## Плоская осесимметричная задача теории упругости

### 1. Вывод основных уравнений

В данном разделе прикладной теории упругости рассчитываются напряжения и деформации в осесимметричных телах из изотропного линейно упругого материала, т.е. материала, деформирование которого подчиняется закону Гука [1,2]. С геометрической точки зрения осесимметричное тело – это тело, обладающее осью симметрии *n*-го порядка, т.е. при его повороте на произвольный угол вокруг оси вращения тело совпадает само с собой, т.е. его ориентация остаётся неизменной относительно выбранной системы координат. На практике к таким телам относят толстостенные трубы с прямолинейной осью, замкнутые оболочки вращения (сферические, конические, торообразные и пр.), диски. В данном разделе рассматриваются именно диски, как правило. имеющие центральное отверстие (рис.1). Диск может иметь переменную или постоянную толщину. Далее будем рассматривать диски постоянной толщины.

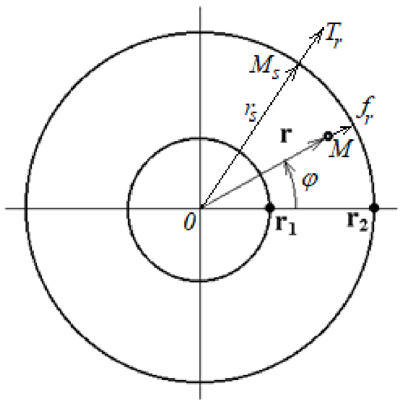



Рис.1. Диск с центральным отверстием

Как и любое деформируемое твёрдое тело, оно может быть подвергнуто нагружению поверхностными и объёмными силами. Здесь рассматривается случай нагружения когда, в произвольной точке $M$ тела действует только радиальная объёмная сила, а на границе в точке $M_s$ – радиальная погонная сила (рис.1). Эти силовые факторы зависят от радиальной координаты $r$ и не зависят от полярного угла $\varphi$. Такое нагружение называется осесимметричным.

В дальнейшем предполагаем, что диск изготовлен из однородного линейно упругого изотропного материал, т.е. его упругие свойства характеризуются модулем упругости $E$ и коэффициентом Пуассона $\nu$, не зависящими от координат $r$ и $\varphi$.

Если в окрестности точки $M$ двумя плоскостями, проходящими через начало координат и отстоящими друг от друга на бесконечно малый угол $d\varphi$, и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями с радиусами $r$ и $r+dr$, выделить бесконечно малый элемент, то в силу симметрии к его граням будут приложены только нормальные напряжения - радиальное $\sigma_r$ и окружное $\sigma_\varphi$ (рис.2).

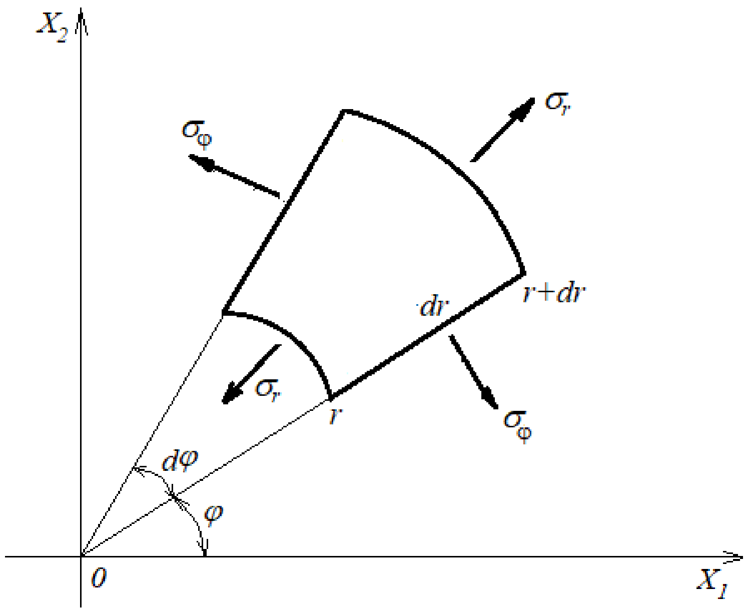



Рис.2. Радиальное и окружное напряжения в диске

На рис.2 указаны положительные направления напряжений, которые, как обычно, направлены в сторону внешней нормали к границе выделенного элемента.

В случае действия указанных выше внешних сил эти напряжения зависят только от координаты $r$. Под действием этих напряжений в диске возникают линейные деформации – радиальная $\varepsilon_r$ и окружная $\varepsilon_\varphi$ деформации, которые тоже зависят только от радиальной координаты. Таким образом, рассматривается плоская осесимметричная задача теории упругости в полярных координатах.

Указанные напряжения и деформации в силу закона Гука связаны следующими зависимостями

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\varphi}{E}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi - \nu\sigma_r}{E}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассматривая равенства (1) как систему линейных алгебраических уравнений относительно напряжений и решив её, соотношения закона Гука можно представить следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Радиальную и окружную деформации можно определить, зная перемещения в точке *M*. При осесимметричном нагружении в диске имеет место только радиальное перемещение. Оно направлено по радиусу, соединяющему точку *M* с началом координат (рис.3). Это перемещение также зависит только от радиальной координаты *r*.

