МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители»

Дисциплина «Основы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №1

Вариант №4

Студентка: Гусева Н. А.

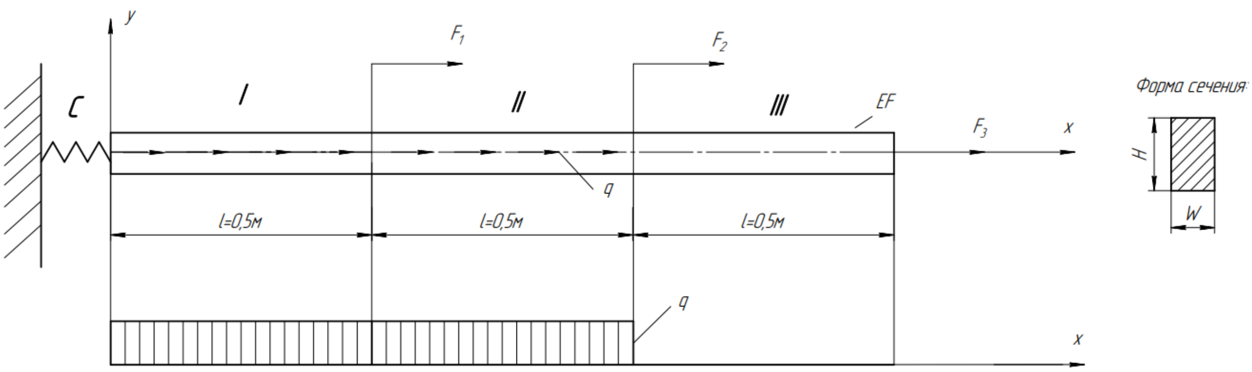
Группа: СМ1-81

Преподаватель: Сдобников А.Н.

$\Pi[U_T]$	$\Pi[U_N]$	1,445%
$-5{,}762193EAl$	$-5{,}67891EAl$	

Москва, 2023 год.

Рабочая схема и распределение нагрузки



Исходные данные:

$\frac{Cl}{EA} = 5$

$\frac{ql}{EA} = 1$

$\frac{F_1}{EA} = 0{,}09$

$\frac{F_2}{EA} = 0{,}3$

$\frac{F_3}{EA} = 0{,}7$

Материал: сталь

Для данной рабочей схемы необходимо:

Часть 1.

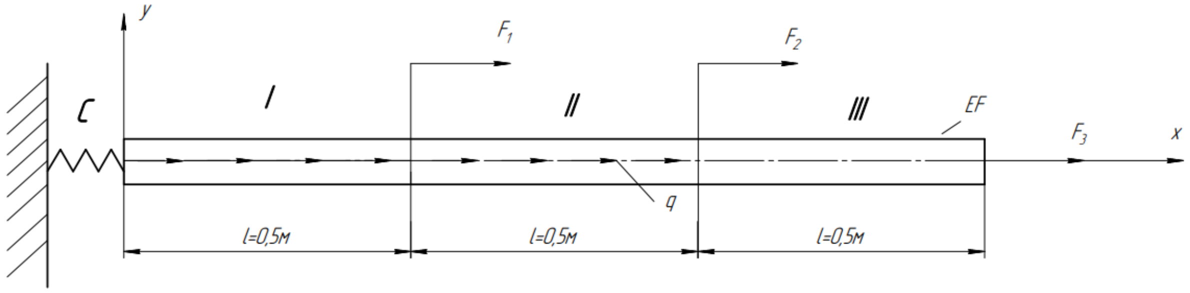
1. Сформулировать краевую задачу
2. Построить точное решение краевой задачи
3. Преобразовать краевую задачу в вариационный принцип
4. Получить решение энергетическим методом на линейной аппроксимации поля перемещений
5. Дать оценку погрешности по энергии между точным и приближенным решением

Часть 2.

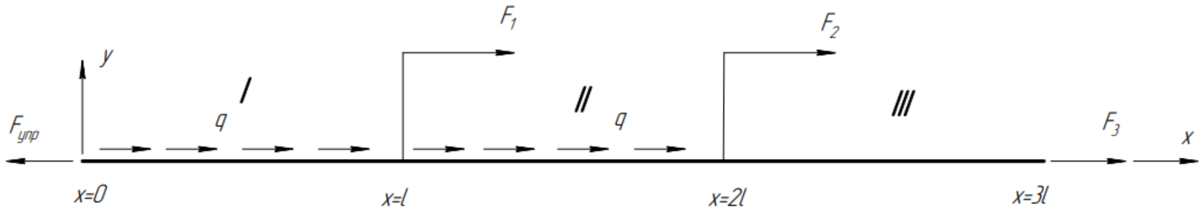
6. Записать разрешающую систему уравнений Методом Конечных Элементов (МКЭ), провести ее анализ и получить «вручную» решение для перемещений и напряжений
7. Выполнить расчет конструкции заданной с использованием MSC Patran_Nastran
8. Провести сравнительный анализ результатов, полученных методами, использованными в работе
9. Подготовить отчет по результатам проведенных исследований.

Решение.

Ведем систему координат:



Запишем ДУ равновесия участков и условия на их границах:



Введем обозначения $\frac{d(\ )}{dx} = \ (\ )'; \quad \frac{d(\ )^2}{dx^2} = \ (\ )''$

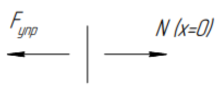
Рассмотрим участок I: $\boldsymbol{0 \le x \le l}$

Дифференциальное уравнение равновесия:

$$EAU_I''(x) + q = 0 \tag{1}$$

Условия на границах участка:

x=0, т. A



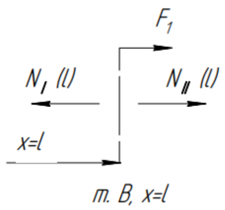
$$N(x=0) = EA\frac{dU(0)}{dx} = \ EAU'(0)$$

Условие равновесия:

$$EAU_I'(0) - CU_I(0) = 0$$

$$U_I'(0) = \frac{CU_I(0)}{EA} \tag{A}$$

В т. В, $x = l$



Условие равновесия: $-N_I(l) + F_1 + N_{II}(l) = 0$ (Б)

