



**Министерство науки и высшего образования Российской  
Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

---

ФАКУЛЬТЕТ

Специальное машиностроение

---

КАФЕДРА

СМ1 «Космические аппараты и ракеты-носители»

---

Домашнее задание  
по курсу «Основы автоматизированного проектирования»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р.

Преподаватель: Сдобников А.Н.

---

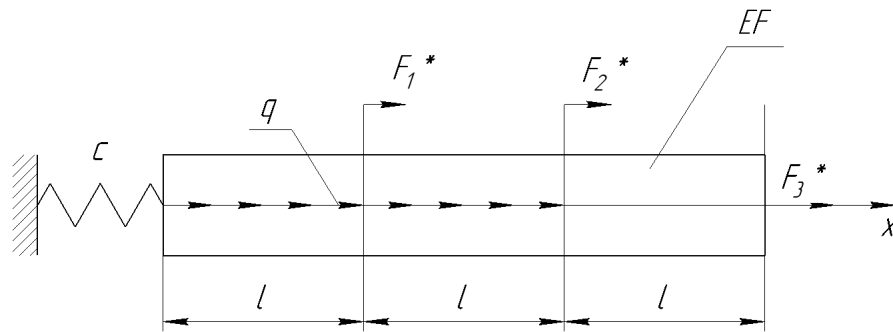
(Подпись, дата)

---

(Подпись, дата)

Москва, 2024

## Условие



Расчетная схема

Для данной расчетной схемы необходимо:

### Часть 1.

1. Сформулировать краевую задачу.
2. Построить точное решение краевой задачи.
3. Преобразовать краевую задачу в вариационный принцип
4. Получить решение энергетическим методом на линейной аппроксимации поля перемещений
5. Дать оценку погрешности по энергии между точным и приближенным решением

### Часть 2.

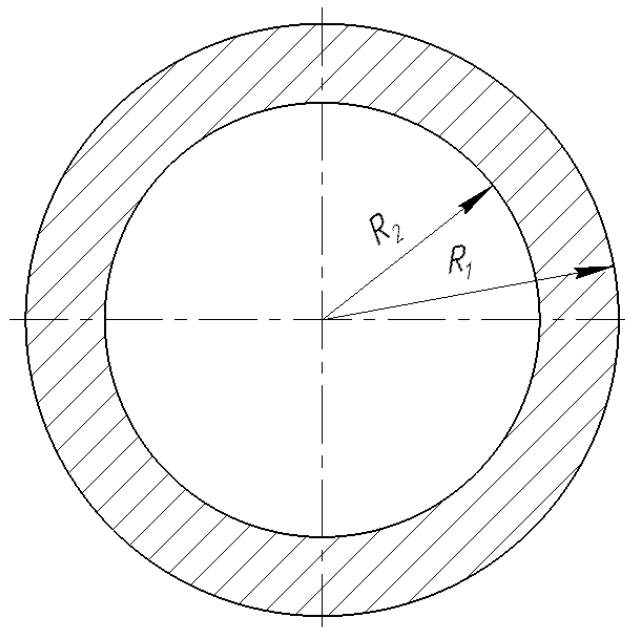
6. Записать разрешающую систему уравнений Метода Конечных Элементов (МКЭ), провести ее анализ и получить «вручную» решение для перемещений и напряжений
7. Выполнить расчет заданной конструкции с использованием пакета MSC Patran\_Nastran
8. Провести сравнительный анализ результатов, полученных методами, использованными в работе.
9. Подготовить отчет по результатам проведенных исследований

Согласно варианту №13 имеем следующие исходные данные:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{cl}{EF} = 7 \\ \frac{ql}{EF} = 1 \\ \frac{F_1^*}{EF} = 0 \\ \frac{F_2^*}{EF} = 0.5 \\ \frac{F_3^*}{EF} = 0.2 \end{array} \right. \quad (0.1)$$

При выполнении численных расчетов принять следующие значения параметров:

- Размеры поперечного сечения:  $R_1 = 150$  мм,  $R_2 = 110$  мм



Поперечное сечение

- Длина участка  $l = 0.5$  м
- Для варианта №13 материал: АМг ( $E = 7.31 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu = 0.33$ )

## Решение

### 1 Формулировка краевой задачи

Введем начало координат в точке А. Отрежем пружину, заменим реакцией:

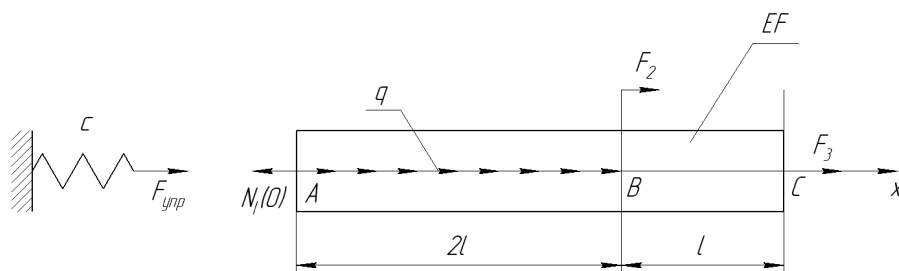


Рисунок 1.1 — Расчетная схема

Сила упругости пружины равна:

$$F_{\text{упр}} = c \cdot u(0) \quad (1.1)$$

Разобьем стержень на 2 участка и запишем для них дифференциальное уравнение равновесия:

1. Участок AB:

$$EFu''_I(x) + q = 0 \quad (1.2)$$

2. Участок BC:

$$EFu''_{II}(x) = 0 \quad (1.3)$$

Для записи граничных условий рассмотрим равновесие сечений:

1. Сечение A:

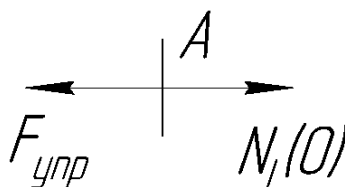


Рисунок 1.2 — К записи условий равновесия сечения A

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1.4)$$

$$F_{\text{упр}} = N_I(0) \quad (1.5)$$

$$cu_I(0) = EFu'_I(0) \quad (1.6)$$

2. Сечение B:

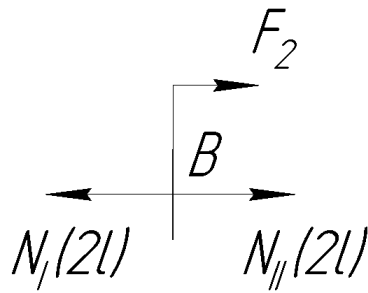


Рисунок 1.3 — К записи условий равновесия сечения  $B$

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1.7)$$

$$N_I(2l) = F_2 + N_{II}(2l) \quad (1.8)$$

$$EFu'_I(2l) = F_2 + EFu'_{II}(2l) \quad (1.9)$$

3. Сечение  $C$ :

