МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

Кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители»

Дисциплина «Механика деформируемого твердого тела»

Домашнее задание №1

Вариант №9

Студент: Кострик М.А.

Группа: СМ1-81

Преподаватель: Муравьев В.В.

Дата зачёта:

Подпись преподавателя:

Москва, 2024 год.

Задача 1

Для линейно упругого материала, представленного на рисунке 1х записать общий вид матрицы жёсткости в двух декартовых ортогональных системах координат. Общий вид должен показывать априори равные друг-другу значения и нулевые значения коэффициентов матриц жёсткости. Охарактеризовать тип материала.

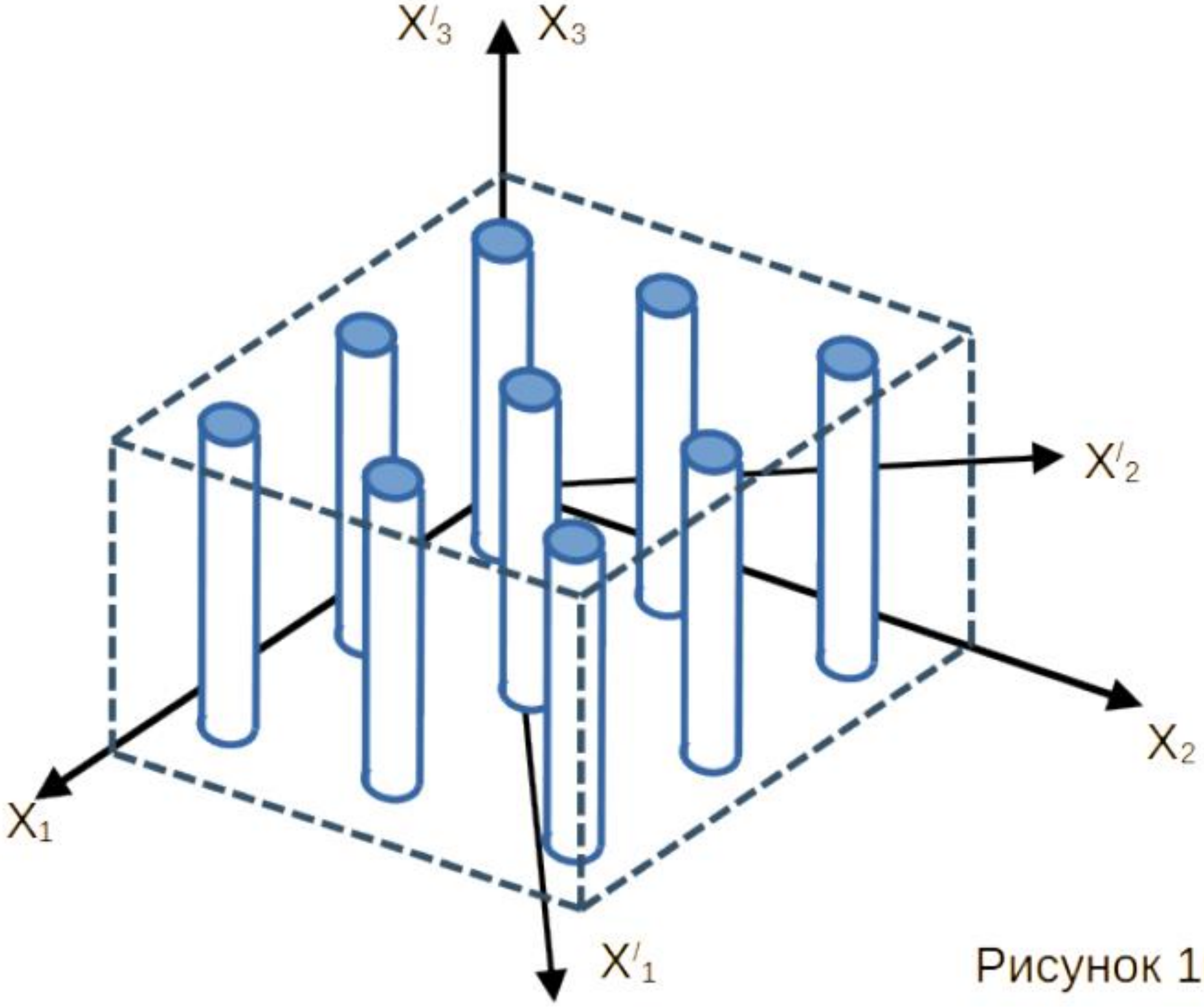

Рисунок 1в

Исходные данные:

СК 1: $X_2X_1X_3$

СК 2: $X_1'X_2'X_3{}'$

Решение:

Материал является трансверсально изотропным. OX_3 –ось симметрии n-го порядка. Количество независимых характеристик упругости равняется пяти.