Так как $N_I(l) = EA\frac{dU_I(l)}{dx} = EAU_I'(l)$

$$N_{II}(l) = EA\frac{dU_{II}(l)}{dx} = EAU_{II}'(l)$$

То уравнение (Б) будет иметь вид:

$$-EAU_I'(l) + F_1 + EAU_{II}'(l) = 0$$

$$U_I'(l) = U_{II}'(l) + \frac{F_1}{EA}$$

Замечание: $U_I\ (x)$ – функия перемещения точек на первом участке

$U_{II}\ (x)$ – функия перемещения точек на втором участке

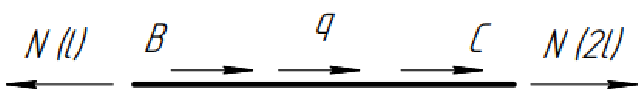
Таким образом, окончательно:

$$EAU_I''(x) + q = 0 \tag{1а}$$

При $x = l$: $\begin{cases} U_I\ (l) = U_{II}\ (l) \\ U_I'(l) = U_{II}'(l) + \frac{F_1}{EA} \end{cases}$ (1б)

При $x = 0$: $U_I'(0) = \frac{CU_I(0)}{EA}$ (1в)

Рассмотрим участок II: $l \leq x \leq 2l$



Дифференциальное уравнение равновесия:

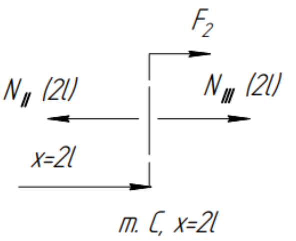
$\mathrm{EF}U_{II}''(x) + q = 0, \qquad l \leq x \leq 2l$

В т. В, $x = l$

Условия стыковки по перемещениям II участка в т. В соответствуют условиям стыковки I участка в этой точке, то есть системе уравнений (1б):

$$\begin{cases} U_I\ (l) = U_{II}\ (l) \\ U_I'(l) = U_{II}'(l) + \frac{F_1}{EA} \end{cases} \tag{1б}$$

В т. С, при $x = 2l$:



Условия равновесия: $-N_{II}(2l) + F2 + N_{III}(2l) = 0$ (В)

Так как $N_{II}(2l) = EA\frac{dU_{II}(2l)}{dx} = EAU'_{II}(2l)$

$$N_{III}(2l) = EA\frac{dU_{III}(2l)}{dx} = EAU'_{III}(2l)$$

То уравнение (В) будет иметь вид:

$-EAU'_{II}(2l) + F_2 + EAU'_{III}(2l) = 0$

$U'_{II}(2l) = \ U'_{III}(2l) + \frac{F_2}{EA}$

Замечание: $U_{II}\ (x)$ – функия перемещения точек на втором участке

$U_{III}(x)$ – функия перемещения точек на третьем участке

Таким образом, окончательно:

$U''_{II}(x) + \frac{q}{EA} = 0$ (2а)

При $x = 2l$: $\begin{cases} U_{II}\ (2l) = U_{III}(2l) \\ U'_{II}(2l) = U'_{III}(2l) + \frac{F_2}{EA} \end{cases}$ (2б)

При $x = l$: $\begin{cases} U_{I}\ \ (l) = U_{II}\ (l) \\ U'_{I}(l) = U'_{II}(l) + \frac{F_1}{EA} \end{cases}$ (2в)

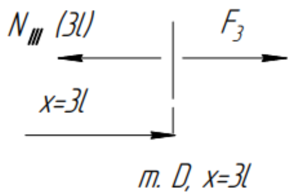
Рассмотрим участок III: $2l \le x \le 3l$

ДУ равновесия:

EF$U''_{III}(x) = 0, \qquad 2l \le x \le 3l$

Условия стыковки по перемещениям III участка в т. С при $x = 2l$ соответствуют условиям стыковки II участка в этой точке, то есть системе уравнений (2б):

$$\begin{cases} U_{II}\ (2l) = U_{III}(2l) \\ U'_{II}(2l) = U'_{III}(2l) + \frac{F_2}{EA} \end{cases}$$

В т. D, при $x = 3l$: 

Условия равновесия:

$N_{III}(3l) - F_3 = 0$ или $EA\frac{dU_{III}(3l)}{dx} - F_3 = 0$, следовательно:

$U'_{III}(3l) = \frac{F_3}{EA}$

Таким образом, в результате приведенных рассуждений можно записать математическую формулировку краевой задачи для рассмотрения схемы:

$$\begin{cases} \mathrm{EA}U_I''(x) + q = 0 \\ \mathrm{EA}U_{II}''(x) + q = 0 \\ \mathrm{EA}U_{III}''(x) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Граничные условия и условия стыковки:

$U'_I(0) = \frac{CU_I(0)}{EA}$ - граничное условие в точке A (3.1)

$U_I\ (l) = U_{II}\ (l)$ - условие стыковки по перемещениям (3.2)

$U'_I(l) = U'_{II}(l) + \frac{F_1}{EA}$ - условие стыковки по усилиям (3.3)

$U_{II}\ (2l) = U_{III}(l2)$ - условие стыковки по перемещениям (3.4)

$U'_{II}(2l) = U'_{III}(2l) + \frac{F_2}{EA}$ - условие стыковки по усилиям (3.5)

$U'_{III}(3l) = \frac{F_3}{EA}$ - граничное условие в точке D (3.6)

Данные формулы (3), (3.1) –(3.6) представляют собой математическую формулировку краевой задачи.

$U_I\ (x) = -\frac{qx^2}{2EA} + C_1x + C_2$, $\quad 0 \le x \le l$

$U_{II}\ (x) = -\frac{qx^2}{2EA} + C_3x + C_4$, $\quad l \le x \le 2l$

$U_{III}(x) = C_5x + C_6$, $\quad 2l \le x \le 3l$

Константы $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ находим из условий (3.1) –(3.6)

Из (3.6): $C_5 = \frac{F_3}{EA}$ $\rightarrow$ $C_5 = \frac{F_3}{EA} = 0{,}7$

Из (3.5): $-\frac{q \cdot 2l}{EA} + C_3 = C_5 + \frac{F_2}{EA}$ $\rightarrow$ $C_3 = C_5 + \frac{F_2}{EA} + \frac{q \cdot 2l}{EA} = 0{,}7 + 0{,}3 + 2 = 3$

Из (3.3): $-\frac{q \cdot l}{EA} + C_1 = -\frac{q \cdot l}{EA} + C_3 + \frac{F_1}{EA}$ $\rightarrow$ $C_1 = C_3 + \frac{F_1}{EA} = 3 + 0{,}09 = 3{,}09$

Из (3.1): $C_1 = \frac{\mathrm{C}}{EA} \cdot C_2$ $\rightarrow$ $C_2 = \frac{EA}{\mathrm{C}} \cdot C_1 = \frac{C_1 \cdot l}{5} = \frac{3{,}09 \cdot l}{5} = 0{,}618 \cdot l$

