Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители»

Дисциплина «Механика деформируемого твердого тела»

Домашнее задание №1
Вариант №4

Студентка: Гусева Н. А.

Группа:
СМ1-81

Преподаватель: Муравьев В. В.

Москва, 2023 год.

Задача 1.

Для линейно упругого материала, представленного на рисунке 1х записать общий вид матрицы жёсткости в двух ортогональных декартовых системах координат. Общий вид должен показывать априори равные друг-другу значения и нулевые значения коэффициентов матриц жёсткости. Охарактеризовать тип материала

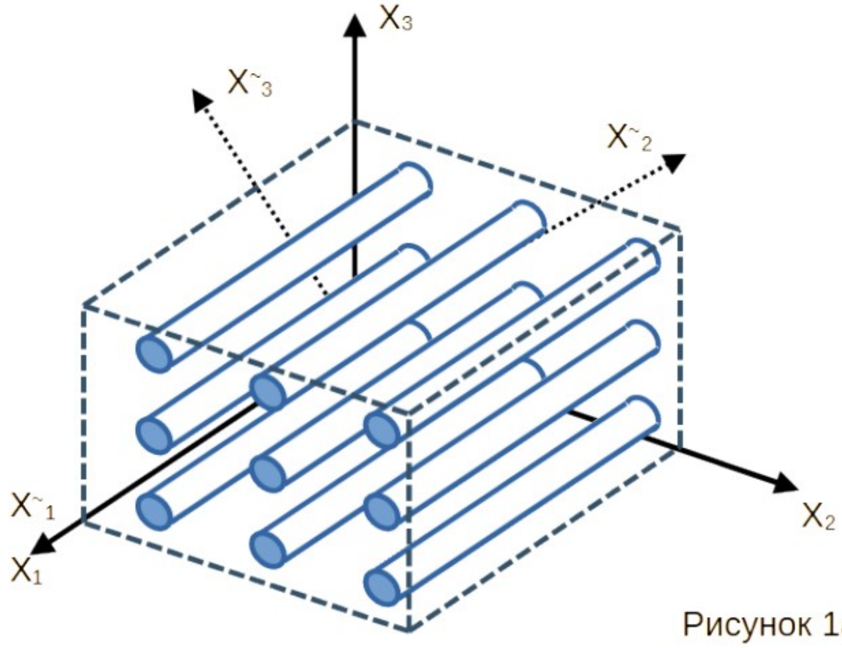


Рисунок 1а

Исходные данные**:**

СК_1: $X_3\, X_1\, X_2$;

СК_2: $X\sim_2\, X\sim_1\, X\sim_3$

Аналитическое выражение закона Гука для данного линейного упругого материала примет следующий упрощенный вид:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{22} = C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{33} = C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \qquad (1)$$

$$\sigma_{12} = C_{44}\gamma_{12}$$

$$\sigma_{13} = C_{55}\gamma_{13}$$

$$\sigma_{23} = C_{66}\gamma_{23}$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Данное анизотропное тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Такое тело называется ортотропным. Его линейно упругие свойства описываются девятью параметрами. В системе координат, в которой координатные плоскости совпадают с плоскостями симметрии тела, закон Гука имеет вид (1). При этом оси системы координат, перпендикулярные плоскостям симметрии, являются осями симметрии 2-го порядка.

Рассмотрим соотношения в системе координат, повёрнутой на угол φ относительно оси X_1. Соотношения закона Гука будут иметь вид:

$$\sigma'_{11}=C'_{11}\varepsilon'_{11}+C'_{12}\varepsilon'_{22}+C'_{13}\varepsilon'_{33}+C'_{16}\gamma'_{23}$$

$$\sigma'_{22}=C'_{21}\varepsilon'_{11}+C'_{22}\varepsilon'_{22}+C'_{23}\varepsilon'_{33}+C'_{26}\gamma'_{23}$$

$$\sigma'_{33}=C'_{31}\varepsilon'_{11}+C'_{32}\varepsilon'_{22}+C'_{33}\varepsilon'_{33}+C'_{36}\gamma'_{23} \qquad (2)$$

$$\sigma'_{12}=C'_{44}\gamma'_{12}+C'_{45}\gamma'_{13}$$

$$\sigma'_{13}=C'_{54}\gamma'_{12}+C'_{55}\gamma'_{13}$$

$$\sigma'_{23}=C'_{61}\varepsilon'_{11}+C'_{62}\varepsilon'_{22}+C'_{63}\varepsilon'_{33}+C'_{66}\gamma'_{23}$$

