Лекция 4. Анализ характеристик упругости и напряженно-деформированного состояния монослоёв в многослойном композиционном материале со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90^0_k\right]$

При изготовлении ряда конструкций из многослойных композитов часто применяется материала со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90^0_k\right]$. Как правило, рассматриваемый материал формируется в процессе непрерывной намотки. Элемент такого материала показан на рис.1.9. В случае если толщина монослоя h_0 постоянная, то его схему армирования можно задать так: $n=3,\ h_1=h_2=h_c/2,$ где $h_c=2mh_0,\ \varphi_1=-\varphi_2=\varphi,\ h_3=h_k=kh_0,\ \varphi_3=90°$, где h_c – суммарная толщина композита с симметричным перекрёстным армированием, или двойного спирального слоя, h_k – суммарная толщина материала, ориентированного под углом 90° к базовому направлению, или кольцевого слоя. Используя алгоритм расчёта напряжений и деформаций в монослоях, приведённый в лекции №3, выполним анализ характеристик упругости и напряжённо-деформированного состояния монослоёв для случая двухосного растяжения. Для наглядности анализ будем проводить как с учётом несущей способности связующего так и без такового, т.е. по нитяной модели. При сравнении полученных решений это позволит

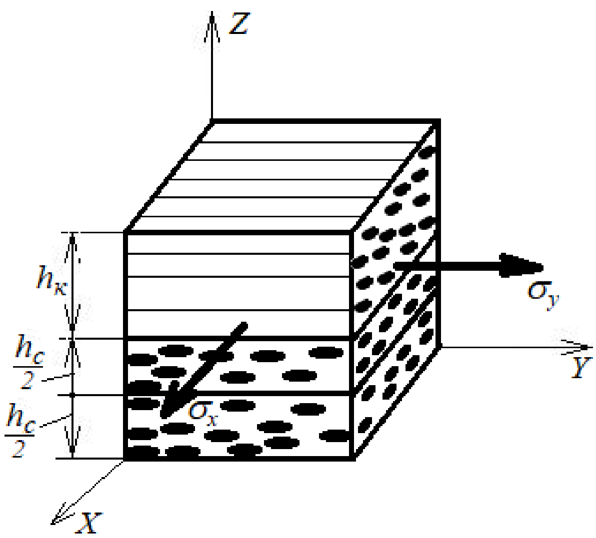

Рис.1.9. Элемент многослойного композита со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90^0_k\right]$ при двухосном растяжении

оценить особенности применения нитяной модели, которая часто востребована при проведении проектных расчётов элементов конструкций из КМ.

Для расчёта элементов матрицы жёсткости материала с применением нитяной модели воспользуемся равенствами (1.26) из лекции №2. Полагая, что все монослои изготовлены из одинаковых компонент, будем иметь

$$g_{xx} = \sum_{i=1}^{3} E_1 \cos^4 \varphi_i \delta_i = E_1 \cos^4 \varphi \cdot \frac{\delta_c}{2} + E_1 \cos^4 \varphi \cdot \frac{\delta_c}{2} = E_1 \delta_c \cos^4 \varphi,$$

$$g_{yy} = \sum_{i=1}^{3} E_1 \sin^4 \varphi_i \delta_i = E_1 \sin^4 \varphi \cdot \frac{\delta_c}{2} + E_1 \sin^4 \varphi \cdot \frac{\delta_c}{2} + E_1 \sin^4 \frac{\pi}{2} \delta_k = E_1 \delta_c \sin^4 \varphi + E_1 \delta_k,$$

$$g_{xy} = g_{tt} = \sum_{i=1}^{3} E_1 \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i \delta_i = E_1 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cdot \frac{\delta_c}{2} \cdot 2 = E_1 \delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Таким образом, матрица жёсткости материала будет иметь такой вид

$$\left[G_c \right] = E_1 \begin{bmatrix} \delta_c \cos^4 \varphi & \delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi & 0 \\ \delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi & \delta_c \sin^4 \varphi + \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \end{bmatrix}. \qquad (1.33)$$