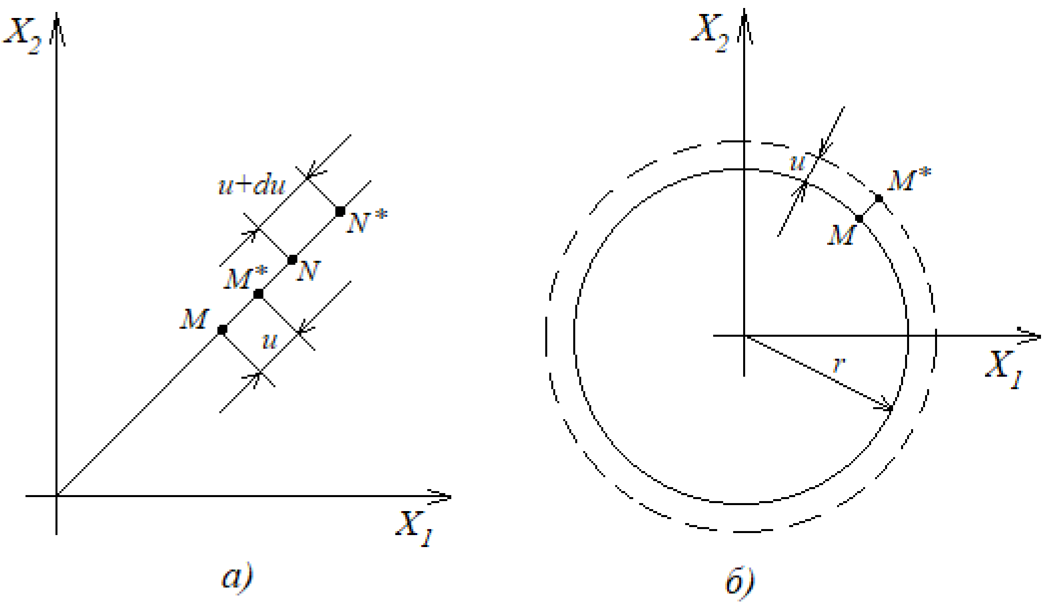



Рис.3. Радиальные перемещения в диске

Рассмотрим в диске радиальный линейный элемент *MN* длиной *dr* (рис.3а). В силу симметрии в деформированном состоянии он примет положение, отмеченное точками $M^*$ и $N^*$. Пусть радиальное перемещение точки $M$ равно $u$. Учтём, что эта величина также зависит только от радиальной координаты. Тогда точка $N$ получит перемещение $u+du$. Тогда удлинение линейного элемента $MN$ с первоначальной длиной $dr$ равно $u+du-u$. Следовательно, радиальная деформация в точке $M$ будет

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{3}$$

Чтобы определить окружную деформацию, через точку $M$ проведём окружность радиусом $r$. Как было указано выше, в деформированном состоянии эта точка принимает положение, отмеченное точкой $M^*$. Через неё также проведём окружность. Её радиус будет $r+u$. Окружную деформацию можно определить как разность длин указанных окружностей, отнесённую к первоначальной длине, т.е.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(\mathrm{r}+u)-2\pi\,\mathrm{r}}{2\pi\,\mathrm{r}}.$$

Отсюда следует, что окружная деформация определяется по формуле

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{\mathrm{r}}. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) можно преобразовать, исключив в них перемещение. Для этого продифференцируем по координате $r$ зависимость (3). Будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{du}{dr}r-u\right)=\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}.$$

С учётом формул (3) и (4) отсюда получим дифференциальную зависимость

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}=\frac{\varepsilon_r-\varepsilon_\theta}{r}, \tag{5}$$

которая называется уравнением совместности деформаций для плоской осесимметричной задачи.

Получим дифференциальное уравнение равновесия для диска при осесимметричном нагружении. В окрестности точки $M$ описанным выше способом выделим бесконечно малый элемент (рис.4). Линейные размеры элемента следующие: $MD=rd\varphi$, $BC=(r+dr)d\varphi$, $MB=DC=dr$. При этом толщину диска $h$ будем считать равной 1. Такое предположение означает, что в расчётных соотношениях для диска постоянной толщины эта величина не используется. С учётом этих линейных размеров элемента составим сумму проекций всех сил, действующих на элемент диска, на биссектрису угла $d\varphi$. Получим

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi - \sigma_r r d\varphi - \sigma_\varphi \cdot dr \cdot \frac{d\varphi}{2} 2 + f_r \cdot dr \cdot r d\varphi = 0 .$$

Раскроем скобки и выполним следующие преобразования

$$\cancel{\sigma_r r d\varphi} + d\sigma_r r d\varphi + \sigma_r dr d\varphi + \underline{d\sigma_r dr d\varphi} \cancel{- \sigma_r r d\varphi} - \sigma_\varphi \cdot dr \cdot d\varphi + f_r \cdot dr \cdot r d\varphi = 0,$$

$$d\sigma_r r + \sigma_r dr - \sigma_\varphi \cdot dr + f_r \cdot dr \cdot r = 0.$$

Последнее равенство разделим на произведение $rdr$. В итоге приходим к искомому дифференциальному уравнению для диска постоянной толщины