Коэффициенты C_{ij} (i,j=1,2,…,6) называются коэффициентами жёсткости линейно упругого тела. Они подлежат экспериментальному определению. Важно отметить, что равенства (2) справедливы как для изотропного, так и для анизотропного тел. В матричном виде их записывают так: $\{\sigma\}$=[C]$\{\varepsilon\}$

$$C'=\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} & 0 \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}$$

При этом в новой системе координат коэффициенты жёсткости вычисляются по формулам:

$$C'_{11} = C_{11}$$

$$C'_{22} = C_{22} \cdot cos(\varphi)^4 + C_{33} \cdot sin(\varphi)^4 + 2\ (C_{23} + 2\ C_{66}) \cdot sin(\varphi)^2\ cos(\varphi)^2$$

$$C'_{33} = C_{33} \cdot cos(\varphi)^2 + C_{22} \cdot sin(\varphi)^2 + 2\ (C_{23} + 2\ C_{66}) \cdot sin(\varphi)^2\ cos(\varphi)^2$$

$$C'_{23} = C'_{32} = (C_{22} + C_{33} - 2\ C_{23} - 4 \cdot C_{66}) \cdot sin(\varphi)^2\ cos(\varphi)^2 + C_{23}$$

$$C'_{66} = (C_{22} + C_{33} - 2\ C_{23} - 4 \cdot C_{66}) \cdot sin(\varphi)^2\ cos(\varphi)^2 + C_{66} \qquad (3)$$

$$C'_{26} = C'_{62} = \left(C_{33} \cdot sin(\varphi)^2 - C_{22} \cdot cos(\varphi)^2 + (C_{23} + 2\ C_{66}) \cdot cos(2\ \varphi)\right) \cdot sin(\varphi)\ cos(\varphi)$$

$$C'_{36} = C'_{63} = \left(C_{33} \cdot cos(\varphi)^2 - C_{22} \cdot sin(\varphi)^2 - (C_{23} + 2\ C_{66}) \cdot cos(2\ \varphi)\right) \cdot sin(\varphi)\ cos(\varphi)$$

$$C'_{12} = C'_{21} = C_{12} \cdot cos(\varphi)^2 + C_{13} \cdot sin(\varphi)^2$$

$$C'_{13} = C'_{31} = C_{12} \cdot sin(\varphi)^2 + C_{13} \cdot cos(\varphi)^2$$

$$C'_{16} = C'_{61} = (C_{13} - C_{12})\ sin(\varphi) \cdot cos(\varphi)$$

$$C'_{44} = C_{44} \cdot cos(\varphi)^2 + C_{55} \cdot sin(\varphi)^2$$

$$C'_{55} = C_{44} \cdot sin(\varphi)^2 + C_{55} \cdot cos(\varphi)^2$$

$$C'_{45} = C'_{54} = (C_{55} - C_{44}) \cdot sin(\varphi) \cdot cos(\varphi)$$

Равенства (1) можно обратить и записать их в форме: $\{\varepsilon\}$=[S]$\{\sigma\}$. Будем иметь такие зависимости:

$$\varepsilon_{11} = S_{11} \cdot \sigma_{11} + S_{12} \cdot \sigma_{22} + S_{13} \cdot \sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{22} = S_{21} \cdot \sigma_{11} + S_{22} \cdot \sigma_{22} + S_{23} \cdot \sigma_{33} \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{33} = S_{31} \cdot \sigma_{11} + S_{32} \cdot \sigma_{22} + S_{33} \cdot \sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} = S_{44} \cdot \sigma_{12}$$