При выполнении расчётов полезно рассмотреть частные случаи. Пусть φ=0°, т.е. имеем материал с продольно-поперечным армированием. Тогда будем иметь $g_{xx} = E_1 \delta_c, \quad g_{yy} = E_1 \delta_k, \quad g_{xy} = g_{tt} = 0$. Этот результат согласуется с формулами (1.28) в случае нитяной модели и одинакового материала для обоих монослоёв. Если φ=90°, то имеем по сути однонаправленный материал. Тогда в соответствии с нитяной моделью следует, что $g_{xx} = g_{xy} = g_{tt} = 0, \; g_{yy} = E_1$.

Обратим матрицу (1.33). Находим параметр Δ. Получим

$$\Delta = g_{xx} g_{yy} - g_{xy}^2 = E_1 \delta_c \cos^4 \varphi \cdot E_1 \left(\delta_c \sin^4 \varphi + \delta_k \right) - \left(E_1 \delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right)^2 =$$
$$= E_1^2 \delta_c \delta_k \cos^4 \varphi.$$

Тогда будем иметь

$$\left[S_c \right] = \frac{1}{E_1} \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_c \sin^4 \varphi + \delta_k}{\delta_c \delta_k \cos^4 \varphi} & -\dfrac{\delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\delta_c \delta_k \cos^4 \varphi} & 0 \\ -\dfrac{\delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\delta_c \delta_k \cos^4 \varphi} & \dfrac{\delta_c \cos^4 \varphi}{\delta_c \delta_k \cos^4 \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\delta_c \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \end{bmatrix}.$$

