Лекция 2. Определяющие соотношения для линейно упругого тела

Матрицы упругих жесткостей и податливостей

Аналитические зависимости, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями и описывающие при этом экспериментально наблюдаемые эффекты, в механике деформируемого твёрдого тела называют определяющими соотношениями. К ним можно отнести равенства (13) и обобщающую их формулу (16), которая справедлива для упругого тела.

Как было отмечено выше, существует большой класс материалов, которые при определённом уровне напряжений проявляют линейно упругие свойства. Эти свойства проявляются в линейности диаграмм деформирования, выполнении принципа суперпозиции, в соответствии с которым сложное напряжённо-деформированное состояние окрестности точки тела можно рассматривать как линейную комбинацию простейших напряжённо-деформированных состояний. Отсюда следует, что для описания деформирования таких материалов необходимо использовать линейные определяющие соотношения, т.е. линейные зависимости между напряжениями и деформациями, которые и являются аналитическим выражением закона Гука.

Примером такой зависимости, являются равенства (19). Они были введены для частного напряжённо-деформированного состояния. Понятно, что соотношения (19) могут быть обобщены на общий случай. Тогда они примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\gamma_{12} + C_{15}\gamma_{13} + C_{16}\gamma_{23},\\
\sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + C_{24}\gamma_{12} + C_{25}\gamma_{13} + C_{26}\gamma_{23},\\
\sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + C_{34}\gamma_{12} + C_{35}\gamma_{13} + C_{36}\gamma_{23},\\
\sigma_{12} &= C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} + C_{44}\gamma_{12} + C_{45}\gamma_{13} + C_{46}\gamma_{23},\\
\sigma_{13} &= C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} + C_{54}\gamma_{12} + C_{55}\gamma_{13} + C_{56}\gamma_{23},\\
\sigma_{23} &= C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + C_{64}\gamma_{12} + C_{65}\gamma_{13} + C_{66}\gamma_{23}.
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Коэффициенты C_{ij} (i,j=1,2,…,6) называются коэффициентами жёсткости линейно упругого тела. Они подлежат экспериментальному определению.

Важно отметить, что равенства (27) справедливы как для изотропного, так и для анизотропного тел. В матричном виде их записывают так

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}. \qquad (28)$$

Матрица жёсткости имеет следующий вид

$$[\mathrm{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \qquad (29)$$

Так как для упругого тела должны выполняться условия существования потенциала вида (13) и обобщающие их равенства (17), то матрица (29) является симметричной, т.е. C_{ij}=C_{ji}, $i \neq j$. Таким образом, в общем случае линейно упругие свойства тела характеризуются двадцатью одним независимым параметром.

Как было показано в предыдущей лекции, для линейных зависимостей между напряжениями и деформациями потенциал удельной энергии упругой деформации должен быть квадратичным полиномом относительно компонент деформаций. Частным случаем такого полинома является выражение (18). В общем случае для анизотропного линейного упругого тела он имеет следующий вид

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon_{11}^2 + C_{22}\varepsilon_{22}^2 + C_{33}\varepsilon_{33}^2 + C_{44}\gamma_{12}^2 + C_{55}\gamma_{13}^2 + C_{66}\gamma_{23}^2 + 2C_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \\ +2C_{13}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + 2C_{23}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2C_{14}\varepsilon_{11}\gamma_{12} + 2C_{15}\varepsilon_{11}\gamma_{13} + 2C_{16}\varepsilon_{11}\gamma_{23} + \\ 2C_{24}\varepsilon_{22}\gamma_{12} + 2C_{25}\varepsilon_{22}\gamma_{13} + 2C_{26}\varepsilon_{22}\gamma_{23} + 2C_{34}\varepsilon_{33}\gamma_{12} + 2C_{35}\varepsilon_{33}\gamma_{13} + \\ 2C_{36}\varepsilon_{33}\gamma_{23} + 2C_{45}\gamma_{12}\gamma_{13} + 2C_{46}\gamma_{12}\gamma_{23} + 2C_{56}\gamma_{13}\gamma_{23}. \end{pmatrix}.$$

В матричном виде это равенство записывается так

$$U = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon\}. \qquad (30)$$

С учётом формулы (28) его можно представить следующим образом

$$U = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}.$$

Следовательно, для линейно упругого тела удельная энергия упругой деформации равна половине полной работы, произведённой напряжениями на соответствующих деформациях.