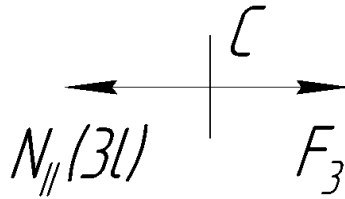


Рисунок 1.4 — К записи условия равновесия сечения  $C$

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1.10)$$

$$N_{II}(3l) = F_3 \quad (1.11)$$

$$EFu'_{II}(3l) = F_3 \quad (1.12)$$

После нагружения в новом состоянии равновесия выполняется условие неразрывности перемещений, т.е.:

$$u_I(2l) = u_{II}(2l) \quad (1.13)$$

Получим следующие результаты формулировки краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} EFu_I''(x) + q = 0 \\ EFu_{II}''(x) = 0 \\ cu_I(0) = EFu_I'(0) \\ EFu_I'(2l) = F_2 + EFu_{II}'(2l) \\ EFu_{II}'(3l) = F_3 \\ u_I(2l) = u_{II}(2l) \end{array} \right. \quad (1.14)$$

## 2 Построение точного решения краевой задачи

Проинтегрируем дифференциальные уравнения равновесия (1.2) и (1.3):

1. Участок  $AB$ :

$$u_I''(x) = -\frac{q}{EF} \quad (2.1)$$

$$u_I'(x) = -\frac{qx}{EF} + C_1 \quad (2.2)$$

$$u_I(x) = -\frac{qx^2}{2EF} + C_1x + C_2 \quad (2.3)$$

2. Участок  $BC$ :

$$u_{II}''(x) = 0 \quad (2.4)$$

$$u_{II}'(x) = C_3 \quad (2.5)$$

$$u_{II}(x) = C_3x + C_4 \quad (2.6)$$

Подставим полученные выражения в уравнения 3-6 системы (1.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} c \cdot C_2 = EF \cdot C_1 \\ EF \cdot \left(-\frac{2ql}{EF} + C_1\right) = F_2 + EF \cdot C_3 \\ EF \cdot C_3 = F_3 \\ -\frac{2ql^2}{EF} + 2C_1l + C_2 = 2C_3l + C_4 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Найдем константы интегрирования:

$$C_3 = \frac{F_3}{EF} = 0.2 \quad (2.8)$$

$$-2ql + EFC_1 = F_2 + 0.2EF \quad (2.9)$$

$$C_1 = \frac{F_2 + 2ql}{EF} + 0.2 = 0.5 + 2 + 0.2 = 2.7 \quad (2.10)$$

$$C_2 = \frac{EFC_1}{c} = \frac{C_1 l}{7} = 0.386l \quad (2.11)$$

$$C_4 = -\frac{2ql^2}{EF} + 2(C_1 - C_3)l + C_2 = -2l + 2 \cdot 2.5l + 0.386l = 3.386l \quad (2.12)$$

Получим итоговые функции перемещения:

$$\begin{cases} u_I(x) = -\frac{x^2}{2l} + 2.7x + 0.386l, & 0 \leq x \leq 2l \\ u_{II}(x) = 0.2x + 3.386l, & 2l \leq x \leq 3l \end{cases} \quad (2.13)$$

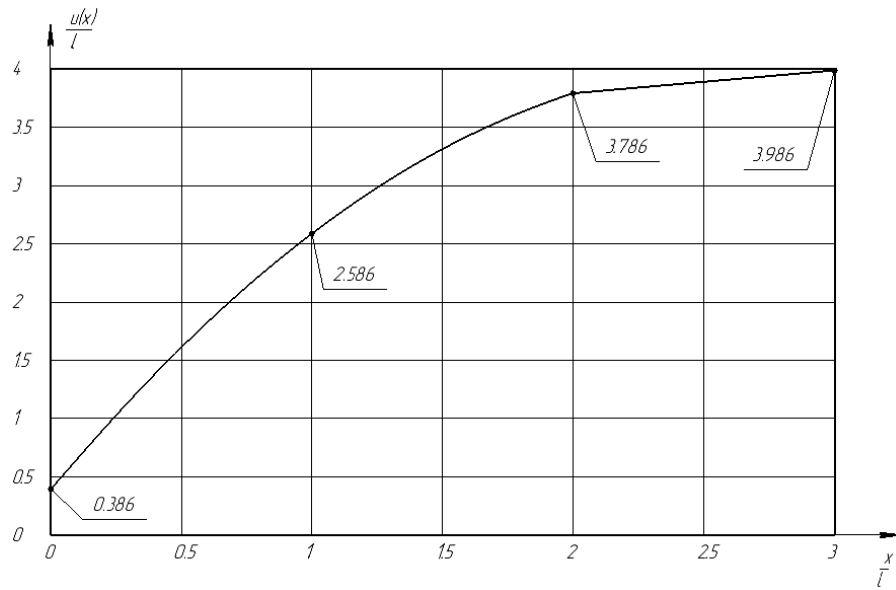


Рисунок 2.1 — График перемещений

Получим функции нормальной силы  $N$ :

$$N = EFu'(x) \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} u'_I(x) = -\frac{x}{l} + 2.7 \\ u'_{II}(x) = 0.2 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} N_I(x) = (-\frac{x}{l} + 2.7)EF, & 0 \leq x \leq 2l \\ N_{II}(x) = 0.2EF, & 2l \leq x \leq 3l \end{cases} \quad (2.16)$$

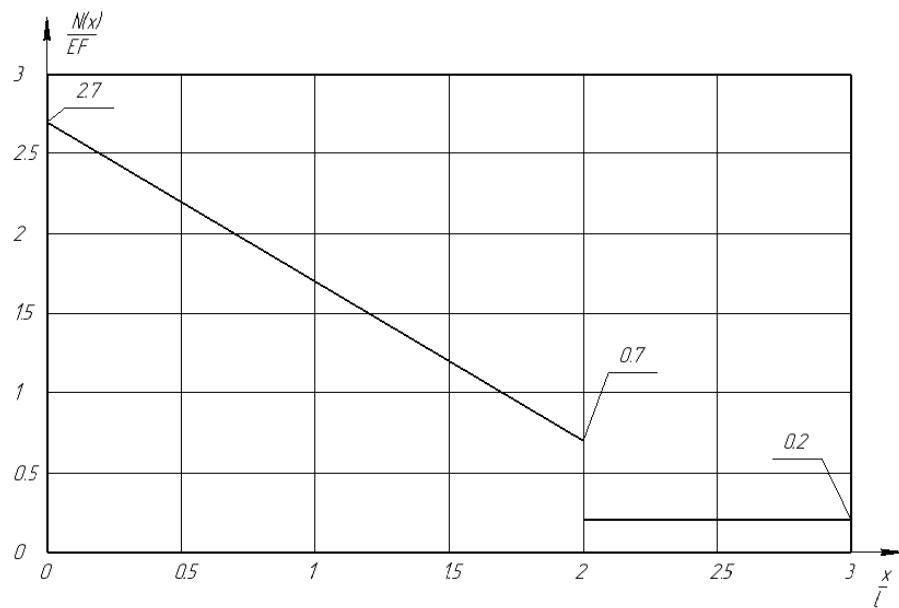


Рисунок 2.2 — График нормальной силы  $N$

Получим функции нормальных напряжений  $\sigma(x)$ :