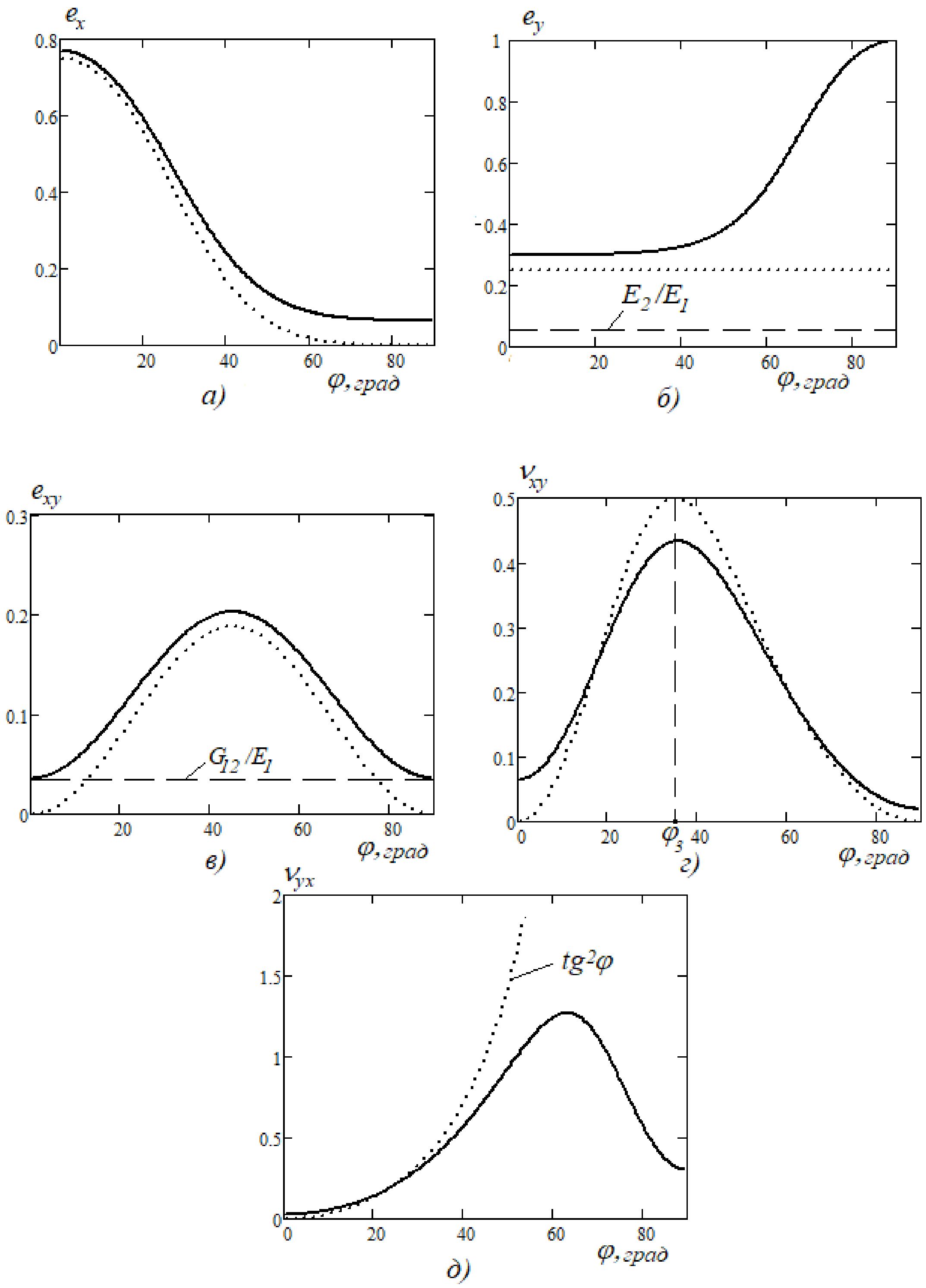

Рис.1.10. Графики зависимости приведённых технических характеристик упругости многослойного композита со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90^0_k\right]$ от угла φ при $\delta_с$=0,75, $\delta_к$=0,25

(▬ – с учётом несущей способности связующего, ······· – нитяная модель)

После очевидных преобразований приходим к следующему виду матрицы податливости

$$\left[S_c\right]=\frac{1}{E_1}\begin{bmatrix} \dfrac{\delta_c \sin^4\varphi+\delta_k}{\delta_c\delta_k\cos^4\varphi} & -\dfrac{\sin^2\varphi}{\delta_k\cos^2\varphi} & 0 \\ -\dfrac{\sin^2\varphi}{\delta_k\cos^2\varphi} & \dfrac{1}{\delta_k} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\delta_c\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Выражения для технических характеристик упругости можно определить по следующим формулам

$$E_x=E_1\frac{\delta_c\delta_k\cos^4\varphi}{\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k},\ \ E_y=E_1\delta_k,\quad G_{xy}=E_1\delta_c\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$
$$\nu_{xy}=\frac{\delta_c\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k},\quad \nu_{yx}=tg^2\varphi. \tag{1.35}$$

На рис.1.10 для случая δ_c=0,75, $\delta_к$=0,25 представлены графики зависимости приведённых технических характеристик упругости рассматриваемого КМ, где модули упругости нормированы по величине E_1, т.е. на графиках указаны такие параметры $e_x=E_x/E_1$, $e_y=E_y/E_1$, $e_{xy}= G_{xy}/E_1$. Анализируя полученные результаты можно сделать следующие выводы:

1) нитяная модель качественно верно предсказывает зависимость модулей упругости E_x, G_{xy} и коэффициента Пуассона ν_{xy} от угла армирования φ;
2) для модуля упругости E_y и коэффициента Пуассона ν_{yx} неучёт несущей способности связующего приводит к удовлетворительному совпадению результатов для угла армирования φ, не превышающего значение ≈40°, для других значений угла результаты качественно не совпадают;
3) зависимости G_{xy}(φ), ν_{xy}(φ) и ν_{yx}(φ) изменяются немонотонно, они имеют выраженную точку экстремума; при проектировании элементов конструкций из КМ эта свойство может быть использовано.