$$\gamma_{13} = S_{55} \cdot \sigma_{13}$$

$$\gamma_{23} = S_{66} \cdot \sigma_{23}$$

В практических расчётах коэффициенты упругих податливостей удобно записывать с помощью технических характеристик упругости, имеющих определённый физический смысл. Тогда равенства (4) принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E_1}-\frac{\upsilon_{21}}{E_2}\cdot\sigma_{22}-\frac{\upsilon_{31}}{E_3}\cdot\sigma_{33}\\
&\varepsilon_{22}=-\frac{\upsilon_{12}}{E_1}\cdot\sigma_{11}+\frac{\sigma_{22}}{E_2}\cdot\sigma_{22}-\frac{\upsilon_{32}}{E_3}\cdot\sigma_{33}\\
&\varepsilon_{33}=-\frac{\upsilon_{13}}{E_1}\cdot\sigma_{11}-\frac{\upsilon_{23}}{E_2}\cdot\sigma_{22}+\frac{\sigma_{33}}{E_3}\\
&\gamma_{12}=\frac{\sigma_{12}}{G_{12}}\\
&\gamma_{13}=\frac{\sigma_{13}}{G_{13}}\\
&\gamma_{23}=\frac{\sigma_{23}}{G_{23}}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

В формулах (5) введены такие обозначения для технических характеристик упругости: E_1 ,E_2 , E_3- модули упругости материала при растяжении в направлении осей X_1 , X_2, X_3 соответственно; G_{12},G_{13},G_{23} - модули сдвига в плоскостях $X_1\,X_2$, $X_2\,X_3$, $X_3\,X_1$ соответственно; υ_{ij} $(i\neq j)$ - коэффициенты Пуассона, для которых первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации. В силу симметрии матрицы упругих податливостей должны выполняться следующие равенства:

$$
\frac{\upsilon_{21}}{E_2}=\frac{\upsilon_{12}}{E_1}\qquad \frac{\upsilon_{31}}{E_3}=\frac{\upsilon_{13}}{E_1}\qquad \frac{\upsilon_{32}}{E_3}=\frac{\upsilon_{23}}{E_2}\qquad (6)
$$

Представленные технические характеристики упругости ортотропного тела определяются при обработке экспериментально полученных результатов. Равенства (1), записанные с помощью этих параметров будут иметь такой вид:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(1-\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{32}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(\upsilon_{12}+\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{32}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(\upsilon_{13}+\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{23}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
&\sigma_{22}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(\upsilon_{21}+\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{31}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(1-\upsilon_{31}\cdot\upsilon_{13}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(\upsilon_{23}+\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{21}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
&\sigma_{33}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(E_1\left(\upsilon_{31}+\upsilon_{32}\cdot\upsilon_{21}\right)\cdot\varepsilon_{11}+E_2\left(\upsilon_{32}+\upsilon_{31}\cdot\upsilon_{12}\right)\cdot\varepsilon_{22}+E_3\left(1-\upsilon_{21}\cdot\upsilon_{12}\right)\cdot\varepsilon_{33}\right)\\
&\sigma_{12}=G_{12}\cdot\gamma_{12}\\
&\sigma_{13}=G_{13}\cdot\gamma_{13}\\
&\sigma_{23}=G_{23}\cdot\gamma_{23}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

где $\Delta=1-\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{21}-\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{32}-\upsilon_{13}\cdot\upsilon_{31}-2\cdot\upsilon_{12}\cdot\upsilon_{23}\cdot\upsilon_{31}$

Обратимся к формулам (3). Пусть коэффициенты жёсткости связаны следующими четырьмя зависимостями:

$$C_{22}=C_{33} \qquad C_{12}=C_{13} \qquad C_{44}=C_{55} \qquad C_{22}=C_{23}+2\,C_{66}$$

Количество независимых характеристик упругости сокращается до пяти. При этом для произвольного угла поворота φ будем иметь:

$$\begin{aligned}
&C'_{22}=C'_{33}=C_{22}\\
&C'_{23}=C'_{32}=C_{23}\\
&C'_{66}=C_{66}\\
&C'_{11}=C_{11}\\
&C'_{16}=C'_{61}=0\\
&C'_{26}=C'_{62}=0\\
&C'_{12}=C'_{21}=C_{12}\\
&C'_{13}=C'_{31}=C_{12}\\
&C'_{36}=C'_{63}=0\\
&C'_{44}=C'_{55}=C_{44}\\
&C'_{45}=C'_{54}=0
\end{aligned} \tag{8}$$

В новой системе координат соотношения закона Гука примут такой вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma'_{11}=C'_{11}\varepsilon'_{11}+C'_{12}\varepsilon'_{22}+C'_{13}\varepsilon'_{33}\\
&\sigma'_{22}=C'_{12}\varepsilon'_{11}+C'_{22}\varepsilon'_{22}+C'_{23}\varepsilon'_{33}\\
&\sigma'_{33}=C'_{13}\varepsilon'_{11}+C'_{23}\varepsilon'_{22}+C'_{33}\varepsilon'_{33}\\
&\sigma'_{12}=C'_{44}\gamma'_{12}\\
&\sigma'_{13}=C'_{44}\gamma'_{13}\\
&\sigma'_{23}=C'_{66}\gamma'_{23}
\end{aligned}
\qquad
C'=\begin{bmatrix}
C'_{11} & C'_{12} & C'_{12} & 0 & 0 & 0\\
C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0\\
C'_{12} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66}
\end{bmatrix}$$

Как видно, при произвольном повороте системы координат на угол φ относительно оси X3 определяющие соотношения остаются неизменными и имеют вид (1). Анизотропное тело, для которого выполняются равенства (8), называется трансверсально изотропным телом. Ось X_1 является осью симметрии n-го порядка, перпендикулярная ей плоскость $X_2\,X_3$ – плоскостью симметрии.

Задача 1.

Для линейно упругого материала, представленного на рисунке 1х записать общий вид матрицы жёсткости в двух ортогональных декартовых системах координат. Общий вид должен показывать априори равные друг-другу значения и нулевые значения коэффициентов матриц жёсткости. Охарактеризовать тип материала

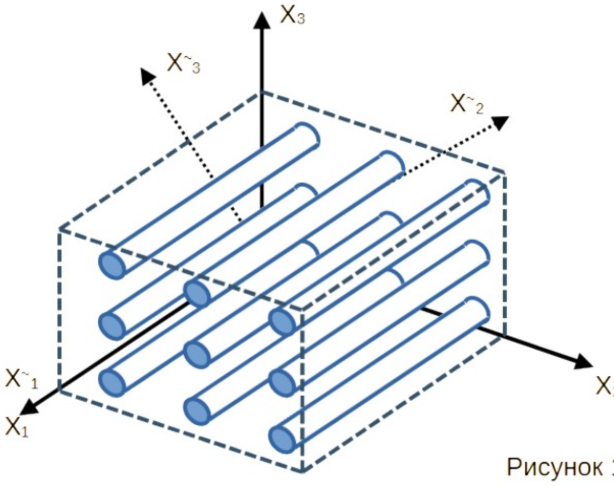


Рисунок 1а

Исходные данные**:**

СК_1: $X_3\,X_1\,X_2$;

СК_2: $X\sim_2\,X\sim_1\,X\sim_3$

Материал является трансверсально изотропным, такой материал имеет ось симметрии. Количество независимых характеристик упругости равняется пяти.

$$E = f_1(A, B, C, D) \qquad\qquad F = f_2(A, B, C, D)$$

$$C = \begin{bmatrix} A & B & C & \square & \square & \square \\ B & D & B & \square & \square & \square \\ C & B & A & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & E & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \dfrac{A-C}{2} & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & E \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} A & B & C & \square & \square & \square \\ B & D & B & \square & \square & \square \\ C & B & A & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & E & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \dfrac{A-C}{2} & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & E \end{bmatrix}$$

$X_3\,X_1\,X_2$; $\qquad\qquad X\sim_2\,X\sim_1\,X\sim_3$

$$A = C + 2\,F \qquad\qquad F = \frac{A-C}{2}$$

Задача 2.

Построить область допустимых состояний многослойного композиционного материала в системе координат σ_{11} — σ_{22} многослойного композиционного материала, работающего в условиях плоского напряжённого состояния. Указать характерные значения напряжений.

Схема армирования [φ_1 δ_1/ φ_2 δ_2]. Материал монослоёв ортотропный, технические характеристики упругости которого заданы в осях ортотропии. Модули упругости 1о рода E_1 Па и E_2 Па, сдвиговой модуль G_{12} Па, коэффициент Пуассона v_{12} ед. Гипотеза прочности материала монослоя согласно теории максимальных нормальных напряжений. В системе координат монослоя предел прочности на растяжение в направлении 1 $F+_1$Па, предел прочности на сжатие в направлении 1 F_{-1} Па, предел прочности на растяжение в направлении 2 $F+_2$Па, предел прочности на сжатие в направлении 2F_{-2} Па.