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \sigma_I(x) = \left(-\frac{x}{l} + 2.7\right)E, & 0 \leq x \leq 2l \\ \sigma_{II}(x) = 0.2E, & 2l \leq x \leq 3l \end{cases} \quad (2.18)$$

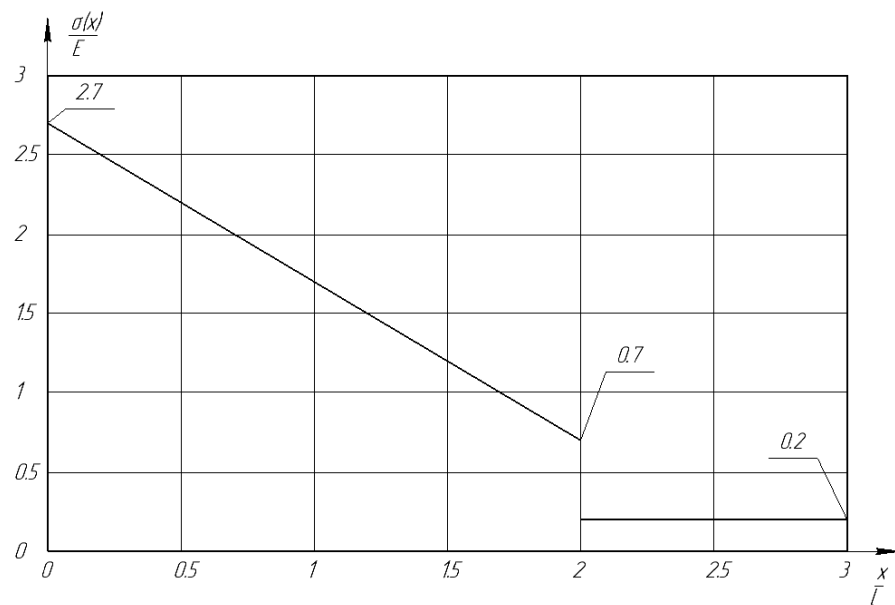


Рисунок 2.3 — График нормальных напряжений



### 3 Преобразование краевой задачи в вариационный принцип

Запишем невязку дифференциального уравнения краевой задачи (1.14):

- для участка  $AB$ :

$$L[u_I] = EFu_I''(x) + q \quad (3.1)$$

- для участка  $BC$ :

$$L[u_{II}] = EFu_{II}''(x) \quad (3.2)$$

В операторной форме невязка выглядит следующим образом:

$$L[u] = Au - f \quad (3.3)$$

где  $A = EF \frac{d^2}{dx^2}$  — дифференциальный оператор краевой задачи,  $f = -q$ .

Запишем условие аннулирования невязки:

$$\int_0^L L[u] \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (3.4)$$

где  $u(x)$  имеет вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x) \quad (3.5)$$

где  $\varphi_i(x)$  — базисные функции,  $\alpha_i$  — некоторые коэффициенты.

Выражение (3.4) представляет собой систему уравнений

$$\begin{cases} \int_0^L L[u] \varphi_1(x) dx = 0 \\ \int_0^L L[u] \varphi_2(x) dx = 0 \\ \dots \\ \int_0^L L[u] \varphi_n(x) dx = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Эти уравнения можно привести к удобному для рассмотрения виду. Для этого запишем вариацию (3.5):

$$\delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \delta \alpha_i \varphi_i \quad (3.7)$$

Уравнения (3.6) умножим на  $\delta \alpha_i$  соответственно и сложим:

$$\int_0^L L[u] \left( \sum_{i=1}^{\infty} \delta \alpha_i \varphi_i \right) dx = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_0^L L[u] \delta u dx = 0 \quad (3.9)$$

Запишем вариационное уравнение (3.9) для нашей задачи:

$$\int_0^{2l} (EFu_I''(x) + q) \delta u_I(x) dx + \int_{2l}^{3l} EFu_{II}''(x) \delta u_{II}(x) dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^{2l} EFu_I''(x) \delta u_I(x) dx + \int_{2l}^{3l} EFu_{II}''(x) \delta u_{II}(x) dx + \int_0^{2l} q \delta u(x) dx = 0 \quad (3.11)$$

Преобразуем первые 2 слагаемых:

$$\int_0^{2l} EFu_I''(x) \delta u_I(x) dx = \int_0^{2l} EF \delta u_I du_I' = EFu_I' \delta u_I \Big|_0^{2l} - \int_0^{2l} EFu_I' \delta u_I' dx \quad (3.12)$$

$$\int_{2l}^{3l} EFu_{II}''(x) \delta u_{II}(x) dx = \int_{2l}^{3l} EF \delta u_{II} du_{II}' = EFu_{II}' \delta u_{II} \Big|_{2l}^{3l} - \int_{2l}^{3l} EFu_{II}' \delta u_{II}' dx \quad (3.13)$$

Подставим (3.12) и (3.13) в (3.11):

$$\begin{aligned} & EFu_I'(2l) \delta u_I(2l) - EFu_I'(0) \delta u_I(0) - \int_0^{2l} EFu_I' \delta u_I' dx + EFu_{II}'(3l) \delta u_{II}(3l) - \\ & - EFu_{II}'(2l) \delta u_{II}(2l) - \int_{2l}^{3l} EFu_{II}' \delta u_{II}' dx + \int_0^{2l} q \delta u_I dx = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учтем граничные условия из формулировки краевой задачи (1.14) и условие  $\delta u_I(2l) = \delta u_{II}(2l)$ :

$$\begin{aligned} & F_2 \delta u_I(2l) - cu_I(0) \delta u_I(0) + F_3 \delta u_{II}(3l) - \\ & - \int_0^{2l} EFu_I' \delta u_I' dx - \int_{2l}^{3l} EFu_{II}' \delta u_{II}' dx + \int_0^{2l} q \delta u_I dx = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Преобразуем (3.15), используя правила варьирования:

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \frac{1}{2} \int_0^{2l} EFu_I'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{2l}^{3l} EFu_{II}'^2 dx - \int_0^{2l} qu_I dx + \frac{1}{2} cu_I^2(0) - F_2 u_I(2l) - \right. \\ & \left. - F_3 u_{II}(3l) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда функционал полной потенциальной энергии равен:

$$\begin{aligned} \Pi[u_I, u_{II}] = & \frac{1}{2} \int_0^{2l} EFu_I'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{2l}^{3l} EFu_{II}'^2 dx - \int_0^{2l} qu_I dx + \frac{1}{2} cu_I^2(0) - F_2 u_I(2l) - \\ & - F_3 u_{II}(3l) \end{aligned} \quad (3.17)$$

и выражение (3.16) можно переписать в виде:

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) является условием стационарности функционала полной потенциальной энергии, которое согласно принципу Лагранжа выполняется на точном решении краевой задачи.

