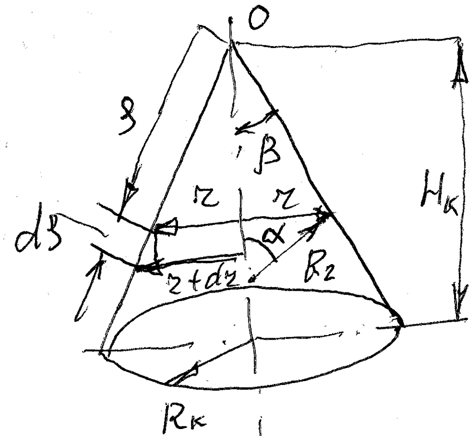
Неосесимметричное нагружение безмоментной оболочки.



В конической оболочке
$\alpha = const$, $R_1 \to \infty$

$R_2 = \frac{r}{\sin\alpha}$

$\underbrace{ds = R_1 d\alpha \quad dr = \cos\alpha\, ds.}_{\text{из рисунка.}}$

Ур-я для конуса из общих уравнений безмоментной оболочки

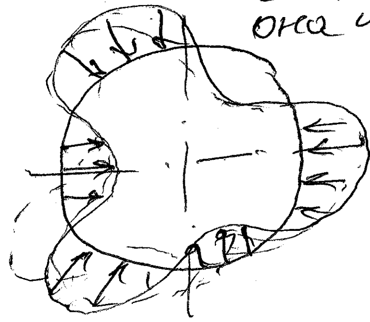
$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{(T_1 - T_2)}{s} + \frac{\partial S'}{s\cos\alpha\,\partial\beta} = -p_1$$

$$\frac{\partial S'}{\partial s} + \frac{2S'}{s} + \frac{\partial T_2}{s\cos\alpha\,\partial\beta} = -p_2$$

$$T_2 = p_3 s\, ctg\,\alpha.$$

Пусть конус нагружен ветровой нагрузкой вида $p_3 = \underbrace{-p_0 s^2}_{= p_{3n}} \cos n\beta$

если $n=3$ она имеет вид



$$p_1 = p_2 = 0$$

Разделяем переменные

$$T_1 = \sum_{n=1,2\ldots}^{\infty} T_{1n}\cos n\beta, \quad T_2 = \sum_{n=1,2\ldots}^{\infty} T_{2n}\cos n\beta$$

$$S' = \sum_{n=1,2}^{\infty} S'_n \sin n\beta \quad p_3 = \sum_{n=1,2}^{\infty} p_{3n}\cos n\beta$$

Подставим в исходные уравнения

$$\frac{dT_{1n}}{ds} + \frac{T_{1n} - T_{2n}}{s} + \frac{nS'_n}{s\cos\alpha} = 0$$

$$\frac{dS'_n}{ds} + \frac{2S'_n}{s} - \frac{n}{s\cos\alpha}T_{2n} = 0$$

$$T_{2n} = p_{3n} s\, ctg\,\alpha.$$

Преобразуем уравнения к виду удобному для интегрирования

$$\frac{1}{s}\frac{d(sT_{1n})}{ds}=\frac{T_{2n}}{s}-\frac{nS'_n}{s\cos\alpha}$$

$$\frac{1}{s^2}\frac{d(s^2S'_n)}{ds}=\frac{n}{s\cos\alpha}T_{2n}$$

$$T_{2n}=p_{3n}\,s\,ctg\alpha.$$

Подставим T_{2n} и p_{3n} во второе уравнение

$$\frac{d}{ds}(s^2S'_n)=-\frac{ns^2\cdot s^2}{\sin\alpha}p_0$$ откуда

$$S'_n=-\frac{ns^5}{5\sin\alpha}\frac{1}{s^2}p_0+\cancel{\frac{C_{1n}}{s^2}}\to 0$$ ← при $s=0$ $S'_n=0$ и $C_{1n}=0$