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + f_r = 0 . \qquad (6)$$

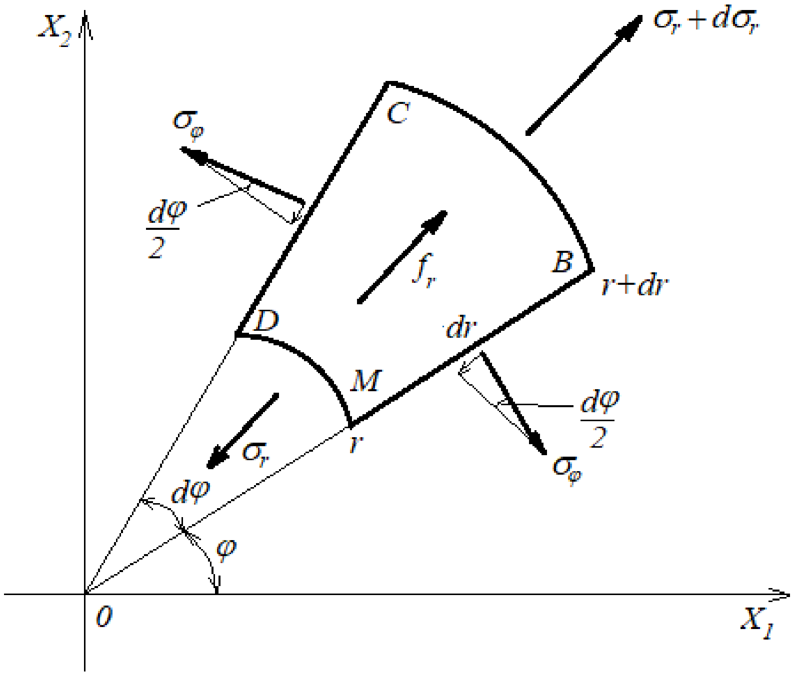



Рис.4. К выводу дифференциального уравнения равновесия диска

## 2. Способы расчёта напряжений и деформаций в диске

Полная система уравнений для расчёта напряжений и деформаций в диске при осесимметричном нагружении составляется на основе равенств (1)-(4), (6). Её можно представить следующим образом

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}+f_r=0,\\
&\varepsilon_r=\frac{du}{dr},\\
&\varepsilon_\theta=\frac{u}{r},\\
&\varepsilon_r=\frac{\sigma_r-\nu\sigma_\varphi}{E},\\
&\varepsilon_\theta=\frac{\sigma_\varphi-\nu\sigma_r}{E}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Эта система уравнений является замкнутой. С её помощью находятся величины $\sigma_r, \sigma_\varphi, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, u$. Эту систему уравнений можно преобразовать. В зависимости от вида преобразований можно получить два способа решения задачи. Рассмотрим их.

1). Решение задачи в напряжениях. В уравнениях (7) исключим деформации и радиальное перемещение. Как было показано выше, перемещение исключается в процессе вывода уравнения совместности деформаций (5). Подставим в него соотношения закона Гука в форме (1). Получим

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_\theta-\nu\sigma_r}{E}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\sigma_r-\nu\sigma_\theta}{E}-\frac{\sigma_\theta-\nu\sigma_r}{E}\right).$$

Последующие преобразования очевидны

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr}-\nu\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{\sigma_r-\nu\sigma_\theta-\sigma_\theta+\nu\sigma_r}{r},$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr}-\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\nu\left(\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}\right).$$

Правую часть последнего равенства с учётом дифференциального уравнения (6) можно представить так

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\nu f_r \,. \tag{8}$$

Полученное уравнение (8) не что иное, как уравнение совместности деформаций, записанное в напряжениях. В совокупности с дифференциальным уравнением равновесия оно образует следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_r}{dr} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0, \\ \dfrac{d\sigma_\theta}{dr} - \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \nu f_r = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решение этой системы уравнений осуществляется следующим способом. Сложим эти уравнения. Будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) + (1+\nu) f_r = 0 \,. \tag{10}$$

Теперь из первого уравнения вычтем второе. Получим

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + (1-\nu) f_r = 0 \,. \tag{11}$$

Из уравнения (10) следует, что

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -(1+\nu)\int f_r dr + A \,, \tag{12}$$

где $A$ – константа интегрирования.

Уравнение (11) является неоднородным. Поэтому сначала решаем однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \,.$$

Разделяя переменные, получаем выполнения операции

$$\frac{d\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right)}{\sigma_r - \sigma_\theta} = -2\frac{dr}{r} \,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{C}{r^2} \,. \tag{13}$$

Здесь $C$ – константа интегрирования. Далее для решения неоднородного уравнения (11) используем метод вариации постоянных. На основании равенства (13) запишем решение уравнения (11) в следующем виде

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{C(\mathrm{r})}{r^2}. \tag{14}$$

Это решение подставим в (11). После выполнения операции дифференцирования и преобразований будем иметь

$$\frac{1}{r^2}\frac{dC}{dr} - 2\frac{C(\mathrm{r})}{r^3} + 2\frac{C(\mathrm{r})}{r^3} = -(1-\nu)f,$$

или

$$\frac{1}{r^2}\frac{dC}{dr} = -(1-\nu)f.$$

Отсюда следует, что

$$C(r) = -(1-\nu)\int r^2 f_r dr + B,$$

где $B$ – константа интегрирования. Подставляя полученное равенство в зависимость (14), получим решение неоднородного уравнения (11) в виде

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{1-\nu}{r^2}\int r^2 f_r dr + \frac{B}{r^2}. \tag{15}$$

Из равенств (12) и (15) определяем радиальное и окружное напряжения. Окончательно запишем

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}\left[(1+\nu)\int f_r dr + \frac{1-\nu}{r^2}\int r^2 f_r dr\right] + C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \tag{16}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2}\left[(1+\nu)\int f_r dr - \frac{1-\nu}{r^2}\int r^2 f_r dr\right] + C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \tag{17}$$

В равенствах (16) и (17) введены обозначения $C_1=0{,}5A$, $C_2=0{,}5B$.

В часто встречаемом случае отсутствия объёмной силы $f_r$ решения (16) и (17) принимают наиболее простой вид

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \tag{18}$$

Далее по формулам (1) можно найти деформации в диске. Зная деформации, из соотношений (3) и (4) определяем радиальное перемещение *u(r)*. Рассмотрим этот ход решения при $f_r=0$.