В общем случае матрица [C] является невырожденной, т.е. её можно обратить. Равенства, обратные по отношению к (28), представим так

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}. \tag{31}$$

Для матрицы [S] справедливо равенство [S]=[C]$^{-1}$. Она называется матрицей упругих податливостей. Её структура аналогична структуре матрицы упругих податливостей (29). Она также является симметричной.

Отметим ещё одно свойство матриц [S] и [C]. Так как U есть удельная энергия упругой деформации, накопленная в результате работы напряжений на соответствующих деформациях, то эта величина должна принимать только положительные значения при любом значении деформаций, т.е. в соответствии с (30) должно быть

$$\{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon\} > 0.$$

Это означает, что матрица жёсткости анизотропного линейно упругого тела является положительно определённой. Это свойство накладывает определённые ограничения на величины коэффициентов C_{ij}. Положительно определённой является также матрица упругих податливостей [S].

Закон Гука для анизотропного тела с элементами симметрии

Как известно, в случае анизотропного тела важное значение имеет направление, в котором изучаются параметры, характеризующие свойства тела, например, физико-механические, теплофизические, электрофизические и т.д. Пусть структура анизотропного тела такова, что в любой его точке упругие свойства одинаковы в двух направлениях, симметричных относительно одной и той же плоскости. Такую плоскость называют плоскостью упругой симметрии. Примером анизотропного тела с плоскостью симметрии может быть однонаправленный композиционный материал с упорядоченным расположением армирующих волокон (рис.7). Плоскостью симметрии для данного тела является плоскость X_2X_3. Каждому элементу тела с известными физико-механическими характеристиками соответствует точно такой же элемент с теми же характеристиками, расположенный симметрично относительно этой плоскости. Это свойство тела учтём при формулировке определяющих соотношений.

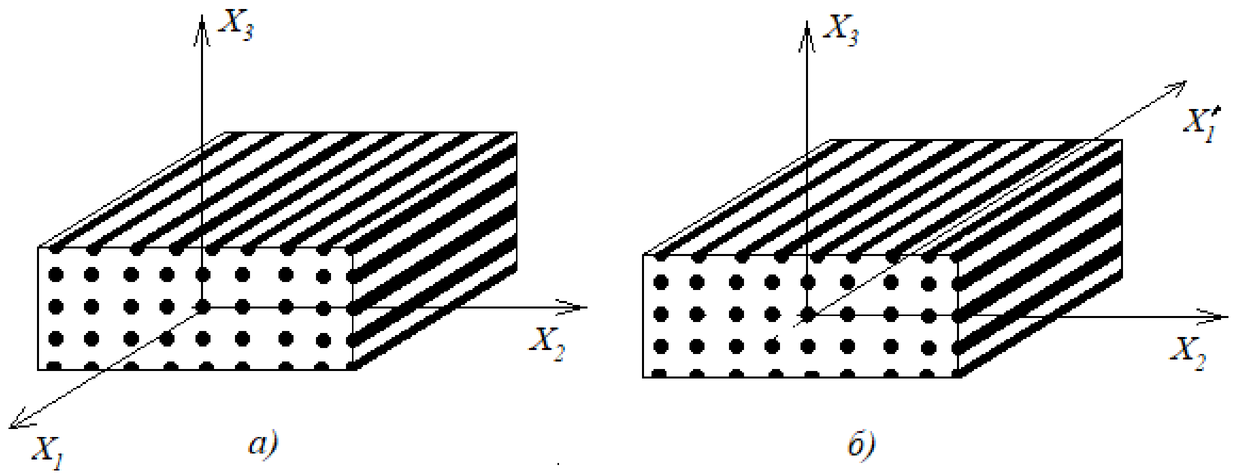

Рис.7

Введём систему прямоугольных декартовых координат $X_1X_2X_3$ (рис.7а). Полагая, что плоскость X_2X_3 является плоскостью симметрии рассматриваемого тела, выполним преобразование симметрии, т.е. изменим направление оси X_1 на противоположное (рис.7б). Матрица преобразования поворота при этом будет иметь следующий вид