Определим экстремальное значение коэффициента Пуассона ν_{xy}. Для этого представим его так $\nu_{xy}=\delta_c f(\varphi)$, где

$$f(\varphi)=\frac{\sin^2 2\varphi}{4\left(\delta_c \sin^4\varphi+\delta_k\right)}.$$

Далее находим

$$\frac{df}{d\varphi}=\frac{2\sin 2\varphi\cos 2\varphi\cdot 2\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)-\sin^2 2\varphi\cdot 4\delta_c\sin^3\varphi\cos\varphi}{4\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)^2}=$$

$$=\sin 2\varphi\frac{\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)\cos 2\varphi-\delta_c\sin^3\varphi\cos\varphi\sin 2\varphi}{\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin 2\varphi}{\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)^2}\left[\delta_c\sin^4\varphi\left(\cos 2\varphi-2\cos^2\varphi\right)+\delta_k\cos 2\varphi\right]$$

$$=\frac{\sin 2\varphi}{\left(\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k\right)^2}\left(\delta_k\cos 2\varphi-\delta_c\sin^4\varphi\right).$$

Отсюда видно, что точками экстремума являются значения $\varphi_{1,2}$=0, π/2, а также корень уравнения $\delta_k\cos 2\varphi_3-\delta_c\sin^4\varphi_3$=0. Решим это уравнение, предварительно записав его так

$$\delta_c\sin^4\varphi_3+2\delta_k\sin^2\varphi_3-\delta_k=0. \tag{1.36}$$

Решая уравнение (1.36) как квадратное относительно положительной величины $\sin^2\varphi_3$, получим

$$\sin^2\varphi_3=\sqrt{\left(\frac{\delta_\kappa}{\delta_c}\right)^2+\frac{\delta_\kappa}{\delta_c}}-\frac{\delta_\kappa}{\delta_c}. \tag{1.37}$$

Таким образом, ещё одно значение угла армирования φ, при котором коэффициент Пуассона ν_{xy}(φ) принимает экстремальное значение, можно определить по формуле (1.37). Можно показать, что выражение, стоящее справа от знака равенства в (1.37) при любом соотношении относительных толщин меньше, чем 1. Кроме этого, из полученной зависимости (1.37) следует, что для применяемых волокнистых КМ всегда должно быть $\varphi_3<\pi/4$.

Определим экстремальные значения коэффициента Пуассона $\nu_{xy}^*=\nu_{xy}\left(\varphi_3\right)$. Для этого воспользуемся формулой для ν_{xy}(φ) из (1.35) и равенствами (1.36), (1.37). Учтём, что согласно формуле (1.36) $\delta_c\sin^4\varphi_3=\delta_k-2\delta_k\sin^2\varphi_3$. Тогда можно записать равенства

$$\nu_{xy}^{*}=\frac{\delta_c\sin^2\varphi_3\cos^2\varphi_3}{\delta_c\sin^4\varphi_3+\delta_k}=\frac{\delta_c\sin^2\varphi_3\cos^2\varphi_3}{\delta_k-2\delta_k\sin^2\varphi_3+\delta_k}=\frac{\delta_c\sin^2\varphi_3}{2\delta_к}.$$

Подставляя в это равенство зависимость (1.37), после несложных преобразований окончательно будем иметь формулу для определения экстремального значения

$$\nu_{xy}^{*}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\delta_c}{\delta_к}}-1\right]. \qquad (1.38)$$

Формулы (1.37) и (1.38) могут быть использованы при прогнозировании максимального значения коэффициента Пуассона ν_{xy} для многослойных КМ со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m/90_k^0\right]$. Для рассматриваемого материала получим $\varphi_3\approx35{,}3°$, $\nu_{xy}^{*}=0{,}5$.

