



**Министерство науки и высшего образования Российской  
Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

---

ФАКУЛЬТЕТ

Специальное машиностроение

КАФЕДРА

СМ1 «Космические аппараты и ракеты-носители»

Домашнее задание №1  
по курсу «Динамика летательных аппаратов»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р.

Преподаватель: Гончаров Д.А.

---

(Подпись, дата)

---

(Подпись, дата)

Москва, 2024

## Условие задания

Согласно порядковому номеру в списке 13 принимаем схему I и номер варианта 7.

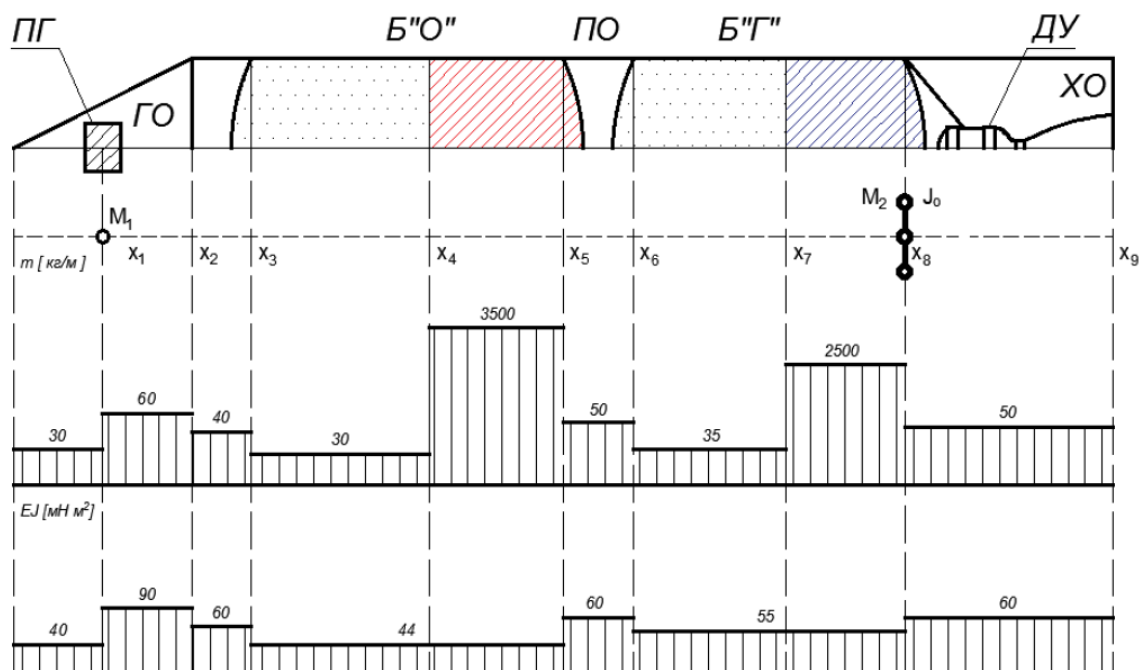


Рисунок 1 — Схема ракеты

Исходные данные:

- Координаты сечения

- $x_1 = 1.7$  м
- $x_2 = 3.5$  м
- $x_3 = 4.0$  м
- $x_4 = 7.0$  м
- $x_5 = 10.0$  м
- $x_6 = 11.0$  м
- $x_7 = 15.0$  м
- $x_8 = 19.0$  м
- $x_9 = 21.0$  м

- Параметры АС

- $w_0 = 25$
- $w_p = 70$

- $W_{2p} = 110$
- $k_p = 0.6$
- $M_1 = 2.0 \text{ т}$
- $M_2 = 2.0 \text{ т}$
- $J_0 = 3.0 \text{ т} \cdot \text{м}^2$
- $x_{ГП} = 19.5 \text{ м}$

Требуется:

1. Для заданного варианта определить две первых собственные частоты упругих поперечных колебаний корпуса ракеты.
2. Построить эпюры формы упругой линии и угла поворота сечений для каждого тона колебаний сечения.
3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
4. Выполнить пункты №1 и №2 для полностью заправленной ракеты (момент старта) и «сухой» ракеты (момент выключения ДУ при стрельбе на максимальную дальность).
5. Вычислить значения приведенных масс для расчетных случаев.