## 4 Получение решения энергетическим методом на линейной аппроксимации поля перемещений

Аппроксимируем поле перемещений кусочно-линейными функциями:

- Первый участок (первая половина  $AB$ )

$$u_I(x) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{l}x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1)$$

где  $u_0 = u(0)$ ,  $u_1 = u(l)$ .

- Вторым участком (вторая половина  $AB$ )

Введем новую систему координат  $O\tilde{x}$  с началом в точке  $x = l$ . Тогда

$$u_{II}(\tilde{x}) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}\tilde{x}, \quad 0 \leq \tilde{x} \leq l \quad (4.2)$$

где  $u_2 = u(2l)$ .

- Третьим участком ( $BC$ )

Введем новую систему координат  $O\hat{x}$  с началом в точке  $x = 2l$ . Тогда

$$u_{III}(\hat{x}) = u_2 + \frac{u_3 - u_2}{l}\hat{x}, \quad 0 \leq \hat{x} \leq l \quad (4.3)$$

где  $u_3 = u(3l)$

Получим следующий функционал:

$$\begin{aligned} \Pi[u_I, u_{II}, u_{III}] = & \frac{1}{2} \int_0^l EF u_I'^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l EF u_{II}'^2(\tilde{x}) d\tilde{x} + \frac{1}{2} \int_0^l EF u_{III}'^2(\hat{x}) d\hat{x} - \\ & - \int_0^l qu_I(x) dx - \int_0^l qu_{II}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \frac{1}{2} cu_0^2 - F_2 u_2 - F_3 u_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Найдем производные функций перемещения:

$$u_I'(x) = \frac{u_1 - u_0}{l} \quad (4.5)$$

$$u_{II}'(\tilde{x}) = \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (4.6)$$

$$u'_{III}(\hat{x}) = \frac{u_3 - u_2}{l} \quad (4.7)$$

Подставим (4.5) и (4.6) в функционал (4.4):

$$\begin{aligned} \Pi[u_0, u_1, u_2, u_3] = & \frac{1}{2}EF \left[ \left( \frac{u_1 - u_0}{l} \right)^2 \cdot l + \left( \frac{u_2 - u_1}{l} \right)^2 \cdot l + \left( \frac{u_3 - u_2}{l} \right)^2 \cdot l \right] - \\ & - q \left( (u_0 + u_1)l + \frac{u_2 - u_0}{l} \frac{l^2}{2} \right) + \frac{1}{2}cu_0^2 - F_2u_2 - F_3u_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Запишем условие стационарности функционала (4.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial u_0} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Распишем выражения (4.9):

$$\frac{(u_1 - u_0)EF}{l} = u_0c - \frac{ql}{2} \quad (4.10)$$

$$\frac{(2u_1 - u_0 - u_2)EF}{l} = ql \quad (4.11)$$

$$\frac{(4u_2 - 2u_1 - 2u_3)EF}{2l} = F_2 + \frac{ql}{2} \quad (4.12)$$

$$\frac{(u_3 - u_2)EF}{l} = F_3 \quad (4.13)$$

Из (4.10) выразим  $u_1$ :

$$u_1 = u_0 \left( 1 + \frac{cl}{EF} \right) - \frac{ql^2}{2EF} \quad (4.14)$$

Подставим (4.14) в (4.11) и выразим  $u_2$ :

$$u_2 = u_0 \left( 1 + \frac{2cl}{EF} \right) - \frac{2ql^2}{EF} \quad (4.15)$$

Подставим (4.15) и (4.14) в (4.12) и выразим  $u_3$ :

$$u_3 = u_0 \left( 1 + \frac{3cl}{EF} \right) - \frac{4ql^2 + F_2l}{EF} \quad (4.16)$$

Подставим (4.16) в (4.15) в (4.13) и найдем  $u_0$ :

$$u_0 = \frac{2ql + F_2 + F_3}{c} \quad (4.17)$$

Найдем оставшиеся коэффициенты:

$$u_1 = \frac{(3ql + 2F_2 + 2F_3)l}{2EF} + \frac{2ql + F_2 + F_3}{c} \quad (4.18)$$

$$u_2 = \frac{(2ql + 2F_2 + 2F_3)l}{EF} + \frac{2ql + F_2 + F_3}{c} \quad (4.19)$$

$$u_3 = \frac{(2ql + 2F_2 + 3F_3)l}{EF} + \frac{2ql + F_2 + F_3}{c} \quad (4.20)$$

Подставим исходные данные (0.1) в полученные выражения:

$$u_0 = 0.386l \quad (4.21)$$

$$u_1 = 2.586l \quad (4.22)$$

$$u_2 = 3.786l \quad (4.23)$$

$$u_3 = 3.986l \quad (4.24)$$

Получим итоговые выражения для функций перемещений:

$$u_I(x) = 2.2x + 0.386l, \quad 0 \leq x \leq 2l \quad (4.25)$$

$$u_{II}(\tilde{x}) = 1.2\tilde{x} + 2.586l, \quad 0 \leq \tilde{x} \leq l \quad (4.26)$$

или

$$u_{II}(x) = 1.2x + 1.386l, \quad l \leq x \leq 2l \quad (4.27)$$

$$u_{III}(\hat{x}) = 0.2\hat{x} + 3.786l, \quad 0 \leq \hat{x} \leq l \quad (4.28)$$

или

$$u_{III}(x) = 0.2x + 3.386l, \quad 2l \leq x \leq 3l \quad (4.29)$$

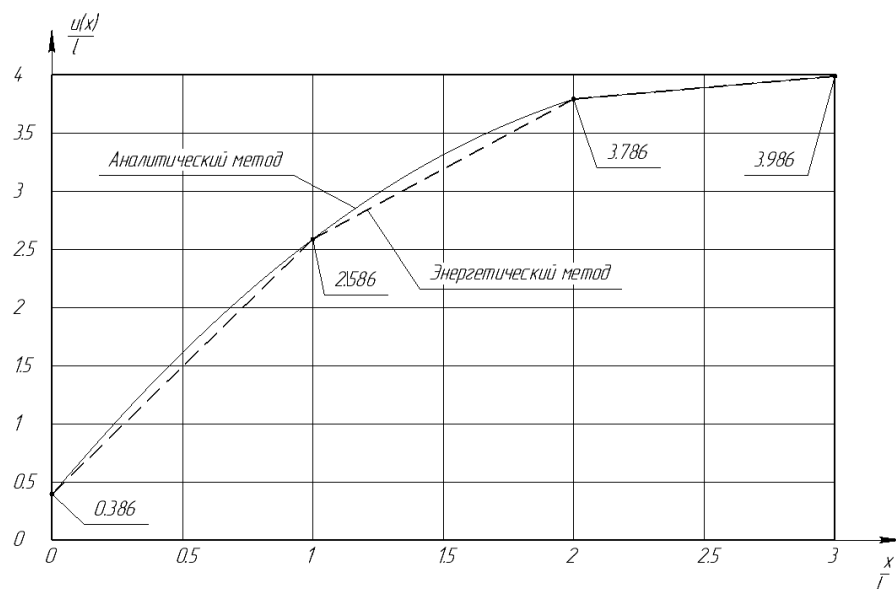


Рисунок 4.1 — График перемещений, полученных энергетическим и аналитическим методом

