

**Лекция 5. Элементы механики разрушения**  
**композиционных материалов**  
**Микромеханический и феноменологический подходы**  
**к изучению свойств КМ**

При решении прикладных задач расчёта, проектирования и испытаний силовых элементов конструкций из композиционных материалов под разрушением понимается такое состояние материала, при котором он утрачивает способность к сопротивлению внешним воздействиям (силовым факторам, нагреву, воздействию гравитационного поля и т.д.). При этом разрушение может сопровождаться разделением элемента конструкции, образца материала на части или образованием местных визуально наблюдаемых повреждений. Например, разрушение композитного баллона может произойти с отрывом днища, вылетом закладного элемента из полюсного отверстия. Консольно закреплённый стержневой элемент может разрушиться в заделке, где имеет место существенная концентрация изгибных напряжений. На рис.1.13 и 1.14 приведены некоторые примеры разрушившихся элементов конструкций из КМ. На рис.1.13 показан образец материала из УУКМ после испытания на одноосное растяжение. При разрушении образец разделился на две части.



Рис.1.13. Пример разрушения образца из КМ с разделением на части

На рис.1.14 можно видеть, что при разрушении композитного баллона давления, подвергнутого нагружению внутренним давлением, конструкция не разделилась на части. Произошло безосколочное разрушение с образованием

существенного повреждения цилиндрической части, обусловленного разрывом волокон.



Рис.1.14. Композитный баллон давления после испытания на прочность

Разрушение конструктивного элемента может происходить и без деления на части или визуально наблюдаемых местных разрушений. Как правило, такой вид разрушения обусловлен неограниченным возрастанием деформаций в отдельном сечении или каком-либо ограниченном объеме конструкции. Типичным примером такого разрушения является образование шейки при испытании образца из изотропного материала с пластическими свойствами. В случае тонкостенных элементов конструкций из многослойных композитов такой эффект может быть обусловлен накоплением микрповреждений в структуре материалов (расслоений, образований пор, микротрещин в связующем, разрывов отдельных волокон и т.д.), что в конечном итоге приводит к деградации жесткостных характеристик связующего. В пределе многослойный КМ может превратиться в систему несвязанных между собой волокон. При нагружении элемент конструкции превращается в механизм, неспособный воспринимать нагрузку. Для многослойных КМ, изготовленных намоткой или выкладкой, это может сопровождаться существенным изменением углов армирования. Та-

кие эффекты, при которых материал не сопротивляется возрастающим внешним воздействиям, но при этом не делится на части называют потерей устойчивости деформирования.

На рис.1.15 представлен пример такого разрушения. Образец материала в виде криволинейного стержня, вырезанный из натурального изделия, был подвергнут чистому изгибу. При возрастании нагрузки в центральной части образца произошло расслоение материала и частичное разрушение наполнителя. По этой причине изгибная жёсткость существенно уменьшилась. При незначительном увеличении изгибающего момента кривизна образца стала резко увеличиваться. Дальнейшее возрастание нагрузки стало невозможным.

При расчёте и проектировании оба описанных вида разрушения объединяют одним термином, а именно: исчерпание несущей способности силового элемента конструкции.



Рис.1.14. Пример разрушения образца КМ без деления на части

В механике конструкций из композиционных материалов для аналитического описания указанных механизмов разрушения разрабатываются специальные математические модели, или теории разрушения. Разработка таких моделей составляет сущность раздела механики деформируемого твёрдого тела, называемого механикой разрушения композиционных материалов. Следует отметить, что в процессе её развития сформировались два методологических подхода к построению теорий разрушения - микромеханический и феноменологический. Дадим краткую характеристику каждого из этих подходов.

1. Микромеханический подход. В этом подходе разрабатываются микромеханические модели деформирования и разрушения КМ различного вида. Под микромеханической моделью понимается такая математическая модель материала, в которой в рассмотрение вводятся связующее, наполнитель, граница раздела и возможные несовершенства структуры (поры, микротрещины, непрочности по границе раздела и пр.). Таким образом, эффекты деформирования и разрушения рассматриваются на микроуровне. В таких моделях исходными данными являются параметры, характеризующие физико-механические, теплофизические свойства связующего, наполнителя, характер взаимодействия компонент по границе раздела, пористость, а также геометрические характеристики микроструктуры материала (объёмные содержания компонент, геометрическая форма наполнителя, границы раздела и пр.). В нашем курсе лекций ранее подобный подход в простейшей форме был реализован при расчёте характеристик упругости однонаправленного КМ. В механике разрушения КМ в результате расчёта по микромеханическим моделям определяются такие величины, как предел прочности, предельная деформация, предел длительной прочности и время до разрушения (в случае компонент с вязкими свойствами) и другие.

При реализации микромеханического подхода, как правило, возникает проблема математического моделирования процесса возникновения, развития и накопления микроповреждений в структуре материала. Под микроповреждениями, вызванными внешней нагрузкой, понимаются микротрещины в связующем и на границе раздела, микропоры, расслоения между отдельными слоями, локальные разрывы волокон и т.д. Накопление указанных повреждений в процессе нагружения может приводить к: 1) постепенной деградации физико-механических свойств связующего и наполнителя; 2) образованию магистральной трещины; 3) в итоге к исчерпанию несущей способности материала.

Следует отметить, что на процесс накопления повреждений в структуре КМ влияют многие факторы. К основным можно отнести следующие: 1) ха-

рактик изменения внешнего воздействия (не зависящее от времени статическое нагружение, монотонная нагрузка-разгрузка с малой постоянной скоростью изменения параметров нагружения, скорость и частота изменения внешнего силового воздействия и пр.); 2) условия нагружения (температура, влажность окружающей среды); 3) напряжённо-деформированного состояния окрестности точки, принадлежащей образцу или элементу конструкции.