$$[T]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Потребуем, чтобы при преобразовании симметрии системы координат определяющие соотношения для линейно упругого тела по форме не изменились.

Для этого воспользуемся формулами преобразования компонент матриц напряжений и малых деформаций при повороте системы координат. Если в исходной системе координат матрицы напряжений и малых деформаций имеют вид

$$[T_\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix},\quad [T_\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13}\\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23}\\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix},$$

то в преобразованной системе координат $X_1'X_2X_3$, они станут такими

$$[T_\sigma']=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & -\sigma_{12} & -\sigma_{13}\\ -\sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ -\sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix},\quad [T_\varepsilon']=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & -\frac{1}{2}\gamma_{12} & -\frac{1}{2}\gamma_{13}\\ -\frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23}\\ -\frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}.$$

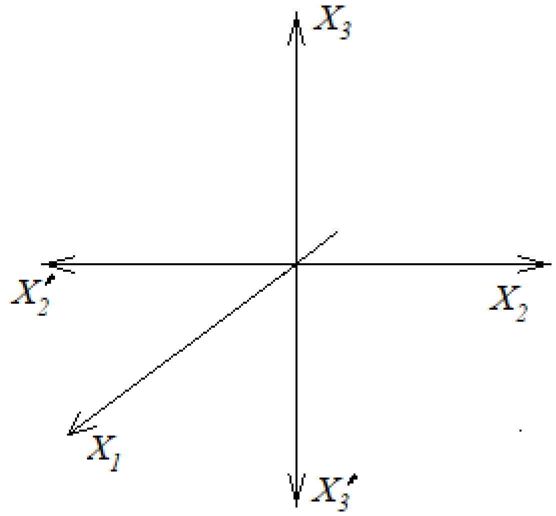

Рис.8

Отметим, что такой же вид матрицы напряжений и малых деформаций будут иметь, если матрица преобразования поворота будет следующей

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует поворот системы координат относительно оси X_1 на угол 180° (рис.8). Это означает, что эту ось можно рассматривать как ось симметрии 2-го порядка. При преобразовании поворота системы координат на угол 180° тело совмещается само с собой. Характеристики упругости при этом остаются неизменными. Таким образом, ось перпендикулярная плоскости симметрии, будет являться осью симметрии 2-го порядка. Плоскость симметрии и ось симметрии называют элементами симметрии анизотропного тела.

В соответствии с определяющими соотношениями (27) получим

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{13}\varepsilon_{33}-C_{14}\gamma_{12}-C_{15}\gamma_{13}+C_{16}\gamma_{23},\\
\sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11}+C_{22}\varepsilon_{22}+C_{23}\varepsilon_{33}-C_{24}\gamma_{12}-C_{25}\gamma_{13}+C_{26}\gamma_{23},\\
\sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11}+C_{32}\varepsilon_{22}+C_{33}\varepsilon_{33}-C_{34}\gamma_{12}-C_{35}\gamma_{13}+C_{36}\gamma_{23},\\
-\sigma_{12} &= C_{41}\varepsilon_{11}+C_{42}\varepsilon_{22}+C_{43}\varepsilon_{33}-C_{44}\gamma_{12}-C_{45}\gamma_{13}+C_{46}\gamma_{23},\\
-\sigma_{13} &= C_{51}\varepsilon_{11}+C_{52}\varepsilon_{22}+C_{53}\varepsilon_{33}-C_{54}\gamma_{12}-C_{55}\gamma_{13}+C_{56}\gamma_{23},\\
\sigma_{23} &= C_{61}\varepsilon_{11}+C_{62}\varepsilon_{22}+C_{63}\varepsilon_{33}-C_{64}\gamma_{12}-C_{65}\gamma_{13}+C_{66}\gamma_{23}.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Для тела с плоскостью симметрии X_2X_3 при преобразовании в соответствии с матрицей (32) определяющие соотношения (27) не должны измениться. Как видно из (33), это возможно, если будут справедливы равенства $C_{14}=C_{15}=C_{24}=C_{25}=C_{34}=C_{35}=C_{64}=C_{65}=0.$ Тогда соотношения (27) примут более простой вид

