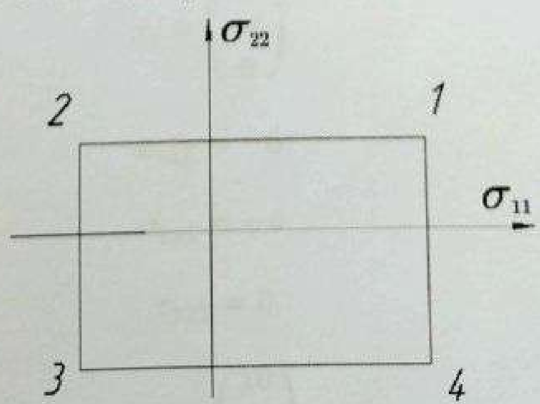
Соответствующая матрица упругих податливостей:

$$S_{\Sigma} = C_{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}01 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Вектор напряжений в глобальной СК будет иметь запись:

$$(\sigma_{\Sigma}) = [C_{\Sigma}] \cdot [T_{2i}] \cdot [S_i] \cdot (\sigma_i)$$

Изобразим изначальную область допустимых состояний:



Для первого монослоя

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [C_\Sigma] * T_{21} * S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Где:

$$T_{2i} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_i))^2 & (\sin(\varphi_i))^2 & \cos(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i) \\ (\sin(\varphi_i))^2 & (\cos(\varphi_i))^2 & -\cos(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i) \\ -2\cos(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i) & 2\cos(\varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i) & (\cos(\varphi_i))^2 - (\sin(\varphi_i))^2 \end{bmatrix}$$

Для точки 1:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\Sigma = K_1 * \sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

То есть:

$$\sigma_{11\Sigma} = 10$$

$$\sigma_{22\Sigma} = 4$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для точки 2:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = -6$$

$$\sigma_{11\Sigma} = 4$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для точки 3:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = -6$$

$$\sigma_{22\Sigma} = -6$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для точки 4:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = 10$$

$$\sigma_{22\Sigma} = -6$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для второго монослоя:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,01 & 0 \\ -0,01 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [C_\Sigma] * T_{2z} * S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{2z} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_2))^2 & (\sin(\varphi_2))^2 & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ (\sin(\varphi_2))^2 & (\cos(\varphi_2))^2 & -\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ -2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & 2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & (\cos(\varphi_2))^2 - (\sin(\varphi_2))^2 \end{bmatrix}$$

Для точки 1:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\Sigma = K_2 * \sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

То есть:

$$\sigma_{11\Sigma} = 10$$

$$\sigma_{22\Sigma} = 4$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для точки 2:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = -6$$

$$\sigma_{22\Sigma} = 4$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

Для точки 3:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = -6$$

$$\sigma_{11\Sigma} = -6$$

Для точки 4:

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11\Sigma} = 10$$

$$\sigma_{22\Sigma} = -6$$

$$\tau_{12\Sigma} = 0$$

То есть области допустимых значений для обоих слоев одинаковы и остаются неизменными что при локальной СК, что при глобальной, что соответствует логике, так как по условию заданы нулевые углы φ_1 и φ_2, что соответствует тому, что СК обоих слоев совпадает с глобальной СК. Так как для всех точек $\tau_{12\Sigma} = 0$ то область допустимых значений изобразим в плоскости $\sigma_{11}\sigma_{22}$: