**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**
**высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана**
**(национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Специальное машиностроение

КАФЕДРА СМ1«Космические аппараты и ракеты-носители»

Домашнее задание №1

по курсу «Динамика летательных аппаратов»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р. ______________________

(Подпись, дата)

Преподаватель: Гончаров Д.А. ______________________

(Подпись, дата)

Москва, 2024

# Условие задания

Согласно порядковому номеру в списке 13 принимаем схему I и номер варианта 7.

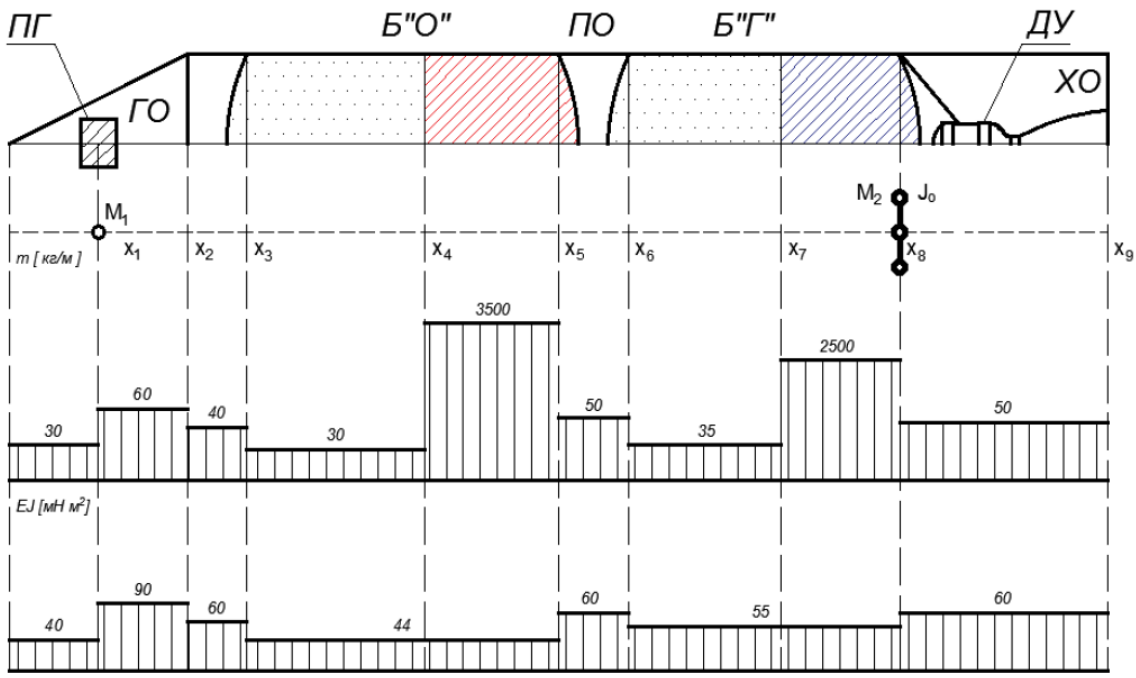


Рисунок 1 — Схема ракеты

Исходные данные:

- Координаты сечения
  - $x_1 = 1.7$ м
  - $x_2 = 3.5$ м
  - $x_3 = 4.0$ м
  - $x_4 = 7.0$ м
  - $x_5 = 10.0$ м
  - $x_6 = 11.0$ м
  - $x_7 = 15.0$ м
  - $x_8 = 19.0$ м
  - $x_9 = 21.0$ м
- Параметры АС
  - $w_0 = 25$
  - $w_\text{р} = 70$

  - $W_{2\text{р}} = 110$
  - $k_{\text{р}} = 0.6$

- $M_1 = 2.0$ т
- $M_2 = 2.0$ т
- $J_0 = 3.0$ т $\cdot$ м$^2$
- $x_{\text{ГП}} = 19.5$ м

Требуется:

1. Для заданного варианта определить две первых собственные частоты упругих поперечных колебаний корпуса ракеты.
2. Построить эпюры формы упругой линии и угла поворота сечений для каждого тона колебаний сечения.
3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
4. Выполнить пункты №1 и №2 для полностью заправленной ракеты (момент старта) и «сухой» ракеты (момент выключения ДУ при стрельбе на максимальную дальность).
5. Вычислить значения приведенных масс для расчетных случаев.