Определим теперь напряжения в монослоях, предполагая, что вектор средних напряжений, действующих на материал, имеет вид $\{\sigma_c\}=\left(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\right)^T$. На основании формулы $\{\varepsilon_c\}=[S_c]\{\sigma_c\}$, а также матрицы (1.34) будем иметь

$$\varepsilon_x=\frac{\delta_c\sin^4\varphi+\delta_k}{\delta_c\delta_k\cos^4\varphi}\frac{\sigma_x}{E_1}-\frac{tg^2\varphi}{\delta_k}\frac{\sigma_y}{E_1}=\frac{\delta_k\sigma_x-\delta_c\sin^2\varphi\left(\sigma_y\cos^2\varphi-\sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi},$$

$$\varepsilon_y=\frac{-\sigma_x tg^2\varphi+\sigma_y}{E_1\delta_k}=\frac{\sigma_y\cos^2\varphi-\sigma_x\sin^2\varphi}{E_1\delta_k\cos^2\varphi},$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{E_1\delta_c\cos^2\varphi\sin^2\varphi}.$$

Далее будем рассматривать практически важный случай, когда $\tau_{xy}=0$. Такое напряженное состояние имеет место, например, при нагружении композитного баллона внутренним давлением.

В соответствии с ранее сформулированным алгоритмом расчёта напряжений и деформаций в монослоях многослойного КМ используем формулу $\{\varepsilon_i\}=[T_{2i}]^{-1}\{\varepsilon_c\}$, где

$$[T_{2i}]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi_i & \sin^2\varphi_i & -\sin\varphi_i\cos\varphi_i\\ \sin^2\varphi_i & \cos^2\varphi_i & \sin\varphi_i\cos\varphi_i\\ \sin 2\varphi_i & -\sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i\end{bmatrix}.$$

При $\varphi_1=\varphi$ будем иметь

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\delta_k\sigma_x - \delta_c \sin^2\varphi\left(\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi}\cos^2\varphi + \frac{\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi}{E_1\delta_k\cos^2\varphi}\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{\sigma_x}{E_1\delta_c\cos^2\varphi},$$

$$\varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\delta_k\sigma_x - \delta_c \sin^2\varphi\left(\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi}\sin^2\varphi + \frac{\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi}{E_1\delta_k\cos^2\varphi}\cos^2\varphi =$$

$$= \frac{\delta_k\sigma_x\sin^2\varphi + \delta_c cos2\varphi\left(\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi},$$

$$\gamma_{12}^{(1)} = \left[\frac{\delta_k\sigma_x - \delta_c \sin^2\varphi\left(\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi} - \frac{\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi}{E_1\delta_k\cos^2\varphi}\right]\sin 2\varphi =$$

$$= \frac{\delta_k\sigma_x - \delta_c\left(\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi\right)}{E_1\delta_k\delta_c\cos^4\varphi}\sin 2\varphi.$$

Используя полученные равенства, нетрудно заметить, что при $\varphi_2 = -\varphi$ следуют соотношения $\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(1)}$, $\varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(1)}$, $\gamma_{12}^{(2)} = -\gamma_{12}^{(1)}$. Для монослоя с углом армирования $\varphi_3 = \pi/2$ получим $\varepsilon_{11}^{(3)} = \varepsilon_y$, $\varepsilon_{22}^{(3)} = \varepsilon_x$, $\gamma_{12}^{(3)} = 0$.

Определим теперь напряжения в монослоях. Решение задачи существенно упрощается, так как в соответствии с нитяной моделью нормальные напряжения, действующие в направлении поперёк волокон, и касательные напряжения в плоскости армирования равны нулю. Тогда будем иметь такой результат

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(1)} = E_1\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\sigma_x}{\delta_c\cos^2\varphi}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}^{(1)},\\
&\sigma_{11}^{(3)} = E_1\varepsilon_y = \frac{\sigma_y\cos^2\varphi - \sigma_x\sin^2\varphi}{\delta_k\cos^2\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Обращает внимание на себя тот факт, что при $\varphi \to \pi/2$ получили $\sigma_{11}^{(1)} \to \infty$ и $\sigma_{11}^{(3)} \to \infty$, что не может соответствовать действительности. Это следствие упрощений, свойственных нитяной модели.