Исходные данные:

$\varphi_1 := -45\ °$ $\quad \varphi_2 := 45\ °$ $\quad \delta_1 := 0.5$ $\quad v_{12} := 0.1$ $\quad F_1 := 10\ Pa$ $\quad F_{-1} := -6\ Pa$

$E_1 := 10\ Pa$ $\quad E_2 := 4\ Pa$ $\quad \delta_2 := 0.5$ $\quad G_{12} := 4 \cdot Pa$ $\quad F_2 := 4\ Pa$ $\quad F_{-2} := -6\ Pa$

$$v_{21} := \frac{v_{12} \cdot E_2}{E_1} = 0.04$$

$$C_{11} := \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \qquad C_{22} := \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \qquad C_{12} := v_{21} \cdot \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \qquad C_{33} := G_{12}$$

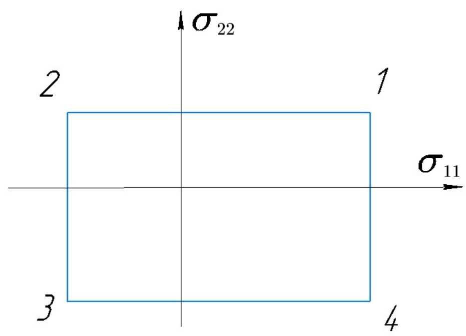
Матрицы поворота:

$$T_{11} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_1))^2 & (\sin(\varphi_1))^2 & 2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ (\sin(\varphi_1))^2 & (\cos(\varphi_1))^2 & -2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & (\cos(\varphi_1))^2 - (\sin(\varphi_1))^2 \end{bmatrix}$$

$$T_{12} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_2))^2 & (\sin(\varphi_2))^2 & 2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ (\sin(\varphi_2))^2 & (\cos(\varphi_2))^2 & -2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & (\cos(\varphi_2))^2 - (\sin(\varphi_2))^2 \end{bmatrix}$$

$$T_{21} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_1))^2 & (\sin(\varphi_1))^2 & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ (\sin(\varphi_1))^2 & (\cos(\varphi_1))^2 & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \\ -2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & 2\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) & (\cos(\varphi_1))^2 - (\sin(\varphi_1))^2 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} := \begin{bmatrix} (\cos(\varphi_2))^2 & (\sin(\varphi_2))^2 & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ (\sin(\varphi_2))^2 & (\cos(\varphi_2))^2 & -\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) \\ -2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & 2\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) & (\cos(\varphi_2))^2 - (\sin(\varphi_2))^2 \end{bmatrix}$$



Найдем глобальную матрицу жесткости и упругих податливостей.
Матрица жесткости первого монослоя в локальной системе координат:

$$C_1 := \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости первого монослоя в глобальной системе координат:

$$C_{1\Sigma} := T_{11} \cdot C_1 \cdot T_{11}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 7.71486 & -0.28514 & 1.50602 \\ -0.28514 & 7.71486 & 1.50602 \\ 1.50602 & 1.50602 & 3.31325 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}$$

Матрица упругих податливостей первого монослоя глобальной системы координат:

$$S_{1\Sigma} := C_{1\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.145 & 0.02 & -0.075 \\ 0.02 & 0.145 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & 0.37 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}^{-1}$$

Матрица жесткости второго монослоя в локальной системе координат:

$$C_2 := C_1$$

Матрица жесткости второго монослоя в глобальной системе координат:

$$C_{2\Sigma} := T_{12} \cdot C_2 \cdot T_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 7.71486 & -0.28514 & -1.50602 \\ -0.28514 & 7.71486 & -1.50602 \\ -1.50602 & -1.50602 & 3.31325 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}$$

Матрица упругих податливостей второго монослоя в глобальной системы координат:

$$S_{2\Sigma} := C_{2\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.145 & 0.02 & 0.075 \\ 0.02 & 0.145 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.37 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}^{-1}$$