Подставляя равенства (18) в формулы (1), с учётом (3) и (4) получаем следующие выражения

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 + \frac{1+\nu}{r^2}C_2\right],$$
$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 - \frac{1+\nu}{r^2}C_2\right].$$

Отсюда можно получить выражения для вычисления радиального перемещения. Они имеют такой вид

$$u(r) = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r - \frac{1+\nu}{r}C_2\right] + \mathrm{K},$$
$$u(r) = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r - \frac{1+\nu}{r}C_2\right].$$

Здесь *К* – константа интегрирования. Ясно, что эти выражения должны приводить к одинаковому результату. Это возможно при условии *К=0.* Таким образом окончательно получаем

$$u(r) = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)C_1 r - \frac{1+\nu}{r}C_2\right]. \tag{19}$$

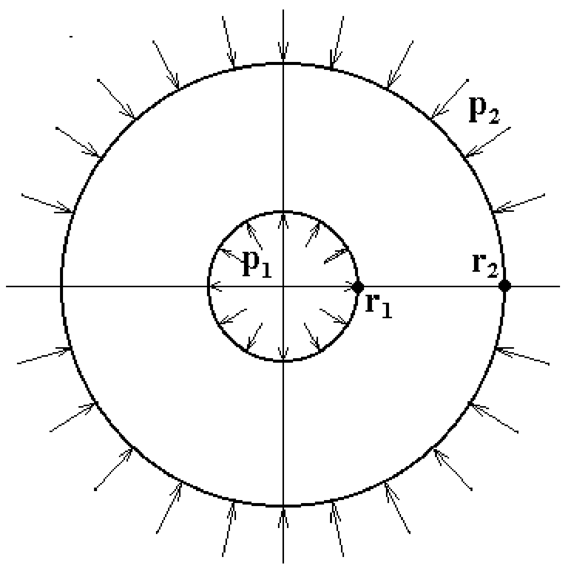



Рис.5. Задаче Ламе о нагружении круглого диска

Отметим, что константы интегрирования $C_1$ и $C_2$ должны определяться из граничных условий. Наиболее просто это сделать, когда заданы силовые граничные условия. Например, в задаче Ламе имеем следующие силовые граничные условия (рис.5): при $r=r_1$ $\sigma_r=-p_1$, $r=r_2$ $\sigma_r=-p_2$. Тогда система линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования имеет следующий вид

$$\left.\begin{aligned} C_1+\frac{C_2}{r_1^2}&=-p_1,\\ C_1+\frac{C_2}{r_2^2}&=-p_2. \end{aligned}\right\}$$

Решив её, далее по формулам (18) и (19) определяем напряжения и радиальное перемещение.

Представленный способ решения плоской осесимметричной задачи целесообразно использовать, когда заданы силовые граничные условия.

2). <u>Решение задачи в перемещениях</u>. Снова обратимся к системе уравнений (7). Преобразуем её, исключив деформации и напряжения. Для этого используем соотношения закона Гука (2). Подставим в них равенств (3) и (4). Получим

$$\begin{cases} \sigma_r=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{du}{dr}+\nu\dfrac{u}{r}\right),\\ \sigma_\theta=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{u}{r}+\nu\dfrac{du}{dr}\right). \end{cases} \tag{20}$$

С их помощью дифференциальное уравнение равновесия (6) перепишем так

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}-\frac{u}{r}-\nu\frac{du}{dr}\right)+f_r=0.$$

Умножив это равенство на величину $(1-\nu^2)/E$ и выполнив операцию дифференцирования, отсюда будем иметь

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\cancel{\nu\frac{1}{r}\frac{du}{dr}}\cancel{-\nu\frac{u}{r^2}}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}\cancel{+\nu\frac{u}{r^2}}\cancel{-\nu\frac{1}{r}\frac{du}{dr}}=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r,$$

или

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r.$$

Полученное уравнение можно последовательно записывать так

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r,$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r,$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(r\frac{du}{dr}+u\right)\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r.$$

Отсюда окончательно получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}f_r. \qquad (21)$$

Это уравнение несложно решить для заданной функции $f_r$. При этом граничные условия формулируются относительно радиального перемещения для внешней и внутренней границ диска.

В качестве примера рассмотрим задачу о быстровращающемся диске (рис.6). Диск, изготовленный из материала с плотностью $\rho$ и характеристиками упругости $E$ и $\nu$, на внешней границе скреплён с абсолютно жёстким ободом, который выполнен из материала с плотностью $\rho_o$. Толщина обода равна $\delta_o$, причём $\delta_o \ll r_2$. Диск соединён с абсолютно жёстким валом и вращается с угловой скоростью $\omega$.

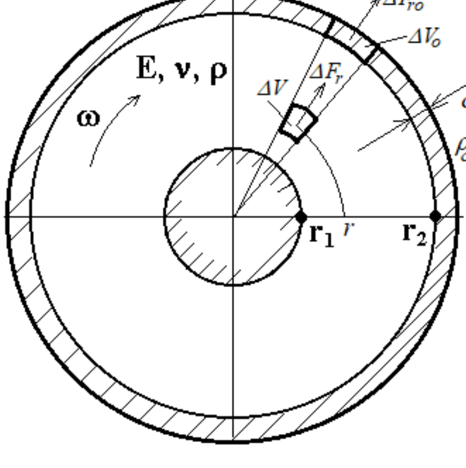



Рис.6. К задаче о быстровращающемся диске

При вращении на диск действуют центробежные силы инерции. Для их определения выделим малые элементы диска и обода объёмами соответственно $\Delta V$ и $\Delta V_o$. Силы инерции, приложенные к ним, будут равны

$$\Delta F_r = \Delta V \rho \cdot \omega^2 r, \quad \Delta F_{ro} = \Delta V_o \rho_o \cdot \omega^2 (r_2 + 0{,}5\delta_o) \approx \Delta V_o \rho_o \cdot \omega^2 r_2 .$$

Тогда для центробежной объёмной силы, действующей на диск, получим

$$f_r = \frac{\Delta F}{\Delta V} = \rho\omega^2 r, \tag{22}$$

а центробежная сила инерции, приложенная к ободу, будет

$$f_{ro} = \frac{\Delta F_{ro}}{\Delta V_o} = \rho_o \omega^2 r_2. \tag{23}$$

Отметим, что сила (23) равномерно распределена по высоте обода $h_o$, которая совпадает с толщиной диска, т.е. $h_o=h=1$, где $h$ – толщина диска. Так как обод абсолютно жёстко скреплён с диском, то эта сила, умноженная на толщину диска $h$, вызывает на внешней границе диска радиальное напряжение. Поэтому силовое граничное условие при $r=r_2$ имеет следующий вид $\sigma_r = \rho_o \omega^2 r_2 h = \rho_o \omega^2 r_2$. В силу того, что на внутренней границе диск соединён с валом, при $r=r_1$ должно быть $u=0$.

