Лекция 3. Определение напряжений и деформаций в монослоях многослойного композиционного материала

Неотъемлемой частью расчета конструкций из многослойных композитов является вычисление напряжений и деформаций в монослоях, образующих композит. Эти напряжения и деформации необходимы, например, при анализе прочности конструкции, при расчетах за пределами упругости. Рассмотрим последовательность действий при выполнении данного расчета. Будем предполагать, что схема армирования рассматриваемого материала, а также характеристики упругости монослоев известны. Кроме этого, предполагаем, что в результате предварительного расчета определены компоненты вектора $\{\sigma_c\}$. Типичный расчет включает следующие действия.

1. По формулам (1.18) определяются компоненты матрицы жесткости $[G_c]$ слоистого композита.

2. Исходя из соотношения $[S_c]=[G_c]^{-1}$, вычисляются компоненты матрицы податливости $[S_c]$ материала.

3. По формуле $\{\varepsilon_c\}=[S_c]\{\sigma_c\}$ определяются деформации слоистого композита.

4. С учетом (1.14) по формуле $\{\varepsilon_i\}=[T_{2i}]^{-1}\{\varepsilon_c\}$ подсчитываются деформации каждого монослоя.

5. Искомые напряжения находятся с помощью закона Гука для монослоя, т.е. $\{\sigma_i\}=[D_i]\{\varepsilon_i\}$.

Таким образом, напряжения и деформации в монослоях связаны с напряжениями, действующими на слоистый материал, следующими матричными зависимостями

$$\left.\begin{aligned}\{\sigma_i\}&=[D_i][T_{2i}]^{-1}[S_c]\{\sigma_c\},\\ \{\varepsilon_i\}&=[T_{2i}]^{-1}[S_c]\{\sigma_c\}.\end{aligned}\right\}$$

Как и следовало ожидать, искомые величины прямо пропорциональны напряжениям в многослойном КМ. Отметим, что представленный способ расчета наиболее эффективен при использовании компьютерной техники.

Пример. Многослойный КМ с продольно-поперечным армированием, показанным на рис.1.6, нагружен растягивающими напряжениями σ_x и σ_y. Определить напряжения и деформации в монослоях материала. Характеристики упругости монослоя известны. При расчёте эффектом Пуассона пренебречь. В монослоях использованы одинаковые наполнитель и связующее.

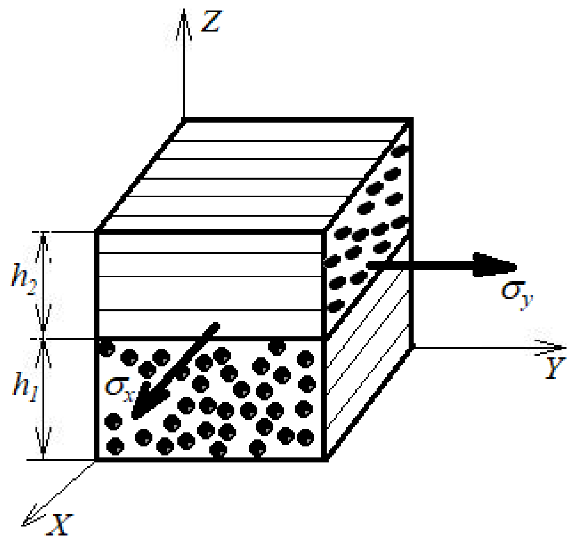

Рис.1.6. Многослойный КМ с продольно-поперечным армированием

Обозначим, как обычно, характеристики монослоя через E_1, E_2 , G_{12}. В данном случае эффектом Пуассона пренебрегаем, т.е. полагаем, что $\nu_{12}=\nu_{21}=0$. Действительно, для некоторых композитов, например углерод-углеродных материалов на основе тканого наполнителя, этими величинами при выполнении расчётов можно пренебречь, так как их значения не превышают 0,1. Тогда закон Гука для монослоя принимает простой вид

$$\sigma_{11} = E_1\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = E_2\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} = G_{12}\gamma_{12}. \qquad (1.30)$$

Матрица жёсткости в этом случае имеет диагональный вид

$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

Схема армирования рассматриваемого КМ описана в лекции 2. Она имеет такое аналитическое представление

$$\varphi_1 = 0^\circ, \quad \varphi_2 = 90^\circ, \quad \delta_1 = \frac{n}{n+m}, \ \delta_2 = \frac{m}{n+m}.$$

В соответствии с предложенным выше алгоритмом расчёта определяем матрицу жёсткости материала. По формулам (1.18) получим

$$[\mathrm{G}_c]=\begin{bmatrix} E_1\delta_1+E_2\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & E_1\delta_2+E_2\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