## 1 Решение

Решать задачу будем с помощью метода начальных параметров. Для этого распределим сосредоточенную массу в окрестности точки, в которой она расположена на расстоянии 0.1 м в обе стороны. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний для  $i$ -го участка имеет вид

$$EJ_i \cdot f_i^{IV}(x) - \omega^2 m_i f_i(x) = 0 \quad (1.1)$$

Введем коэффициент колебаний  $b_i$ :

$$b_i^4 = \frac{\omega^2 m_i}{EJ_i} \quad (1.2)$$

Тогда уравнение колебаний (1.1) примет вид:

$$f_i^{IV}(x) - b_i^4 f_i(x) = 0 \quad (1.3)$$

Решение системы уравнений (1.3) должно удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения участков стержня. Данная задача разрешима только для тех значений  $\omega$ , которые являются частотами свободных колебаний неоднородного стержня. Решение уравнений (1.3) представим в виде линейной комбинации балочных функций Крылова:

$$f_i(x) = C_{1i}S(b_i x) + C_{2i}T(b_i x) + C_{3i}U(b_i x) + C_{4i}V(b_i x) \quad (1.4)$$

где балочные функции Крылова имеют вид

$$\begin{aligned} S(b_i x) &= \frac{1}{2}(ch(b_i x) + \cos(b_i x)) \\ T(b_i x) &= \frac{1}{2}(sh(b_i x) + \sin(b_i x)) \\ U(b_i x) &= \frac{1}{2}(ch(b_i x) - \cos(b_i x)) \\ V(b_i x) &= \frac{1}{2}(sh(b_i x) - \sin(b_i x)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Функции Крылова обладают свойствами, делающими их удобными для решения задач поперечных колебаний стержня:

1.  $S(0) = 1; T(0) = U(0) = V(0) = 0$
2.  $S'(b_i x) = b_i V(b_i x); V'(b_i x) = b_i U(b_i x); U'(b_i x) = b_i T(b_i x); T'(b_i x) = b_i S(b_i x)$

Введем вектор формы колебаний:

$$\bar{u}_i(x) = \begin{bmatrix} u_{1i}(x) \\ u_{2i}(x) \\ u_{3i}(x) \\ u_{4i}(x) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

где:

- $u_{1i}(x) = f_i(x)$  — форма перемещений
- $u_{2i}(x) = f'_i(x)$  — форма угла поворота
- $u_{3i}(x) = EJ_i \cdot f''_i(x)$  — форма изгибающего момента
- $u_{4i}(x) = EJ_i \cdot f'''_i(x)$  — форма поперечного момента

Так как на стыках меняются значения погонных масс и жесткостей и присутствуют сосредоточенные массы и момент инерции, то условие стыка примет вид

$$\bar{u}_{i+1}(0) = B_i \cdot \bar{u}_i(l_i) \quad (1.7)$$

где матрица перехода  $B_i$  имеет вид:

- если отсутствуют масса и момент инерции:

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

- если присутствует только масса:

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ M\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

- если присутствует масса и момент инерции:

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_0\omega^2 & 1 & 0 \\ M\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Исходя из свойств функций Крылова, можно связать между собой вектор формы в любой точке участка с вектором формы в его начале. Это условие связи имеет вид

$$\bar{u}_i(x) = A_i(x) \cdot \bar{u}_i(0) \quad (1.11)$$

где матрица  $A$  имеет вид

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{b_i} & \frac{U(b_i x)}{E J_i \cdot b_i^2} & \frac{V(b_i x)}{E J_i \cdot b_i^3} \\ V(b_i x) \cdot b_i & S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{E J_i \cdot b_i} & \frac{U(b_i x)}{E J_i \cdot b_i^2} \\ U(b_i x) \cdot E J_i \cdot b_i^2 & V(b_i x) \cdot E J_i \cdot b_i & S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{b_i} \\ V(b_i x) \cdot E J_i \cdot b_i^3 & U(b_i x) \cdot E J_i \cdot b_i^2 & V(b_i x) \cdot b_i & S(b_i x) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Из условия (1.7) следует

$$\bar{u}_{i+1}(x) = A_{i+1}(x) \cdot B_i \cdot A_i(l_i) \cdot \bar{u}_i(0) \quad (1.13)$$

Поэтому решение для произвольного участка можно выразить через вектор формы в начале первого участка:

$$\bar{u}_i(x) = A_i(x) \cdot \left( \prod_{j=i-1}^1 (B_j \cdot A_j(l_j)) \right) \cdot \bar{u}_1(0) \quad (1.14)$$

Введем матрицу  $P$ :

$$P = \prod_{j=k}^1 (B_j \cdot A_j(l_j)) \quad (1.15)$$

Тогда выражение (1.14) примет вид

$$\bar{u}_i(L) = P \cdot \bar{u}_1(0) \quad (1.16)$$

или в скалярной форме:

$$u_r(l) = \sum_{s=1}^4 p_{rs} u_s(0) \quad (1.17)$$

где  $p_{rs}$  — коэффициенты матрицы  $P$ , зависящие от частоты свободных колебаний  $\omega$ .

