



**Министерство науки и высшего образования Российской  
Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

---

ФАКУЛЬТЕТ

Специальное машиностроение

---

КАФЕДРА

СМ1 «Космические аппараты и ракеты-носители»

---

Домашнее задание №2  
по курсу «Строительная механика летательных аппаратов»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р.

Преподаватель: Печников В.П.

---

(Подпись, дата)

---

(Подпись, дата)

Москва, 2024

## 1 Условие задания

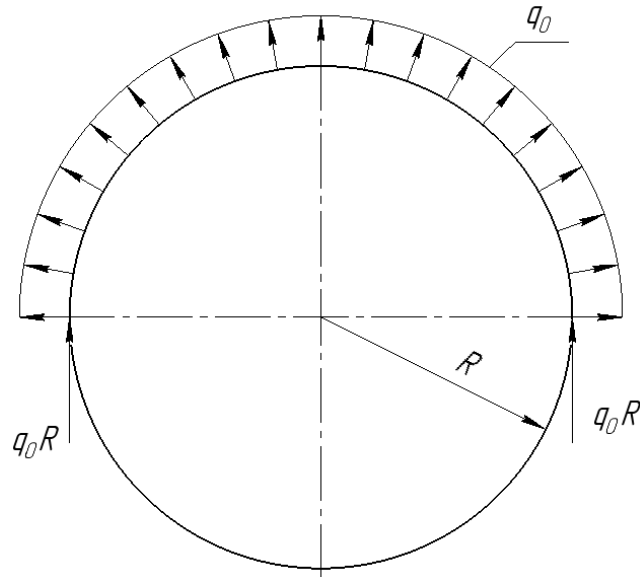


Рисунок 1.1 — Условие задания

В данном задании необходимо определить перемещения в кольце  $v$  и  $w$ .

## 2 Решение

Из предыдущего домашнего задания имеем следующие выражения:

- Уравновешивающая нагрузка:

$$t = \frac{4q_0}{\pi} \sin \varphi \quad (2.1)$$

- Момент на кольце:

$$\begin{cases} M_1 = q_0 R^2 \left( 1 - \frac{3}{\pi} \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \sin \varphi \right) \\ M_2 = q_0 R^2 \left( 2 \sin \varphi - \frac{3}{\pi} \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \sin \varphi - 1 \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Запишем разрешающее уравнение кольца:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = - \frac{R^3}{EJ} \left[ R \left( t + \frac{dQ}{d\varphi} \right) + \left( \frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m \right) \right] \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (2.4)$$

Коэффициенты можно найти по формулам:

$$\begin{cases} A_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2} \left[ a_n'' + nb_n' - \frac{1}{R}(n^2-1)a_n''' \right] \\ B_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2} \left[ b_n'' - na_n' - \frac{1}{R}(n^2-1)b_n''' \right] \end{cases} \quad (2.5)$$

Коэффициент  $A_0$  задает перемещение всего кольца как одно целое, поэтому задаем его равным  $A_0 = 0$ .

Коэффициенты в формуле (2.5) можно найти по формулам:

$$\begin{pmatrix} a_n' \\ a_n'' \\ a_n''' \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{pmatrix} \cos n\varphi d\varphi \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} b_n' \\ b_n'' \\ b_n''' \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{pmatrix} \sin n\varphi d\varphi \quad (2.7)$$

В нашем случае распределенная нагрузка равна:

$$q_n = q_0, \quad \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi > \frac{3\pi}{2} \quad (2.8)$$

$$q_t = t + q_{t1} + q_{t2} \quad (2.9)$$

$$m = 0 \quad (2.10)$$

Распределим сосредоточенную нагрузку  $q_0 R$ :

$$q_{ti} = \frac{q_0 R}{\pi R} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n(\varphi - \varphi_0)) \right] \quad (2.11)$$

$$q_{t1} = -\frac{q_0}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos n\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (2.12)$$

$$q_{t2} = \frac{q_0}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \quad (2.13)$$

Получим:

$$\begin{aligned}
q_t &= \frac{4q_0}{\pi} \sin \varphi - \frac{q_0}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos n \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] + \frac{q_0}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos n \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] = \\
&= \frac{q_0}{\pi} \left( 4 \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\cos n \frac{\pi}{2} \cos n \varphi - \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \varphi + \cos n \frac{\pi}{2} \cos n \varphi - \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \varphi \right) \right) = \\
&= \frac{q_0}{\pi} \left( 4 \sin \varphi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2} \sin n \varphi \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Получим следующие выражения для коэффициентов (2.6) и (2.7):