Составим общий вид матрицы жесткости с учетом трансверсальной изотропии для:

- $X_1X_2X_3$:

$$[C'] = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ B & A & C & 0 & 0 & 0 \\ C & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \qquad c_{11} = C_{12} + 2C_{44} \rightarrow A = B + 2E$$

- СК 1: $X_2X_1X_3$:

$$[C''] = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ B & A & C & 0 & 0 & 0 \\ C & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad A = B + 2E$$

- СК 2: $X_1'X_2'X_3{}'$

$$[C''] = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ B & A & C & 0 & 0 & 0 \\ C & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \qquad A = B + 2E$$

Задача 2

Построить область допустимых состояний многослойного композиционного материала в системе координат σ_{11} — σ_{22} - τ_{12} многослойного композиционного материала, работающего в условиях плоского напряжённого состояния. Указать характерные значения напряжений.

Схема армирования $[\varphi_{1\ \delta_1}/\varphi_{2\ \delta_2}]$. Материал монослоёв ортотропный, технические характеристики упругости которого заданы в осях ортотропии. Модули упругости 1о рода E_1 Па и E_2 Па, сдвиговой модуль G_{12} Па, коэффициент Пуассона ν_{12} ед. Гипотеза прочности материала монослоя согласно теории максимальных нормальных напряжений. В системе координат монослоя предел прочности на растяжение в направлении 1 F_{+1} Па, предел прочности на сжатие в направлении 1 F_{-1} Па, предел прочности на растяжение в направлении 2 F_{+2} Па, предел прочности на сжатие в направлении 2 F_{-2} Па. Предел прочности на сдвиг каждого монослоя $F_{12} = 1$ Па.

Допускается изображение области допустимого состояния многослойного композиционного материала в проекции только на одну плоскость σ_{11}— σ_{22} и по наступлению предельного состояния каждого из монослоёв отдельно.

Таблица 1. Дано:

φ_1	φ_2	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	F_{+1}	F_{-1}	F_{+2}	F_{-2}	δ_1	δ_2
-35	35	10	4	0.1	4	10	-6	4	-6	0.5	0.5

Решение:

Найдем коэффициенты матрицы жесткости в локальной системе координат:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} = 0.04$$

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$C_{12} = \nu_{21}\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$C_{33} = G_{12}$$

Матрица жесткости первого и второго монослоя в локальной системе координат:

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}04 & 0{,}40 & 0 \\ 0{,}40 & 4{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{Па}$$

Матрицы поворота:

$$T_{11} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_1) & \sin^2(\varphi_1) & 2\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \\ \sin^2(\varphi_1) & \cos^2(\varphi_1) & -2\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 & (\cos^2(\varphi_1) - \sin^2(\varphi_1)) \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_2) & \sin^2(\varphi_2) & 2\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \\ \sin^2(\varphi_2) & \cos^2(\varphi_2) & -2\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & (\cos^2(\varphi_2) - \sin^2(\varphi_2)) \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_1) & \sin^2(\varphi_1) & \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \\ \sin^2(\varphi_1) & \cos^2(\varphi_1) & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \\ -2\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 & 2\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 & (\cos^2(\varphi_1) - \sin^2(\varphi_1)) \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_2) & \sin^2(\varphi_2) & \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \\ \sin^2(\varphi_2) & \cos^2(\varphi_2) & -\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \\ -2\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & 2\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 & (\cos^2(\varphi_2) - \sin^2(\varphi_2)) \end{bmatrix}$$

Найдем глобальную матрицу жесткости и упругих податливостей.