Кроме этого, в рамках микромеханического подхода можно выделить детерминистскую и статистическую модели. В первом случае характеристики компонент, геометрические параметры структуры материала считаются заданными и однозначно определёнными. Во втором, более сложном варианте, предполагается, что распределение величин, характеризующих свойства компонент, геометрические параметры имеют определённый разброс, т.е. для них характерно случайное распределение. Такие модели разрабатываются на основе положений и теорем теории вероятности.

В связи с развитием численных методов расчёта, компьютерной техники микромеханические модели стали широко применяться для прогнозирования физико-механических и теплофизических параметров разнообразных КМ (многослойных волокнистых, армированных частицами различной геометрической формы, углерод-углеродных и пр.). Например, широкий круг микромеханических задач можно решить с помощью конечно-элементных программных комплексов типа NASTRAN. При этом акцент делается на расчёте модулей упругости, коэффициентов Пуассона, пределов прочности, предельных деформациям, коэффициентов теплопроводности, коэффициентов линейного температурного расширения и пр. Особенно актуальны такие расчёты при разработке новых материалов.

В настоящее время в микромеханике КМ интенсивно развивается новое направление, связанное с попытками внедрения в структуру материала новых компоненты – наночастицы. Влияние нанодобавок на физико-механические и теплофизические характеристики КМ в настоящее время находится в стадии изучения.

Следует отметить, что результаты, получаемые с помощью микромеханического подхода, несомненно, полезны и востребованы, особенно в теоретическом материаловедении. Однако их применение для расчёта и проектирования элементов конструкций проблематично. Дело в том, что несмотря на возможности современной компьютерной техники решение связанной задачи прогнозирования физико-механических характеристик КМ и анализа параметров напряжённо-деформированного состояния в каждой точке конструкции весьма затруднительно. Кроме этого, при реализации микромеханического подхода необходимы предварительные опыты с образцами исследуемого материала. Такие опыты необходимы как для обоснования адекватности разрабатываемых математических моделей, так и для определения параметров, используемых в этих моделях. Например, в случае углерод-углеродных КМ в силу технологии их получения характеристики упругости и прочности матрицы могут быть определены только косвенно по результатам испытаний образцов, поскольку матрица этих КМ в свободном виде получена быть не может. Указанная особенность микромеханического подхода может рассматриваться как недостаток. В этой связи рассмотрим альтернативный подход к решению проблемы разрушения КМ.

2. Феноменологический (макромеханический) подход. Особенностью рассмотренного микромеханического подхода является то, что при его реализации первоначально акцент делается на разработке математической модели. Экспериментальные данные о микроструктуре материала, его деформационных и прочностных характеристиках, полученные на образцах реального материала или элемента конструкции, используются для обоснования адекватности микромеханической модели. В этом смысле данные эксперимента играют второстепенную роль.

В случае феноменологического подхода первоначальным этапом является всестороннее экспериментальное исследование образцов материала, ко-

торые специально изготавливаются для испытаний или вырезаются из натурального изделия. Его целью является накопление и последующая систематизация экспериментальных данных о деформационных и прочностных свойствах КМ.

При феноменологическом подходе предполагается, что КМ представляет собой однородную сплошную анизотропную среду (изотропия материала рассматривается как частный случай анизотропии), обладающую определёнными физико-механическими и теплофизическими свойствами. Все особенности микроструктуры (свойства компонент, начальные повреждения, поверхности раздела, геометрическая форма наполнителя и пр.), в обязательном порядке фигурирующие при микромеханическом подходе, здесь как бы равномерно распределяются по объёму, занимаемому материалом. В противоположность микромеханическому подходу материал изучается не на микро-, а на макроуровне. Как правило, такое исследование материала включает следующие этапы.

1. Разработка программы испытаний.

Программа испытаний должна содержать перечень необходимых опытов, количество исследуемых образцов на каждый вид испытания, краткое описание применяемого оборудования, результаты, которые планируется получить в проводимых испытаниях.

2. Проектирование и изготовление образцов материала, а также оснастки для выполнения составленной программы испытаний.

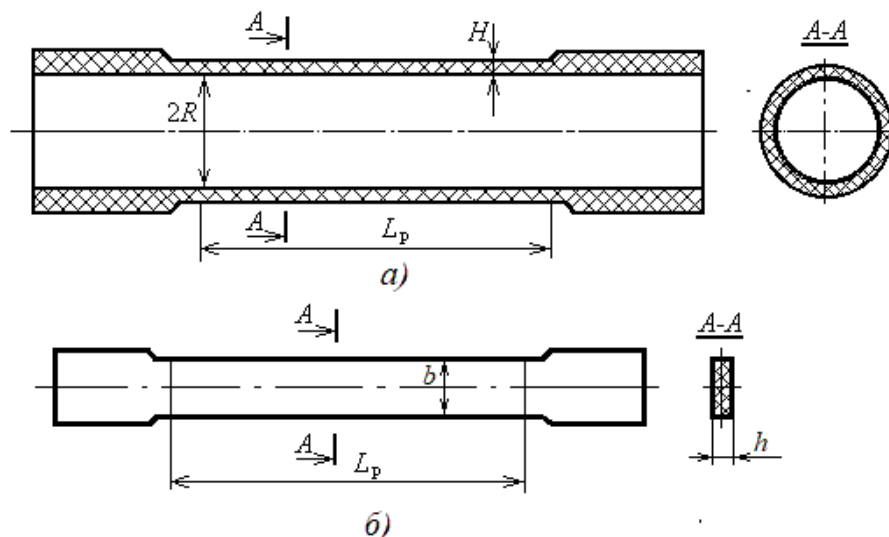


Рис.1.15. Эскизы образцов из КМ, часто применяемых при проведении опытов: а) тонкостенный цилиндрический образец; б) образец-лопатка

В качестве примера на рис.1.15 показаны эскизы образцов, часто применяемых на практике. Тонкостенные цилиндрические образцы изготавливаются методом намотки (рис.1.15а), т.е. тем же способом что и баллоны давления, тонкостенные трубчатые стержневые элементы. При изготовлении элементов конструкции в виде тонкостенных пластин и панелей методом выкладки в пресс-форму удобно испытывать образцы-свидетели в виде лопаток (рис.1.15б), которые могут быть вырезаны непосредственно из натурального изделия.