Уравнение (21) принимает такой вид

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r . \tag{24}$$

Введём обозначение

$$A = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 .$$

Тогда при интегрировании уравнения (24) будем иметь

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr} = -\frac{A}{2}r^2 + B_1, \quad \frac{d(ur)}{dr} = -\frac{A}{2}r^3 + B_1 r,$$

$$ur = -\frac{A}{8}r^4 + \frac{B_1}{2}r^2 + \mathrm{B}_2 .$$

Окончательно получаем

$$u(r) = -\frac{A}{8} r^3 + \frac{B_1}{2} r + \frac{B_2}{r}. \qquad (25)$$

Для определения констант интегрирования $B_1$ и $B_2$ необходимо иметь выражение для радиального напряжения. Для этого найдём радиальную и окружную деформации. Из формул (3) и (4) следует

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{3A}{8} r^2 + \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{r^2},$$

$$\varepsilon_r = \frac{u}{r} = -\frac{A}{8} r^2 + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{r^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ -\frac{A}{8}(3+\nu) r^2 + \frac{1+\nu}{2} B_1 - \frac{1-\nu}{2r^2} B_2 \right].$$

Таким образом, система уравнений для определения констант интегрирования будет иметь следующий вид

$$\left. \begin{aligned} &\frac{B_1}{2} r_1 + \frac{B_2}{r_1} = \frac{A}{8} r_1^2, \\ &\frac{1+\nu}{2} B_1 - \frac{1-\nu}{2r_2^2} B_2 = \frac{A}{8}(3+\nu) r_2^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \rho_o \omega^2 r_2. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему уравнений далее определяем напряжения и радиальное перемещение.

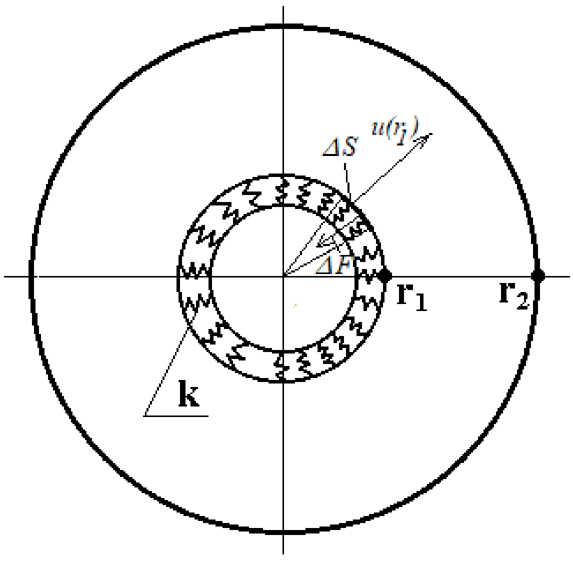



Рис.7. Диск, соединённый с упругим валом

Рассмотрим некоторые примеры граничных условий для диска. Пусть диск на внутренней границе соединён упругими связями с валом (рис.7). Обозначим жёсткость связей через *к* и запишем граничное условие при $r=r_1$. Предположим, что имеет место радиальное перемещение $u(r_1)>0$. В упругих связях возникает растягивающая сила реакции, действующая на малый элемент границы площадью $\Delta S$ и равная $\Delta F = k \cdot u(r_1)\Delta \mathrm{S}$. С другой стороны можно записать, что $\Delta F = \sigma_r(r_1)\Delta \mathrm{S}$. Отсюда следует граничное условие

$$\sigma_r(r_1) = k \cdot u(r_1)\,. \qquad (26)$$

Выражая радиальное напряжение через перемещение $u(r)$, будем иметь

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right)\bigg|_{r=r_1} = k \cdot u(r_1)\,.$$

Таким образом, получили граничное условие относительно перемещения на внутренней границе диска.

Рассмотрим аналогичный случай. Пусть на внешней границе диска абсолютно жёстко (без натяга) установлено кольцо толщиной $\delta_к$, причём $\delta_к << r_2$. Оно выполнено из материала с модулем упругости $E_к$.

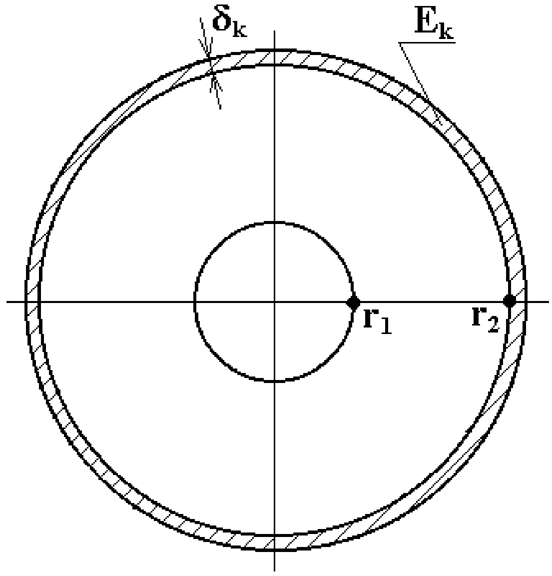



Рис.8. Диск с кольцом на внешней границе

Сформулируем граничное условие при $r=r_2$. Пусть на внешней границе диска перемещение равно $u(r_2)>0$. Такое же перемещение получат и точки, принадлежащие кольцу. Кольцо будет растягиваться, причём его деформация будет равна

$$\varepsilon_к = \frac{u(r_2)}{r_2 + 0{,}5\delta_k} \approx \frac{u(r_2)}{r_2} = \varepsilon_\varphi(r_2) \ .$$

