Глава 1. Элементы векторного, тензорного и матричного исчислений в механике деформируемого твёрдого тела

Лекция 1. (дистанционное обучение)

Понятие тензора второго ранга в прямоугольной декартовой системе координат

Рассмотрим два вектора $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ и $\vec{b} = b_i \vec{e}$. Как было отмечено ранее, над этими векторами можно выполнить следующие операции:

а) скалярное произведение, определяемое по правилу $p = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, где φ – угол между векторами. В результате этой операции получаем скаляр.

б) векторное произведение, которое находим следующим образом

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В данном случае получаем вектор, которому в соответствие можно поставить матрицу-столбец $\{c\} = (c_1, c_2, c_3)^T$.

Для двух векторов можно определить ещё одну операцию, называемую диадным произведением двух векторов, или диадой. Она обозначается одним из двух способов

$$\mathbf{C} = \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b}. \tag{1}$$

В результате этой операции получается новая математическая величина, которой в соответствие можно поставить квадратную матрицу следующего вида

$$[C] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Как видно, элементы этой матрицы определяются по формуле $c_{ij} = a_i b_j$.

Операцию (1) можно применить к ортам $\vec{e}_i$ прямоугольной декартовой системы координат. В результате получим девять диадных произведений вида $\mathbf{E}_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$. Этим диадным произведениям соответствуют квадратные несимметричные матрицы [E_{ij}]. Структура этих матрица такова: элемент с индексами i и j равен единице, остальные элементы равны нулю. Например, для матрицы [E_{23}] имеем

$$[E_{23}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим одну особенность диад $\mathbf{E}_{ij}$. Указанные диады, а также соответствующие им матрицы [E_{ij}], являются линейно независимыми. Это означает, что тривиальная линейная комбинация диад $\mathbf{E}_{ij}$, записываемая в виде

$$x_{ij}\mathbf{E}_{ij} = 0,$$

имеет место только в случае x_{ij}=0.

Отсюда следует, что диады $\mathbf{E}_{ij}$, так же как и орты $\vec{e}_i$, в системе прямоугольных декартовых координат можно рассматривать как базис в трёхмерном пространстве. Математические величины, записываемые в этом базисе, называются тензорами второго ранга в прямоугольной декартовой системе координат. Разложение тензора второго ранга **A** по базисным диадам имеет следующий вид

$$\mathbf{A} = a_{ij}\mathbf{E}_{ij} = a_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\,. \tag{2}$$

Величины a_{ij} называются компонентами тензора второго ранга **A**. Из выше изложенного следует, что тензору соответствует квадратная матрица [A], составленная из его компонент, т.е.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Например, тензору **B**, имеющему вид

$$\mathbf{B} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2\vec{e}_3 - 3\left(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1\right) + 6\vec{e}_3\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3\vec{e}_1 - 8\vec{e}_3\vec{e}_3$$

соответствует матрица

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ -10 & 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

Определение тензора второго ранга в виде (2) можно рассматривать как обобщение понятия вектора. Действительно, разложение вектора $\vec{a}$ по ортонормированному базису $\vec{e}_i$ имеет вид $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$. При этом вектору соответствует матрица-столбец {a}. В этой связи вектор иногда называют тензором первого ранга. Ранее было показано, что при преобразовании поворота системы координат компоненты вектора в новой системе координат изменяются. Их значения вычисляются по формулам

$$a'_i = \alpha_{ij}a_j\,, \tag{4}$$

где α_{ij} – направляющие косинусы ортов новой системы координат относительно исходной. В матричном виде равенство (4) записывается так

$$\{a'\} = [T]\{a\}\,. \tag{5}$$

Здесь матрица [T] – ортогональная матрица преобразования поворота, компонентами которой являются направляющие косинусы α_{ij}.

При преобразовании поворота системы координат компоненты тензора второго ранга также изменяются. Получим формулы для их вычисления.