На рис.1.16 приведён пример оснастки, применяемой при испытании тонкостенных цилиндрических образцов на растяжение и кручение.



Рис.1.16. Оснастка для испытания тонкостенных цилиндрических образцов на растяжение и кручение

3. Выбор и наладка регистрирующей аппаратуры, испытательных машин. Современная испытательная техника позволяет создавать различные виды силового нагружения при нормальной и повышенной температуре. Как правило, в их конструкцию входят датчики силовой нагрузки, лазерные средства и видеодатчики для измерения перемещений. В случае применения тензометрирования применяются специальные тензостанции.

4. Проведение тестовых испытаний.

На этом этапе выполняется расчёт режимов нагружения (максимальной нагрузки, скорости нагружения, длительности проведения опыта и пр.) и вве-



дение их в программное обеспечение для выполнения запланированных опытов. Также проверяется работоспособность изготовленной оснастки и регистрирующей аппаратуры.

5. Проведение комплекса исследований в соответствии с разработанной программой испытаний.

Этот этап является основным при экспериментальном исследовании физик-механических свойств КМ. Здесь производится нагружение исследуемых образцов материала и корректная регистрация показаний датчиков силовой нагрузки, датчиков перемещений и деформаций. При этом устанавливается количество зачётных испытаний и отбрасываются заведомо ошибочные результаты. Последние могут получаться из-за выхода из строя датчиков, сбоя программы нагружения и прочих непредвиденных обстоятельств.

6. Обработка экспериментальных данных и формулировка результатов исследования.

Полученный массив данных о численных значениях внешних нагрузок, перемещений и деформаций подвергается статистической обработке с помощью современных программных средств.

Таблица 1

Материал	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$\nu_{12}$	$G_{12}$ , ГПа	$F_{+1}$ , МПа	$F_{+2}$ , МПа	$F_{12}$ , МПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Углепластик	180	6,2	0,28	5	1400	33	30	1400
Стеклопластик	60	8,5	0,26	5,2	1750	34	35	2400
Органопластик	105	4,9	0,21	2,0	1800	28	18	1200
Боропластик	210	19	0,21	6,2	1600	65	50	2400
Бороалюминий	230	14,7	0,23	63	1400	140	70	2700

При исследовании деформационных и прочностных свойств КМ основными результаты, как правило, представляют в виде диаграмм деформирования. Численные значения пределов прочности и предельных деформаций

удобно оформлять в табличном виде. В качестве примера в табл.1 представлены некоторые значения модулей упругости и пределов прочности распространённых КМ, полученных по результатам испытаний образцов материала.

На рис.1.17 показаны типичные диаграммы деформирования для материалов при растяжении, где  $\sigma_\epsilon$  – предел прочности,  $\delta$  – предельная деформация. Именно диаграммы деформирования и предельные значения напряжений и деформаций необходимы для анализа и систематизации экспериментальных

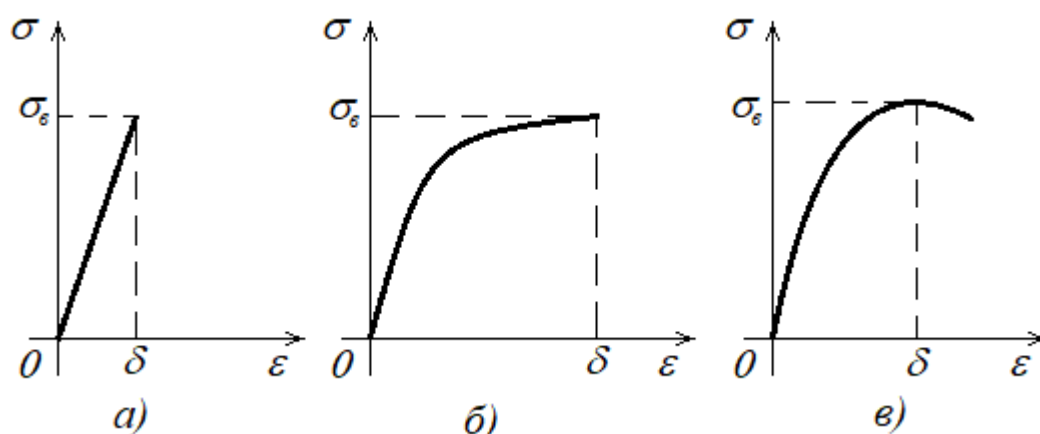


Рис.1.17. Типичные диаграммы деформирования КМ: а) линейная диаграмма;  
 б) нелинейная диаграмма устойчивого деформирования;  
 в) нелинейная диаграмма с потерей устойчивости деформирования

данных и последующей разработки математических моделей деформирования и разрушения КМ.

Следует отметить, что на диаграммах деформирования, показанных на рис.1.17а и 1.17б напряжения монотонно возрастают вплоть до разрушения. Это диаграммы с устойчивым деформированием, для которых справедливо соотношение  $d\sigma \cdot d\epsilon > 0$  на всём интервале изменения напряжения  $0 \leq \sigma \leq \sigma_\epsilon$ . Для диаграммы деформирования на рис. 1.17в при  $\epsilon \geq \delta$  выполняется неравенство  $d\sigma \cdot d\epsilon \leq 0$ . Это означает, что в точке с координатами  $\sigma_\epsilon, \delta$  происходит потеря устойчивости деформирования, т.е. деформации возрастают при уменьшении напряжения. Материал не воспринимает нагрузку, происходит истощение его

несущей способности. Поэтому величины  $\sigma_{\delta}$  и  $\delta$  следует рассматривать как предел прочности и предельную деформацию материала.