Найдем внутренние усилия:

$$N(x) = EFu'(x) \quad (4.30)$$

$$N_I(x) = 2.2EF, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.31)$$

$$N_{II}(x) = 1.2EF, \quad l \leq x \leq 2l \quad (4.32)$$

$$N_{III}(x) = 0.2EF, \quad 2l \leq x \leq 3l \quad (4.33)$$

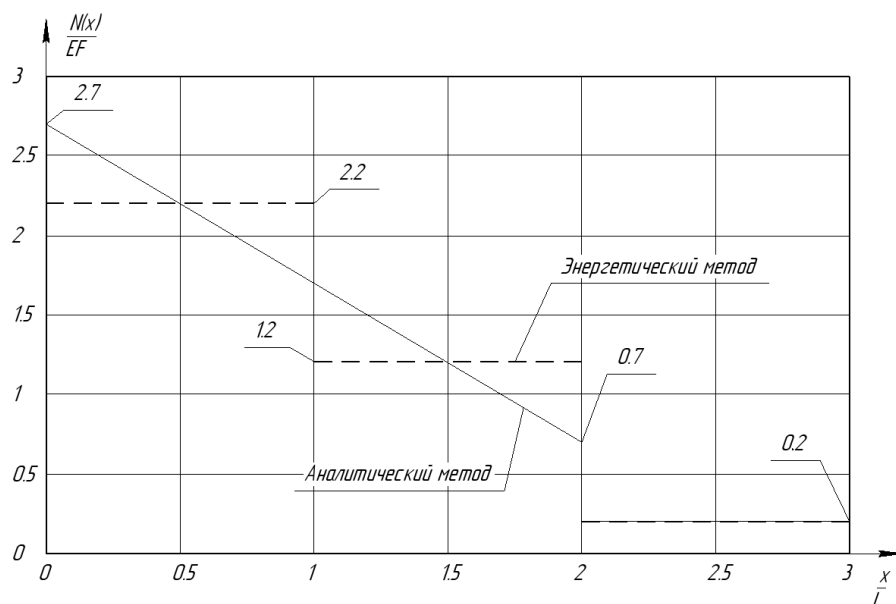


Рисунок 4.2 — График нормальной силы, полученной энергетическим и аналитическим методами

Найдем нормальные напряжения:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F} \quad (4.34)$$

$$\sigma_I(x) = 2.2E, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.35)$$

$$\sigma_{II}(x) = 1.2E, \quad l \leq x \leq 2l \quad (4.36)$$

$$\sigma_{III}(x) = 0.2E, \quad 2l \leq x \leq 3l \quad (4.37)$$

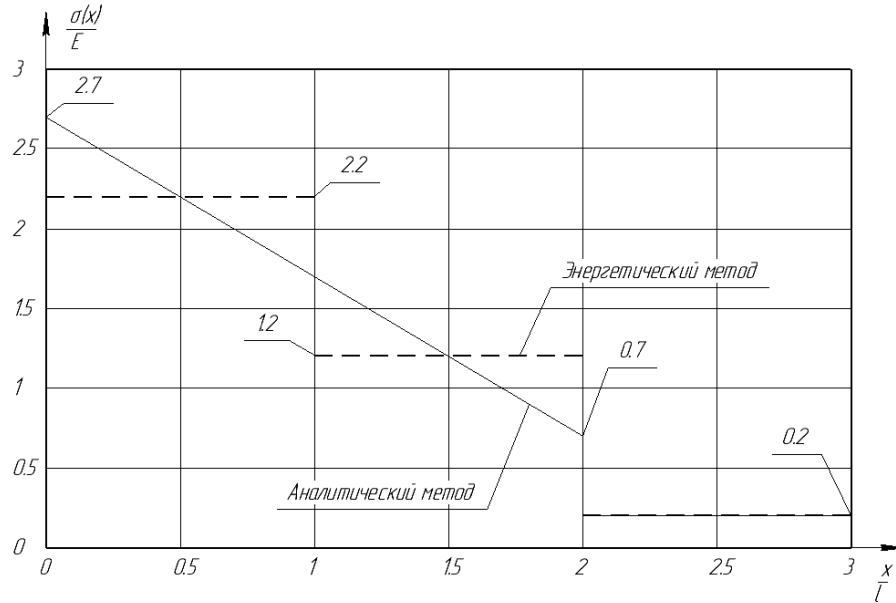


Рисунок 4.3 — График нормальных напряжений, полученных энергетическим и аналитическим методами

## 5 Оценка погрешности по энергии между точным и приближенным решением

Запишем выражение для функционала полной потенциальной энергии на приближенном решении:

$$\begin{aligned} \Pi[u_0, u_1, u_2, u_3] = & \frac{1}{2}EF \left[ \left( \frac{u_1 - u_0}{l} \right)^2 \cdot l + \left( \frac{u_2 - u_1}{l} \right)^2 \cdot l + \left( \frac{u_3 - u_2}{l} \right)^2 \cdot l \right] - \\ & - q \left( (u_0 + u_1)l + \frac{u_2 - u_0}{l} \frac{l^2}{2} \right) + \frac{1}{2}cu_0^2 - F_2u_2 - F_3u_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Подставим в (5.1) значения (4.21), (4.22), (4.23) и (0.1) и получим:

$$\Pi_3 = \Pi[u_0, u_1, u_2, u_3] = -3.68071EF l \quad (5.2)$$

Запишем выражение для функционала полной функциональной энергии на точном решении, используя выражения (2.13):

$$\Pi[u_I, u_{II}] = \frac{1}{2} \int_0^{2l} EF u_I'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{2l}^{3l} EF u_{II}'^2 dx - \int_0^{2l} q u_I dx + \frac{1}{2} c u_I^2(0) - F_2 u_I(2l) - F_3 u_{II}(3l) \quad (5.3)$$

$$\Pi_a = \Pi[u_I, u_{II}] = -3.76405 EFl \quad (5.4)$$

Расчитаем погрешность:

$$\Delta = \left| \frac{\Pi_э - \Pi_a}{\Pi_a} \right| \cdot 100\% = 2.214\% \quad (5.5)$$

## 6 Запись разрешающей системы уравнений МКЭ, проведение ее анализа и получение «вручную» решения для перемещений и напряжений

Разрешающую систему МКЭ получим методом равновесия узлов. Для этого составим дискретную модель. За конечный элемент возьмем каждый участок длиной  $l$ :