Соотношение между ортами исходной системы координат $\vec{e}_i$ и новой системы $\vec{e}'_i$ имеет следующий вид

$$\vec{e}_i = \alpha_{ji}\vec{e}'_j\,.$$

Это равенство подставим в формулу (2), используя разные обозначения для свободных и немых индексов. Будем иметь

$$\mathbf{A} = a_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = a_{ij}(\alpha_{si}\vec{e}_s)(\alpha_{kj}\vec{e}'_k) = \alpha_{si}\alpha_{kj}a_{ij}\vec{e}'_s\vec{e}'_k = a'_{sk}\vec{e}'_s\vec{e}'_k\,.$$

Отсюда следуют искомые формулы преобразования

$$a'_{sk} = \alpha_{si}\alpha_{kj}a_{ij}\,. \tag{6}$$

Здесь индексы *i,j,k,s* принимают значения 1,2,3. Формула (6) является аналогом соотношения (4), справедливым для тензора первого ранга, т.е. вектора. В этой формуле индексы *i* и *j* являются немыми, а индексы *s* и *k* – свободными. Например, для случая *s*=2, *k*=3 будем иметь

$$a'_{23} = \alpha_{21}\alpha_{31}a_{11} + \alpha_{21}\alpha_{32}a_{12} + \alpha_{21}\alpha_{33}a_{13} + \alpha_{22}\alpha_{31}a_{21} + \alpha_{22}\alpha_{32}a_{22} + \alpha_{22}\alpha_{33}a_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31}a_{31} + \\ + \alpha_{23}\alpha_{32}a_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33}a_{33}.$$

По существу, равенство (6) представляет собой записанные в кратком тензорном виде девять равенств, содержащих в правой части девять слагаемых.

Равенство (6) можно рассматривать как альтернативное определение тензора второго ранга. Если доказано, что при преобразовании поворота системы координат девять чисел преобразуются в соответствии с формулами (6), то эти числа являются компонентами тензора второго ранга.

Формулу (6) можно представить в матричном виде. Действительно, запишем равенство (6) следующим образом

$$a'_{sk} = \alpha_{si} a_{ij} \alpha_{kj} .$$

Тогда величины $c_{sj} = \alpha_{si} a_{ij}$ следует рассматривать как компоненты матрицы [C], являющейся произведением матриц [T][A]. В свою очередь величины $a'_{sk} = c_{sj}\alpha_{kj}$ - результат произведения матриц $[C][T]^{T}$. Таким образом, в итоге можно записать

$$[A'] = [T][A][T]^{T} . \qquad (7)$$

Используя выражения (6) или (7), можно доказать следующее утверждение. Если между компонентами векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$ существует зависимость следующего вида

$$p_i = a_{ij} n_j , \qquad (8)$$

или

$$\{p\} = [A]\{n\} , \qquad (9)$$

то девять величин a_{ij} являются компонентами тензора второго ранга.

Для доказательства воспользуемся формулой (4) и обратной по отношению к ней. Применим её к векторам $\vec{n}$ и $\vec{p}$. Будем иметь такие равенства

$$p'_i = \alpha_{is} p_s = \alpha_{is} a_{sk} n_k = \alpha_{is} a_{sk} \alpha_{jk} n'_j = (\alpha_{is}\alpha_{jk} a_{sk}) n'_j = a'_{ij} n'_j .$$

Отсюда следует формула (4).

Доказательство также можно выполнить, применяя матричные формулировки. Для этого равенство (9) запишем в новой системе координат. Будем иметь

$$[\mathrm{T}]^T\{\mathrm{p}'\} = [A][\mathrm{T}]^T\{n'\}.$$

Это равенство слева умножим на матрицу [T]. Учитывая, что матрица преобразования поворота является ортогональной, получим

$$\{\mathrm{p}'\} = [\mathrm{T}][A][\mathrm{T}]^T\{n'\}.$$

Соотношение (9) в новой системе координат имеет вид

$$\{\mathrm{p}'\} = [A']\{n'\}.$$

Отсюда следует, что компоненты матрицы $[A']$ могут быть найдены по формуле (7). Это означает, что величины a_{ij} являются компонентами тензора второго ранга. Доказанное утверждение называется обратным тензорным признаком.

Тензор второго ранга называется симметричным, если справедливо соотношение $a_{ij}=a_{ji}$. Можно определить компоненты обратного тензора $\mathbf{A}^{-1}$. Правила вычисления его компонент такие же, как и для матриц.

Как и в случае квадратных матриц, тензоры можно складывать, умножать на скалярную величину. В результате этих операций также получаем тензоры, компоненты которых рассчитываются по тем же формулам, что и для матриц. Для двух тензоров **A** и **B** можно получить произведение **C=A·B.** В итоге также получаем тензор второго ранга. Формула для вычисления его компонент имеет такой вид

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}.$$

Так же, как и для матриц существует понятие следа тензора. След тензора определяется по формуле

$$tr\mathbf{A} = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Покажем, что след тензора является величиной инвариантной, т.е. его значение не изменяется при преобразовании поворота системы координат. Другими словами, его значение не зависит от выбора системы координат.