Граничные условия на концах ракеты (свободные концы) будут иметь вид

$$\begin{cases} u_3(0) = 0 \\ u_4(0) = 0 \\ u_3(L) = 0 \\ u_4(L) = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

С учетом граничных условий (1.18) выражение (1.17) примет вид

$$\begin{cases} u_1(L) = p_{11}u_1(0) + p_{12}u_2(0) \\ u_2(L) = p_{21}u_1(0) + p_{22}u_2(0) \\ 0 = p_{31}u_1(0) + p_{32}u_2(0) \\ 0 = p_{41}u_1(0) + p_{42}u_2(0) \end{cases} \quad (1.19)$$

Нетривиальным решением системы (1.19) является выражение

$$D(\omega) = p_{31} \cdot p_{42} - p_{32} \cdot p_{41} = 0 \quad (1.20)$$

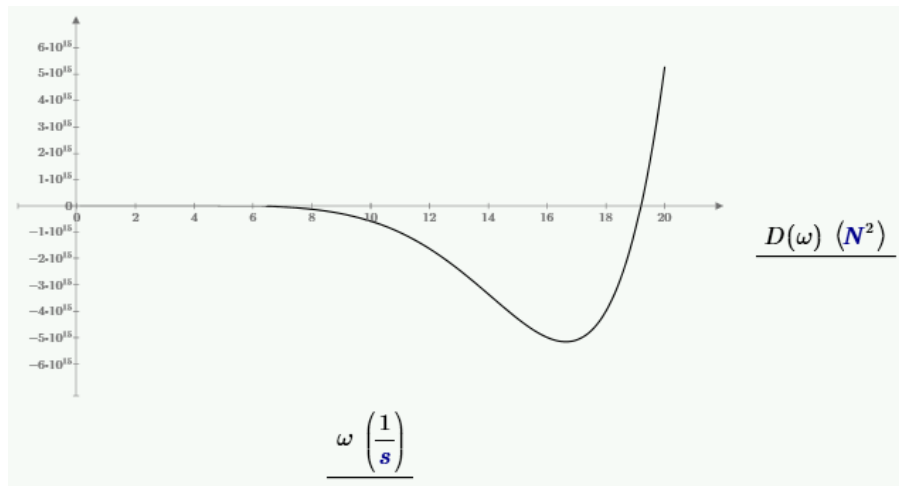


Рисунок 1.1 — График для определения собственных частот

Получим первые 2 собственные частоты:

$$\begin{cases} \omega_1 = 4.573 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \\ \omega_2 = 19.191 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \end{cases} \quad (1.21)$$

## 2 Построение эпюр формы упругой линии и угла поворота сечений для каждого тона колебаний

Из системы уравнений (1.19) получим:

$$u_2(0) = -\frac{p_{31}(\omega_n)}{p_{32}(\omega_n)} u_1(0) \quad (2.1)$$

Положим  $u_1(0) = 1$ , тогда вектор формы в начале первого участка будет иметь вид:

$$\bar{u}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{p_{31}(\omega_n)}{p_{32}(\omega_n)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Форма собственных колебаний имеет вид:

$$f_n(x) = u_1(x) = p_{11}(x)u_1(0) + p_{12}(x)u_2(0) \quad (2.3)$$

С учетом (2.1) выражение (2.3) можно записать в виде:

$$f_n(x) = p_{11}(x) - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)} p_{12}(x) \quad (2.4)$$

Форма угла поворота имеет вид:

$$u_2(x) = p_{21}(x)u_1(0) + p_{22}(x)u_2(0) \quad (2.5)$$

или:

$$\theta(x) = u_2(x) = p_{21}(x) - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)} p_{22}(x) \quad (2.6)$$