При обработке экспериментальных данных деформации определяются по показаниям лазерных датчиков, тензо-, видеодатчиков, экстензометров. В последнем случае могут быть использованы следующие зависимости. Для цилиндрического образца (см. рис.1.15а) осевая  $\varepsilon_{oc}$  и окружная  $\varepsilon_{ок}$  деформация определяются по формулам

$$\varepsilon_{oc} = \frac{\Delta L_{\delta}}{L_{\delta}}, \quad \varepsilon_{ок} = \frac{\Delta R}{R}.$$

Здесь  $L_{\delta}$  - базовый размер, на котором с помощью экстензометра измеряется удлинение образца в осевом направлении. Для образца-лопатки (см. рис.1.15б) аналогично можно записать для осевой  $\varepsilon_{oc}$  и поперечной  $\varepsilon_n$  деформаций такие расчётные соотношения

$$\varepsilon_{oc} = \frac{\Delta L_{\delta}}{L_{\delta}}, \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta b_{\delta}}{b_{\delta}},$$

где  $L_{\delta}$  и  $b_{\delta}$  базовые размеры, на которых с помощью экстензометров измеряются изменения линейных размеров образца в осевом и поперечном направлениях.

При испытании на кручение тонкостенного цилиндрического образца угловая деформация определяется по следующей формуле

$$\gamma = \varphi \frac{R}{L_{\delta}}.$$

В этой формуле  $\gamma$  – угловая деформация,  $\varphi$  – угол закрутки, измеренный с помощью экстензометра на базе  $L_{\delta}$ .

По показаниям датчиков силовых нагрузок рассчитываются напряжения. Для цилиндрического образца, показанного рис.1.15а, при нагружении осевой силой  $F$  для нормального напряжения следует использовать такую зависимость

$$\sigma_{oc} = \frac{F}{2\pi H(R + 0,5H)}.$$

Если образец нагружен внутренним давлением  $p$ , то осевое и окружное напряжения рассчитываются по формулам

$$\sigma_{oc} = \frac{pR^2}{2H(R + 0,5H)}, \quad \sigma_{ok} = \frac{pR}{H}.$$

При нагружении крутящим моментом  $M_{кр}$  касательное напряжение  $\tau$  в сечении определяется так

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{2\pi HR^2 \left(2 + \frac{H}{R}\right) \left(1 + \frac{H}{R} + \frac{H^2}{2R^2}\right)}{2 \left(1 + \frac{H}{R}\right)}.$$

В феноменологическом подходе экспериментальное изучение физико-механических свойств предшествует разработке математических моделей деформирования и разрушения КМ. Остановимся на этой проблеме более подробно.

### **Разработка математических моделей деформирования и разрушения КМ**

Накопленные экспериментальные данные, их анализ являются основой для построения различных теорий деформирования и разрушения КМ. Как было указано ранее, при этом материал рассматривается как сплошная анизотропная среда, наделённая физико-механическими свойствами. В случае разработки математических моделей деформирования проблема сводится к построению функциональной зависимости между тензорами, описывающих напряжённое и деформированное состояния. В частности, в случае малых деформаций такая зависимость может быть представлена следующим образом

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, T, t, K_m), \quad (1.78)$$

где  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - тензоры напряжений и малых деформаций,  $T$  – температура,  $t$  – время,  $K_m$  – скалярные и тензорные параметры, определяемые опытным путём на образцах материала и косвенно описывающие свойства материала, а также процессы в его микроструктуре при деформировании. Выражения типа (1.78)

в механике деформируемого твёрдого тела называют определяющими соотношениями. Классический и наиболее простой пример определяющих соотношений – закон Гука для анизотропных материалов. Теоретически определяющие соотношения обосновываются в разделе механики, называемом «термодинамика сплошной среды». Подчеркнём, что проблема построения соотношений (1.78) выходит за пределы темы настоящей лекции. Поэтому далее её обсуждать не будем и обратимся к проблеме разработки теорий разрушения.

Основная идея теорий разрушения, развиваемых в рамках феноменологического подхода, заключается в следующем: используя накопленные экспериментальные данные о разрушении образцов материала, элементы тензорного анализа получить функциональную зависимость следующего вида

$$F(\sigma_{ij}, T, t, C_k) = 0, \quad (1.79)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $T$  – температура,  $t$  – время,  $C_k$  – скалярные и тензорные параметры, определяемые опытным путём на образцах материала. Эти параметры описывают прочностные свойства материала, а также косвенно отражают процессы в нём при нагружении, вызывающем разрушение. В простейшем случае для изотропного тела имеем  $k=1$  и  $C_1 = \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – предел прочности материала. В более сложных задачах количество этих параметров может увеличиваться. Как будет показано ниже, для ортотропного материала при формулировке критерия разрушения в общем случае требуется девять экспериментально определяемых величин.

Тензорная зависимость (1.79) называется критерием разрушения. Предполагается, что при выполнении этой зависимости в точке деформируемого твердого тела наступает предельное состояние, т.е. материал теряет несущую способность. По сути материал не в состоянии воспринимать возрастающую нагрузку и утрачивает качества конструкционного материала.

Выражение (1.79) конкретизируется на основе анализа экспериментальных данных для рассматриваемого материала и условий его нагружения. В некоторых случаях необходимо учитывать изменение температуры в процессе

нагружения. Например, учёт температуры необходим при построении критериев разрушения углерод-углеродных КМ, которые, как правило, применяются при изготовлении элементов конструкций, функционирующих в условиях интенсивного термосилового нагружения. В этом случае разрабатываются теории термпрочности. Для материалов, обладающих вязкими свойствами, например, полимеров, необходимо учитывать фактор времени. Для этих материалов развиваются теории длительной прочности.