из первого уравнения

$$\frac{1}{s}\frac{d(sT_{1n})}{ds}=-p_0\frac{s^3ctg\alpha}{s}+\frac{n^2s^3}{5\sin\alpha}p_0\frac{1}{s\cos\alpha}=$$

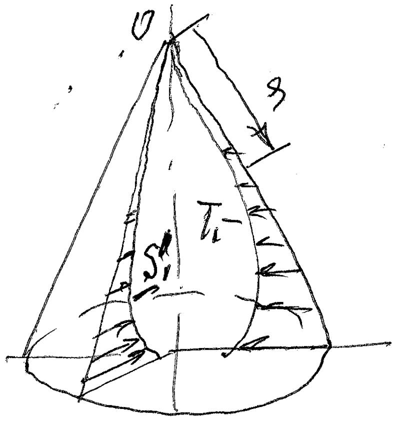
$$=-p_0s^2\left(ctg\alpha-\frac{n^2}{5\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

откуда $T_{1n}=-p_0\left(ctg\alpha-\frac{2n^2}{5\sin2\alpha}\right)\frac{s^4}{4\cdot s}+\cancel{\frac{C_{2n}}{s}}\to 0.$

при $s=0$ $T_{1n}=0\Rightarrow C_2=0$

Итак $T_{1n}=-p_0\left(ctg\alpha-\frac{2n^2}{5\sin2\alpha}\right)\frac{s^3}{4}$; $T_{2n}=-p_0s^3ctg\alpha$, $S'_n=-\frac{ns^3}{5\sin\alpha}p_0$

рассмотрим случай $n=1$, т.е.

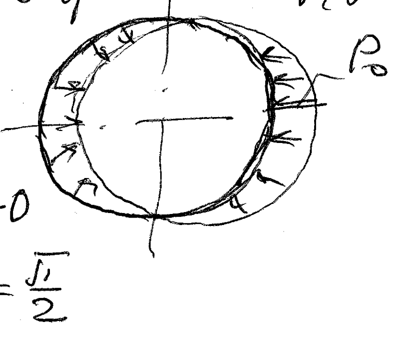


$$T_{11}=-p_0\left(ctg\alpha-\frac{2}{5\sin2\alpha}\right)\frac{s^3}{4}$$

$$T_{21}=-p_0s^3ctg\alpha$$

$$S'_1=-\frac{ns^3}{5\sin\alpha}p_0.$$

ветровая нагрузка $n=1$

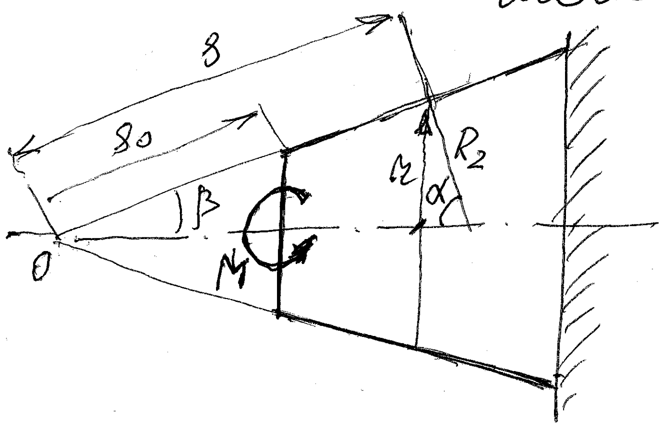


В окружном направлении

$T_1=T_{11}\cos\beta$ — макс при $\beta=0$

$S'_1=S'_{11}\sin\beta$ — макс при $\beta=\frac{\pi}{2}$

Нагружение конической оболочки моментом.