Из (3.2): $-\frac{q \cdot (l)^2}{2EA} + C_1 \cdot l \ + \ C_2 = -\frac{q \cdot (l)^2}{2EA} + C_3 \cdot l + C_4$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $C_4 = C_1 \cdot l + C_2 - C_3 \cdot l = 3{,}09 \cdot l + 0{,}618 \cdot l - 3 \cdot l = 0{,}708 \cdot l$

Из (3.4): $-\frac{q \cdot (2l)^2}{2EA} + C_3 \cdot 2l \ + \ C_4 = C_5 \cdot 2l + C_6$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $C_6 = -\frac{q \cdot (2l)^2}{2EA} + C_3 \cdot 2l \ + \ C_4 - C_5 \cdot 2l = -2l + 3 \cdot 2l + 0{,}708l - 0{,}7 \cdot 2l = 3{,}308 \cdot l$

Таким образом:

$C_1 = 3{,}09$

$\mathrm{C}_2 = 0{,}618 \cdot l$

$\mathrm{C}_3 = 3$

$C_4 = \ 0{,}708 \cdot l$

$C_5 = 0{,}7$

$C_6 = 3{,}308 \cdot l$

$U_I \ (x) = -\frac{qx^2}{2EA} + 3{,}09x + 0{,}618 \cdot l \,,$ $0 \le x \le l$

$U_{II} \, (x) = -\frac{qx^2}{2EA} + 3x + \ 0{,}708 \cdot l,$ $l \le x \le 2l$

$U_{III}(x) = 0{,}7 \, x + 3{,}308 \cdot l,$ $2l \le x \le 3l$

При условии, что $\frac{ql}{EA} = 1,$ получим:

$U_I \ (x) = -\frac{x^2}{2l} + 3{,}09x + 0{,}618 \cdot l \ ,$ $0 \le x \le l$

$U_{II} \, (x) = -\frac{x^2}{2l} + 3x + \ 0{,}708 \cdot l,$ $l \le x \le 2l$

$U_{III}(x) = 0{,}7 \, x + 3{,}308 \cdot l,$ $2l \le x \le 3l$

Следствие из закона Гука:

$N(x) = EA\frac{dU(x)}{dx} = EAU'(x)$

$\sigma(x) = \frac{N(x)}{F} = EU'(x)$

$\sigma_I\ (x) = -\frac{Ex}{l} + 3{,}09E\ ,\qquad 0 \le x \le l$

$\sigma_{II}\ (x) = -\frac{Ex}{l} + 3E,\qquad l \le x \le 2l$

$\sigma_{III}(x) = 0{,}7E,\qquad 2l \le x \le 3l$

2. Построение эпюры перемещений и внутренних сил.

Найдем значения перемещений и внутренних сил на границах участков.

$U_I\ (0) = 0{,}618 \cdot l\ ,\qquad N_I\ (0) = 3{,}09EA$

$U_I\ (0{,}5l) = 2{,}038 \cdot l\qquad N_I\ (l) = 2{,}09EA$

$U_I\ (l) = U_{II}\ (l) = 3{,}208 \cdot l\qquad N_{II}\ (l) = 2EA$

$U_{II}\ (1{,}5l) = 4{,}083 \cdot l\qquad N_{II}\ (2l) = 1EA$

$U_{II}\ (2l) = U_{III}(2l) = 4{,}708 \cdot l\qquad N_{III}(2l) = 0{,}7EA$

$U_{III}(3l) = 5{,}408 \cdot l\qquad N_{III}(3l) = 0{,}7EA$

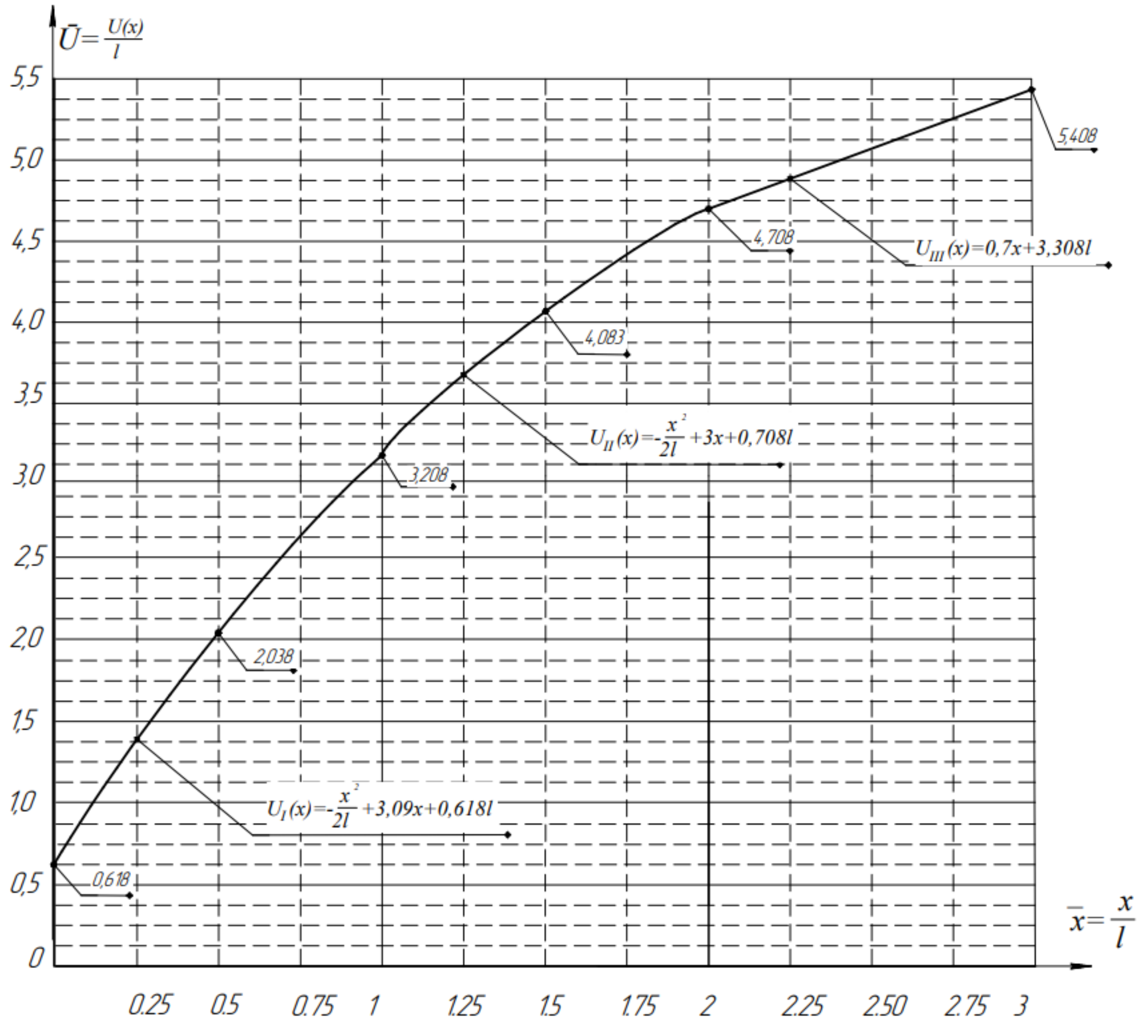


Рис.1. Эпюра перемещений.