# 1 Решение

Решать задачу будем с помощью метода начальных параметров. Для этого распределим сосредоточенную массу в окрестности точки, в которой она расположена на расстоянии $0.1$ м в обе стороны. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний для i-го участка имеет вид

$$EJ_i \cdot f_i^{IV}(x) - \omega^2 m_i f_i(x) = 0 \tag{1.1}$$

Введем коэффициент колебаний $b_i$:

$$b_i^4 = \frac{\omega^2 m_i}{EJ_i} \tag{1.2}$$

Тогда уравнение колебаний (1.1) примет вид:

$$f_i^{IV}(x) - b_i^4 f_i(x) = 0 \tag{1.3}$$

Решение системы уравнений (1.3) должно удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения участков стержня. Данная задача разрешима только для тех значений $\omega$, которые являются частотами свободных колебаний неоднородного стержня. Решение уравнений (1.3) представим в виде линейной комбинации балочных функций Крылова:

$$f_i(x) = C_{1i}S(b_i x) + C_{2i}T(b_i x) + C_{3i}U(b_i x) + C_{4i}V(b_i x) \tag{1.4}$$

где балочные функции Крылова имеют вид

$$\begin{aligned} S(b_i x) &= \frac{1}{2}(ch(b_i x) + \cos(b_i x)) \\ T(b_i x) &= \frac{1}{2}(sh(b_i x) + \sin(b_i x)) \\ U(b_i x) &= \frac{1}{2}(ch(b_i x) - \cos(b_i x)) \\ V(b_i x) &= \frac{1}{2}(sh(b_i x) - \sin(b_i x)) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Функции Крылова обладают свойствами, делающими их удобными для решения задач поперечных колебаний стержня:

1. $S(0) = 1;\ T(0) = U(0) = V(0) = 0$
2. $S'(b_i x) = b_i V(b_i x);\ V'(b_i x) = b_i U(b_i x);\ U'(b_i x) = b_i T(b_i x);\ T'(b_i x) = b_i S(b_i x)$

Введем вектор формы колебаний:

$$\overline{u}_i(x) = \begin{bmatrix} u_{1i}(x) \\ u_{2i}(x) \\ u_{3i}(x) \\ u_{4i}(x) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

где:

- $u_{1i}(x) = f_i(x)$ — форма перемещений
- $u_{2i}(x) = f_i'(x)$ — форма угла поворота
- $u_{3i}(x) = EJ_i \cdot f_i''(x)$ — форма изгибающего момента
- $u_{4i}(x) = EJ_i \cdot f_i'''(x)$ — форма поперечного момента

Так как на стыках меняется только значения погонных масс и жесткостей, то условие стыка примет вид

$$\overline{u}_i(l_i) = \overline{u}_{i+1}(0) \tag{1.7}$$

Исходя из свойств функций Крылова, можно связать между собой вектор формы в любой точке участка с вектором формы в его начале. Это условие связи имеет вид

$$\overline{u}_i(x) = A_i(x) \cdot \overline{u}_i(0) \tag{1.8}$$

где матрица $A$ имеет вид

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} S(b_i x) & \dfrac{T(b_i x)}{b_i} & \dfrac{U(b_i x)}{EJ_i \cdot b_i^2} & \dfrac{V(b_i x)}{EJ_i \cdot b_i^3} \\ V(b_i x) \cdot b_i & S(b_i x) & \dfrac{T(b_i x)}{EJ_i \cdot b_i} & \dfrac{U(b_i x)}{EJ_i \cdot b_i^2} \\ U(b_i x) \cdot EJ_i \cdot b_i^2 & V(b_i x) \cdot EJ_i \cdot b_i & S(b_i x) & \dfrac{T(b_i x)}{b_i} \\ V(b_i x) \cdot EJ_i \cdot b_i^3 & U(b_i x) \cdot EJ_i \cdot b_i^2 & V(b_i x) \cdot b_i & S(b_i x) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Из условия (1.7) следует

$$\overline{u}_{i+1}(x) = A_{i+1}(x) \cdot A_i(l_i) \cdot \overline{u}_i(0) \tag{1.10}$$

Поэтому решение для произвольного участка можно выразить через вектор формы в начале первого участка:

$$\overline{u}_i(x) = A_i(x) \cdot \left( \prod_{j=1}^{i-1} A_j(l_j) \right) \cdot \overline{u}_1(0) \tag{1.11}$$

Введем матрицу $P$:

$$P = \prod_{j=1}^{k} A_j(l_j) \tag{1.12}$$

Тогда выражение (1.11) примет вид

$$\overline{u}_i(L) = P \cdot \overline{u}_1(0) \tag{1.13}$$

или в скалярной форме:

$$u_r(l) = \sum_{s=1}^{4} p_{rs} u_s(0) \tag{1.14}$$

где $p_{rs}$ — коэффициенты матрицы $P$, зависящие от частоты свободных колебаний $\omega$.