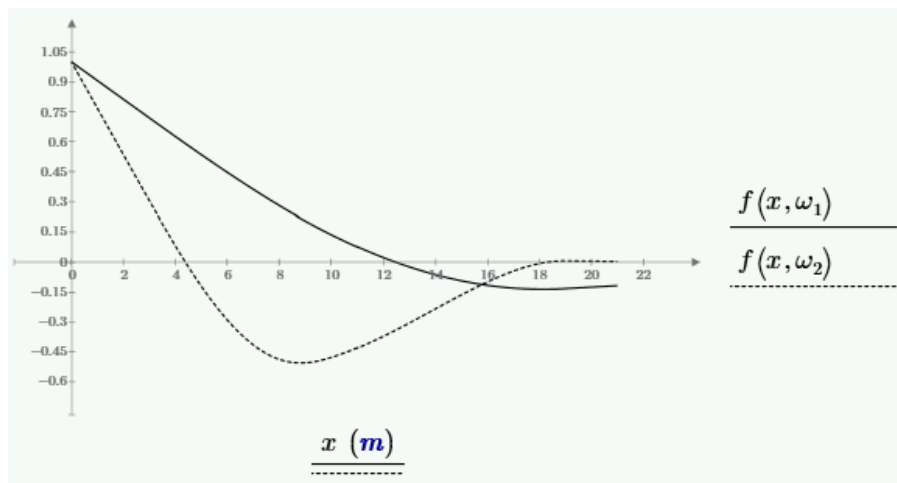


Рисунок 2.1 — Форма колебаний

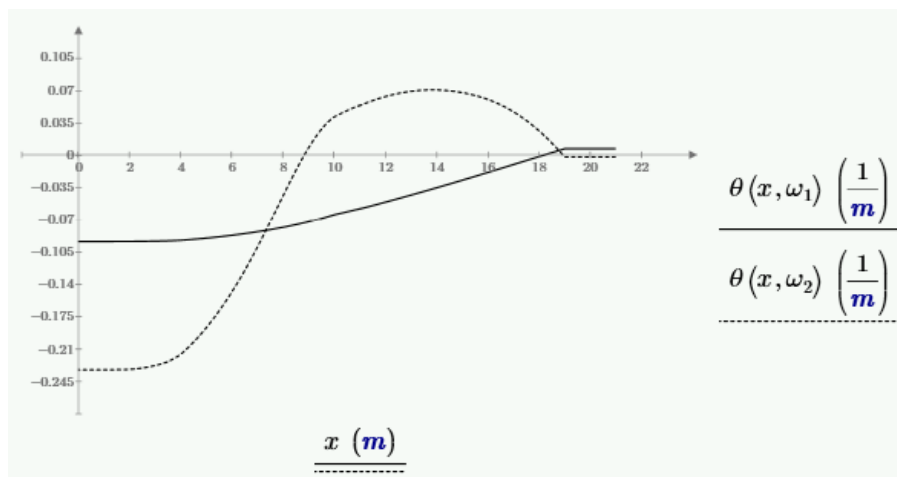


Рисунок 2.2 — Форма угла поворота



### 3 Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Найдем форму изгибающего момента:

$$M(x) = u_3(x) = p_{31} - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)} p_{32}(x) \quad (3.1)$$

И форму поперечных сил:

$$Q(x) = u_4(x) = p_{41}(x) - \frac{p_{31}(L)}{p_{32}(L)} p_{42}(x) \quad (3.2)$$

Построим графики формы изгибающего момента и поперечных сил для первых двух собственных частот:

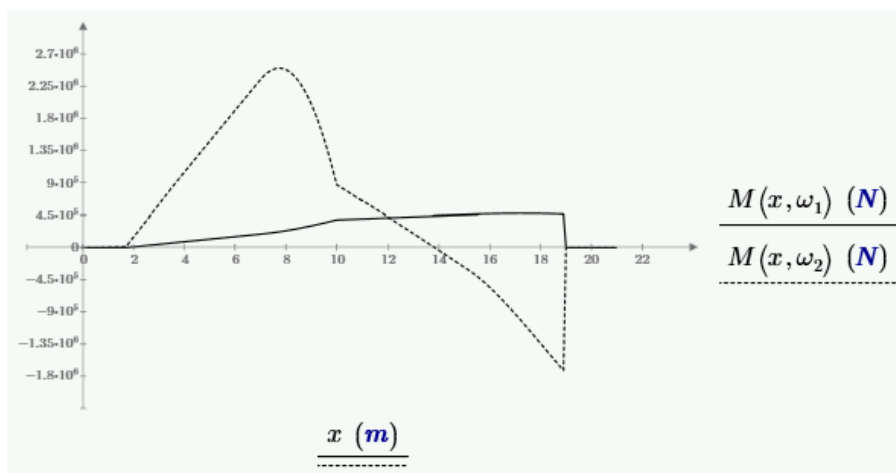


Рисунок 3.1 — Форма изгибающего момента

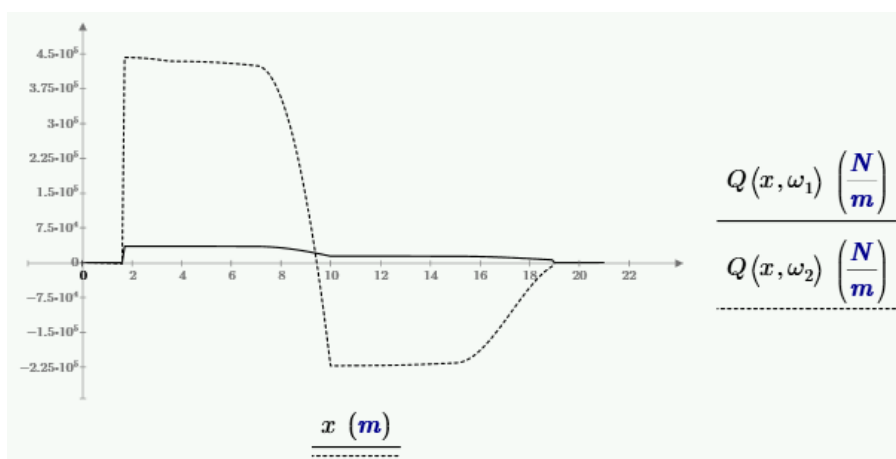


Рисунок 3.2 — Форма поперечной силы

## 4 Расчет полностью заправленной и «сухой» ракеты

### 4.1 Расчет полностью заправленной ракеты

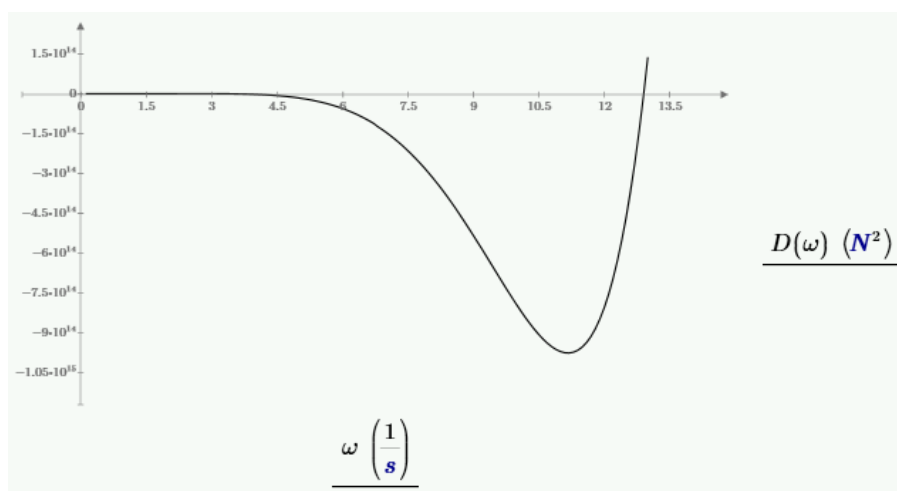


Рисунок 4.1 — График для определения собственных частот полностью заправленной ракеты

Первые две собственные частоты равны:

$$\begin{cases} \omega_1 = 3.338 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \\ \omega_2 = 12.906 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \end{cases} \quad (4.1)$$