В дальнейшем будем рассматривать один из наиболее простых, но в то же время имеющий актуальное значение случай разрушения. Полагаем, что нагружение материала происходит при изотермических условиях и фактор времени не оказывает влияние на разрушение материала. Тогда равенство (1.79) упрощается и принимает такой вид

$$F(\sigma_{ij}, C_k) = 0. \quad (1.80)$$

В настоящее время разработаны различные варианты зависимости (1.80). Она составляет основу математической модели разрушения, которую в механике деформируемого твёрдого тела принято называть теорией прочности. Геометрическим образом зависимости (1.80) в шестимерном пространстве напряжений является гиперповерхность, называемая поверхностью разрушения. Опытным путём было установлено, что для большинства конструкционных материалов поверхность разрушения является односвязной и выпуклой.

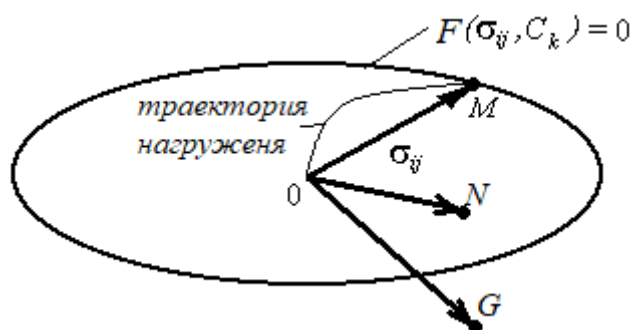


Рис.1.18. Поверхность разрушения в пространстве напряжений

Соответственно кривая разрушения, или контур прочности, то есть линия пересечения поверхности разрушения с координатной плоскостью, также должна быть односвязной и выпуклой.

В теории прочности предполагается, что изображающая точка напряжённого состояния, т.е. точка с координатами в пространстве напряжений, равными компонентам тензора  $\sigma_{ij}$ , вне поверхности разрушения располагаться не может (например, точка  $G$  на рис.1.18). Все изображающие точки допускаемых напряжённых состояний находятся внутри поверхности разрушения (точка  $N$  на рис.1.18). Если изображающая точка принадлежит поверхности разрушения, то в малой окрестности деформируемого твёрдого тела происходит разрушение (точка  $M$  на рис.1.18).

В известных теориях прочности конкретный вид выражения (1.80) устанавливается в значительной мере формально, т.е. из условия наилучшего совпадения в пространстве напряжений теоретических и экспериментальных точек, полученных для разных напряженных состояний. С этой целью используется специализированное программное обеспечение, основанное на известных численных методах, например, методе наименьших квадратов. Такой путь построения критерия прочности требует большого количества испытаний, является очень трудоемким и затруднён в практической реализации. Как правило, выражения (1.80) обосновываются при ограниченном количестве экспериментальных точек. Для того, чтобы сократить количество экспериментов при построении критерия разрушения привлекаются определенные физические соображения, вытекающие из анализа вида разрушенных образцов материала. Типичным примером является гипотеза максимальных касательных напряжений, применяемая при исследовании разрушения изотропных тел. Как известно, она основана на экспериментально установленном эффекте, в соответствии с которым разрушение изотропного образца происходит по плоскости скольжения, ориентированной под углом  $\approx 45^\circ$  к главным осям тензора напряжений. Именно в этой плоскости действуют максимальные касательные напряжения.

Как будет показано ниже, некоторые экспериментально обоснованные гипотезы о разрушении применяются и построении теорий прочности КМ.

Рассмотрим примеры критериев разрушения и теорий прочности.

1. Критерий разрушения Хубера-Мизеса, или критерий максимального октаэдрического касательного напряжения. Этот критерий был разработан для изотропных конструкционных материалов. Следует отметить, что идея этого критерия, а также основные соотношения по сути заимствованы из тео-