$r = s\cos\alpha = s\sin\beta$

Используем ур-я в частных производных

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{T_1 - T_2}{s} + \frac{\partial S'}{s\cos\alpha\,\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial S'}{\partial s} + \frac{2S'}{s} = 0 \qquad \text{т.к. } T_2 = 0 \rightarrow \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = 0$$

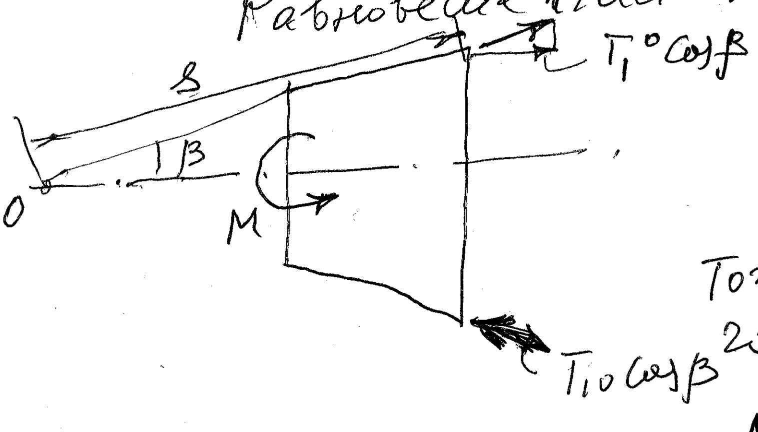
$$R_1 \to \infty \; - \; T_2 = 0$$

Из последнего уравнения

$$\frac{\partial (s^2 S')}{\partial s} = 0 \rightarrow S' = \frac{F(\varphi)}{s^2}$$

где $F(\varphi)$ – функция, не зависящая от s, а только от угла φ.

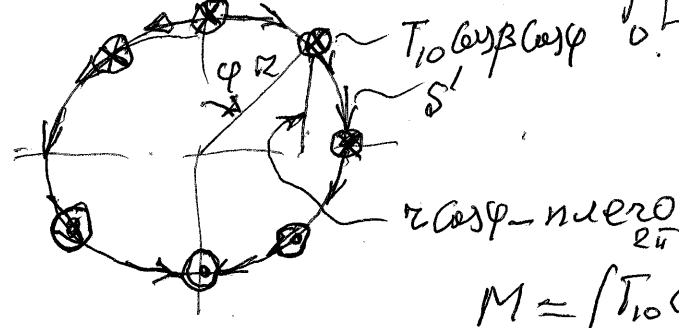
Равновесие части кольца (сечение s).



В произвольном сечении считаем, что $T_1 = T_{10}\cos\beta\cos\varphi$ проекция силы.

Тогда уравнение равновесия части оболочки

$$M = \int_0^{2\pi} \underbrace{T_{10}\cos\beta\cdot\cos\varphi}_{T_1} \cdot \underbrace{r\cos\varphi}_{\text{плечо см. рис.}} \cdot \underbrace{r\,d\varphi}_{\text{участок окружности с которого собирают силы } T_1}$$



$$M = \int_0^{2\pi} T_{10}\cos\beta\,\cos^2\varphi\, r^2\, d\varphi = \pi T_{10}\cos\beta\, r^2$$

Значит $T_1^0 = \frac{M}{\pi \cos\beta\, r^2} = \frac{M}{\pi s^2 \sin^2\beta \cos\beta}$

$r = s \cdot \sin\beta$ M - момент задан

Значит

$$T_1 = T_{10} \cos\varphi = \frac{M \cos\varphi}{\pi s^2 \sin^2\beta \cos\beta}$$

Находим сдвигающую силу S'!

Из первого общего уравнения, подставив T_1

$$\frac{\partial S'}{s \cos\alpha\, \partial\varphi} = -\frac{\partial T_1}{\partial s} - \frac{T_1}{s} = \frac{M}{\pi \sin^2\beta \cos\beta}\left(\frac{2\cos\varphi}{s^3} - \frac{\cos\varphi}{s^3}\right) =$$

$$= \frac{M}{\pi \sin^2\beta \cos\beta} \cdot \frac{\cos\varphi}{s^3}$$

значит

$$\frac{\partial S'}{\cos\alpha\, \partial\varphi} = \frac{M}{\pi \sin^2\beta \cos\beta} \cdot \frac{\cos\varphi}{s^2}$$ учтем, что $\cos\alpha = \sin\beta$

Интегрируем и записываем сдвиг. силу.

$$S' = \frac{M \sin\beta}{\pi \sin^2\beta \cos\beta\, s^2} \sin\varphi + C_1(s)$$

$C_1(s)$ не зависит от φ

Но $S' = F(\varphi)/s^2$ см. выше после общих уравнений

Сравнивая для выражения для S' приходим к выводу, что $C_1(s) = 0$.