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{13}\varepsilon_{33}+C_{16}\gamma_{23},\\
\sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11}+C_{22}\varepsilon_{22}+C_{23}\varepsilon_{33}+C_{26}\gamma_{23},\\
\sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11}+C_{32}\varepsilon_{22}+C_{33}\varepsilon_{33}+C_{36}\gamma_{23},\\
\sigma_{12} &= C_{44}\gamma_{12}+C_{45}\gamma_{13},\\
\sigma_{13} &= C_{54}\gamma_{12}+C_{55}\gamma_{13},\\
\sigma_{23} &= C_{61}\varepsilon_{11}+C_{62}\varepsilon_{22}+C_{63}\varepsilon_{33}+C_{66}\gamma_{23}.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Как видно, количество характеристик упругости сократилось до 13. Таким образом, линейно упругие свойства анизотропного тела с плоскостью симметрии описываются тринадцатью величинами, определяемыми в эксперименте. Матрица жёсткости упростится к виду

$$[\mathrm{C}]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Аналогичные упрощения последуют, если в теле имеется плоскость симметрии, перпендикулярная рассмотренной, например, плоскость X_1X_2. В этом случае определяющие соотношения должны быть неизменными для преобразования, выражаемого одной из матриц

$$[T]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим, что должно быть $C_{16}=C_{26}=C_{36}=C_{45}=0.$ Количество характеристик упругости сокращается до девяти. Выражение закона Гука принимает простой вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= C_{44}\gamma_{12}, \\ \sigma_{13} &= C_{55}\gamma_{13}, \\ \sigma_{23} &= C_{66}\gamma_{23}. \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае плоскость X_1X_3, перпендикулярная двум рассмотренным выше, также будет плоскостью симметрии.

Таким образом, рассмотренное анизотропное тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Такое тело называется ортотропным. Его линейно упругие свойства описываются девятью параметрами. В системе координат, в которой координатные плоскости совпадают с плоскостями симметрии тела, закон Гука имеет вид (35). При этом оси системы координат, перпендикулярные плоскостям симметрии, являются осями симметрии 2-го порядка. Как было показано выше, при повороте системы координат на угол 180° относительно каждой из осей определяющие соотношения остаются неизменными.