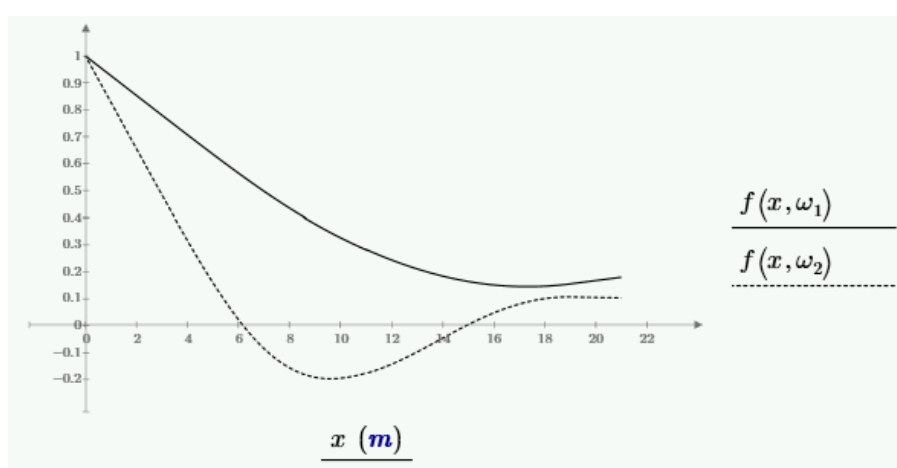


Рисунок 4.2 — Форма колебаний заправленной ракеты

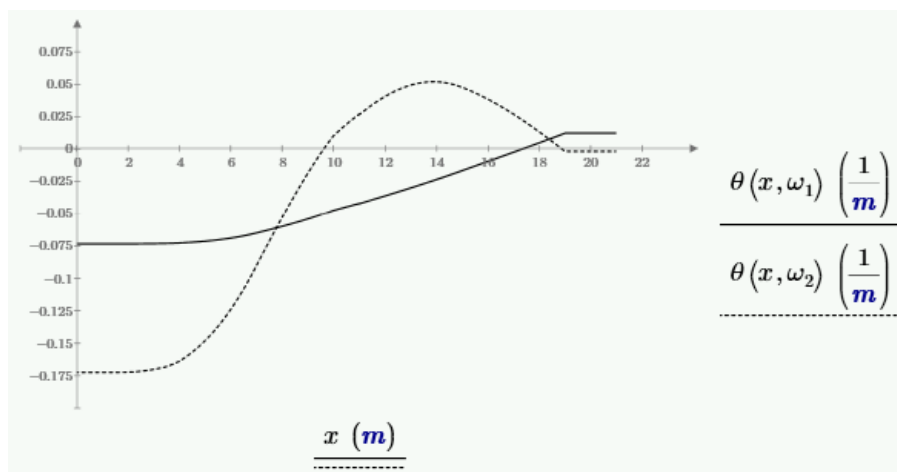


Рисунок 4.3 — Форма угла поворота заправленной ракеты

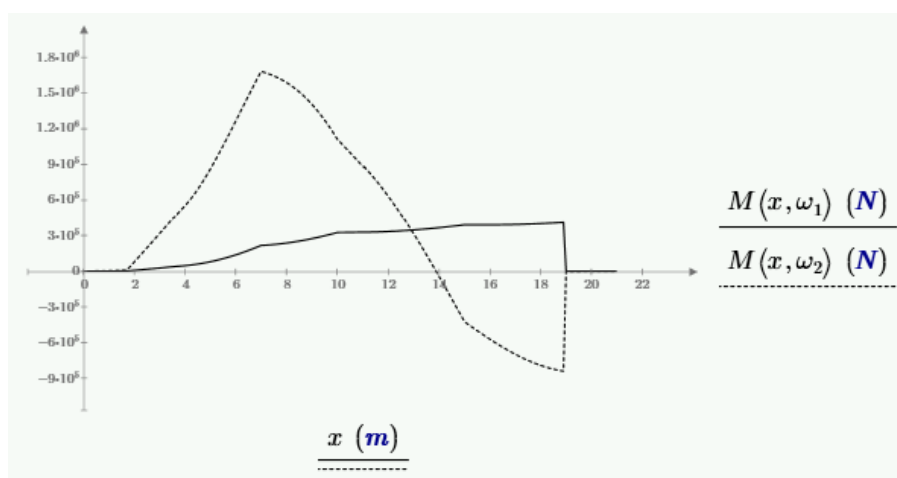


Рисунок 4.4 — Форма изгибающего момента заправленной ракеты

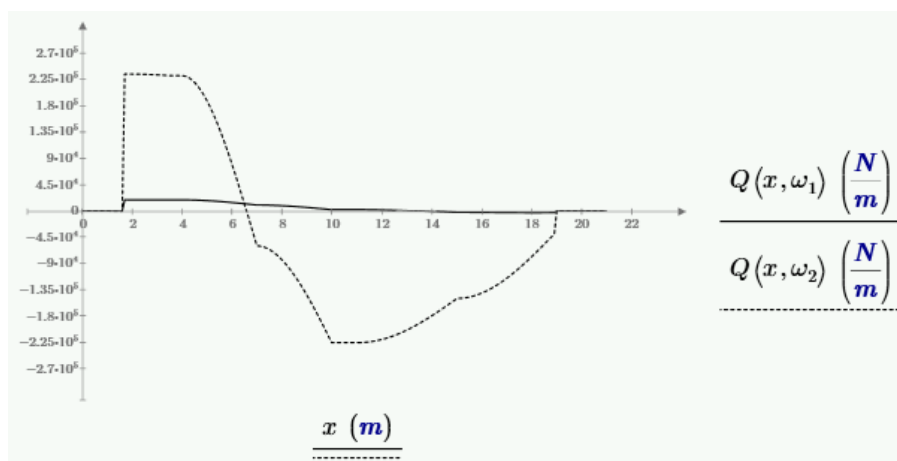


Рисунок 4.5 — Форма поперечной силы заправленной ракеты