$$\begin{aligned}
a'_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_0 \cos n \varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} q_0 \cos n \varphi d\varphi \right) = \frac{q_0}{\pi n} \left( \sin n \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin n \varphi \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) = \\
&= \frac{q_0}{\pi n} \left( \sin \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{3\pi n}{2} \right) = \frac{2q_0}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
b'_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_0 \sin n \varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} q_0 \sin n \varphi d\varphi \right) = -\frac{q_0}{\pi n} \left( \cos n \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos n \varphi \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) = \\
&= -\frac{q_0}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n}{2} - 1 + 1 - \cos \frac{3\pi n}{2} \right) = -\frac{q_0}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
a''_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_0}{\pi} \left( 4 \sin \varphi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{2} \sin k \varphi \right) \cos n \varphi d\varphi = \\
&= \frac{q_0}{\pi^2} \left( 4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos n \varphi d\varphi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{2} \int_0^{2\pi} \sin k \varphi \cos n \varphi d\varphi \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
b''_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_0}{\pi} \left( 4 \sin \varphi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{2} \sin k \varphi \right) \sin n \varphi d\varphi = \\
&= \frac{q_0}{\pi^2} \left( 4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin n \varphi d\varphi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{2} \int_0^{2\pi} \sin k \varphi \sin n \varphi d\varphi \right) = \\
&= \frac{q_0}{\pi^2} \left( 4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin n \varphi d\varphi - 2 \sin \frac{\pi n}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 n \varphi d\varphi \right) \\
&= \begin{cases} \frac{q_0}{\pi^2} \left( 4\pi - 2\pi \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2q_0}{\pi}, & n = 1 \\ -\frac{2q_0}{\pi} \sin \frac{\pi n}{2}, & n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} a'''_n = 0 \\ b'''_n = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Проверим полученные коэффициенты с помощью выражений:

$$\begin{cases} B - a_1'' + b_1' = 0 \\ C - b_1'' - a_1' = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$0 - 0 + 0 = 0 \frac{4q_0}{\pi} - \frac{2q_0}{\pi} - \frac{2q_0}{\pi} = 0 \quad (2.21)$$

Условия (2.20) выполняются, значит коэффициенты найдены правильно.

Получим коэффициенты разложения (2.5):

$$A_n = 0 \quad (2.22)$$

$$B_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2 - 1)^2} \left[ -\frac{2q_0}{\pi} \sin \frac{\pi n}{2} - n \frac{2q_0}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} \right] = -\frac{4q_0 R^4}{\pi EJn^2(n^2 - 1)^2} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (2.23)$$

Получим следующее разложение функции касательных перемещений:

$$v = -\frac{4q_0 R^4}{\pi EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)^2} \sin \frac{\pi n}{2} \sin n\varphi \quad (2.24)$$

Примем количество членов ряда (2.4) равным  $N = 50$ . Построим эпюры перемещений и изгибающего момента:

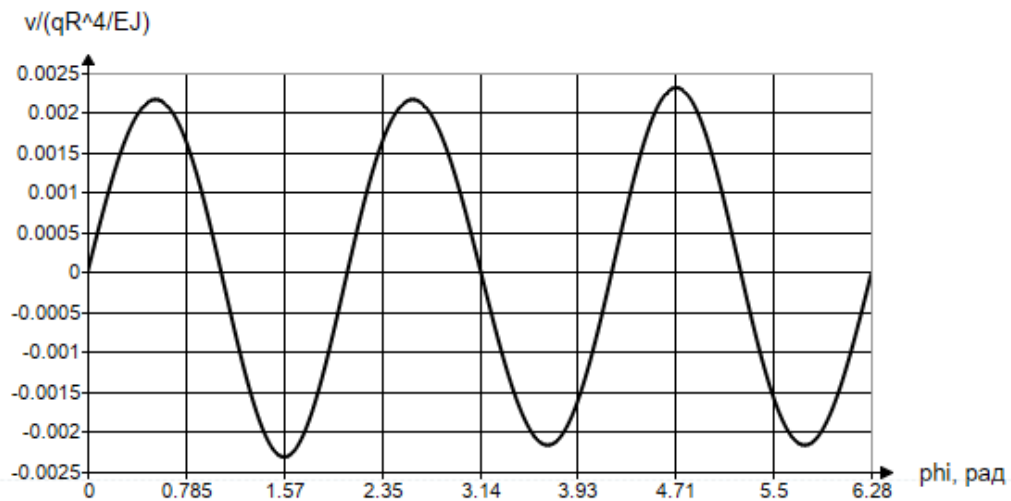


Рисунок 2.1 — Эпюра касательных перемещений

Найдем нормальные перемещения:

$$w = -\frac{dv}{d\varphi} = \frac{4q_0 R^4}{\pi EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)^2(n+1)^2} \sin \frac{\pi n}{2} \cos(n\varphi) \quad (2.25)$$