Матрица жесткости первого монослоя в глобальной системе координат:

$$C_{1\Sigma} = T_{11} C_1 T_{11}^T = \begin{bmatrix} 8{,}665 & -0{,}205 & 1{,}194 \\ -0{,}205 & 6{,}604 & 1{,}636 \\ 1{,}194 & 1{,}636 & 3{,}394 \end{bmatrix} \text{Па}$$

Матрица упругих податливостей первого монослоя глобальной системы координат:

$$S_{1\Sigma} = C_{1\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}123 & 0{,}017 & -0{,}051 \\ 0{,}017 & 0{,}174 & -0{,}089 \\ -0{,}051 & -0{,}089 & 0{,}356 \end{bmatrix} 1/\text{Па}$$

Матрица жесткости второго монослоя в локальной системе координат:

$$C_2 = C_1$$

Матрица жесткости второго монослоя в глобальной системе координат:

$$\widehat{C_{2\sum\square}} = T_{12}C_2T_{12}^T = \begin{bmatrix} 8{,}665 & -0{,}205 & -1{,}194 \\ -0{,}205 & 6{,}604 & -1{,}636 \\ -1{,}194 & -1{,}636 & 3{,}394 \end{bmatrix} \text{Па}$$

Матрица упругих податливостей второго монослоя в глобальной системе координат:

$$\widehat{S_{2\sum\square}} = \widehat{C_{2\sum\square}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}123 & 0{,}017 & 0{,}051 \\ 0{,}017 & 0{,}174 & 0{,}089 \\ 0{,}051 & 0{,}089 & 0{,}356 \end{bmatrix} 1/\text{Па}$$

В итоге получаем матрицу жесткости в глобальной системе координат:

$$\widehat{\text{C}_{\sum\square}} = \widehat{C_{1\sum\square}}\delta_1 + \widehat{C_{2\sum\square}}\delta_2 = \begin{bmatrix} 8{,}665 & -0{,}205 & 0 \\ -0{,}205 & 6{,}604 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}394 \end{bmatrix} \text{Па}$$

$$\widehat{S_{\sum\square}} = \widehat{C_{\sum\square}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}115 & 0{,}004 & 0 \\ 0{,}004 & 0{,}152 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}295 \end{bmatrix} 1/\text{Па}$$

Выведем формулу для нахождения вектора напряжений в глобальной системе координат:

1) Из закона Гука для глобальной ск:
$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum\square}}\right\} = \left[\widehat{\text{C}_{\sum\square}}\right]\{\widehat{\varepsilon_c}\}$$
2) $\{\widehat{\varepsilon_c}\} = \{\widehat{\varepsilon_\iota}\}$, где c - средние деформаций многослойного КМ, i - монослой:
$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum\square}}\right\} = \left[\widehat{\text{C}_{\sum\square}}\right]\{\widehat{\varepsilon_\iota}\}$$
3) $\{\widehat{\varepsilon_\iota}\} = [T_{2i}]\{\varepsilon_i\}$:
$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum\square}}\right\} = \left[\widehat{\text{C}_{\sum\square}}\right][T_{2i}]\{\varepsilon_i\}$$
4) Из закона Гука для i-го монослоя: $\{\varepsilon_i\} = [S_i]\{\sigma_i\}$
$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum\square}}\right\} = \left[\widehat{\text{C}_{\sum\square}}\right][T_{2i}][S_i]\{\sigma_i\} \qquad (a)$$

Для простоты записи, пусть $[K_i] = \left[\widehat{\text{C}_{\sum\square}}\right][T_{2i}][S_i] \rightarrow \left\{\widehat{\sigma_{\sum\square}}\right\} = [K_i]\{\sigma_i\}$

Построим области допустимых значений для монослоев (поверхности предельного состояния) в их локальных системах координат, т.е. в осях ортотропии.