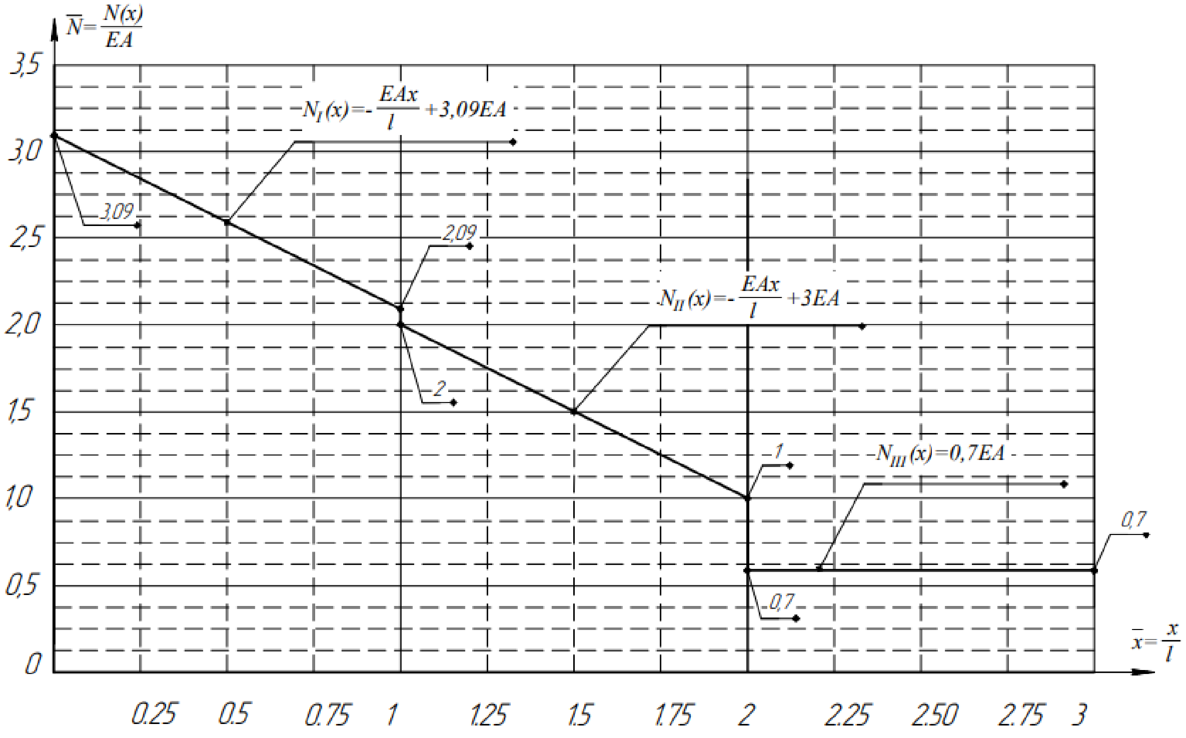


Рис.2. Эпюра внутренних сил.

3. Решение энергетическим методом

3.1 Составим алгоритм решения:

a. Сформулировать краевую задачу;
b. Преобразовать ее в вариационную задачу;
c. Получить решения энергетическим методом на кусочно-линейной аппроксимации;
d. Дать оценку погрешности по энергетическому методу между точным и приближенным решениями.

3.2 Решение:

Преобразуем задачу в вариационную. Для этого запишем условия равенства нулю невязок дифференциальных уравнений краевой задачи.

$$\int_0^l (EAU_I''(x)+q)\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l}(EAU_{II}''(x)+q)\,\delta U_{II}(x)dx+\int_{2l}^{3l}EAU_{III}''(x)\,\delta U_{III}(x)dx=0$$

$$\int_0^l EAU_I''(x)\,\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l}EAU_{II}''(x)\,\delta U_{II}(x)dx+\int_{2l}^{3l}EAU_{III}''(x)\,\delta U_{III}(x)dx+$$
$$+\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l}q\cdot\delta U_{II}(x)dx=0 \qquad (1*)$$

Преобразуем первые три слагаемых по отдельности:

$$(1):\ \int_0^l EAU_I''(x)\,\delta U_I(x)dx=\int_0^l EA\,\delta U_I(x)dU_I'=EA\cdot\delta U_I(x)U_I'(x)|_0^l-\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx$$

$$(2):\ \int_l^{2l}EAU_{II}''(x)\,\delta U_{II}(x)dx=\int_l^{2l}EA\,\delta U_{II}(x)dU_{II}'=EA\cdot\delta U_{II}(x)U_{II}'(x)|_l^{2l}-\int_l^{2l}EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx$$

$$(3):\ \int_{2l}^{3l}EAU_{III}''(x)\,\delta U_{III}(x)dx=\int_{2l}^{3l}EA\,\delta U_{III}(x)dU_{III}'=EA\cdot\delta U_{III}(x)U_{III}'(x)|_{2l}^{3l}-\int_{2l}^{3l}EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)d$$

Подставим преобразования 1, 2, 3 в исходное уравнение (1*), преобразуем его с учетом условий: $U_I(l)=U_{II}(l)$, $\delta U_I(l)=\delta U_{II}(l)$, $U_{II}(2l)=U_{III}(2l)$, $\delta U_{II}(2l)=\delta U_{III}(2l)$.