Матрица упругих податливостей монослоя в силу принятых допущений находится просто. Она имеет такой вид

$$[\mathrm{S}_c]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1\delta_1+E_2\delta_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{E_1\delta_2+E_2\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Средние деформации в многослойном КМ вычисляются по формулам

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_1\delta_1+E_2\delta_2},\quad \varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E_1\delta_2+E_2\delta_1},\quad \gamma_{xy}=0.$$

Определим деформации в монослоях. Для первого монослоя с углом армирования φ_1=0° будем иметь $\left[T_2^{(1)}\right]^{-1}=[E]$. Поэтому получим $\varepsilon_{11}^{(1)}=\varepsilon_x$, $\varepsilon_{22}^{(1)}=\varepsilon_y$, $\gamma_{12}^{(1)}=0$.

Для второго монослоя при φ_2=90° следует

$$\left[T_2^{(2)}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда имеем $\varepsilon_{11}^{(1)}=\varepsilon_y$, $\varepsilon_{22}^{(1)}=\varepsilon_x$, $\gamma_{12}^{(1)}=0$.

В соответствии с законом Гука в форме (1.30) для первого монослоя напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{11}^{(1)}=E_1\varepsilon_{11}^{(1)}=\frac{E_1\sigma_x}{E_1\delta_1+E_2\delta_2},\quad \sigma_{22}^{(1)}=E_2\varepsilon_{22}^{(1)}=\frac{E_2\sigma_y}{E_1\delta_2+E_2\delta_1},\quad \gamma_{12}^{(1)}=0.$$

Для второго монослоя получаем зависимости

$$\sigma_{11}^{(2)}=E_1\varepsilon_{11}^{(2)}=\frac{E_1\sigma_y}{E_1\delta_2+E_2\delta_1},\quad \sigma_{22}^{(2)}=E_2\varepsilon_{22}^{(2)}=\frac{E_2\sigma_x}{E_1\delta_1+E_2\delta_2},\quad \gamma_{12}^{(2)}=0.$$

Заметим, что если учитывать эффект Пуассона, т.е. $\nu_{12} \neq 0,\ \nu_{21} \neq 0$, решение усложняется. Например, выражения для модулей упругости моногослойного КМ будут иметь такой вид

$$E_x = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[E_1\delta_1 + E_2\delta_2 - \frac{(E_2\nu_{12})^2}{E_1\delta_2 + E_2\delta_1}\right],$$
$$E_y = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[E_2\delta_1 + E_1\delta_2 - \frac{(E_2\nu_{12})^2}{E_1\delta_1 + E_2\delta_2}\right].$$

Отсюда видно, что уточненные значения модулей упругости отличаются от полученных выше приближённых на величину, пропорциональную $(E_2\nu_{12})^2$. Если предположить, что E_1=60 ГПа, E_2=10 ГПа, ν_{12}=0,25, δ_1=0,6, δ_2=0,4, то поправка составит ≈1%. При этом ν_{xy}=0,083, т.е. эффект Пуассона для рассматриваемого КМ выражен незначительно.

Пример. Металлокомпозитный баллон (рис.1.7) нагружен внутренним давлением p. Радиус его цилиндрической части равен R. Толщины металлического лейнера и кольцевого композитного слоя равны соответственно h_1 и h_2. Характеристики упругости материалов известны. Определить напряжения и деформации в металлическом лейнере и композитном слое на цилиндрической части баллона. Для композитного материала использовать нитяную модель.

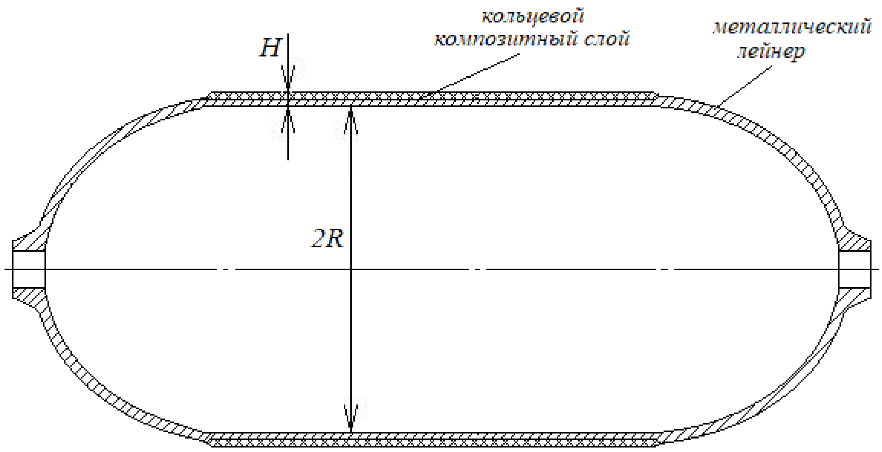

Рис.1.7. Металлокомпозитный баллон давления

Напряженное состояние цилиндрической части баллона вдали от линий ее сопряжения с днищами является однородным. Поэтому можно рассмотреть бесконечно малую окрестность произвольной точки этой области (рис.1.8).