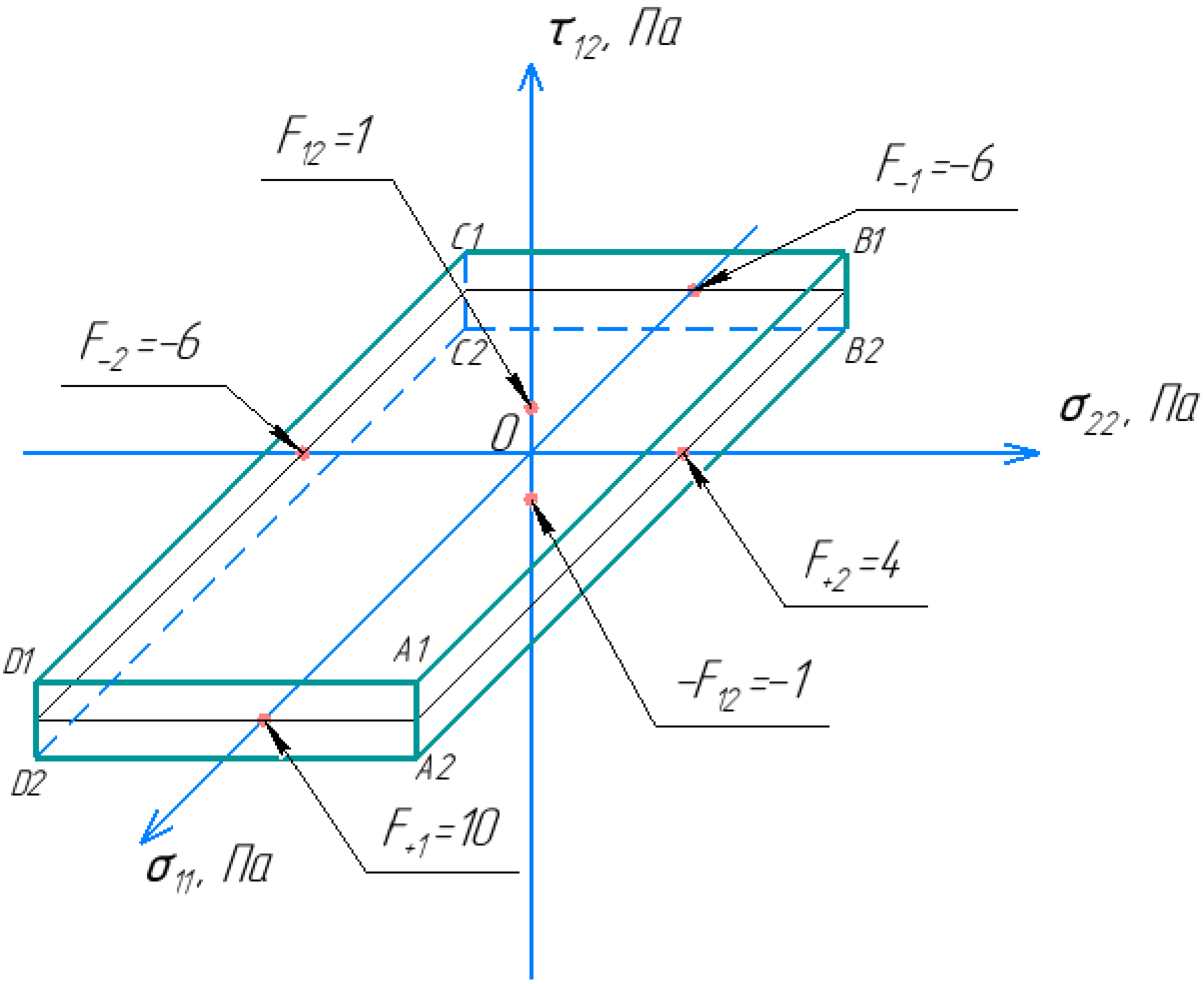

Рисунок 1 – Область допустимых значений монослоя

Найдем поверхность предельного состояния в глобальной системе координат по (а):

Для первого монослоя:

$$[K_1] = [\widehat{C_{\Sigma}}][T_{21}][S_1] = \begin{bmatrix} 0{,}548 & 0{,}621 & -1{,}042 \\ 0{,}160 & 1{,}071 & 0{,}799 \\ 0{,}351 & -0{,}829 & 0{,}290 \end{bmatrix}$$

- Для точки A1:

$$\{\sigma_{1A1}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{+2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\{\widehat{\sigma_{\Sigma A1}}\} = [K_1]\{\sigma_{1A1}\} = \{6{,}916886615; 6{,}681517649; 0{,}481504519\}^T \text{Па}$$

- Для точки B1:

$$\{\sigma_{1B1}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum B1}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1B1}\} = \{-1{,}843767226; 4{,}123253146; -5{,}131010173\}^T \text{Па}$$

- Для точки C1:

$$\{\sigma_{1C1}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{-2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum C1}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1C1}\} = \{-8{,}052029575; -6{,}58371877; 3{,}160204713\}^T \text{Па}$$

- Для точки D1:

$$\{\sigma_{1D1}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum D1}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1D1}\} = \{0{,}708624265; -4{,}025454267; 8{,}772719404\}^T \text{Па}$$

- Для точки A2:

$$\{\sigma_{1\mathrm{A}2}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{+2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum \mathrm{A}2}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1\mathrm{A}2}\} = \{9{,}000540565; 5{,}081890513; -0{,}098833063\}^T \text{Па}$$