При этом на кольцо будет действовать контактное давление $p_к$, вызывающее в нём растягивающее напряжение $\sigma_к$ (рис.9). Такое же давление, но в противоположном направлении будет действовать на диск. Из условия равновесия кольца получим равенство

$$2\sigma_к\delta_к = 2r_2 p_k \ .$$

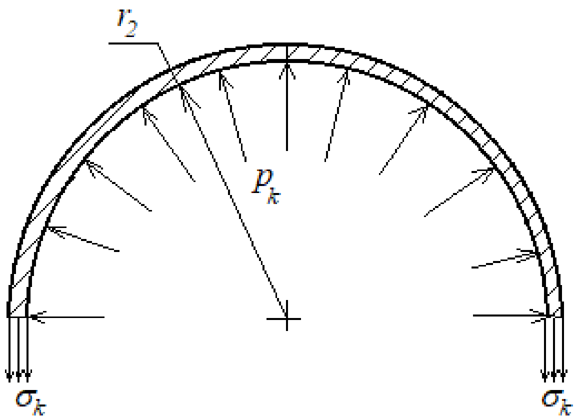



Рис.9. К определению напряжения в кольце

Учитывая, что $\sigma_к = E_k\varepsilon_к$, в итоге приходим к равенству

$$p_k = \frac{E_к\delta_к}{r_2^2}u(r_2) .$$

Тогда для диска граничное условие при $r=r_2$ имеет вид $\sigma_r = -p_k$, или

$$\sigma_r(r_2) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)\Bigg|_{r=r_2} = -\frac{E_к\delta_к}{r_2^2}u(r_2) . \qquad (27)$$

Окончательно запишем

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_2} + \left[\frac{E_к\delta_к(1-\nu^2)}{Er_2^2} - \frac{\nu}{r_2}\right]u(r_2) = 0 .$$

Обобщая выражения (26) и (27), граничные условия для диска при $r=r_1$ и $r=r_2$ можно записать в виде линейного выражения

$$\alpha_{i1}u(r_i)+\alpha_{i2}\sigma_r(r_i)=\beta_i, \qquad (28)$$

где $i$=1,2. Здесь $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \beta_i$ - константы, вид которых зависит от исходных данных конкретной задачи.

## 3. Численное решение плоской осесимметричной задачи

Выше были рассмотрены примеры, в которых для расчёта напряжений и перемещения были получены сравнительно несложные аналитические соотношения. Однако на практике они не всегда возможны. Например, если диск имеет переменную толщину и при этом выполнен из неоднородного материала получение аналитического решения затруднено, а подчас и недостижимо [2]. В этом случае эффективными являются приближённые численные способы решения.

Здесь рассмотрим численный способ решения, основанный на методе начальных параметров [2,3]. Его целесообразно применять при расчёте таких элементов, как стержни, работающие на растяжение, изгиб и кручение, диски при осесимметричном нагружении, круговые кольца, толстостенные трубы и в некоторых других случаях. Алгоритм расчёта сравнительно прост, легко программируется на современных алгоритмических языках. Его также несложно реализовать в системе MathCad, применяя встроенные функции.

Метод начальных параметров разработан для решения краевой задачи, сформулированной в виде системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Его суть заключается в сведении краевой задачи к совокупности задач с начальными условиями (задач Коши). В этой связи далее на основе уравнений (1)-(4), (6) получим систему уравнений для рассматриваемого диска относительно радиального перемещения $u(r)$ и радиального напряжения $\sigma_r(r)$. Выбор этих неизвестных обусловлен тем, что именно для них формулируются граничные условия.

Из первого уравнения системы (2) и равенств (3) и (4) после преобразований следует дифференциальное уравнение следующего вида

$$\frac{du}{dr}=\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_r-\nu\frac{u}{r}\ . \tag{29}$$

Из второго уравнения системы (1) можно получить выражение для окружного напряжения

$$\sigma_\varphi=E\frac{u}{r}+\nu\sigma_r\,. \tag{30}$$

Подставляя это равенство в дифференциальное уравнение равновесия (6), после преобразований имеем

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=E\frac{u}{r^2}-\frac{1-\nu}{r}\sigma_r-f_r\,. \tag{31}$$

Таким образом, уравнения (29) и (31) образуют искомую систему уравнений. Запишем её так

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dr}=\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_r-\nu\frac{u}{r},\\&\frac{d\sigma_r}{dr}=E\frac{u}{r^2}-\frac{1-\nu}{r}\sigma_r-f_r.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Решив её, по формуле (30) можно найти окружное напряжение. Если $f_r=0$, то получаем однородную систему уравнений.

Применяя равенство (28), граничные условия на внутренней и внешней границах диска запишем в обощённом виде, т.е.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{11}u(r_1)+\alpha_{12}\sigma_r(r_1)=\beta_1,\\&\alpha_{21}u(r_2)+\alpha_{22}\sigma_r(r_2)=\beta_2.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Заметим, что равенства (33) содержат все возможные частные случаи граничных условий для диска. Например, если $\beta_1=\beta_2=0,$ то по краям диска имеем упругие связи; случай $\alpha_{11}=\alpha_{21}=0$ соответствует условиям задачи Ламе.