Граничные условия на концах ракеты (свободные концы) будут иметь вид

$$\begin{cases} u_3(0) = 0 \\ u_4(0) = 0 \\ u_3(L) = 0 \\ u_4(L) = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

С учетом граничных условий (1.15) выражение (1.14) примет вид

$$\begin{cases} u_1(L) = p_{11}u_1(0) + p_{12}u_2(0) \\ u_2(L) = p_{21}u_1(0) + p_{22}u_2(0) \\ 0 = p_{31}u_1(0) + p_{32}u_2(0) \\ 0 = p_{41}u_1(0) + p_{42}u_2(0) \end{cases} \tag{1.16}$$

Нетривиальным решением системы (1.16) является выражение

$$D(\omega) = p_{31} \cdot p_{42} - p_{32} \cdot p_{41} = 0 \tag{1.17}$$

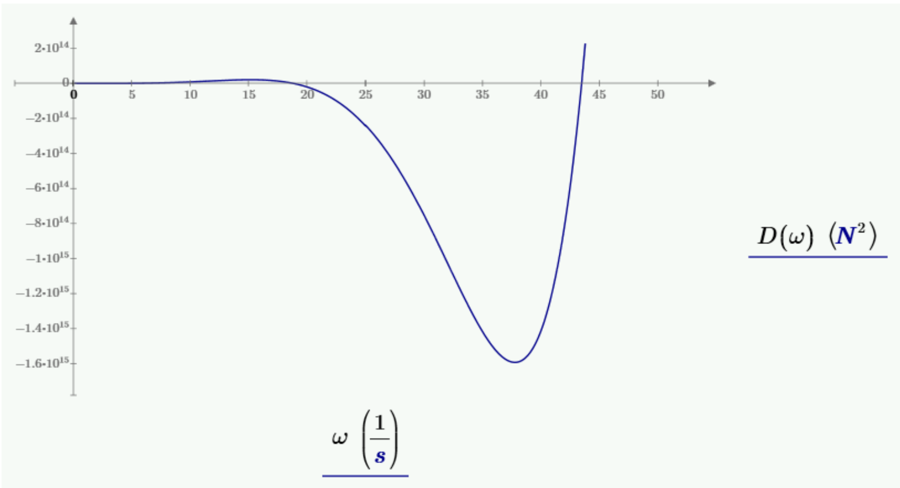


Рисунок 1.1 — График для определения собственных частот

Получим первые 2 собственные частоты:

$$\begin{cases} \omega_1 = 18.868 \, \dfrac{\text{рад}}{\text{с}} \\ \omega_2 = 43.476 \, \dfrac{\text{рад}}{\text{с}} \end{cases} \tag{1.18}$$

# 2 Построение эпюр формы упругой линии и угла поворота сечений для каждого тона колебаний

Из системы уравнений (1.16) получим:

$$u_2(0) = -\frac{p_{31}(\omega_n)}{p_{32}(\omega_n)} u_1(0) \tag{2.1}$$

Положим $u_1(0) = 1$, тогда вектор формы в начале первого участка будет иметь вид:

$$\overline{u}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{p_{31}(\omega_n)}{p_{32}(\omega_n)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Форма собственных колебаний имеет вид:

$$f_n(x) = u_1(x) = p_{11}(x)u_1(0) + p_{12}(x)u_2(0) \tag{2.3}$$

С учетом (2.1) выражение (2.3) можно записать в виде:

$$f_n(x) = p_{11}(x) - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)}p_{12}(x) \tag{2.4}$$

Форма угла поворота имеет вид:

$$u_2(x) = p_{21}(x)u_1(0) + p_{22}(x)u_2(0) \tag{2.5}$$

или:

$$\theta(x) = u_2(x) = p_{21}(x) - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)}p_{22}(x) \tag{2.6}$$