- Для точки B2:

$$\{\sigma_{1B2}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum B2}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1B2}\} = \{0{,}239886725; 2{,}523626009; -5{,}711347754\}^T \text{Па}$$

- Для точки C2:

$$\{\sigma_{1C2}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{-2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum C2}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1C2}\} = \{-5{,}968375624; -8{,}183345906; 2{,}579867131\}^T \text{Па}$$

- Для точки D2:

$$\{\sigma_{1D2}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum D2}}\right\} = [K_1]\{\sigma_{1D2}\} = \{2{,}792278216; -5{,}625081403; 8{,}192381822\}^T \text{Па}$$

Построив параллелепипед по найденным точкам – получаем поверхность предельного состояния для первого монослоя. Аналогично найдем для второго монослоя:

$$[K_2] = \left[\widehat{C_{\sum \square}}\right][T_{22}][S_2] = \begin{bmatrix} 0{,}548 & 0{,}621 & 1{,}042 \\ 0{,}160 & 1{,}071 & -0{,}799 \\ -0{,}351 & 0{,}829 & 0{,}290 \end{bmatrix}$$

- Для точки A1:

$$\{\sigma_{1\mathrm{A}1}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{+2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum \mathrm{A}1}}\right\} = [K_2]\{\sigma_{1\mathrm{A}1}\} = \{9{,}000540565; 5{,}081890513; 0{,}098833063\}^T \text{Па}$$

- Для точки B1:

$$\{\sigma_{1B1}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum B1}}\right\} = [K_2]\{\sigma_{1B1}\} = \{0{,}239886725; 2{,}523626009; 5{,}711347754\}^T \text{Па}$$

- Для точки C1:

$$\{\sigma_{1C1}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{-2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum C1}}\right\} = [K_2]\{\sigma_{1C1}\} = \{-5{,}968375624; -8{,}183345906; -2{,}579867131\}^T \text{Па}$$

- Для точки D1:

$$\{\sigma_{1D1}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-2} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum D1}}\right\} = [K_2]\{\sigma_{1D1}\} = \{2{,}792278216; -5{,}625081403; -8{,}192381822\}^T \text{Па}$$

- Для точки A2:

$$\{\sigma_{1\mathrm{A}2}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{+2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\left\{\widehat{\sigma_{\sum \mathrm{A}2}}\right\} = [K_2]\{\sigma_{1\mathrm{A}2}\} = \{6{,}916886615; 6{,}681517649; -0{,}481504519\}^T \text{Па}$$

- Для точки B2:

$$\{\sigma_{1B2}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{+2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\{\widehat{\sigma_{\sum B2}}\} = [K_2]\{\sigma_{1B2}\} = \{-1{,}843767226; 4{,}123253146; 5{,}131010173\}^T \text{Па}$$

- Для точки C2:

$$\{\sigma_{1C2}\} = \begin{pmatrix} F_{-1} \\ F_{-2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\{\widehat{\sigma_{\sum C2}}\} = [K_2]\{\sigma_{1C2}\} = \{-8{,}052029575; -6{,}58371877; -3{,}160204713\}^T \text{Па}$$

- Для точки D2:

$$\{\sigma_{1D2}\} = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-2} \\ -F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{Па}$$

$$\{\widehat{\sigma_{\sum D2}}\} = [K_2]\{\sigma_{1D2}\} = \{0{,}708624265; -4{,}025454267; -8{,}772719404\}^T \text{Па}$$

Построив параллелепипед по найденным точкам – получаем поверхность предельного состояния для первого монослоя.

Пересечение этих двух объемных фигур будет давать искомую область для всего пакета. Построим модельку в SolidWorks.