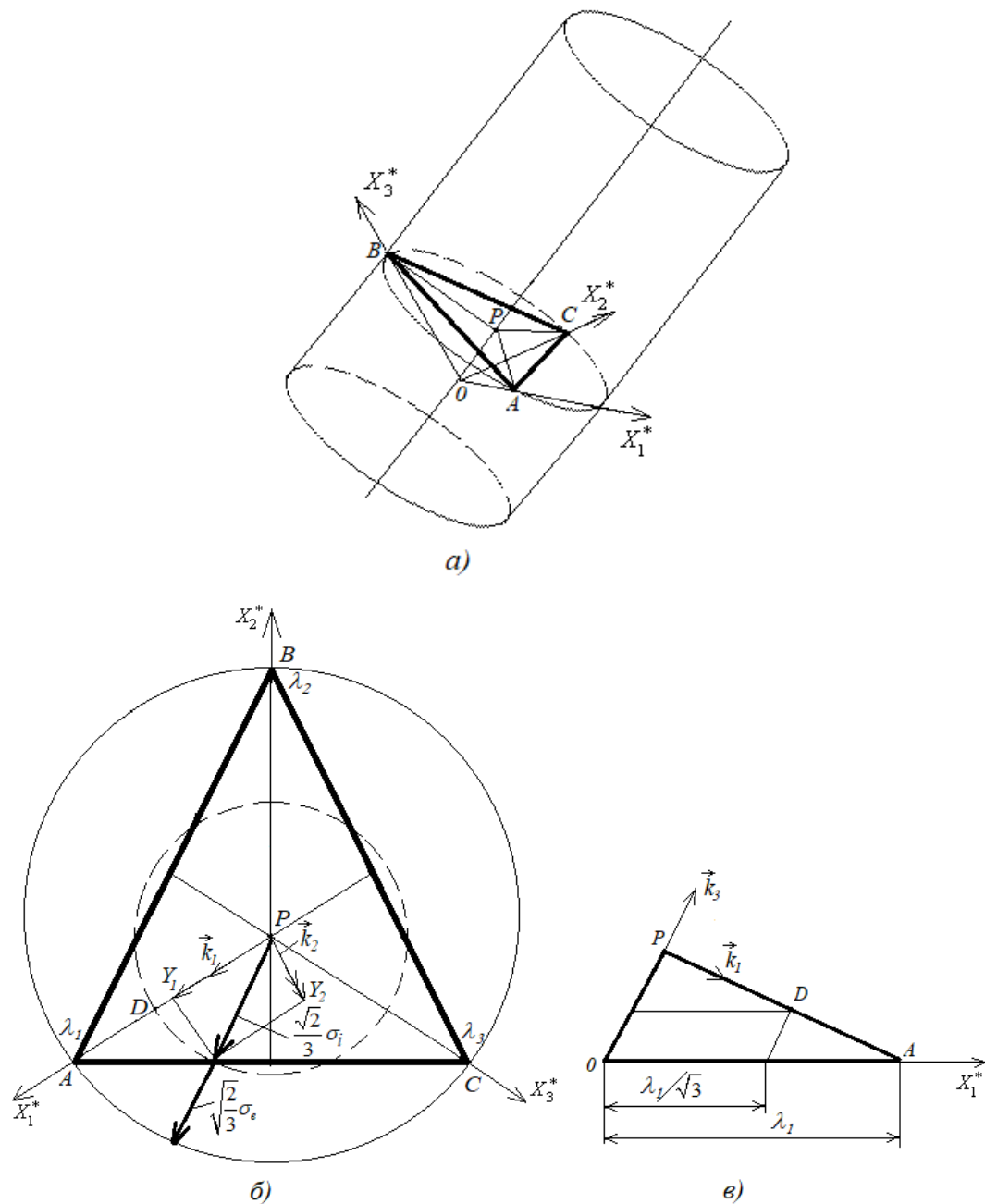


Рис.1.19. Поверхность разрушения в соответствии с критерием Хубера-Мизеса



рии пластичности изотропного тела. В этой теории условием перехода из упругого состояния в пластическое является условие начала пластичности Хубера-Мизеса, записанное в пространстве напряжений. При его формулировке в качестве параметра, характеризующего предельное состояние материала, выступает предел текучести. Формальная замена этой материальной величины, на другую, называемую пределом прочности, приводит к критерию разрушения изотропного материала.

Прежде, чем записать критерий Хубера-Мизеса, рассмотрим понятие октаэдрического касательного напряжения. Определим компоненты тензора напряжений в новой системе координат с ортами  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ , показанными на рис.1.19. На этом рисунке плоскость треугольника  $ABC$  принадлежит октаэдрической площадке, которая наклонена к главным осям под одним и тем же углом. Единичный вектор  $\vec{k}_3$  направлен по нормали к ней. Матрица преобразования поворота при переходе от главных осей к осям новой системы координат имеет такой вид

$$[T] = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & -\sqrt{1/6} & -\sqrt{1/6} \\ 0 & \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/3} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицу напряжений  $[T'_\sigma]$  в новой системе координат можно найти следующим образом

$$\begin{aligned}
[T'_\sigma] &= [T][T_\sigma][T]^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{6} & \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2\sqrt{3}} & \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{3\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2\sqrt{3}} & \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} & \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{3\sqrt{2}} & \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{6}} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что на октаэдрической площадке действует нормальное напряжение  $Y_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3$  и касательные напряжения

$$Y_1 = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{3\sqrt{2}}, \quad Y_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{6}}. \quad (1.81)$$

Модуль вектора касательного напряжения  $\vec{S} = Y_1 \vec{k}_1 + Y_2 \vec{k}_2$  определяется по формуле

$$|\vec{S}| = \frac{1}{3} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2}. \quad (1.82)$$

В соответствии с критерием Хубера-Мизеса разрушение материала произойдёт, если величина октаэдрического касательного напряжения достигнет предельного состояния, т.е. при условии

$$|\vec{S}| = \tau_{np}, \quad (1.83)$$

$\tau_{np}$  – экспериментально определяемый параметр материала. В пользу формулировки (1.83) свидетельствуют результаты экспериментальных исследований микроструктуры материала при разрушении, указывающие на сдвиговой характер разрушения большинства изотропных конструкционных материалов.

Рассмотрим условия разрушения для простейших напряжённых состояний. При одноосном растяжении, когда  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , из (1.82) и (1.83) следует, что материал разрушится, если выполняются равенства  $\lambda_1 = \sigma_s$  и

$\tau_{np} = \sqrt{2}\sigma_g / 3$ , где  $\sigma_g$  - предел прочности материала. Заметим, что из этого соотношения можно найти величину  $\tau_{np}$ .

В опыте при чистом сдвиге будем иметь  $\lambda_1 = \tau_g$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -\tau_g$ , и тогда из (1.82) вытекает равенство  $\tau_{np} = \sqrt{2/3} \cdot \tau_g$ . Здесь  $\tau_g$  - предел прочности материала при чистом сдвиге. Сравнивая результаты опытов на растяжение и чистый сдвиг, получим известное соотношение между пределами прочности при растяжении и чистом сдвиге  $\tau_g = \sigma_g / \sqrt{3}$ .

Из равенств (1.82) и (1.83) видно, что при гидростатическом нагружении, т.е. при  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ , где  $p$  - давление, и отсутствии касательных напряжений разрушение материала недостижимо. Действительно, эксперименты со многими изотропными материалами показывают, что даже при достаточно высоких давлениях (более 500 МПа) разрушение не происходит. Поэтому поверхность разрушения в соответствии с (1.83) должна быть незамкнутой. В системе координат с осями  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  она представляет собой боковую поверхность кругового цилиндра, уравнение которой

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{2}{9}\sigma_g^2. \quad (1.84)$$

Линия пересечения этой поверхности с октаэдрической площадкой показана на рис.1.19б пунктиром.