Систему координат выберем так, чтобы направление оси OX_1 совпадало с направлением образующей, ось OX_2 направим по касательной к круговому сечению цилиндрической части, а ось OX_3 – перпендикулярно поверхности цилиндрической части (рис.1.8б). Определим сначала средние напряжения в окрестности рассматриваемой точки.

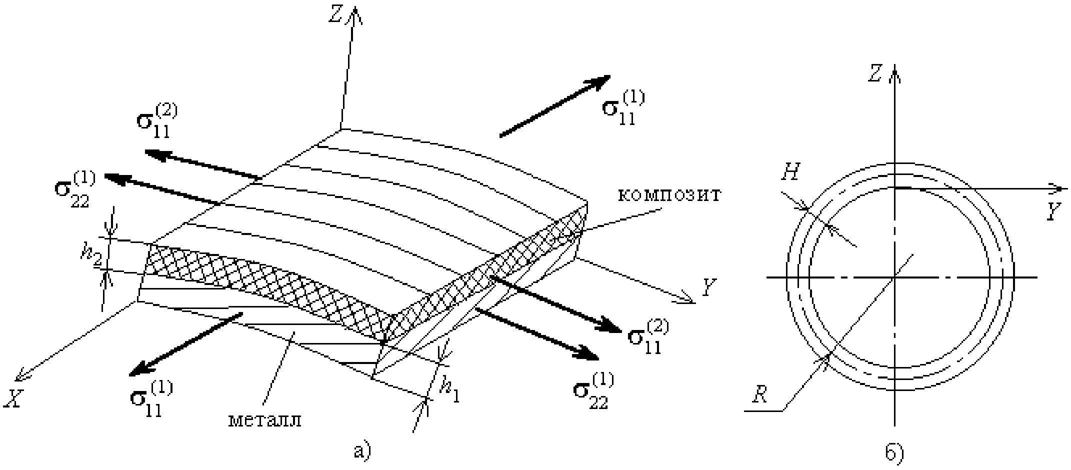

Рис.1.8. Напряжённое состояние цилиндрической части металлокомпозитного баллона давления

Будем предполагать, что полюсные отверстия днищ баллона закрыты крышками, цилиндрическая часть является тонкостенной, т.е. H/R<<1, где $H=h_1+h_2$ - полная толщина цилиндрической части. Тогда средние напряжения можно определить с помощью формул, известных из курса сопротивления материалов. В направлении образующей действует нормальное напряжение $\sigma_x=pR/(2H)$, в окружном – нормальное напряжение $\sigma_x=pR/H$. Касательные напряжения равны нулю. Таким образом, вектор средних напряжений многослойного материала имеет вид

$$\{\sigma_c\} = \left(\frac{pR}{2H},\ \frac{pR}{H},\ 0 \right)^T . \tag{1.31}$$

В данном случае количество слоев равно двум. Относительная толщина металлического слоя будет $\delta_1=\delta=h_1/H$, композитного слоя - $\delta_2=1-\delta=h_2/H$. Угол армирования отсчитывается от образующей цилиндра. Для металлического лейнера принимаем $\varphi_1=0^0$, а для композитного слоя - $\varphi_2=90^0$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона металла обозначим через E и ν соответственно. Для однонаправленного волокнистого композита имеем $E_1 \neq 0$, $E_2=0$, $G_{12}=0$, $\nu_{12}=\nu_{21}=0$ и $\mathbf{E_1' = E_1}$.

Элементы матрицы жёсткости рассматриваемого многослойного материала были определены ранее. Они представлены в формулах (2.9) лекции 2. Следовательно, матрица жесткости будет иметь такой вид

$$\left[G_c\right]=\begin{bmatrix} \frac{E\delta}{1-\nu^2} & \frac{E\nu\delta}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu\delta}{1-\nu^2} & \frac{E\delta}{1-\nu^2}+E_1(1-\delta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}.$$

Определим теперь матрицу податливости материала. В данном случае вычисления можно проводить по формулам (1.23). Получим выражение для параметра Δ. После преобразований будем иметь

$$\mathbf{\Delta = E^* \frac{E\delta}{1-\nu^2}},$$

где $E^*=E\delta+E_1(1\text{-}\delta)$ – средний модуль упругости многослойного КМ в окружном направлении. Тогда матрица податливости может быть представлена так

$$\left[S_c\right]=\begin{bmatrix} \frac{1+\gamma(1-\nu^2)}{E^*} & -\frac{\nu}{E^*} & 0 \\ -\frac{\nu}{E^*} & \frac{1}{E^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E\delta} \end{bmatrix} \qquad (1.32)$$