В соответствии с методом начальных параметров решение системы уравнений (32) следует представить так

$$\left.\begin{aligned} u(r) &= u_{чн}(r) + \mathrm{C}_1\, u_{1,1}(r) + \mathrm{C}_2\, u_{1,2}(r), \\ \sigma_r(r) &= \sigma_{rчн}(r) + \mathrm{C}_1\, \sigma_{r2,1}(r) + \mathrm{C}_2\, \sigma_{r2,2}(r). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Здесь приняты такие обозначения: *C1* и *C2* – константы интегрирования; $u_{чн}(r)$, $\sigma_{rчн}(r)$ - частные решения неоднородной системы уравнений (32); $u_{1,1}(r)$, $\sigma_{r2,1}(r)$ - решения однородной системы уравнений (32) в случае начальных условий $u_{1,1}(r_1)$=1, $\sigma_{r2,1}(r_1) = 0$, т.е. при воздействии на диск единичного перемещения на внутренней границе; $u_{1,2}(r)$, $\sigma_{r2,2}(r)$- решения однородной системы уравнений (32) в случае начальных условий $u_{1,2}(r_1)$=0, $\sigma_{r2,2}(r_1) = 1$, т.е. при воздействии на диск единичного напряжения на внутренней границе. Частное решение неоднородной системы проще всего получить при однородных начальных условиях, т.е. при $u_{чн}(r_1) = 0$, $\sigma_{rчн}(r_1) = 0$. Таким образом, необходимо решить три задачи с начальными условиями.

Константы интегрирования определяем, используя равенства (33) и (34). Записываем

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11}\left[ u_{чн}(r_1) + \mathrm{C}_1\, u_{1,1}(r_1) + \mathrm{C}_2\, u_{1,2}(r_1) \right] + \\ &+\alpha_{12}\left[ \sigma_{rчн}(r_1) + \mathrm{C}_1\, \sigma_{r2,1}(r_1) + \mathrm{C}_2\, \sigma_{r2,2}(r_1) \right] = \beta_1, \\ &\alpha_{21}\left[ u_{чн}(r_2) + \mathrm{C}_1\, u_{1,1}(r_2) + \mathrm{C}_2\, u_{1,2}(r_2) \right] + \\ &+\alpha_{22}\left[ \sigma_{rчн}(r_2) + \mathrm{C}_1\, \sigma_{r2,1}(r_2) + \mathrm{C}_2\, \sigma_{r2,2}(r_2) \right] = \beta_2 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений относительно констант интегрирования *C1* и *C2* можно упростить, учитывая, что

$$u_{чн}(r_1) = 0, u_{1,1}(r_1) = 1, \sigma_{r2,1}(r_1) = 0, u_{1,2}(r_1) = 0, \sigma_{r2,2}(r_1) = 1.$$

Тогда из первого уравнения системы следует

$$\alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 = \beta_1$$

При этом константы $u_{чн}(r_2), u_{1,1}(r_2), \sigma_{r2,1}(r_2), u_{1,2}(r_2), \sigma_{r2,2}(r_2)$ получаем в результате решения указанных выше задач с начальными условиями. В итоге для определения констант интегрирования имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{11}C_1+\alpha_{12}C_2=\beta_1,\\&\left[\alpha_{21}u_{1,1}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,1}(r_2)\right]\mathrm{C}_1+\\&+\left[\alpha_{21}u_{1,2}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,2}(r_2)\right]\mathrm{C}_2=\beta_2-\alpha_{21}u_{чн}(r_2)-\alpha_{22}\sigma_{rчн}(r_2).\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получаем

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{\beta_1\left[\alpha_{21}u_{1,2}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,2}(r_2)\right]-\alpha_{12}\left[\beta_2-\alpha_{21}u_{чн}(r_2)-\alpha_{22}\sigma_{rчн}(r_2)\right]}{\alpha_{11}\left[\alpha_{21}u_{1,2}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,2}(r_2)\right]-\alpha_{12}\left[\alpha_{21}u_{1,1}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,1}(r_2)\right]},\\C_2&=\frac{\alpha_{11}\left[\beta_2-\alpha_{21}u_{чн}(r_2)-\alpha_{22}\sigma_{rчн}(r_2)\right]-\beta_1\left[\alpha_{21}u_{1,1}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,1}(r_2)\right]}{\alpha_{11}\left[\alpha_{21}u_{1,2}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,2}(r_2)\right]-\alpha_{12}\left[\alpha_{21}u_{1,1}(r_2)+\alpha_{22}\sigma_{r2,1}(r_2)\right]}.\end{aligned}\qquad(36)$$

При решении конкретных задач система уравнений (35), а следовательно, и решения (36) существенно упрощаются. Например, при решении задачи Ламе имеем $r=r_1$ $\sigma_r=-p_1$, $r=r_2$ $\sigma_r=-p_2$. Это означает, что в выражениях (33) должно быть $\alpha_{11}=\alpha_{21}=0$, $\alpha_{12}=\alpha_{22}=1$, $\beta_1=-p_1$, $\beta_2=-p_2$. Тогда из формул (36) следует

$$C_1=\frac{p_1\sigma_{r2,2}(r_2)-p_2-\sigma_{rчн}(r_2)}{\sigma_{r2,1}(r_2)},\quad C_2=-\mathrm{p}_1.$$

Определив константы интегрирования по формулам (36), находим численное решение задачи. Для этого ещё раз численно решаем неоднородную систему систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1- го порядка (32), используя начальные условия $u(r_1)=C_1$, $\sigma_r(r_1)=C_2$.

Таким образом, алгоритм расчёта состоит в выполнении следующих действий.