## 4.2 Расчет «сухой» ракеты

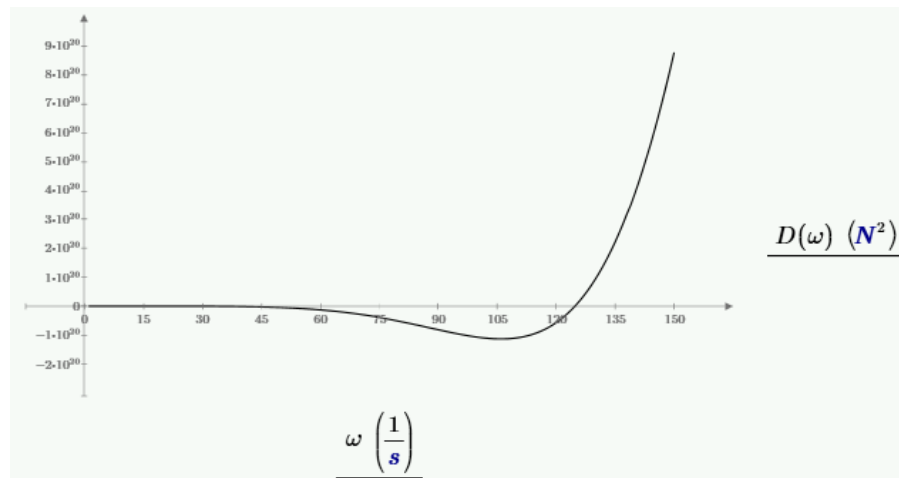


Рисунок 4.6 — График для определения собственных частот «сухой» ракеты

Первые две собственные частоты равны:

$$\begin{cases} \omega_1 = 5.826 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \\ \omega_2 = 124.806 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \end{cases} \quad (4.2)$$