Выполним анализ напряжений в монослоях. При этом будем использовать формулы (1.39), а также зависимости для напряжений, рассчитанные с учётом несущей способности связующего, т.е. в случае, когда

$E_2 \neq 0,\ G_{12} \neq 0,\ \nu_{12} \neq 0,\ \nu_{21} \neq 0$. В последнем случае их проще всего получить численно. По прежнему полагаем, что δ_c=0,75, $\delta_к$=0,25. Кроме этого, рассматриваем частный случай, когда $\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 2\sigma_0$. Как отмечалось ранее, такое соотношение между средними напряжениями имеет место при нагружении композитного баллона внутренним давлением.

Результаты расчёта представлены на рис.1.11. На графиках приведены нормированные значения напряжений, например, $s_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(1)} / \sigma_0$. Как видно из рис.1.11, значения напряжений, определённые с учётом несущей способности, существенно отличаются от данных, полученных с применением нитяной модели. В случае применения нитяной модели, как и было отмечено выше, получили, что при $\varphi \to \pi/2$ следует $\sigma_{11}^{(1)} \to \infty$ и $\sigma_{11}^{(3)} \to \infty$ Качественное совпадение результатов получается для угла армирования φ примерно на интервале от 0° до 40°. При этом нормальные напряжения вдоль волокон, рассчитанные с учётом

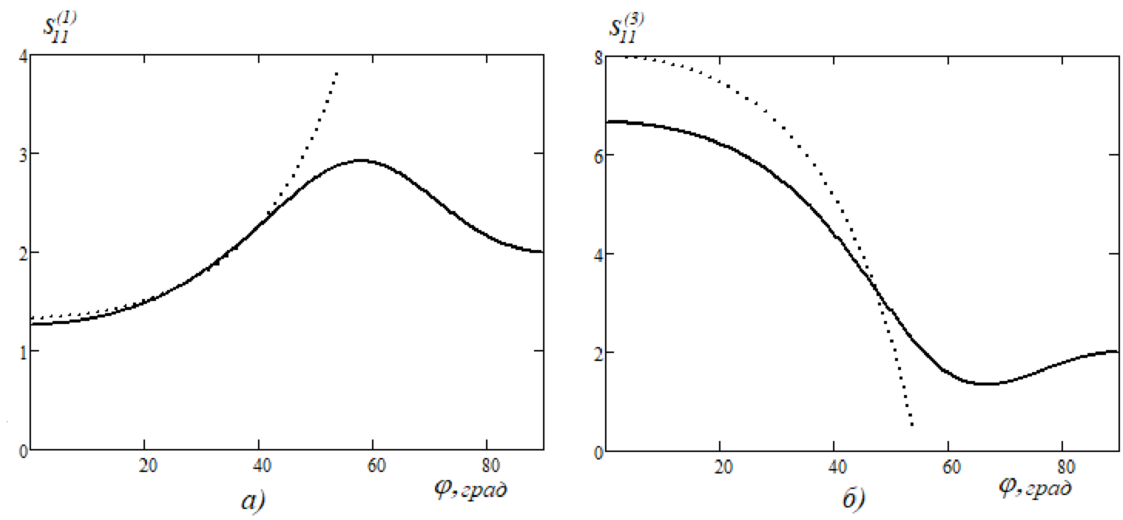

Рис.1.11. Графики зависимости нормированных значений нормальных напряжений в направлении армирования для многослойного композита со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90_k^0\right]$ от угла φ при δ_c=0,75, $\delta_к$=0,25

(——— – с учётом несущей способности связующего, ······· – нитяная модель) несущей способности связующего, изменяются немонотонно и при $\varphi \to \pi/2$, как и следовало ожидать, принимают конечные значения.