Через γ обозначено отношение жесткостей на растяжение композитного и металлического монослоев, т.е.

$$\mathbf{\gamma = \frac{E_1 h_2}{E h_1} = \frac{E_1(1-\delta)}{E\delta}}.$$

Используя (1.31) и (1.32), с помощью равенства $\{\varepsilon_c\}=[S_c]\{\sigma_c\}$ определим средние деформации многослойного композита. После преобразований получим

$$\{\varepsilon_c\} = \frac{pR}{2E^* H}\left(-\gamma\nu^2 - 2\nu + 1 + \gamma, \quad 2-\nu, \quad 0\right)^T.$$

При вычислении деформаций в монослоях применяем равенство $\{\varepsilon_i\} = [T_{2i}]^{-1}\{\varepsilon_c\}$. Тогда для металлического монослоя $\left[T_2^{(1)}\right]^{-1} = [E]$. Отсюда следует, что $\{\varepsilon_1\}=\{\varepsilon_c\}$. Для композитного монослоя получим

$$\left[T_2^{(2)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Деформации в этом монослое будут равны

$$\{\varepsilon_2\} = \frac{pR}{2E^* H}\left(2-\nu, \quad -\gamma\nu^2 - 2\nu + 1 + \gamma, \quad 0\right)^T.$$

Определим теперь напряжения в монослоях. Для металлического монослоя имеем

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}^{(1)} + \nu\varepsilon_{22}^{(1)}) = \frac{pRE}{2(1-\nu^2)HE^*}[-\gamma\nu^2 - 2\nu + 1 + \gamma + \nu(2-\nu)] = \frac{pR}{2h_1};$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}^{(1)} + \nu\varepsilon_{11}^{(1)}) = \frac{pRE}{2(1-\nu^2)HE^*}[2 - \nu + \nu(-\gamma\nu^2 - 2\nu + 1 + \gamma)] = \frac{pR}{2h_1}\frac{2+\nu\gamma}{1+\gamma};$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = 0.$$

Для композитного монослоя в соответствии с нитяной моделью запишем

$$\sigma_{11}^{(2)} = E_1\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{pRE_1}{2HE^*}(2-\nu) = \frac{pR}{2h_1}\frac{\delta\gamma(2-\nu)}{(1+\gamma)(1-\delta)}; \quad \sigma_{22}^{(2)} = 0; \quad \sigma_{12}^{(2)} = 0.$$

Из полученных соотношений вытекает, что напряженное состояние монослоев зависит не только от геометрических размеров цилиндрической части и внутреннего давления, но и от параметра γ. При $\gamma=0$, т.е. при отсутствии композитного слоя, будем иметь обычные соотношения для безмоментной цилиндрической оболочки $\sigma_{11}^{(1)}=\sigma_x=pR/(2H)$, $\sigma_{22}^{(1)}=\sigma_y=pR/H$. Можно показать, что для обеспечения равного двухосного растяжения металлического лейнера, т.е. для выполнения равенства $\sigma_{11}^{(1)}=\sigma_{22}^{(1)}$, должно выполняться соотношение $\gamma=1/(1-\nu)$. Отсюда следует одно из достоинств металлокомпозитного баллона:

путем рационального выбора материалов и толщины монослоев можно добиться равнонапряженности металлического лейнера.

Вопросы для самоподготовки

1. Для многослойного КМ с продольно-поперечным армированием, показанного на рис.1.6, определить напряжения и деформации в монослоях. Относительные толщины δ_1=0,6, δ_2=0,4. Характеристики упругости монослоя: E_1 =6 E_o, E_2= E_o, ν_{12}=0,25. Нагрузка $\sigma_x=\sigma_o$, $\sigma_y=2\ \sigma_o$.

   В монослоях использованы одинаковые наполнитель и связующее.
2. Решить задачу о напряжённом состоянии цилиндрической части металлокомпозитного баллона для случая, когда лейнер изготовлен из несжимаемого изотропного материала с модулем упругости $E=E_o$. Цилиндрическая часть усилена двойным спиральным слоем с углами намотки $\varphi=\pm 45°$. Для волокнистого КМ применить нитяную модель, полагая, что модуль упругости вдоль волокон равен $E_1=2E_o$. Для относительных толщин лейнера и композитного монослоя принять δ_1=1/3, δ_2=2/3. Геометрические размеры баллона таковы, что R/H=20.