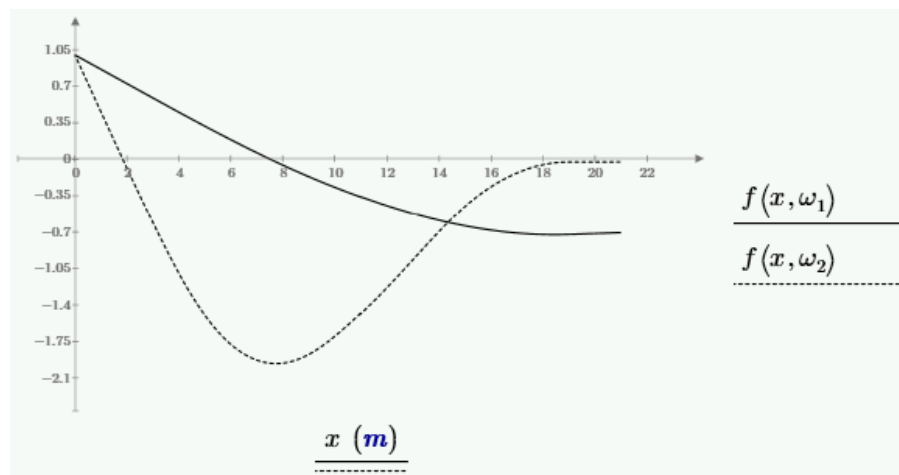


Рисунок 4.7 — Форма колебаний «сухой» ракеты

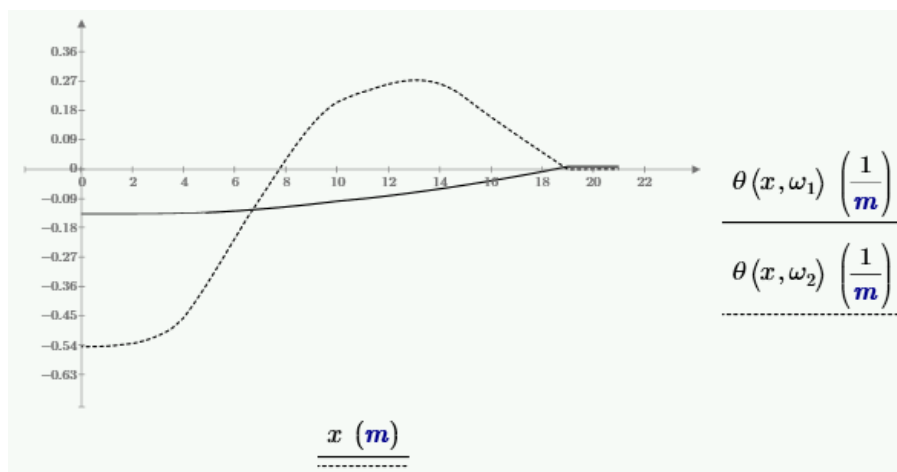


Рисунок 4.8 — Форма угла поворота «сухой» ракеты

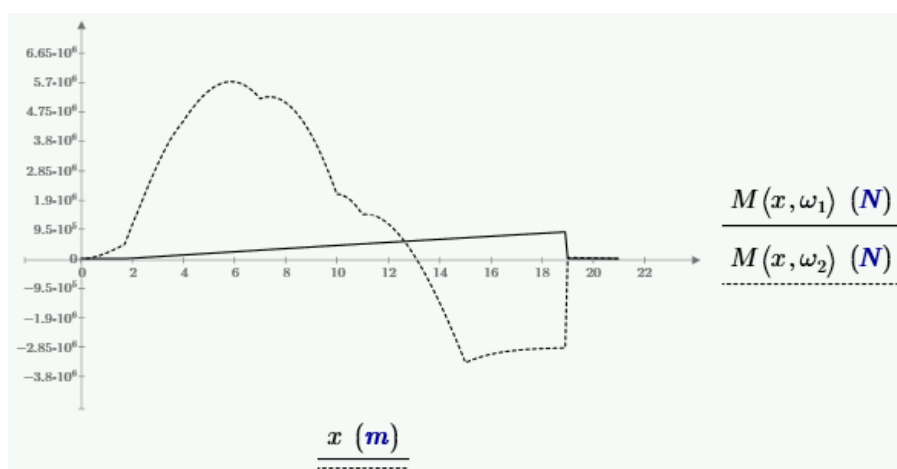


Рисунок 4.9 — Форма изгибающего момента «сухой» ракеты

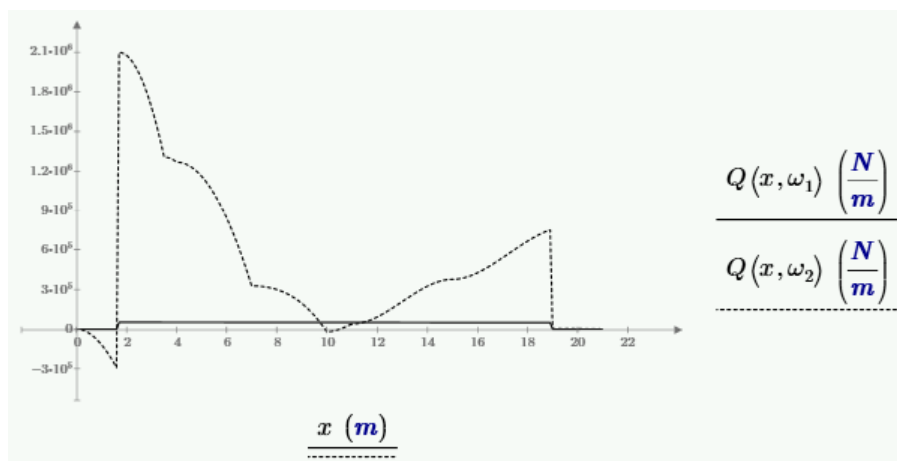


Рисунок 4.10 — Форма поперечной силы «сухой» ракеты

## 5 Расчет приведенных масс для расчетных случаев

Найдем приведенные массы по формуле:

$$m_n = \int_0^L m(x) f_n^2(x) dx \quad (5.1)$$

где  $m(x)$  — погонная масса,  $f_n(x)$  — форма колебаний.

Найдем приведенные массы для расчетных случаев:

- Заданный вариант ракеты:

$$\begin{cases} m_1 = 970 \text{ кг} \\ m_2 = 2580 \text{ кг} \end{cases} \quad (5.2)$$

- Полностью заправленная ракета:

$$\begin{cases} m_1 = 6436 \text{ кг} \\ m_2 = 797 \text{ кг} \end{cases} \quad (5.3)$$

- «Сухая» ракета:

$$\begin{cases} m_1 = 262 \text{ кг} \\ m_2 = 898 \text{ кг} \end{cases} \quad (5.4)$$