Заметим, что при одноосном нагружении, когда изображающие точки располагаются, например, на отрезке РА, т.е. когда  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , при разрушении имеем  $\lambda_1 = \sigma_g$ . Тогда из (1.81) следует, что  $Y_1 = \sqrt{2}\sigma_g / 3$ ,  $Y_2 = 0$ . Следовательно, имеем  $PD = \sqrt{2}\sigma_g / 3$  (рис.1.19в). Учитывая, что  $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$ , из рис.1.19в получим, что  $HD = \sigma_g / \sqrt{3}$ . Отсюда следует, что если величину  $|\vec{S}|$  увеличить в  $\sqrt{3}$  раз, то получим окружность радиусом  $\sqrt{2/3} \cdot \sigma_g$  и  $OA = \sigma_g$ . Равенство (1.83) примет такой вид  $\sqrt{3}|\vec{S}| = \sqrt{3}\tau_{np}$ . Принимая во внимание, что

$$\tau_{np} = \sqrt{2}\sigma_g / 3, \quad \sqrt{3}|\vec{S}| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i,$$

отсюда получим иную формулировку критерия Хубера-Мизеса

$$\sigma_i = \sigma_e, \quad (1.85)$$

где  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений, в общем случае вычисляемая по формуле

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}. \quad (1.86)$$

В соответствии с (1.85) поверхность разрушения – это тоже поверхность кругового цилиндра. На рис.1.19б её след на октаэдрической площадке показан сплошной линией.

В практических расчётах, при экспериментальном исследовании прочностных свойств изотропных материалов критерий разрушения Хубера-Мизеса удобно записывать в виде (1.85). В этом случае предел прочности материала  $\sigma_e$  можно найти непосредственно из опыта на одноосное растяжение. Таким образом, в данном случае достаточно одного экспериментально определяемого параметра для построения теории разрушения.

В частных случаях напряжённых состояний условие разрушения (1.85) принимает более простой вид. Упрощается и геометрическая интерпретация в пространстве напряжений. Например, для напряжённого состояния двухосного растяжения оси  $OX_1^* X_2^*$  являются главными (рис.1.20а). Тогда для действующих напряжений при  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_3 = 0$  будем иметь условие разрушения в таком виде

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 = \sigma_e^2 \quad (1.87)$$

На плоскости напряжений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  зависимости (1.87) соответствует кривая разрушения в виде эллипса, оси симметрии которого повёрнуты на угол  $45^\circ$  относительно главных осей (рис.1.20б).

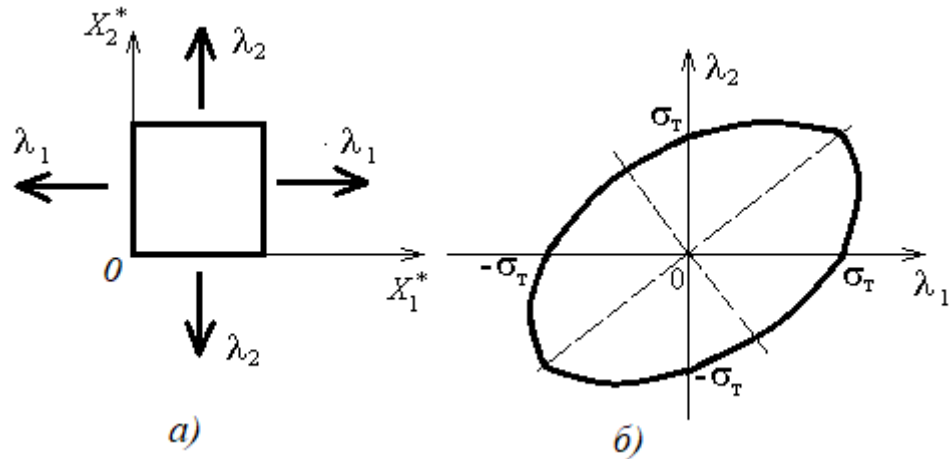


Рис.1.20. Кривая разрушения при двухосном растяжении

Заметим, что условие (1.87) следует использовать при расчёте на прочность цилиндрической части цельнометаллического баллона давления.

Рассмотрим следующий пример. При плоском напряжённом состоянии из формул (1.85) и (1.86) получим

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_{\sigma}^2. \quad (1.88)$$

В пространстве напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  этому равенству соответствует поверхность разрушения в виде эллипсоида.

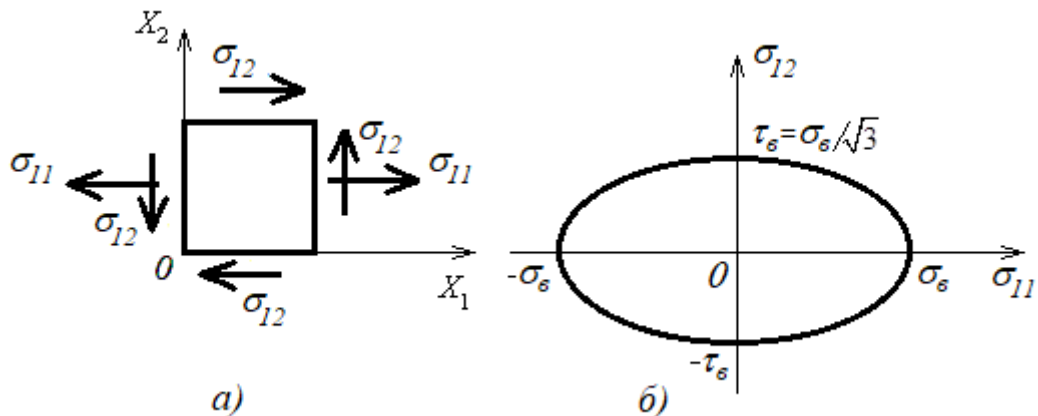


Рис.1.21. Кривая разрушения при действии нормального и касательного напряжений

В случае напряжённого состояния, показанного на рис.1.21а, т.е. при  $\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{12} \neq 0, \sigma_{22} = 0$ , на плоскости напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  получим кривую разрушения в виде эллипса (рис.1.21б). Этому случаю соответствует, например,

нагружение металлического тонкостенного цилиндрического стержня растягивающей силой и крутящим моментом.