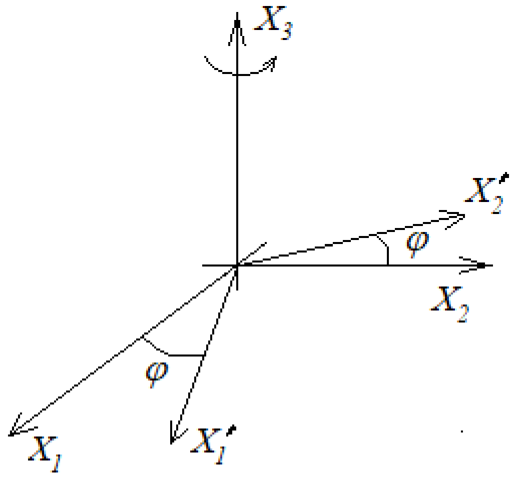

Рис.9

Если система координат выбрана произвольно, то определяющие соотношения становятся более сложными. В качестве примера рассмотрим соотношения в системе координат, повёрнутой на угол φ относительно оси X_3 (рис.9). Соотношения закона Гука будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= C'_{11}\varepsilon'_{11} + C'_{12}\varepsilon'_{22} + C'_{13}\varepsilon'_{33} + C'_{14}\gamma'_{12},\\
\sigma'_{22} &= C'_{21}\varepsilon'_{11} + C'_{22}\varepsilon'_{22} + C'_{23}\varepsilon'_{33} + C'_{24}\gamma'_{12},\\
\sigma'_{33} &= C'_{31}\varepsilon'_{11} + C'_{32}\varepsilon'_{22} + C'_{33}\varepsilon'_{33} + C'_{34}\gamma'_{12},\\
\sigma'_{12} &= C'_{41}\varepsilon'_{11} + C'_{42}\varepsilon'_{22} + C'_{43}\varepsilon'_{33} + C'_{44}\gamma'_{12},\\
\sigma'_{13} &= C'_{55}\gamma'_{13} + C'_{56}\gamma'_{23},\\
\sigma'_{23} &= C'_{65}\gamma'_{13} + C'_{66}\gamma'_{23}.
\end{aligned}\right\}$$

При этом в новой системе координат коэффициенты жёсткости вычисляются по формулам

$$
\left.\begin{aligned}
&C'_{11} = C_{11}\cos^4\varphi + 2\left(C_{12} + 2C_{44}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + C_{22}\sin^4\varphi,\\
&C'_{22} = C_{11}\sin^4\varphi + 2\left(C_{12} + 2C_{44}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + C_{22}\cos^4\varphi,\\
&C'_{12} = C'_{21} = \left(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{44}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + C_{12},\\
&C'_{44} = \left(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{44}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + C_{44},\\
&C'_{33} = C_{33},\\
&C'_{14} = C'_{41} = \left[C_{22}\sin^2\varphi - C_{11}\cos^2\varphi + \left(C_{12} + 2C_{44}\right)\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi,\\
&C'_{24} = C'_{42} = \left[C_{22}\cos^2\varphi - C_{11}\sin^2\varphi - \left(C_{12} + 2C_{44}\right)\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi,\\
&C'_{13} = C'_{31} = C_{13}\cos^2\varphi + C_{23}\sin^2\varphi,\\
&C'_{23} = C'_{32} = C_{13}\sin^2\varphi + C_{23}\cos^2\varphi,\\
&C'_{34} = C'_{43} = \left(C_{23} - C_{13}\right)\sin\varphi\cos\varphi,\\
&C'_{55} = C_{55}\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi,\\
&C'_{66} = C_{55}\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi,\\
&C'_{56} = C'_{65} = \left(C_{66} - C_{55}\right)\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{36}
$$

Равенства (35) можно обратить и записать их в форме (31). Будем иметь такие зависимости

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33},\\
&\varepsilon_{22} = S_{21}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33},\\
&\varepsilon_{33} = S_{31}\sigma_{11} + S_{32}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33},\\
&\gamma_{12} = S_{44}\sigma_{12},\\
&\gamma_{13} = S_{55}\sigma_{13},\\
&\gamma_{23} = S_{66}\sigma_{23}.
\end{aligned}\right\} \tag{37}
$$

В практических расчётах коэффициенты упругих податливостей удобно записывать с помощью технических характеристик упругости, имеющих определённый физический смысл. Тогда равенства (37) принимают следующий вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33},\\
&\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33},\\
&\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{33}}{E_3},\\
&\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}},\\
&\gamma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}},\\
&\gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{38}
$$

В формулах (38) введены такие обозначения для технических характеристик упругости: E_1, E_2, E_3 - модули упругости материала при растяжении в направлении осей X_1, X_2, X_3 соответственно; G_{12}, G_{23}, G_{13}- модули сдвига в плоскостях X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1 соответственно; ν_{ij} $(i \neq j)$ - коэффициенты Пуассона, для которых первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации. В силу симметрии матрицы упругих податливостей должны выполняться следующие равенства

$$
\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1},\ \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1},\ \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}. \tag{39}
$$