$$EA\cdot\delta U_I(x)U_I'(x)|_0^l-\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx+EA\cdot\delta U_{II}(x)U_{II}'(x)|_l^{2l}-\int_l^{2l}EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx$$
$$+$$
$$+EA\cdot\delta U_{III}(x)U_{III}'(x)|_{2l}^{3l}-\int_{2l}^{3l}EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)dx+\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l}q\cdot\delta U_{II}(x)dx=0$$

$$EA\cdot\delta U_I(l)U_I'(l)-EA\cdot\delta U_I(0)U_I'(0)-\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx+EA\cdot\delta U_{II}(2l)U_{II}'(2l)-$$

$$EA\cdot\delta U_{II}(l)U_{II}'(l)-\int_l^{2l} EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx+EA\cdot\delta U_{III}(3l)U_{III}'(3l)-EA\cdot\delta U_{III}(2l)U_{III}'(2l)-$$

$$-\int_{2l}^{3l} EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)dx+\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l} q\cdot\delta U_{II}(x)dx=0$$

$$\big(EAU_I'(l)-EAU_{II}'(l)\big)\delta U_I(l)-EA\cdot U_I'(0)\delta U_I(0)-\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx+$$

$$+\big(EAU_{II}'(2l)-EAU_{III}'(2l)\big)\delta U_{II}(2l)-\int_l^{2l} EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx+$$

$$EA\cdot\delta U_{III}(3l)U_{III}'(3l)-\int_{2l}^{3l} EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)dx+\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l} q\cdot\delta U_{II}(x)dx=0$$

Применим граничные условия из формулировки краевой задачи.

$EAU_1'(0)=CU_1(0);\ EAU_1'(l)=F_1+EAU_2'(l);\ EAU_2'(2l)=F_2+EAU_3'(2l);\ EAU_3'(3l)=F_3$

Тогда:

$$F_1\delta U_I(l)-CU_1(0)\delta U_I(0)-\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx+F_2\delta U_{II}(2l)-\int_l^{2l} EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx+F_3$$

$$\delta U_{III}(3l)-\int_{2l}^{3l} EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)dx+\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx+\int_l^{2l} q\cdot\delta U_{II}(x)dx=0$$

Умножим обе части на (-1):

$$\int_0^l EA\,U_I'(x)\delta U_I'(x)dx+\int_l^{2l} EA\,U_{II}'(x)\delta U_{II}'(x)dx+\int_{2l}^{3l} EA\,U_{III}'(x)\delta U_{III}'(x)dx-\int_0^l q\cdot\delta U_I(x)dx-$$

$$-\int_l^{2l} q\cdot\delta U_{II}(x)dx-F_1\delta U_I(l)-F_2\delta U_{II}(2l)-F_3\cdot\delta U_{III}(3l)+CU_1(0)\delta U_I(0)=0$$

Преобразуем это выражение, вынося знак вариации за скобку с использованием правил варьирования:

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot U_I'(x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_l^{2l} EA\cdot U_{II}'(x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{2l}^{3l} EA\cdot U_{III}'(x)^2\,dx-\int_0^l q\cdot U_I(x)dx\right.$$
$$\left.-\int_l^{2l} q\cdot U_{II}(x)dx+\frac{1}{2}CU_I(0)^2-F_1\cdot U_I(l)-F_2\cdot U_{II}(2l)-F_3\cdot U_{III}(3l)\right]=0$$

Тогда функционал имеет вид:

$$\Pi[U_I, U_{II}, U_{III}] = \frac{1}{2}\int_0^l EA \cdot U_I'(x)^2\, dx + \frac{1}{2}\int_l^{2l} EA \cdot U_{II}'(x)^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{2l}^{3l} EA \cdot U_{III}'(x)^2\, dx -$$

$$-\int_0^l q \cdot U_I(x) dx - \int_l^{2l} q \cdot U_{II}(x) dx + \frac{1}{2} C U_I(0)^2 - F_1 \cdot U_I(l) - F_2 \cdot U_{II}(2l) - F_3 \cdot U_{III}(3l)$$

Условия стационарности функционала: $\delta\Pi[U_I, U_{II}, U_{III}] = 0$

Это есть формулировка слабого вариационного принципа Лагранжа, который гласит, что функционал полной потенциальной энергии принимает экстремальное значение (минимум) на точном решении краевой задачи.

Используем этот принцип, задавая решения в виде кусочно-линейных функций.

Аппроксимация поля перемещений.

Первый участок:

$$U_I(x) = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{l} x, \qquad 0 \le x \le l$$

где $U_1 = U_I(l)$, $U_0 = U_I(0)$.

Второй участок:

Введем новую систему координат $O\hat{x}$ с началом в $x = l$.

Тогда: $x = l + \hat{x},\ dx = d\hat{x}$

$x = l => \hat{x} = 0;$

$x = 2l => \hat{x} = l\,;\ \ \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\hat{x}}\frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{dU}{dx}$

$$U_{II}(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}\hat{x}, \qquad 0 \le \hat{x} \le l$$

где $U_2 = U_{II}(2l)$.

Третий участок:

Новая система координат $O\tilde{x}$ с началом в $x = 2l$.

Тогда: $x = 2l + \tilde{x},\ dx = d\tilde{x}$

$x = 2l => \tilde{x} = 0;$

$x = 3l => \tilde{x} = l\,;\ \ \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{dU}{dx}$

$$U_{III}(x) = U_2 + \frac{U_3 - U_2}{l}\tilde{x}, \qquad 0 \le \tilde{x} \le l$$

где $U_3 = U_{III}(3l)$.

С учетом этих введений функционал примет вид:

$$\Pi[U_I, U_{II}, U_{III}] = \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot U_I'(x)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot U_{II}'(\hat{x})^2\,d\hat{x} + \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot U_{III}'(\tilde{x})^2\,d\tilde{x}$$
$$-\int_0^l q\cdot U_I(x)dx - \int_0^l q\cdot U_{II}(\hat{x})dx + \frac{1}{2}C\cdot U_0^2 - F_1\cdot U_1 - F_2\cdot U_2 - F_3\cdot U_3$$

Определим $U_I'(x), U_{II}'(\hat{x}), U_{III}'(\tilde{x})$:

$$U_I'(x) = \frac{U_1 - U_0}{l}, \qquad U_{II}'(\hat{x}) = \frac{U_2 - U_1}{l}, \qquad U_{III}'(\tilde{x}) = \frac{U_3 - U_2}{l}$$

Тогда

$$\Pi[U_0, U_1, U_2, U_3] = \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot\left(\frac{U_1 - U_0}{l}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot\left(\frac{U_2 - U_1}{l}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot\left(\frac{U_3 - U_2}{l}\right)^2 dx -$$
$$-\int_0^l q\left(U_0 + \frac{U_1 - U_0}{l}x\right)dx - \int_0^l q\left(U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}\hat{x}\right)d\hat{x} + \frac{1}{2}C\cdot U_0^2 - F_1\cdot U_1 - F_2\cdot U_2 - F_3\cdot U_3$$

$$\Pi[U_0, U_1, U_2, U_3] = \frac{1}{2}EA\left[\frac{(U_1 - U_0)^2}{l} + \frac{(U_2 - U_1)^2}{l} + \frac{(U_3 - U_2)^2}{l}\right] -$$
$$-q\left(U_0 l + U_1 l + \frac{U_1 - U_0}{l}\frac{l^2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{l}\frac{l^2}{2}\right) + \frac{1}{2}C\cdot U_0^2 - F_1\cdot U_1 - F_2\cdot U_2 - F_3\cdot U_3$$