2. Критерий Мизеса-Хилла. Этот критерий разрушения можно рассматривать как обобщение рассмотренного выше критерия Хубера-Мизеса на случай ортотропного тела. В системе координат, оси которой совпадают с осями симметрии ортотропного тела, его аналитическое выражение имеет следующий вид

$$A_{11}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + A_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + A_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{12}\sigma_{12}^2 + A_{13}\sigma_{13}^2 + A_{23}\sigma_{23}^2 = 1. \quad (1.89)$$

Входящие в это выражение константы  $A_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) определяются в опытах на одноосное растяжение и чистый сдвиг. Например, при растяжении в направлении оси  $OX_1$  будем иметь из (1.89) следующее равенство

$$(A_{11} + A_{22})F_1^2 = 1. \quad (1.90)$$

Здесь  $F_1$  – предел прочности материала при растяжении в направлении оси  $OX_1$ . Аналогичным образом, выполнив опыты на растяжение вдоль осей  $OX_2$  и  $OX_3$ , можно получить ещё два уравнения

$$(A_{11} + A_{33})F_2^2 = 1, \quad (A_{22} + A_{33})F_3^2 = 1. \quad (1.91)$$

Решая совместно уравнения (1.90) и (1.91), будем иметь

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_3^2} \right), \quad A_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_3^2} - \frac{1}{F_2^2} \right), \quad A_{33} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_2^2} + \frac{1}{F_3^2} - \frac{1}{F_1^2} \right).$$

В представленных формулах  $F_2$  и  $F_3$  – пределы прочности материала при растяжении в направлении осей  $OX_2$  и  $OX_3$  соответственно.

Из опытов на чистый сдвиг в плоскостях  $OX_1X_2$ ,  $OX_1X_3$ ,  $OX_2X_3$  будем иметь следующие значения

$$A_{12} = \frac{1}{F_{12}^2}, \quad A_{13} = \frac{1}{F_{13}^2}, \quad A_{23} = \frac{1}{F_{23}^2}.$$

Здесь величины  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{23}$  – пределы прочности материала при чистом сдвиге в плоскостях  $OX_1X_2$ ,  $OX_1X_3$ ,  $OX_2X_3$  соответственно.

Заметим, что если принять условия  $F_1=F_2=F_3=\sigma_6$  и  $F_{12}=F_{13}=F_{23}=\sigma_6/\sqrt{3}$ , то получим критерий разрушения для изотропного тела (1.85).

Выражение (1.89) при решении практических задач удобно записывать в матричном виде. Введём вспомогательный вектор напряжения следующего вида

$$\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T.$$

Тогда формула (1.89) примет такой вид

$$\{\sigma\}^T [A] \{\sigma\} = 1. \quad (1.92)$$

Матрица прочностных характеристик  $[A]$  записываем следующим образом

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{22} & -A_{11} & -A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{11} & A_{11} + A_{33} & -A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{22} & -A_{33} & A_{22} + A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.93)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что для изотропного тела матрица (1.93) будет иметь такой вид

$$[A] = \frac{1}{\sigma_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вариант нагружения, когда касательные напряжения отсутствуют. Из критерия (1.89) следует, что разрушение наступит при выполнении условия

$$A_{11}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + A_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + A_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 = 1. \quad (1.94)$$

Отсюда видно, что при гидростатическом нагружении при любом значении нормальных напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ , где  $p$  – давление, разрушение материала не наступит. Отсюда следует, что в пространстве нормальных напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  уравнению (1.94) соответствует поверхность разрушения в виде

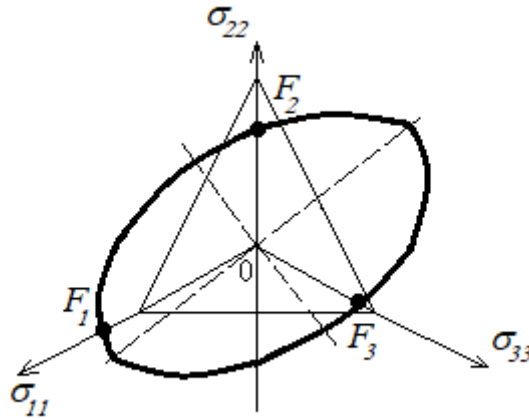


Рис.1.22. Линия пересечения поверхности разрушения с плоскостью, равно наклонённой к осям напряжений

боковой поверхности эллиптического цилиндра, ось которого равнонаклонена к осям напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ . Линией пересечения этой поверхности с плоскостью, равнонаклонённой к осям  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , является эллипс (рис.1.22).

Следует отметить, что первоначально критерий Мизеса-Хилла был разработан для описания прочности некоторых металлов, прошедших обработку давлением. Полученные таким способом металлические заготовки приобретают свойства ортотропного тела. Отсюда вытекает и характерное для металлов условие недостижимости разрушения при гидростатическом нагружении. При этом нет никаких предпосылок к тому, что это условие выполняется и для композиционных материалов. Тем не менее в силу своей простоты этот критерий применяется и для описания прочностных характеристик некоторых КМ.

### Вопросы для самоподготовки

1. Что понимается под термином «исчерпание несущей способности элемента конструкции»? Приведите примеры этого эффекта.
2. В чём принципиальное различие между феноменологическим и микромеханическим подходами?
3. Сформулировать критерий разрушения Хубера-Мизеса для изотропного материала.



4. Используя критерий разрушения Хубера-Мизеса, показать, что для изотропных материалов справедлива зависимость между пределами прочности при растяжении и чистом сдвиге следующего вида  $\tau_g = \sigma_g / \sqrt{3}$ .
5. Показать, что критерию Мизеса-Хилла соответствует матрица прочностных характеристик в виде (1.93).
6. Выразить константы  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{33}$ , входящие в критерий Мизеса-Хилла, через пределы прочности материала?
7. Дайте характеристику поверхности разрушения, соответствующей критерию Мизеса-Хилла.
8. Записать условие разрушение материала, подчиняющегося критерию Мизеса-Хилла, для плоского напряжённого состояния.