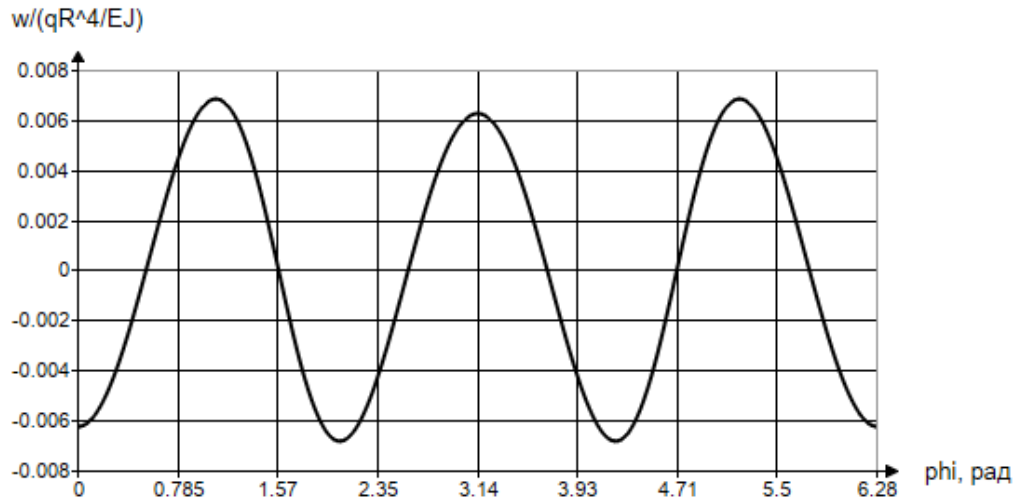


Рисунок 2.2 — Эпюра нормальных перемещений

Найдем изгибающий момент:

$$M = \frac{EJ}{R^2} \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) = -\frac{4q_0 R^2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)} \sin \frac{\pi n}{2} \cos n\varphi \quad (2.26)$$

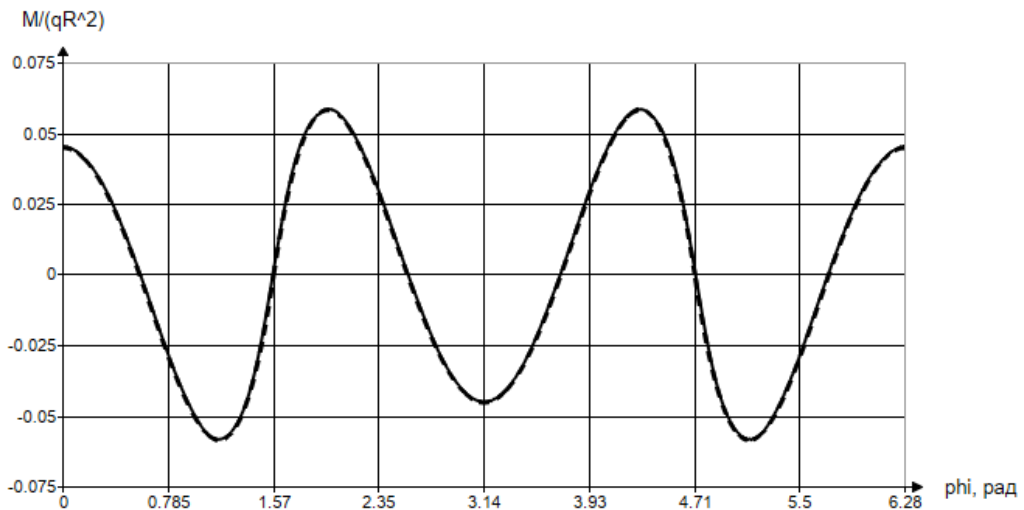


Рисунок 2.3 — Эпюра изгибающего момента

Сплошной линией обозначено текущее решение  $M_2(\varphi)$ , а прерывистой — аналитическое решение из прошлого задания  $M_1(\varphi)$ . Для сравнения возьмем значения моментов в нескольких точках:

- $\varphi = 0$  :  $M_1(0) = 0.0451$ ;  $M_2(0) = 0.0451$
- $\varphi = \frac{\pi}{4}$  :  $M_1(\frac{\pi}{4}) = -0.02879$ ;  $M_2(\frac{\pi}{4}) = -0.02891$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$  :  $M_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ ;  $M_2(\frac{\pi}{2}) = 0.00003$

- $\varphi = \frac{3\pi}{4} : M_1(\frac{3\pi}{4}) = 0.02879; M_2(\frac{3\pi}{4}) = 0.02889$
- $\varphi = \pi : M_1(\pi) = -0.04507; M_2(\pi) = -0.04515$
- $\varphi = \frac{5\pi}{4} : M_1(\frac{5\pi}{4}) = 0.02879; M_2(\frac{5\pi}{4}) = -0.02885$
- $\varphi = \frac{3\pi}{2} : M_1(\frac{3\pi}{2}) = 0; M_2(\frac{3\pi}{2}) = -0.00003$
- $\varphi = \frac{7\pi}{4} : M_1(\frac{7\pi}{4}) = -0.02879; M_2(\frac{7\pi}{4}) = -0.02899$

Как можно увидеть, решения с высокой точностью совпадают.