Определим U_0, U_1, U_2, U_3 из условия минимума функционала $\Pi[U_0, U_1, U_2, U_3]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_0} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_2} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_0} = 0 \iff -EA\cdot\dfrac{(U_1 - U_0)}{l} + CU_0 - \dfrac{ql}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_1} = 0 \iff EA\cdot\dfrac{(U_1 - U_0)}{l} - EA\cdot\dfrac{(U_2 - U_1)}{l} - ql - F_1 = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_2} = 0 \iff EA\cdot\dfrac{(U_2 - U_1)}{l} - EA\cdot\dfrac{(U_3 - U_2)}{l} - \dfrac{ql}{2} - F_2 = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial U_3} = 0 \iff EA\cdot\dfrac{(U_3 - U_2)}{l} - F_3 = 0 \end{cases}$$

Решение системы:

Из четвертого уравнения имеем:

$$EA\frac{(U_3 - U_2)}{l} = F_3 \qquad (*)$$

Из третьего:

$$EA\frac{(U_2 - U_1)}{l} = F_2 + F_3 + \frac{ql}{2} \qquad (**)$$

Из второго:

$$EA \cdot \frac{(U_1 - U_0)}{l} = F_1 + F_2 + F_3 + \frac{3ql}{2} \qquad (***)$$

Из первого:

$$\mathrm{C}U_0 = F_1 + F_2 + F_3 + 2ql$$

$$U_0 = \frac{F_1}{C} + \frac{F_2}{C} + \frac{F_3}{C} + \frac{2ql}{C}$$

Подставляя исходные данные ($F_1 = 0{,}09EA$; $F_2 = 0{,}3EA$; $F_3 = 0{,}7EA$; $C = \frac{5EA}{l}$; $ql = EA$), получим:

$$U_0 = 0{,}018l + 0{,}06l + 0{,}14l + 0{,}4l = 0{,}618l$$

Подставим найденное значение в $(***)$

$$\frac{(U_1 - U_0)}{l} = 2{,}59 \;\; <=> \;\; U_1 = 3{,}208l$$

Из $(**)$ будем иметь:

$$\frac{(U_2 - U_1)}{l} = 1{,}5 \;\; <=> \;\; U_2 = 4{,}708l$$

Из $(*)$:

$$\frac{(U_3 - U_2)}{l} = 0{,}7 \;\; <=> \;\; U_3 = 5{,}408l$$

Подставим полученные значения в приближенные решения:

Первый участок

$$U_I(x) = 0{,}618l + 2{,}59x, \qquad 0 \le x \le l$$

Второй участок:

$$U_{II}(x) = 3{,}208l + 1{,}5\hat{x}, \qquad 0 \le \hat{x} \le l$$

Третий участок:

$$U_{III}(x) = 4{,}708l + 0{,}7\tilde{x}, \qquad 0 \le \tilde{x} \le l$$

Внутренние усилия:

$$N_I(x) = EAU_I'(x) = 2{,}59EA$$

$$N_{II}(x) = EAU_{II}'(x) = 1{,}5EA$$

$$N_{III}(x) = EAU_{III}'(x) = 0{,}7EA$$

Перепишем полученные уравнения в общей системе координат.

$$U_I(x) = 2{,}59x + 0{,}618l, \qquad 0 \le x \le l$$

$$U_{II}(x) = 1{,}5x + 1{,}708l, \qquad l \le x \le 2l$$

$$U_{III}(x) = 0{,}7x + 3{,}308l, \quad 2l \le x \le 3l$$

Так как дифференциалы от переменной одинаковы $dx = d\hat{x} = d\tilde{x}$, то внутренние усилия остаются без изменений:

$$N_I(x) = 2{,}59EA$$

$$N_{II}(x) = 1{,}5EA$$

$$N_{III}(x) = 0{,}7EA$$

Приведем рисунки со сравнением графиков полученного приближенного решения и точного. Штриховыми линиями показаны результаты приближенного решения для наглядности сравнения.