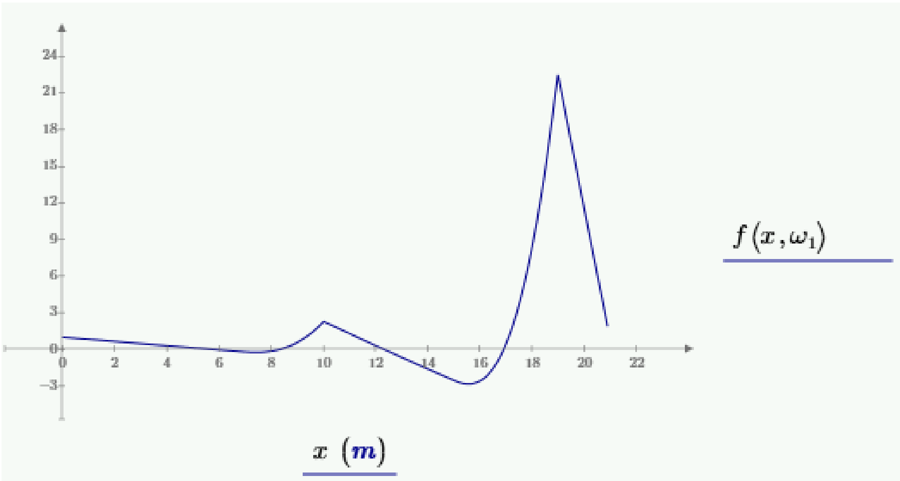


Рисунок 2.1 — Форма колебаний для первого тона

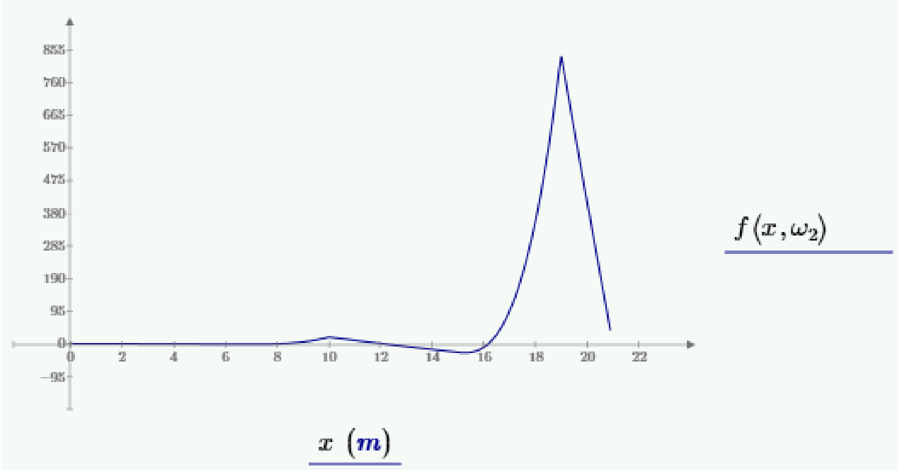


Рисунок 2.2 — Форма колебаний для второго тона

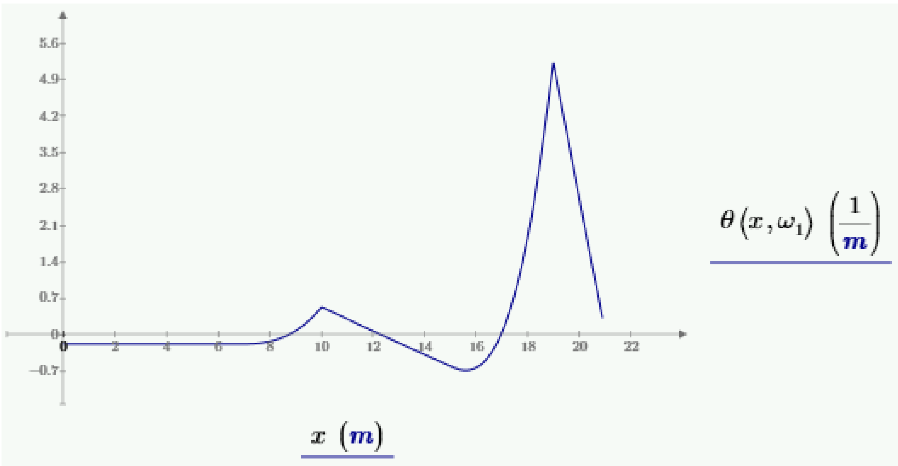


Рисунок 2.3 — Форма угла поворота для первого тона

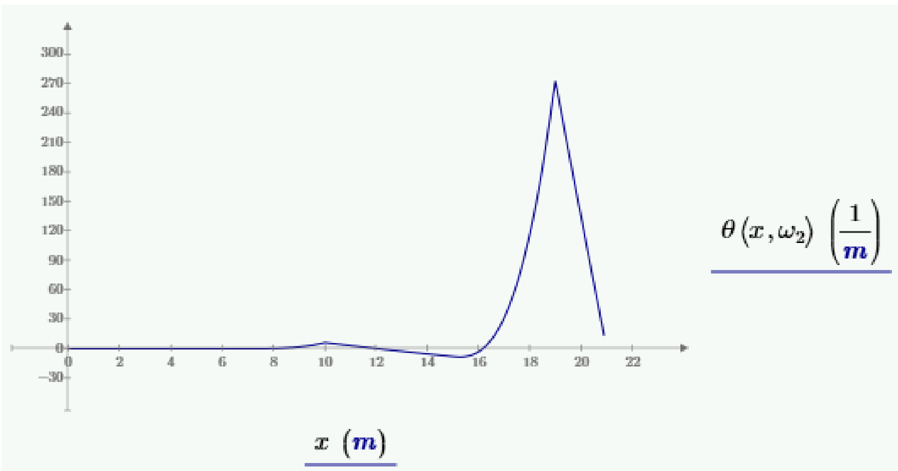


Рисунок 2.4 — Форма угла поворота для второго тона