В итоге получаем:

$$C_{\Sigma global} := \delta_1 \cdot C_{1\Sigma} + \delta_2 \cdot C_{2\Sigma} = \begin{bmatrix} 7.71486 & -0.28514 & 0 \\ -0.28514 & 7.71486 & 0 \\ 0 & 0 & 3.31325 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}$$

$$S_{\Sigma global} := C_{\Sigma global}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1298 & 0.0048 & 0 \\ 0.0048 & 0.1298 & 0 \\ 0 & 0 & 0.30182 \end{bmatrix} \boldsymbol{Pa}^{-1}$$

Соотношение для перевода в Σ систему координат:

$$\left(\sigma_\Sigma\right) = \left[C_\Sigma\right] \cdot \left[T_{2i}\right] \cdot \left[S_i\right] \cdot \left(\sigma_i\right)$$

Для первого монослоя:

$$S_1 := C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} Pa^{-1}$$

$$K_1 := C_{\Sigma global} \cdot T_{21} \cdot S_1 = \begin{bmatrix} 0.33434 & 0.89157 & -1 \\ 0.33434 & 0.89157 & 1 \\ 0.36446 & -0.86145 & 1.83922 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Для точки 1 (A1):

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_\Sigma := K_1 \cdot \sigma_1 = \begin{bmatrix} 6.90964 \\ 6.90964 \\ 0.1988 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 0 \rangle} = [6.90964] \ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 1 \rangle} = [6.90964] \ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 2 \rangle} = [0.1988] \ Pa$$

Для точки 2 (B1):

$$\sigma_2 := \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_\Sigma := K_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 0 \rangle} = [1.56024] \ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 1 \rangle} = [1.56024] \ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 2 \rangle} = [-5.63253] \ Pa$$

Для точки 3 (C1):

$$\sigma_3 := \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_\Sigma := K_1 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 0 \rangle} = [-7.35542] \ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 1 \rangle} = [-7.35542] \ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 2 \rangle} = [2.98193] \ Pa$$

Для точки 4 (D1):

$$\sigma_4 := \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_\Sigma := K_1 \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 0 \rangle} = [-2.00602]\ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 1 \rangle} = [-2.00602]\ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_\Sigma^{\langle 2 \rangle} = [8.81325]\ Pa$$

Для второго монослоя:

$$S_2 := C_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} Pa^{-1}$$

$$K_2 := C_{\Sigma global} \cdot T_{22} \cdot S_2 = \begin{bmatrix} 0.33434 & 0.89157 & 1 \\ 0.33434 & 0.89157 & -1 \\ -0.36446 & 0.86145 & 1.83922 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Для точки 1 (A2):

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{1\Sigma} := K_2 \cdot \sigma_1 = \begin{bmatrix} 6.90964 \\ 6.90964 \\ -0.1988 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_{1\Sigma}^{\langle 0 \rangle} = [6.90964]\ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_{1\Sigma}^{\langle 1 \rangle} = [6.90964]\ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_{1\Sigma}^{\langle 2 \rangle} = [-0.1988]\ Pa$$

Для точки 2 (B2):

$$\sigma_2 := \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{2\Sigma} := K_2 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_{2\Sigma}^{\langle 0 \rangle} = [1.56024]\ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_{2\Sigma}^{\langle 1 \rangle} = [1.56024]\ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_{2\Sigma}^{\langle 2 \rangle} = [5.63253]\ Pa$$

Для точки 3 (C2):

$$\sigma_3 := \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{3\Sigma} := K_2 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_{3\Sigma}^{\langle 0 \rangle} = [-7.35542]\ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_{3\Sigma}^{\langle 1 \rangle} = [-7.35542]\ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_{3\Sigma}^{\langle 2 \rangle} = [-2.98193]\ Pa$$

Для точки 4 (D2):

$$\sigma_4 := \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

$$\sigma_{4\Sigma} := K_2 \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_{11\Sigma} := \sigma_{4\Sigma}^{\langle 0 \rangle} = [-2.00602]\ Pa$$

$$\sigma_{22\Sigma} := \sigma_{4\Sigma}^{\langle 1 \rangle} = [-2.00602]\ Pa$$

$$\tau_{12\Sigma} := \sigma_{4\Sigma}^{\langle 2 \rangle} = [-8.81325]\ Pa$$

В итоге получаем область допустимых значений для пакета в виде отрезка AB, полученного пересечением двух плоскостей