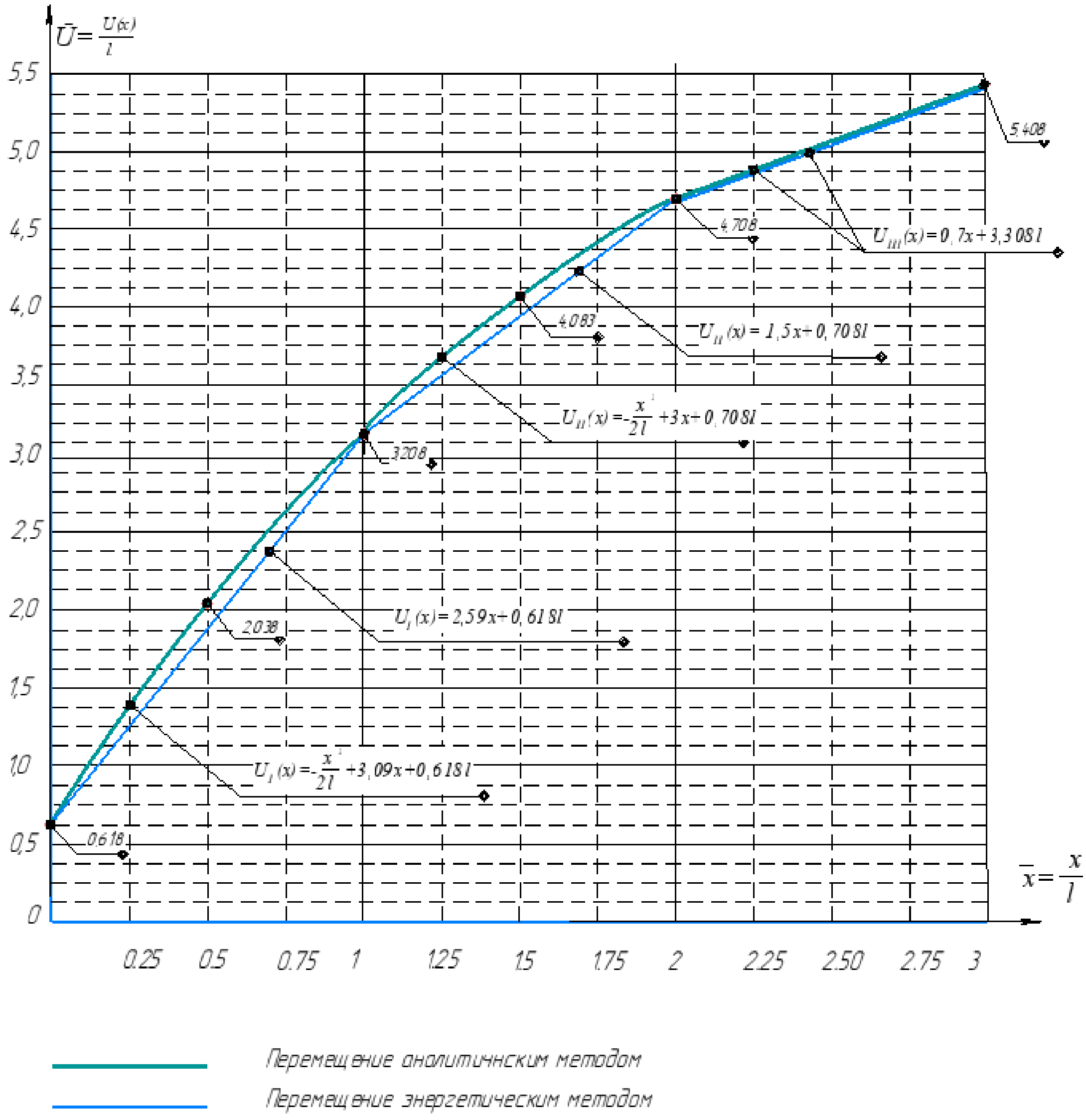


Рис. 3. Графики перемещений точного и приближенного методов.

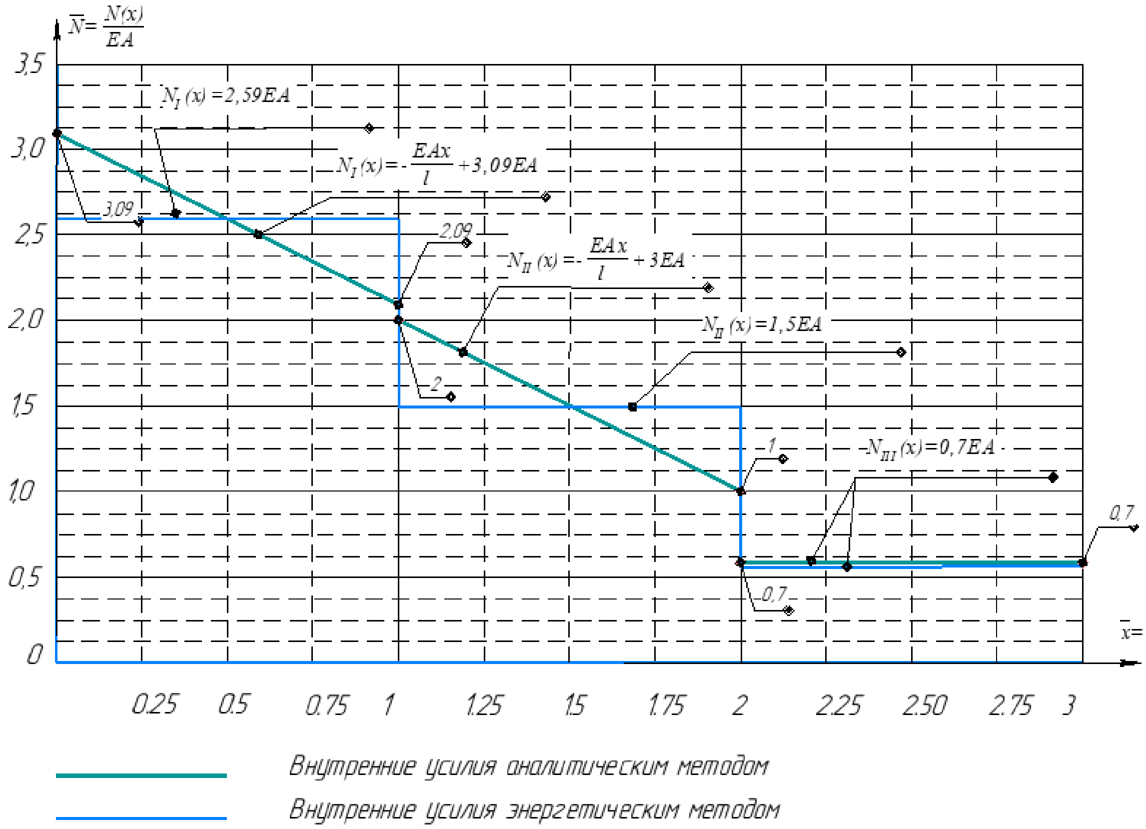


Рис. 4 График внутренний усилий.

Дадим оценку погрешности по энергетическому методу между точным и приближенным решениями.

Оценка точности решения по энергии.

Для оценки необходимо определить значения функционала на точном и приближенном решениях и затем посчитать относительную погрешность между этими значениями.

Найдем значение функционала на приближенном решении, полученной на кусочно-линейной аппроксимации.

Обозначим совокупность значений U_0, U_1, U_2, U_3 как U_N.

$$\Pi[U_N] = \frac{1}{2}EA\left[\frac{(U_1-U_0)^2}{l} + \frac{(U_2-U_1)^2}{l} + \frac{(U_3-U_2)^2}{l}\right] -$$

$$-q\left(U_0 l + U_1 l + \frac{U_1-U_0}{l}\frac{l^2}{2} + \frac{U_2-U_1}{l}\frac{l^2}{2}\right) + \frac{1}{2}C\cdot U_0^2 - F_1\cdot U_1 - F_2\cdot U_2 - F_3\cdot U_3$$

Подставим $U_0 = 0{,}618l$; $U_1 = 3{,}208l$; $U_2 = 4{,}708l$; $U_3 = 5{,}408l$ и значения внешних нагрузок.

$$\Pi[U_N] = \frac{1}{2}EA\left[\frac{6{,}7081l^2}{l} + \frac{2{,}25l^2}{l} + \frac{0{,}49l^2}{l}\right] -$$

$$-EA(0{,}618l+3{,}208l+1{,}295+0{,}75)+0{,}95481EAl-0{,}28872EAl-1{,}4124EAl-3{,}7856EAl$$

$$\Pi[U_N]=-5{,}67891EAl$$

Определим значение функционала на точном решении, полученном в первой части ДЗ.