1. Формулируем граничные условия для диска относительно неизвестных $u(r)$ и $\sigma_r(r)$.
2. Определяем константы $\alpha_{11}$, $\alpha_{21}$, $\alpha_{12}$, $\alpha_{22}$, $\beta_1$, $\beta_2$ в равенствах (33).
3. Решаем неоднородную систему уравнений (32), т.е. при $f_r\neq 0$, с начальными условиями $u(r_1)=0$, $\sigma_r(r_1)=0$ и получаем величины $u_{чн}(r_2)$, $\sigma_{rчн}(r_2)$.
4. Решаем однородную систему уравнений (32), т.е. при $f_r=0$, с начальными условиями $u(r_1)=1$, $\sigma_r(r_1)=0$ и получаем величины $u_{1,2}(r_2)$, $\sigma_{r2,2}(r_2)$.

5. Решаем однородную систему уравнений (32), т.е. при $f_r = 0$, с начальными условиями $u(r_1) = 0$, $\sigma_r(r_1) = 1$ и получаем величины $u_{1,1}(r_2)$, $\sigma_{r2,1}(r_2)$.
6. По формулам (36) находим константы интегрирования $C_1$ и $C_2$.
7. Решаем неоднородную систему уравнений (32), т.е. при $f_r \neq 0$, с начальными условиями $u(r_1) = C_1$, $\sigma_r(r_1) = C_2$ и получаем искомые зависимости $u(r)$, $\sigma_r(r)$.
8. По формуле (30) находим окружное напряжение $\sigma_\varphi(r)$.

Задача Коши решается численно методом Рунге-Кутта 4-го порядка [4]. Кроме этого, в системе MathCad предусмотрены встроенные функции, предназначенные для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с начальными условиями, например, функция *Odesolve*. В качестве примера ниже приведён вариант решения задачи Ламе в системе MathCad.

Расчет круглого диска. Задача Ламе

$E := 2\cdot 10^{11}$ $\nu := 0.3$ $r1 := 0.02$ $r2 := 0.1$

$p1 := -4\cdot 10^{6}$ $p2 := -8\cdot 10^{6}$

$$r := r1, r1 + \frac{r2 - r1}{500} .. r2$$

Решение методом начальных параметров

$a := r1$ $b := r2$

Given

$$\frac{d}{dr}uu1(r) = \frac{1-\nu^2}{E} sr1(r) - \frac{\nu}{r}\cdot uu1(r) \qquad \frac{d}{dr}sr1(r) = \frac{E}{r^2}\cdot uu1(r) - \frac{1-\nu}{r}\cdot sr1(r)$$

$uu1(a) = 1$ $sr1(a) = 0$

$$\begin{pmatrix} uu1 \\ sr1 \end{pmatrix} := Odesolve\left[\begin{pmatrix} uu1 \\ sr1 \end{pmatrix}, r, b\right]$$

Given

$$\frac{d}{dr}uu2(r) = \frac{1-\nu^2}{E}sr2(r) - \frac{\nu}{r}\cdot uu2(r) \qquad \frac{d}{dr}sr2(r) = \frac{E}{r^2}\cdot uu2(r) - \frac{1-\nu}{r}\cdot sr2(r)$$

$uu2(a) = 0 \qquad sr2(a) = 1$

$$\begin{pmatrix} uu2 \\ sr2 \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} uu2 \\ sr2 \end{pmatrix}, r, b\right]$$

$C2 := p1$

$$C1 := \frac{p2 - p1\cdot sr2(b)}{sr1(b)}$$

$u(a) = -1.113\times 10^{-6}$

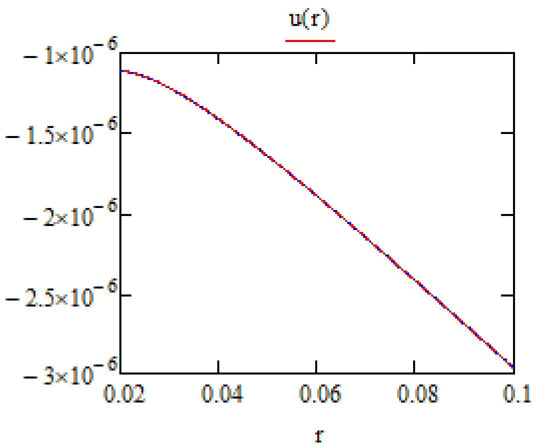
$C1 = -1.113\times 10^{-6} \qquad C2 = -4\times 10^{6}$

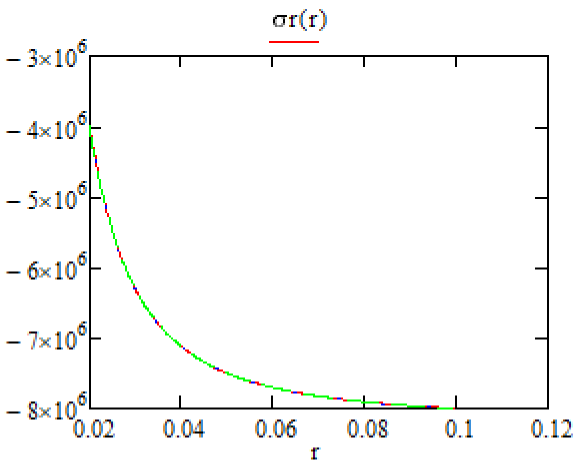
Given

$$\frac{d}{dr}uu(r) = \frac{1-\nu^2}{E}sr(r) - \frac{\nu}{r}\cdot uu(r) \qquad \frac{d}{dr}sr(r) = \frac{E}{r^2}\cdot uu(r) - \frac{1-\nu}{r}\cdot sr(r)$$

$uu(a) = C1 \qquad sr(a) = C2$

$$\begin{pmatrix} uu \\ sr \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} uu \\ sr \end{pmatrix}, r, b\right]$$




Рекомендуемая литература


1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975 г. – 576 с.

2. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973 г. – 456 с.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977 г. – 488 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967 г. – 368 с.