



**Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ

Специальное машиностроение

КАФЕДРА

СМ1 «Космические аппараты и ракеты-носители»

Домашнее задание №2
по курсу «Строительная механика летательных аппаратов»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р.

Преподаватель: Печников В.П.

(Подпись, дата)

(Подпись, дата)

Москва, 2024

1 Условие задания

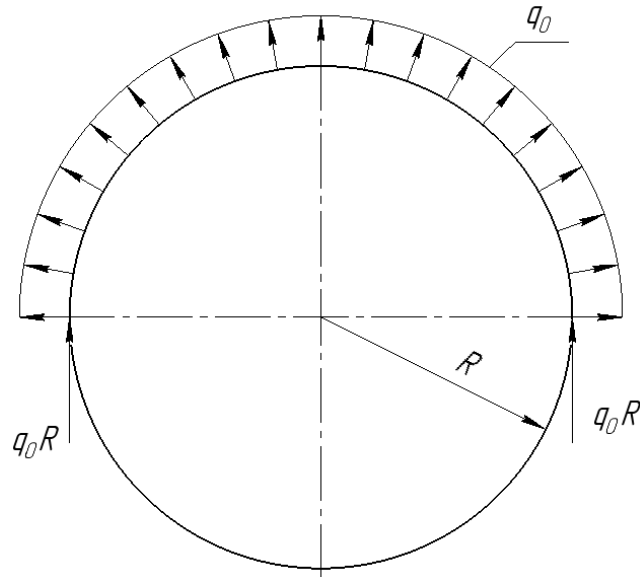


Рисунок 1.1 — Условие задания

В данном задании необходимо определить перемещения в кольце v и w .

2 Решение

Из предыдущего домашнего задания имеем следующие выражения:

- Уравновешивающая нагрузка:

$$t = \frac{4q_0}{\pi} \sin \varphi \quad (2.1)$$

- Момент на кольце:

$$\begin{cases} M_1 = q_0 R^2 \left(1 - \frac{3}{\pi} \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \sin \varphi \right) \\ M_2 = q_0 R^2 \left(2 \sin \varphi - \frac{3}{\pi} \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \sin \varphi - 1 \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Запишем разрешающее уравнение кольца:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = - \frac{R^3}{EJ} \left[R \left(t + \frac{dQ}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m \right) \right] \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (2.4)$$

Коэффициенты можно найти по формулам:

$$\begin{cases} A_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2} \left[a_n'' + nb_n' - \frac{1}{R}(n^2-1)a_n''' \right] \\ B_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2} \left[b_n'' - na_n' - \frac{1}{R}(n^2-1)b_n''' \right] \end{cases} \quad (2.5)$$

Коэффициент A_0 задает перемещение всего кольца как одно целое, поэтому задаем его равным $A_0 = 0$.

Коэффициенты в формуле (2.5) можно найти по формулам:

$$\begin{pmatrix} a_n' \\ a_n'' \\ a_n''' \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{pmatrix} \cos n\varphi d\varphi \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} b_n' \\ b_n'' \\ b_n''' \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{pmatrix} \sin n\varphi d\varphi \quad (2.7)$$

В нашем случае распределенная нагрузка равна:

$$q_n = q_0, \quad \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (2.8)$$

$$q_t = t + q_{t1} + q_{t2} \quad (2.9)$$

$$m = 0 \quad (2.10)$$

Распределим сосредоточенную нагрузку $q_0 R$:

$$q_{ti} = \frac{q_0 R}{\pi R} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n(\varphi - \varphi_0)) \right] \quad (2.11)$$

$$q_{t1} = -\frac{q_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (2.12)$$

$$q_{t2} = \frac{q_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (2.13)$$

Получим:

$$\begin{aligned}
 q_t &= \frac{4q_0}{\pi} \sin \varphi - \frac{q_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] + \frac{q_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] = \\
 &= \frac{q_0}{\pi} \left(4 \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\cos n \frac{\pi}{2} \cos n \varphi - \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \varphi + \cos n \frac{\pi}{2} \cos n \varphi - \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \varphi \right) \right) = \\
 &= \frac{q_0}{\pi} \left(4 \sin \varphi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2} \sin n \varphi \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Примем количество членов ряда (2.4) равным $N = 10$. Построим эпюры перемещений и изгибающего момента:

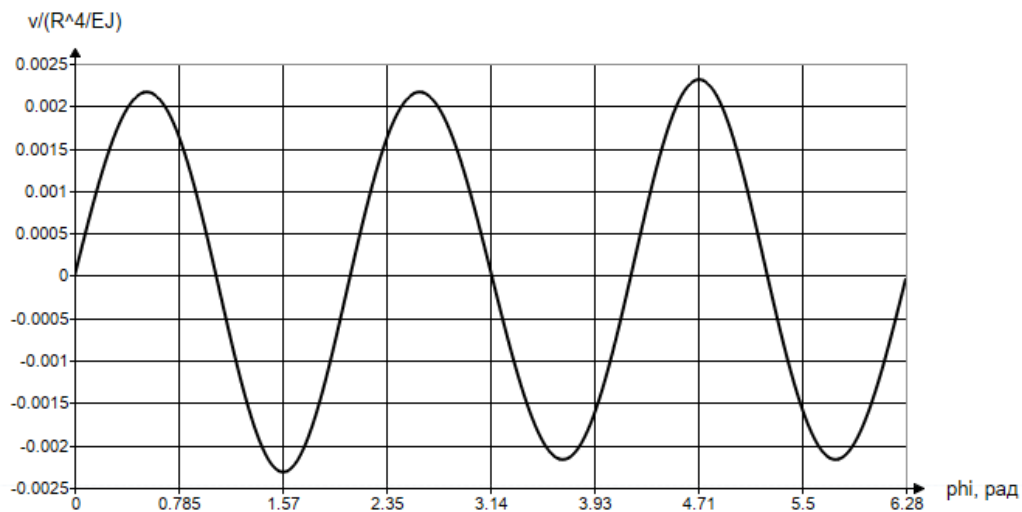


Рисунок 2.1 — Эпюра касательных перемещений

Найдем нормальные перемещения:

$$w = -\frac{dv}{d\varphi}
 \tag{2.15}$$

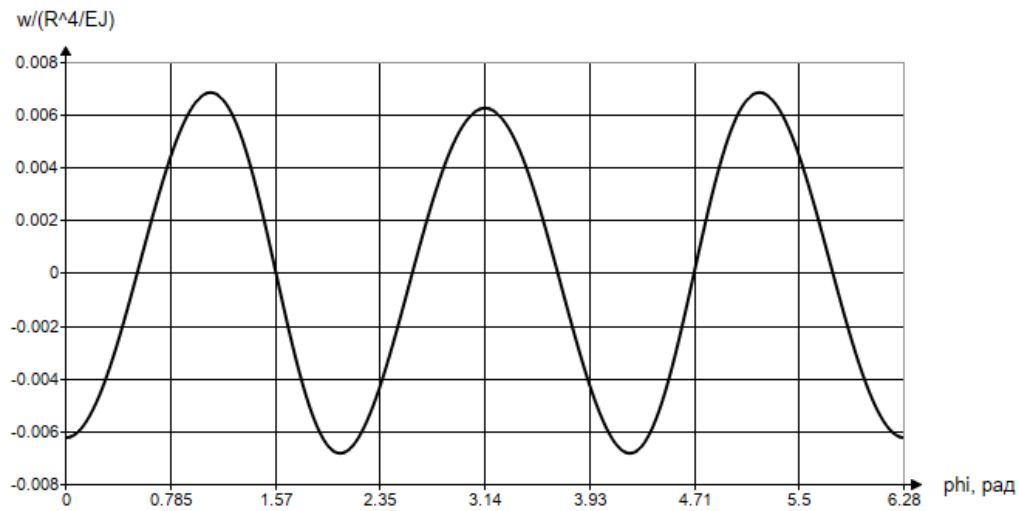


Рисунок 2.2 — Эпюра нормальных перемещений

Найдем изгибающий момент:

$$M = \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w \right) \quad (2.16)$$

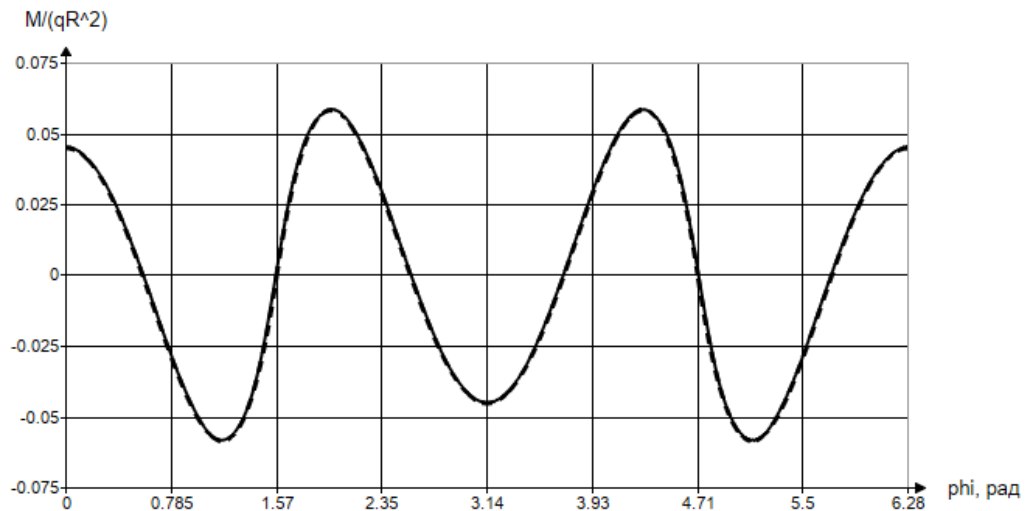


Рисунок 2.3 — Эпюра изгибающего момента

Сплошной линией обозначено текущее решение $M_2(\varphi)$, а прерывистой — аналитическое решение из прошлого задания $M_1(\varphi)$. Для сравнения возьмем значения моментов в нескольких точках:

- $\varphi = 0$: $M_1(0) = 0.0451$; $M_2(0) = 0.0451$
- $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $M_1(\frac{\pi}{4}) = -0.02879$; $M_2(\frac{\pi}{4}) = -0.02891$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $M_1(\frac{\pi}{2}) = 0$; $M_2(\frac{\pi}{2}) = 0.00003$

- $\varphi = \frac{3\pi}{4} : M_1(\frac{3\pi}{4}) = 0.02879; M_2(\frac{3\pi}{4}) = 0.02889$
- $\varphi = \pi : M_1(\pi) = -0.04507; M_2(\pi) = -0.04515$
- $\varphi = \frac{5\pi}{4} : M_1(\frac{5\pi}{4}) = 0.02879; M_2(\frac{5\pi}{4}) = -0.02885$
- $\varphi = \frac{3\pi}{2} : M_1(\frac{3\pi}{2}) = 0; M_2(\frac{3\pi}{2}) = -0.00003$
- $\varphi = \frac{7\pi}{4} : M_1(\frac{7\pi}{4}) = -0.02879; M_2(\frac{7\pi}{4}) = -0.02899$

Как можно увидеть, решения с высокой точностью совпадают.