$U_I\ (x)=-\frac{qx^2}{2EA}+3{,}09x+0{,}618\cdot l\,,\qquad 0\le x\le l$

$U_{II}\,(x)=-\frac{qx^2}{2EA}+3x+\ 0{,}708\cdot l,\qquad l\le x\le 2l$

$U_{III}(x)=0{,}7\,x+3{,}308\cdot l,\qquad 2l\le x\le 3l$

Обозначим эту совокупность решений как U_T.

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}]=\frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot U_I'(x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_l^{2l} EA\cdot U_{II}'(x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{2l}^{3l} EA\cdot U_{III}'(x)^2\,dx-$$

$$-\int_0^l q\cdot U_I(x)dx-\int_l^{2l} q\cdot U_{II}(x)dx+\frac{1}{2}CU_I(0)^2-F_1\cdot U_I(l)-F_2\cdot U_{II}(2l)-F_3\cdot U_{III}(3l)$$

$$U_I'(x)=-\frac{qx}{EA}+3{,}09;\ \ U_{II}'(x)=-\frac{qx}{EA}+3;\ \ U_{III}'(x)=0{,}7;$$
$$U_I(0)=0{,}618\cdot l\,;\ \ U_I(l)=3{,}208\cdot l;\ \ U_{II}(2l)=4{,}708\cdot l;\ \ U_{III}(3l)=5{,}408\cdot l$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}]=\frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot\left(-\frac{qx}{EA}+3{,}09\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_l^{2l} EA\cdot\left(-\frac{qx}{EA}+3\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{2l}^{3l} 0{,}49EA\,dx-$$

$$-\int_0^l q\cdot\left(-\frac{qx^2}{2EA}+3{,}09x+0{,}618\cdot l\right)dx-\int_l^{2l} q\cdot\left(-\frac{qx^2}{2EA}+3x+\ 0{,}708\cdot l\right)dx+\frac{1}{2}C\cdot 0{,}381924l^2$$
$$-F_1\cdot 3{,}208\cdot l-F_2\cdot 4{,}708-F_3\cdot 5{,}408\cdot l$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}]=\frac{1}{2}\int_0^l EA\cdot\left(-\frac{qx}{EA}+3{,}09\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_l^{2l} EA\cdot\left(-\frac{qx}{EA}+3\right)^2dx+0{,}245EAl-$$

$$-\int_0^l q\cdot\left(-\frac{qx^2}{2EA}+3{,}09x+0{,}618\cdot l\right)dx-\int_l^{2l} q\cdot\left(-\frac{qx^2}{2EA}+3x+\ 0{,}708\cdot l\right)dx+0{,}190962Cl^2$$
$$-F_1\cdot 3{,}208\cdot l-F_2\cdot 4{,}708\cdot l-F_3\cdot 5{,}408\cdot l$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}]=\frac{EA}{2}\left[\left(\frac{q}{EA}\right)^2\int_0^l x^2dx-2\cdot 3{,}09\frac{q}{EA}\int_0^l xdx+9{,}5481EA\int_0^l dx\right]$$

$$+\frac{EA}{2}\left[\left(\frac{q}{EA}\right)^2\int_l^{2l} x^2dx-2\cdot 3\frac{q}{EA}\int_l^{2l} xdx+9EA\int_l^{2l} dx\right]\ \ +0{,}245EAl-$$

$$+\frac{q^2}{2EA}\int_0^l x^2dx - 3{,}09q\int_0^l xdx - 0{,}618ql\int_0^l dx +$$

$$+\frac{q^2}{2EA}\int_l^{2l} x^2dx - 3q\int_l^{2l} xdx - 0{,}708ql\int_l^{2l} dx + 0{,}190962Cl^2 - 3{,}208F_1l - 4{,}708\cdot F_2l - 5{,}408F_3l$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}] = \frac{q^2}{2EA}\frac{l^3}{3} - 3{,}09q\frac{l^2}{2} + 4{,}77405EAl + \frac{q^2}{2EA}\left(\frac{(2l)^3}{3} - \frac{l^3}{3}\right) - 3q\left(\frac{(2l)^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right)$$
$$+ 4{,}5EAl + 0{,}245EAl + \frac{q^2}{2EA}\frac{l^3}{3} - 3{,}09q\frac{l^2}{2} - 0{,}618ql^2 + \frac{q^2}{2EA}\left(\frac{(2l)^3}{3} - \frac{l^3}{3}\right)$$
$$- 3q\left(\frac{(2l)^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right) - 0{,}708ql^2 + 0{,}95481EAl - 0{,}28872EAl - 1{,}4124EAl$$
$$- 3{,}7856EAl$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}] = \frac{q^2}{2EA}\frac{l^3}{3} - 3{,}09q\frac{l^2}{2} + 4{,}77405EAl + \frac{q^2}{2EA}\frac{7l^3}{3} - 3q\frac{3l^2}{2} + 4{,}5EAl + 0{,}245EAl$$
$$+ \frac{q^2}{2EA}\frac{l^3}{3} -$$
$$-3{,}09q\frac{l^2}{2} - 0{,}618ql^2 + \frac{q^2}{2EA}\frac{7l^3}{3} - 3q\frac{3l^2}{2} - 0{,}708ql^2 + 0{,}95481EAl - 0{,}28872EAl -$$
$$-1{,}4124EAl - 3{,}7856EAl$$

$$\Pi[U_I,U_{II},U_{III}] = EAl\left(\frac{1}{6} - 1{,}545 + 4{,}77405 + \frac{7}{6} - 4{,}5 + 4{,}5 + 0{,}245 + \frac{1}{6} - 1{,}545 - 0{,}618 + \frac{7}{6}\right.$$
$$\left. - 4{,}5 - 0{,}708 + 0{,}95481 - 0{,}28872 - 1{,}4124 - 3{,}7856\right) = -5{,}762193EAl$$

Тогда относительная погрешность равна:

$$\delta = \left|\frac{\Pi[U_T] - \Pi[U_N]}{\Pi[U_T]}\right|\cdot 100\% = \left|\frac{-5{,}762193EAl + 5{,}67891EAl}{-5{,}762193EAl}\right|\cdot 100\%$$
$$= \frac{0{,}083283}{5{,}762193EAl}\cdot 100\% = 1{,}445\%$$

Вывод: Оценка по энергии дала совпадение приближенного и точного решений краевой задачи. Кусочно-линейная аппроксимация поля перемещений позволяет получить точные значения перемещений в узлах стержня. Слабый вариационный принцип Лагранжа выполняется, так как значение функционала по модулю на точном решении больше, чем на приближенном.