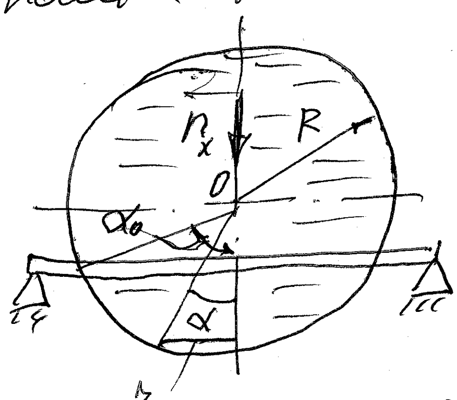
-1-

Определение усилий в сферическом баке

Расчетный случай:
бак третьей ступени ракеты или разгонного блока заполнен жидкостью с плотностью ρ, наддув отсутствует. Ракета имеет ускорение n_x.

направление полета



Давление жидкости на любой глубине бака

$$p_3 = \rho g n_x R + \rho g n_x R \cos\alpha = \rho g n_x R(1+\cos\alpha)$$

общая формула для меридионального усилия T_1

$$T_1 = \frac{1}{r\sin\alpha}\int p_3 \cos\alpha\, r\, ds + \frac{C}{r\sin\alpha}$$

где $r = R\sin\alpha \quad ds = R\,d\alpha$.

Тогда $$T_1 = \frac{1}{R\sin^2\alpha}\rho g R n_x \int(1+\cos\alpha)\cos\alpha R^2 \sin\alpha\, d\alpha + \frac{C}{R\sin^2\alpha}$$

Интегрируем $\int \cos\alpha \cdot \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{2}$; $\int \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha = -\frac{\cos^3\alpha}{3}$

$$T_1 = \frac{\rho g n_x}{R\sin^2\alpha} R^3\left(\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{\cos^3\alpha}{3}\right) + \frac{C}{R\sin^2\alpha}$$

а). Рассмотрим нижнюю часть баке $\alpha < \alpha_0$

При $\alpha = 0 \quad C = \frac{\rho g n_x R^3}{3}$

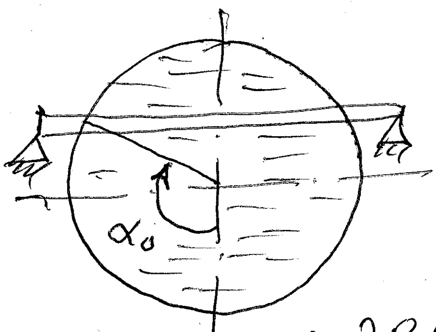
$$T_1 = \frac{\rho g n_x R^2}{2} + \rho g n_x R^{\cancel{3}2}\frac{1-\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha \cancel{R}} = \rho g n_x R^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1-\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right]$$

Из уравнения Лапласа

$$T_2 = p_3 R - T_1 = n_x \rho g R^2(1+\cos\alpha) - \rho g R^2 n_x\left(\frac{1}{2} - \frac{1-\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right)$$

$$T_2 = \rho g n_x R^2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha - \frac{1-\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right)$$

При любом α $T_1 > 0$, если $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$, то T_2 может быть отрицательным! т.е. такой случай подвеса бака



б). Верхняя часть бака, $\alpha > \alpha_0$

Формула для T_1 та же самая

Находим постоянную C, считая $\alpha = \pi$

$$R T_1 \underbrace{\sin^2\alpha}_{0} = \rho g n_x R^3\left(\underbrace{\frac{\sin^2\alpha}{2}}_{0} - \frac{\cos^3\alpha}{3}\right) + C \qquad \cos^3\alpha = -1$$

отсюда

$$C = -\frac{\rho g n_x R^3}{3}$$

здесь минус!

$$T_1 = \rho \frac{g n_x R^3}{2R} - \frac{(1+\cos^3\alpha)}{3\sin^2\alpha\, R}\rho g n_x R^2 = \rho g n_x R^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1+\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right]$$

$$T_2 = p_3 R - T_1 = \rho g n_x R^2(1+\cos\alpha) - \rho g n_x R^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1+\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right) =$$

$$= \rho g n_x R^2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha + \frac{1+\cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha}\right)$$