Значит $F(\varphi) = \frac{M \sin\beta}{\pi \sin^2\beta \cos\beta} \sin\varphi$

Следовательно,

$$S' = \frac{M \operatorname{tg}\beta}{\pi \sin^2\beta} \sin\varphi$$

Погонные силы S' образовывают равнодействующую → перерезывающую силу Q

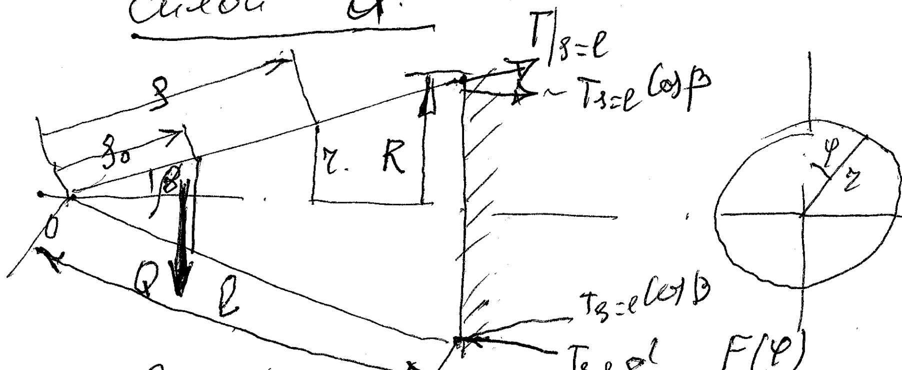
собираем S' с участка оболочки $r\, d\varphi$ и интегрируем от 0 до 2π

Из S' образуется Q.

$$Q=\int_0^{2\pi} S' r\,d\varphi\,\sin\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{M\,tg\beta}{\pi\sin^2\beta\,S^2}\,S\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi M\,tg\beta}{\pi\sin^2\beta\,S}$$

$$Q=\frac{M\,tg\beta}{S\sin^2\beta}.$$

Коническая оболочка с поперечной силой Q.



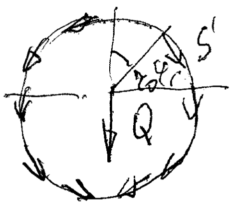
Задача решается на основе тех же уравнений, что и предыдущая для нагружения оболочки моментом M.

Из предыдущего $S'=\dfrac{F(\varphi)}{S^2}$.

Функцию $F(\varphi)$ определим из условия при S_0 где задана сила Q.

Считаем $S'|_{S=S_0}=S'_0\sin\varphi$. Тогда на границе при $S=S_0$

$$Q=\int_0^{2\pi}S'_0\sin\varphi\cdot r_0\,d\varphi\,\sin\varphi=S'^0\pi r_0$$



значит, $$S'^0=\frac{-Q}{\pi r_0}=\frac{-Q}{\pi S_0\sin\beta}$$

$$\frac{r_0}{S_0}=\sin\beta$$

значит $$S'|_{x=x_0}=\frac{-Q}{\pi S_0\sin\beta}\sin\varphi=\frac{F(\varphi)}{S_0^2}$$

значит $$F(\varphi)=\frac{-Q S_0\sin\varphi}{\pi\sin\beta}$$

Значит $$S'=\frac{F(\varphi)}{S^2}=\frac{-Q S_0\sin\varphi}{\pi\sin\beta\,S^2}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial\varphi}=\frac{-Q S_0\cos\varphi}{\pi\sin\beta\,S^2}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{T_1}{s} = + \frac{Q s_0 \cos\varphi}{\pi \sin\beta \cdot \sin\beta\, s^3}$$

т.к. $\cos\alpha = \sin\beta$

$$\frac{1}{s}\frac{\partial (s T_1)}{\partial s} = + \frac{Q s_0 \cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s^2}$$

$$T_1 = - \frac{Q s_0 \cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s \cdot s} + \frac{E(\varphi)}{s}$$

Функция $E(\varphi)$ не зависит от s.