Представленные технические характеристики упругости ортотропного тела определяются при обработке экспериментально полученных результатов. Равенства (35), записанные с помощью этих параметров будут иметь такой вид

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{1}{\Delta}\Big[E_1\left(1-\nu_{23}\nu_{32}\right)\varepsilon_{11}+E_2\left(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}\right)\varepsilon_{22}+E_3\left(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}\right)\varepsilon_{33}\Big],\\
\sigma_{22} &= \frac{1}{\Delta}\Big[E_1\left(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}\right)\varepsilon_{11}+E_2\left(1-\nu_{31}\nu_{13}\right)\varepsilon_{22}+E_3\left(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}\right)\varepsilon_{33}\Big],\\
\sigma_{33} &= \frac{1}{\Delta}\Big[E_1\left(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21}\right)\varepsilon_{11}+E_2\left(\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12}\right)\varepsilon_{22}+E_3\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\varepsilon_{33}\Big],\\
\sigma_{12} &= G_{12}\gamma_{12},\\
\sigma_{13} &= G_{13}\gamma_{13},\\
\sigma_{23} &= G_{23}\gamma_{23},
\end{aligned}\right\} \qquad (40)
$$

где $\Delta = 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$.

Обратимся к формулам (36). Пусть коэффициенты жёсткости связаны следующими четырьмя зависимостями

$$
C_{11}=C_{22},\quad C_{13}=C_{23},\quad C_{55}=C_{66},\quad C_{11}=C_{12}+2C_{44}.
$$

Количество независимых характеристик упругости сокращается до пяти. При этом для произвольного угла поворота φ будем иметь

$$
\left.\begin{aligned}
C'_{11} &= C'_{22} = C_{11},\\
C'_{12} &= C'_{21} = C_{12},\\
C'_{44} &= C_{44},\\
C'_{33} &= C_{33},\\
C'_{14} &= C'_{41} = 0,\\
C'_{24} &= C'_{42} = 0,\\
C'_{13} &= C'_{31} = C_{13},\\
C'_{23} &= C'_{32} = C_{23},\\
C'_{34} &= C'_{43} = 0,\\
C'_{55} &= C'_{66} = C_{55},\\
C'_{56} &= C'_{65} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (41)
$$

В новой системе координат соотношения закона Гука примут такой вид

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= C_{11}\varepsilon'_{11}+C_{12}\varepsilon'_{22}+C_{13}\varepsilon'_{33},\\
\sigma'_{22} &= C_{12}\varepsilon'_{11}+C_{11}\varepsilon'_{22}+C_{23}\varepsilon'_{33},\\
\sigma'_{33} &= C_{13}\varepsilon'_{11}+C_{23}\varepsilon'_{22}+C_{33}\varepsilon'_{33},\\
\sigma'_{12} &= C_{44}\gamma'_{12},\\
\sigma'_{13} &= C_{55}\gamma'_{13},\\
\sigma'_{23} &= C_{55}\gamma'_{23}.
\end{aligned}\right\}
$$

Как видно, при произвольном повороте системы координат на угол φ относительно оси X_3 определяющие соотношения остаются неизменными и имеют вид (35). Анизотропное тело, для которого выполняются равенства (41), называется трансверсально изотропным телом. Ось X_3 является осью симметрии n-го порядка, перпендикулярная ей плоскость X_1X_2 – плоскостью симметрии.