<u>Проверка</u>

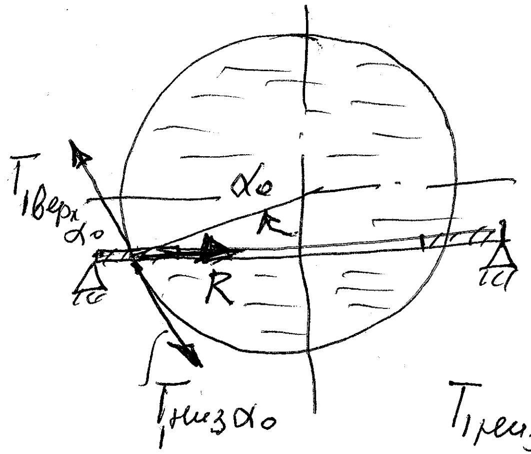
При $\alpha = 0$ учтем $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{3\cos^2\alpha\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{2}$

$$T_1 = T_2 = \rho g n_x R^2$$

При $\alpha = \pi$ ~~B1~~ учтем $\lim\limits_{\alpha\to \pi}\frac{1+\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{3}{2}$ $\cos\pi = -1!$

$$T_1 = T_2 = 0!$$

Рассмотрим нагрузку на кольцо, считая его жестко связанным (сварка) с баком.



При $\alpha = \alpha_0$

$$T_{1низ\alpha_0} = \rho g n_x R^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \cos^3\alpha_0}{3\sin^2\alpha_0}\right]$$

$$T_{1верх\alpha_0} = \rho g n_x R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1 + \cos^3\alpha}{3\sin^2\alpha_0}\right]$$

$T_{1низ\alpha_0}$ – усилие на шпангоут от нижней части при α_0

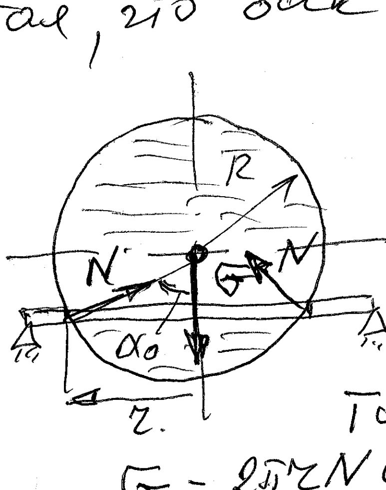
$T_{1верх\alpha}$ – усилие на шпангоут от верхней части при α_0, погонная сила на радиальная (распорная) шпангоут $R = \Delta T \cos\alpha_0$, где

$$\Delta T = T_{1низ\alpha_0} - T_{1верх\alpha_0} = \frac{2}{3}\frac{\rho g n_x R^2}{\sin^2\alpha_0}.$$

значит $R = \frac{2}{3}\frac{\rho g n_x R^2}{\sin^2\alpha_0}\cdot\cos\alpha_0.$

Сила R, действующая на кольцо получена по б/м теории. Для точного решения нужно рассмотреть совместную работу оболочки и кольца.

Рассмотрим нагрузку на кольцо, считая, что бак лежит на опорном кольце



рассмотрим равновесие бака

Вес бака $G = \frac{4}{3}\rho g n_x \pi R^3$

Реакция со стороны шпангоута N по нормали к поверхности сферы

Тогда уравнение равновесия

$$G = 2\pi r N \cos\alpha_0 \longrightarrow \frac{2\cancel{4}}{3}\rho g n_x \cancel{\pi} R^3 = \cancel{2}\cancel{\pi} r_0 N \cos\alpha_0$$

$$r_0 = R\sin\alpha_0$$

Тогда

$$N = \frac{2}{3} R^2 \rho g n_x \frac{1}{\sin\alpha_0 \cos\alpha_0}$$

Найдем радиальную нагрузку на кольцо в этом случае

$$R = N\sin\alpha_0 = \frac{2}{3}\rho g h_x R^2 \frac{\cancel{\sin\alpha_0}}{\cancel{\sin\alpha_0}\cdot\cos\alpha_0}$$

$$R = \frac{2}{3}\rho g h_x R^2 \frac{1}{\cos\alpha_0}.$$

Эпюры меридиональных и окружных усилий.