Для справки на рис.1.12 показаны графики зависимости нормальных напряжений в направлении поперёк волокон и касательных напряжений в

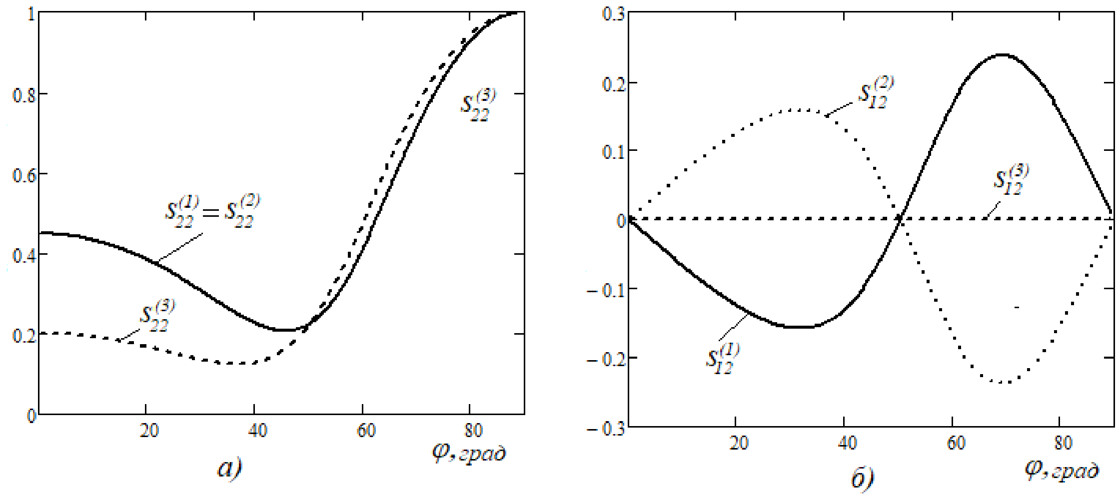

Рис.1.12. Графики зависимости нормированных значений нормальных напряжений в направлении поперёк волокон (а) и касательных напряжений в плоскости армирования (б) для многослойного композита со схемой армирования $\left[(\pm\varphi)_m / 90_k^0\right]$ от угла φ при $\delta_с$=0,75, $\delta_к$=0,25 с учётом несущей способности связующего

плоскости армирования. Можно отметить, что в монослоях многослойного КМ напряжения поперёк волокон и касательные напряжения в плоскости армирования значительно меньше, чем напряжения вдоль волокон. Этим и обусловлено применение нитяной модели в расчётах, в которой как раз и утверждается, что напряжениями $\sigma_{22}^{(i)}$ и $\sigma_{12}^{(i)}$ можно пренебречь по сравнению с напряжениями $\sigma_{11}^{(i)}$, действующими вдоль волокон.

Вопросы для самоподготовки

1. Сравнить величины $E_x(0)$, $E_x(\pi/2)$ и $E_y(0)$, $E_y(\pi/2)$, определенные в случае а) пренебрежения несущей способности связующего, т.е. при использовании нитяной модели и б) в случае учёта несущей способности связующего.
2. Сравнить величины $\nu_{xy}(0)$, $\nu_{xy}(\pi/2)$ и $\nu_{yx}(0)$, $\nu_{yx}(\pi/2)$, определенные в случае: а) пренебрежения несущей способности связующего, т.е. при использовании нитяной модели и б) в случае учёта несущей способности связующего.
3. Определить угол армирования φ_o, при котором многослойный композит со схемой армирования $[(\pm\varphi)/90°]$ будет квазиизотропным. При каком условии это возможно?
4. Доказать непротиворечивость формулы (1.37), т.е. её правая часть меньше единицы для любых значений $\delta_с$ и $\delta_к$.
5. Доказать, что для любых значений $\delta_с$ и $\delta_к$ выполняется неравенство $\varphi_3<\pi/4$.
6. Построить графики зависимости напряжений в монослоях многослойного композита со схемой армирования $[(\pm\varphi)/90°]$ для случаев: а) одноосного растяжения в направлении оси *OX*, б) для чистого сдвига в плоскости *0XУ* (см.рис.1.9).

   Рассмотреть варианты: а) пренебрежения несущей способности связующего, т.е. при использовании нитяной модели и б) в случае учёта несущей способности связующего.
7. Почему в монослое, деформирующемся в составе многослойного КМ, нормальные напряжения поперёк волокон и касательные напряжения в плоскости армирования всегда значительно меньше, чем нормальные напряжения вдоль волокон?