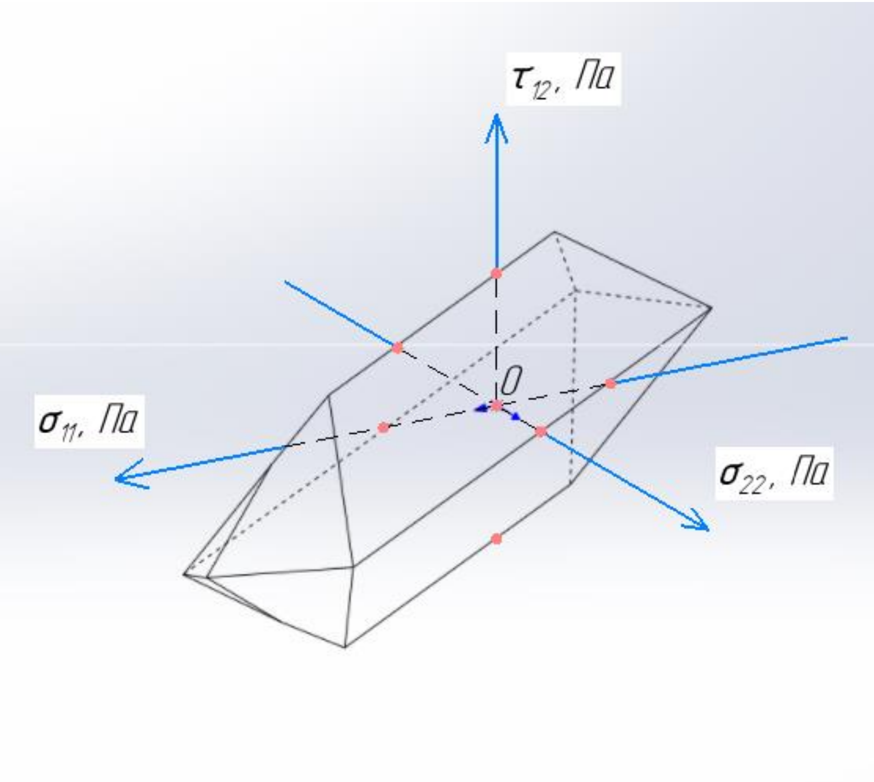

Рисунок 2 – Поверхность предельного состояния для всего пакета

Где $\sigma_{11}, \sigma_{11}, \tau_{12}$ направлавенны по $\widehat{x_1},\ \widehat{x_2}, \widehat{x_3}$, соответственно, осям глобальной системы координат.

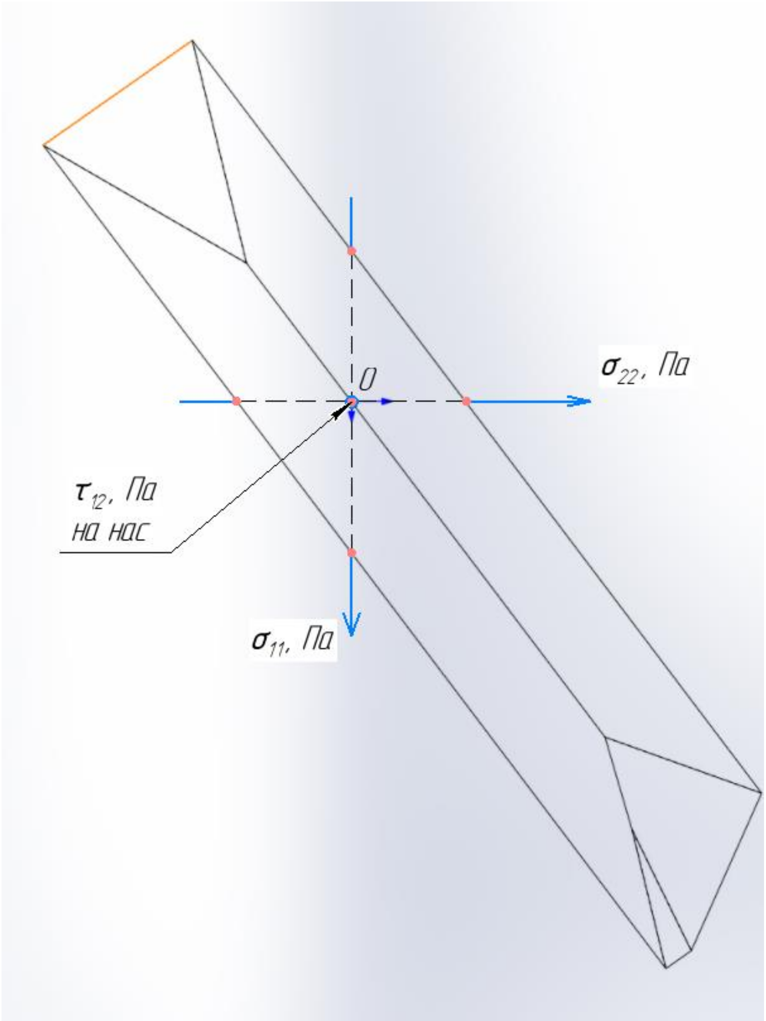

Рисунок 3 – Поверхность предельного состояния для всего пакета. Вид сверху