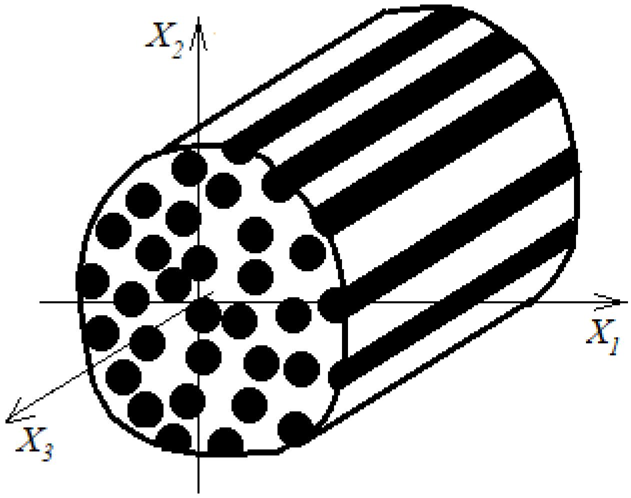

Рис.10

Трансверсально изотропное тело можно представить, как деформируемое тело, армированное бесконечно большим количеством ориентированных в одном направлении элементов (рис.10). При этом армирующие элементы хаотично расположены в сечении тела. При повороте такого тела на произвольный угол относительно оси X_3 тело совмещается само с собой.

Для технических характеристик упругости запишем равенства

$$E_1 = E_2 = E, \quad E_3 = E', \quad \nu_{23} = \nu_{32} = \nu_{31} = \nu_{13} = \nu', \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu,$$
$$G_{13} = G_{23} = G', \quad G_{12} = G.$$

Формулы (38) преобразуются к следующему виду

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu'}{E'}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\sigma_{33}}{E'}, \\
\gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G}, \\
\gamma_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{G'}, \\
\gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G'}.
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Обратные равенства можно представить так

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{\Delta}\left[\left(E' - E\nu'^2\right)\varepsilon_{11} + \left(E'\nu + E\nu'^2\right)\varepsilon_{22} + E'\nu'\left(1+\nu\right)\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{\Delta}\left[\left(E'\nu + E\nu'^2\right)\varepsilon_{11} + \left(E' - E\nu'^2\right)\varepsilon_{22} + E'\nu'\left(1+\nu\right)\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{\Delta}\left[E'\nu'\left(1+\nu\right)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{E'^2}{E}\left(1-\nu^2\right)\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{12} &= G\gamma_{12}, \\
\sigma_{13} &= G'\gamma_{13}, \\
\sigma_{23} &= G'\gamma_{23},
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

где $\Delta = (1+\nu)\left[E'(1-\nu) - 2E\nu'^2\right]$. При этом из условия $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$ получим известную зависимость

$$2G = \frac{E}{1+\nu}. \qquad (44)$$

В представленных равенствах (42)-(44) E, G, ν – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии X_1X_2 соответственно; E' - модуль упругости при растяжении в направлении оси изотропии X_3; ν' - коэффициент Пуассона, характеризующий линейную деформацию в плоскости изотропии при растяжении в направлении оси изотропии, G' - модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии.

Если в теле любая плоскость является плоскостью симметрии, то тело является изотропным. Любая прямая может рассматриваться как ось симметрии n-го порядка. В этом случае будем иметь

$$E = E', \quad \nu' = \nu, \quad G' = G.$$

При этом равенство (44) по-прежнему выполняется. Количество независимых характеристик упругости сокращается до двух. Равенства (42) принимают такой вид

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\sigma_{33}}{E}, \\
\gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G}, \\
\gamma_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{G}, \\
\gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Обратные равенства можно представить следующим образом

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + \left(1-\nu\right)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + \left(1-\nu\right)\varepsilon_{33}\right], \\
\sigma_{12} &= G\gamma_{12}, \\
\sigma_{13} &= G\gamma_{13}, \\
\sigma_{23} &= G\gamma_{23}.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Таким образом, применение элементов симметрии при анализе линейно упругих свойств анизотропных материалов приводит к существенному упрощению определяющих соотношений. Количество характеристик упругости сокращается с 21 параметра в общем случае до 2 параметров в частном случае изотропного тела. В приложениях, как правило, рассматриваются ортотропные, трансверсально изотропные и изотропные тела. При этом форма записи определяющих соотношений с использованием технических характеристик упругости, имеющих определённый физический смысл, позволяет установить систему экспериментов, необходимых для определения их численных значений.