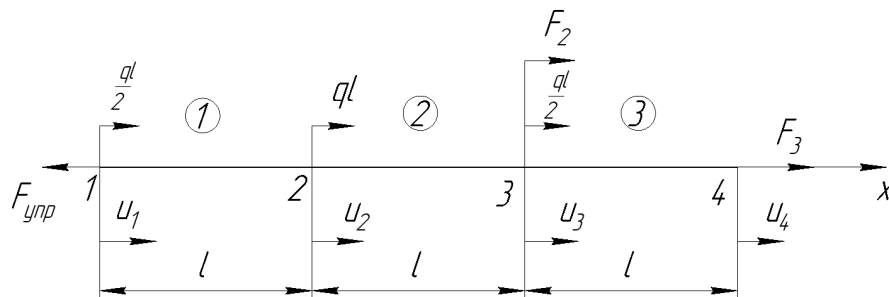


Рисунок 6.1 — Дискретная модель

Разрежем модель на конечные элементы и узлы:

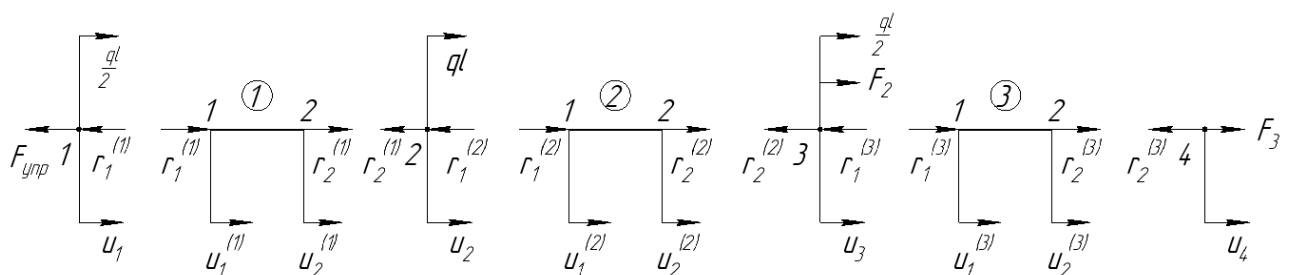


Рисунок 6.2 — Разбиение дискретной модели на узлы и КЭ



Запишем условие равновесия для  $i$ -го КЭ:

$$\frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1^{(i)} \\ r_2^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

или в обычном виде:

$$\begin{cases} \frac{EF}{l}(u_1^{(i)} - u_2^{(i)}) = r_1^{(i)} \\ \frac{EF}{l}(u_2^{(i)} - u_1^{(i)}) = r_2^{(i)} \end{cases} \quad (6.2)$$

Запишем условия равновесия узлов:

$$\begin{cases} F_{\text{упр}} + r_1^{(1)} - \frac{ql}{2} = 0 \\ r_2^{(1)} + r_1^{(2)} - ql = 0 \\ r_2^{(2)} + r_1^{(3)} - F_2 - \frac{ql}{2} = 0 \\ r_2^{(3)} - F_3 = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Подставим (6.2) в (6.3) и учтем, что  $F_{\text{упр}} = c \cdot u_1$ :

$$\begin{cases} cu_1 + \frac{EF}{l}(u_1^{(1)} - u_2^{(1)}) - \frac{ql}{2} = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_2^{(1)} - u_1^{(1)}) + \frac{EF}{l}(u_1^{(2)} - u_2^{(2)}) - ql = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_2^{(2)} - u_1^{(2)}) + \frac{EF}{l}(u_1^{(3)} - u_2^{(3)}) - F_2 - \frac{ql}{2} = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_2^{(3)} - u_1^{(3)}) - F_3 = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Объединим все элементы в единую систему. Тогда будут выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = u_1 \\ u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2 \\ u_2^{(2)} = u_1^{(3)} = u_3 \\ u_2^{(3)} = u_4 \end{cases} \quad (6.5)$$

Подставим (6.5) в (6.4):

$$\begin{cases} cu_1 + \frac{EF}{l}(u_1 - u_2) - \frac{ql}{2} = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_2 - u_1) + \frac{EF}{l}(u_2 - u_3) - ql = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_3 - u_2) + \frac{EF}{l}(u_3 - u_4) - F_2 - \frac{ql}{2} = 0 \\ \frac{EF}{l}(u_4 - u_3) - F_3 = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых перемещениях и перенесем нагрузку в правую часть:

$$\begin{cases} (c + \frac{EF}{l})u_1 - \frac{EF}{l}u_2 = \frac{ql}{2} \\ -\frac{EF}{l}u_1 + 2\frac{EF}{l}u_2 - \frac{EF}{l}u_3 = ql \\ -\frac{EF}{l}u_2 + 2\frac{EF}{l}u_3 - \frac{EF}{l}u_4 = F_2 + \frac{ql}{2} \\ -\frac{EF}{l}u_3 + \frac{EF}{l}u_4 = F_3 \end{cases} \quad (6.7)$$

Запишем (6.7) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} c + \frac{EF}{l} & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{l} & 2\frac{EF}{l} & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EF}{l} & 2\frac{EF}{l} & -\frac{EF}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & \frac{EF}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ql}{2} \\ ql \\ F_2 + \frac{ql}{2} \\ F_3 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Разделим (6.8) на  $\frac{EF}{l}$  учитывая (0.1):

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ l \\ l \\ 0.2l \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Искать решения для системы (6.9) будем методом Крамера:

$$u_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (6.10)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \quad (6.11)$$

$$= 8 \cdot [2 \cdot (2 - 1) + 1(-1)] + (-1)(2 - 1) + 1 \cdot 0 = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{l}{2} & -1 & 0 & 0 \\ l & 2 & -1 & 0 \\ l & -1 & 2 & -1 \\ 0.2l & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{l}{2}[2 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (-1)] + 1 \cdot [l \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (l + 0.2l)] = \quad (6.12)$$

$$= 0.5l + 2.2l = 2.7l$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ -1 & l & -1 & 0 \\ 0 & l & 2 & -1 \\ 0 & 0.2l & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot [l \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (l + 0.2l)] - 0.5l \cdot [-1 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot (0)] =$$

$$= 8 \cdot (l + 1.2l) - 0.5l \cdot (-1) = 18.1l \quad (6.13)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & -1 & \frac{l}{2} & 0 \\ -1 & 2 & l & 0 \\ 0 & -1 & l & -1 \\ 0 & 0 & 0.2l & 1 \end{vmatrix} = -0.2l \cdot [1 \cdot 0 - 1 \cdot (8 \cdot 2 - 1)] + 1 \cdot [1 \cdot (8l + 0.5l) + l \cdot (8 \cdot 2 - 1)] =$$

$$= -0.2l \cdot (-15) + 8.5l + 15l = 26.5l \quad (6.14)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & \frac{l}{2} \\ -1 & 2 & -1 & l \\ 0 & -1 & 2 & l \\ 0 & 0 & -1 & 0.2l \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 \cdot (8l + 0.5l) + l \cdot (8 \cdot 2 - 1)] + 0.2l \cdot [1 \cdot (-8) + 2 \cdot (8 \cdot 2 - 1)] =$$

$$= 8.5l + 15l + 0.2l \cdot 22 = 27.9l \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0.386l = 0.193 \text{ м} \\ u_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.59l = 1.295 \text{ м} \\ u_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.786l = 1.893 \text{ м} \\ u_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 3.986l = 1.993 \text{ м} \end{cases} \quad (6.16)$$

Напряжения вычислим по закону Гука:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = E \cdot \frac{u_2^{(i)} - u_1^{(i)}}{l} \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = E \frac{u_2 - u_1}{l} = 2.2E = 1.608 \cdot 10^{11} \text{ Па} \\ \sigma_2 = E \frac{u_3 - u_2}{l} = 1.2E = 8.772 \cdot 10^{10} \text{ Па} \\ \sigma_3 = E \frac{u_4 - u_3}{l} = 0.2E = 1.462 \cdot 10^{10} \text{ Па} \end{cases} \quad (6.18)$$

## 7 Расчет заданной конструкции с использованием пакета MSC Patran\_Nastran

Опишем порядок расчета в программном комплексе MSC Patran\_Nastran:

### 1. Создание базы данных

[File] → [New] → [Имя файла: dz2.db] → [Параметры анализа: Tolerance: Default, Analysis Code: MSC.Nastran, Analysis Type: Structural] → [Ok].