Действительно, с помощью формулы (6) определим след тензора в новой системе координат. Имеем следующее равенство

$$tr\mathbf{A}' = a'_{ss} = \alpha_{si}\alpha_{sj}a_{ij}.$$

Учитывая, что для компонент ортогональной матрицы [T] справедливо соотношение $\alpha_{si}\alpha_{sj} = \delta_{ij}$, отсюда получим

$$tr\mathbf{A}' = a'_{ss} = \delta_{ij}a_{ij} = a_{ii} = tr\mathbf{A}.$$

Скалярную величину $tr\mathbf{A}$ называют первым инвариантом тензора второго ранга и обозначают следующим образом

$$i_1 = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{10}$$

Кроме первого инварианта можно ввести в рассмотрение второй и третий инварианты. Второй инвариант i_2 является следом тензора $\mathbf{A^2}$, т.е.

$$i_2 = tr\mathbf{A}^2 = a_{ij}a_{ji}. \tag{11}$$

В развёрнутом виде будем иметь

$$i_2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{13}a_{31} + 2a_{23}a_{32}.$$

Выражение для третьего инварианта i_3 находим из равенства

$$i_3 = tr\mathbf{A}^3 = a_{is}a_{sk}a_{ki}. \tag{12}$$

В общем случае в развёрнутом виде это выражение весьма громоздкое. В некоторых случаях его можно упростить. Например, для симметричного тензора его можно представить таким образом

$$i_3 = a_{11}^3 + a_{22}^3 + a_{33}^3 + 3a_{11}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2\right) + 3a_{22}\left(a_{12}^2 + a_{23}^2\right) + 3a_{33}\left(a_{13}^2 + a_{23}^2\right) + 6a_{12}a_{13}a_{23}.$$

Как видно из формул (9)-(11), инварианты тензора i_1, i_2, i_3 представляют собой полиномы первой, второй и третьей степеней относительно его компонент. Можно показать, что инварианты последующих степеней, т.е. выше третьей, могут быть выражены через i_1, i_2, i_3. Таким образом, тензор второго ранга содержит три взаимно независимых инварианта.

Вопросы для самоподготовки

1. Даны два вектора $\vec{m} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ и $\vec{n} = -8\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$. Определить произведения $\vec{m}\cdot\vec{n}$, $\vec{m}\times\vec{n}$, $\vec{m}\otimes\vec{n}$.

2. Записать равенства (6) для случаев: а) s=k=2; б) s=1, k=3.

3. Единична матрица [E] соответствует единичному тензору **E**. Записать разложение этого тензора по базисным диадам.

4. Используя тождество $\left([\mathrm{A}][\mathrm{B}]\right)^T = [B]^T[\mathrm{A}]^T$, доказать, что матрица $[\mathrm{A}']$, вычисляемая в соответствии с формулой (7), симметрична при условии, что симметрична матрица [A].

5. Даны два тензора

$$\mathbf{A} = 2\vec{e}_1\vec{e}_1 + 4\left(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1\right) - \vec{e}_2\vec{e}_2 + 8(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) - 6\vec{e}_3\vec{e}_3,$$
$$\mathbf{B} = -3\vec{e}_1\vec{e}_1 + 5\left(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1\right) + 7\vec{e}_2\vec{e}_2 + 2(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + 9(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + 4\vec{e}_3\vec{e}_3,$$

Чему равно произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$?

6. Доказать равенство $tr\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right) = tr\mathbf{A} + tr\mathbf{B}$.

7. Задан тензор $\mathbf{A} = 4\vec{e}_1\vec{e}_1 + 6\left(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1\right) - 2\vec{e}_2\vec{e}_2 + 10(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + 8\vec{e}_3\vec{e}_3$. Определить его компоненты в новой системе координат. Матрица преобразования поворота имеет следующий вид

$$\left[T\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Убедиться, что значения величин i_1, i_2, i_3 не изменились.

8. Используя результаты предыдущей задачи, проверить равенство

$$i_3 = \frac{1}{2} i_1 \left(3i_2 - i_1^2\right) + 3I_3,$$

где I_3= det[A].