### 2. Создание геометрии модели

Geometry → [Action: Create] → [Object: Curve] → [Method: XYZ] → [Vector Coordinate List: <1.5 0 0>] → [Origin Coordinate List <0 0 0>]

### 3. Создание сетки конечных элементов

[Meshing] → [Action: Create] → [Object: Mesh] → [Type: Curve] → [Topology: Bar2] → [Curve List: Curve 1] → [Value: 0.5] → [Apply].

### 4. Сшивание конечных элементов вдоль геометрических границ

[Meshing] → [Action: Equivalence] → [Object: All] → [Method: Tolerance Cube] → [Apply].

### 5. Задание свойств материала

[Properties] → [Isotropic] → [Action: Create] → [Object: Isotropic] → [Method: Manual Input] → [Material Name: steel] → [Input Properties] → [Elastic Modulus: 7.31e10, Poisson's Ratio: 0.33] → [OK] → [Apply].

#### 6. Создание поперечного сечения

[Tools] → [Beam Library] → [Action: Create] → [Object: Standard Shape] → [Method: Nastran Standard] → [New Section Name: section] → [выбор круглого сечения] → [R1=0.15; R2=0.11] → [OK].

#### 7. Применение созданных свойств к геометрии

[Properties] → [1D Properties] → [Beam] → [Action: Create] → [Object: 1D] → [Type: Beam] → [Property Set Name: bar] → [Input Properties] → [Section name: section; Material Name: aluminium; Bar Orientation: <0 1 0>] → [OK] → [Select Application Region] → [Select: Entities] → [Select members: Curve 1] → [Add] → [OK] → [Apply].

#### 8. Создание пружины

[Properties] → [Action: Create] → [Object: 1D] → [Type: Spring] → [Property Set Name: spring] → [Input Properties] → [Spring constant: 3.344e10; Dof at Node 1: UX; Dof at Node 2: UX] → [OK] → [Select Application Region] → [Select: Entities] → [Select members: Curve 2] → [Add] → [OK] → [Apply].

#### 9. Задание нагрузок, действующих на балку

[Loads/BCs] → [Action: Create] → [Object: Distributed Load] → [Type: Element Uniform] → [New Set Name: raspr] → [Target Element Type: 1D] → [Input Data] → [Distr Load: <4.777e9 0 0>] → [Select Application Region] → [Select: FEM] → [Application Region: Element 1 2] → [Add] → [OK] → [Apply].

[Action: Create] → [Object: Force] → [Type: Nodal] → [New Set Name: F2] → [Input Data] → [Force: <1.194e9 0 0>] → [Select Application Region] → [Select: FEM] → [Application Region: Node 3] → [Add] → [OK] → [Apply].

[Action: Create] → [Object: Force] → [Type: Nodal] → [New Set Name: F3] → [Input Data] → [Force: <4.777e8 0 0>] → [Select Application Region] → [Select: FEM] → [Application Region: Node 4] → [Add] → [OK] → [Apply].

#### 10. Задание граничных условий

[Loads/BCs] → [Action: Create] → [Object: Displacement] → [Type: Nodal] → [New Set Name: dc1] → [Input Data] → [Translations: <0,0,0> Rotations: <0,0,0>] → [OK] → [Select Application Region] → [Select: Geometry] → [Select Geometry Entities: Point 5] → [Add] → [OK] → [Apply]

[Action: Create] → [Object: Displacement] → [Type: Nodal] → [New Set Name: dc2] → [Input Data] → [Translations: <0,0,0> Rotations: <0,0,0>] → [OK] → [Select Application Region] → [Select: Geometry] → [Select Geometry Entities: Point 4] → [Add] → [OK] →

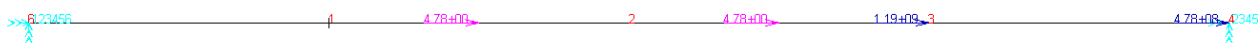


Рисунок 7.1 — Модель стержня

## 11. Генерация входного файла для расчета в MSC Nastran

[Analysis] → [Action: Analyze] → [Object: Entire Model] → [Method: Full Run] → [Job Name: dz] → [Solution Type: Linear Static] → [Apply].

## 12. Передача результатов расчета в MSC Patran

[Action: Access Results] → [Object: Attach HDF5 XDB] → [Method: Result Entities] → [Job Name: dz] → [Select Results File: dz.h5 xdb] → [OK] → [Apply].

Получим графики перемещений и нормальных напряжений:

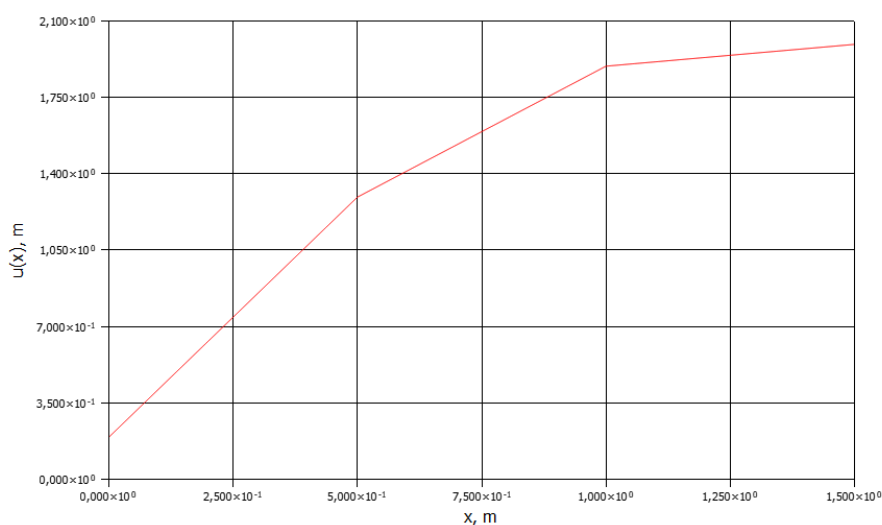


Рисунок 7.2 — График перемещений

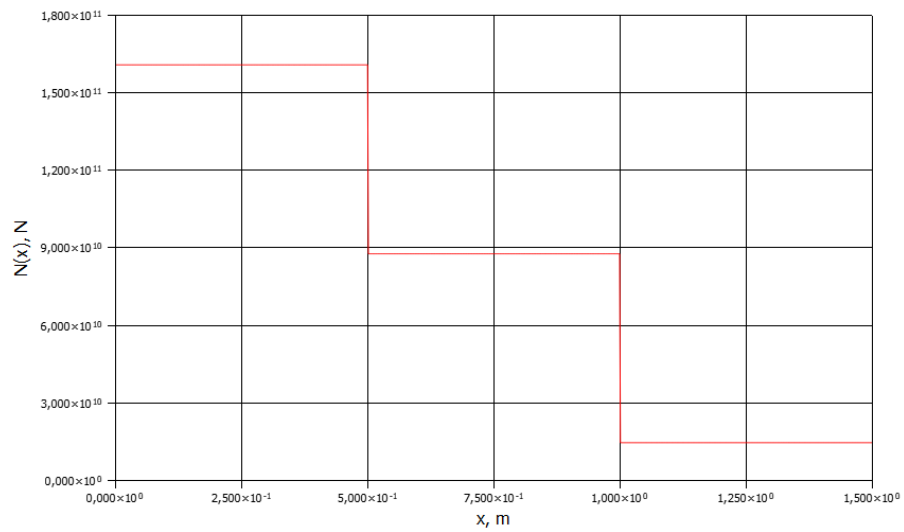


Рисунок 7.3 — График нормальных напряжений

## 8 Сравнительный анализ результатов, полученных методами, использованными в работе

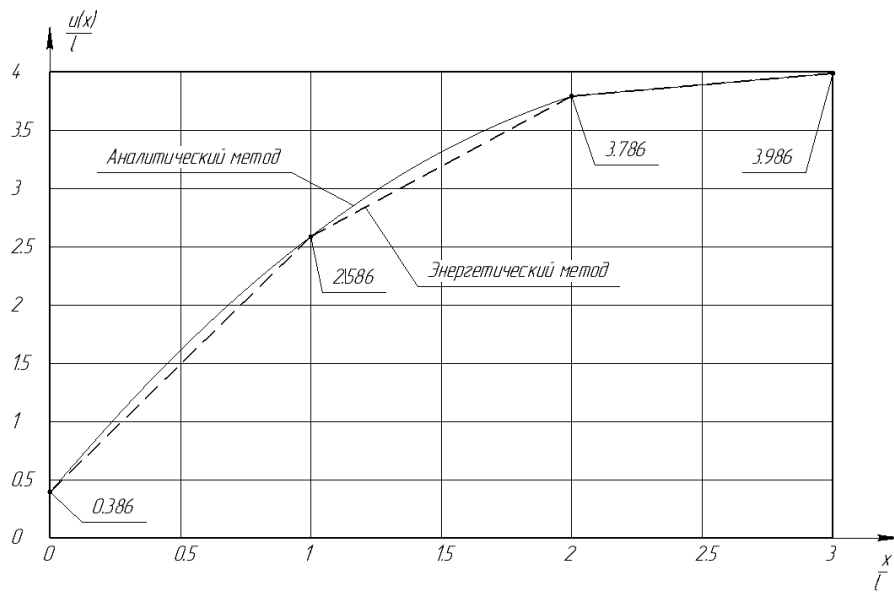


Рисунок 8.1 — Сравнительный график аналитического и энергетического методов нахождения перемещений

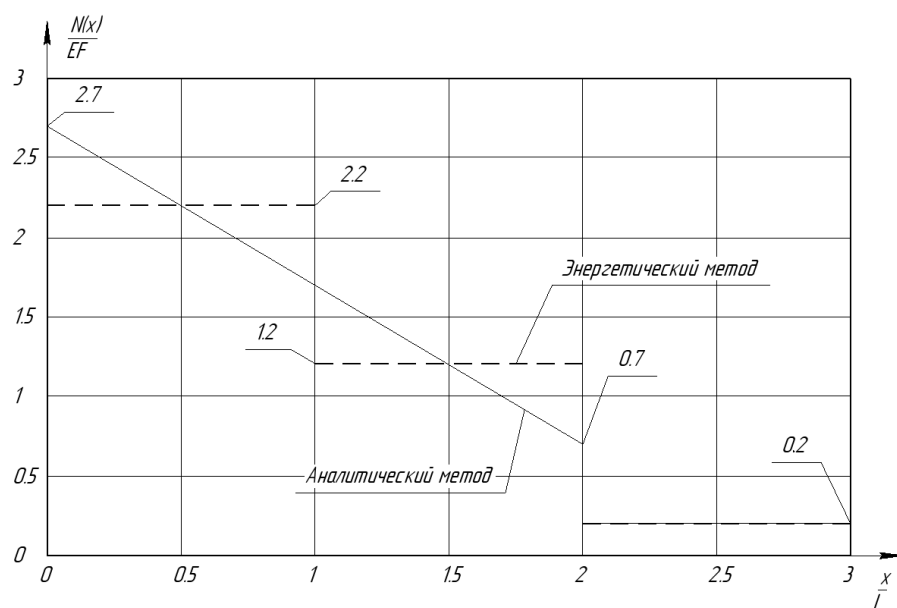


Рисунок 8.2 — Сравнительный график аналитического и энергетического методов нахождения нормальных напряжений

Аналитическое решение дает результат на всем промежутке стержня, в то время как энергетический метод и МКЭ дают результат только в конкретных точках, на которые разбивается модель. Для сравнения методов приведем таблицу со значениями перемещений и нормальных сил, полученными каждым методом:

Таблица 8.1 — Сравнительная таблица перемещений

Координата точки $x$ , м	Аналитический метод	Энергетический метод	Patran
0	0.193	0.192857	0.1928439
0.5	1.293	1.292857	1.292854
1	1.893	1.892857	1.892836
1.5	1.993	1.992857	1.992841

Таблица 8.2 — Сравнительная таблица нормальных напряжений

Координата точки, м	Аналитический метод	Энергетический метод и МКЭ	Patran
0	$1.9737 \cdot 10^{11}$	$1.6082 \cdot 10^{11}$	$1.973735 \cdot 10^{11}$
0.5 – 0	$1.2427 \cdot 10^{11}$	$1.6082 \cdot 10^{11}$	$1.242694 \cdot 10^{11}$
0.5 + 0	$1.2427 \cdot 10^{11}$	$8.772 \cdot 10^{10}$	$1.242694 \cdot 10^{11}$
1 – 0	$5.117 \cdot 10^{10}$	$8.772 \cdot 10^{10}$	$5.116525 \cdot 10^{10}$
1 + 0	$1.462 \cdot 10^{10}$	$1.462 \cdot 10^{10}$	$1.462083 \cdot 10^{10}$
1.5	$1.462 \cdot 10^{10}$	$1.462 \cdot 10^{10}$	$1.462083 \cdot 10^{10}$