Считаем, что $T_1\big|_{s=s_0} = 0$

$$0 = - \frac{Q s_0 \cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s_0^2} + \frac{E(\varphi)}{s_0} \to E(\varphi) = + \frac{Q \cos\varphi}{\pi \sin^2\beta}$$

Подставим $E(\varphi)$

$$T_1 = - \frac{Q s_0 \cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s^2} + \frac{Q\cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s} = \frac{Q(s - s_0)\cos\varphi}{\pi \sin^2\beta\, s^2}$$

Момент усилий от T_1 при $s = l$ в заделке

$$M\Big|_{x=l} = \int_0^{2\pi} T_1\Big|_{s=l} \cos\beta\, R^2 \cos\varphi\, d\varphi = \frac{Q(s_0 + l)}{\pi \sin^2\beta\, l^2} \cos\beta\, R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{Q(s_0 + l)\cos\beta\, l^2 \sin^2\beta}{\pi \sin^2\beta\, l^2}\pi = Q(s_0 + l)\cos\beta$$

$\frac{R}{l} = \sin\beta$

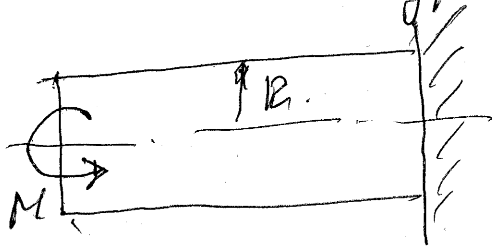
$R = l\sin\beta$

Значит:

$$M\Big|_{s=l} = Q(l - s_0)\cos\beta$$

это выражение можно найти непосредственно значит текущее значение сил T_1 и s найдено верно.

Цилиндрическая оболочка



Конус $T_1 = \frac{M\cos\varphi}{\pi s^2\sin^2\beta\cos\beta} = \frac{M\cos\varphi\,\cancel{\sin^2\beta}}{\pi r^2\,\cancel{\sin^2\beta}\cos\beta}$

$s = \frac{r}{\sin\beta}$

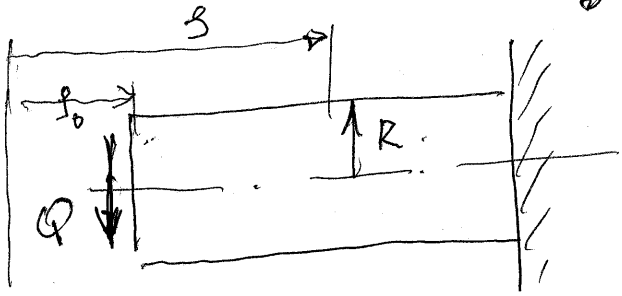
Цилиндр $r \to R$ $\beta = 0$ $T_1 = \frac{M}{\pi R^2}\cos\varphi$

$$S' = \frac{M\,tg\beta}{\pi\sin^2\beta\, s^2}\sin\varphi = \frac{M\,tg\beta\,\cancel{\sin^2\beta}}{\pi\,\cancel{\sin^2\beta}\, r^2}\sin\varphi$$

$$S' = \frac{M}{\pi}\,0\sin\varphi = 0$$

$$Q = \frac{M\sin\beta\,\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin\beta}\cos\beta\, r} = 0$$

$\beta = 0$



$$T_1 = \frac{Q(s-s_0)\cos\varphi}{\pi\sin^2\beta\, s^2} = \frac{Q(s-s_0)\cos\varphi\,\cancel{\sin^2\beta}}{\pi\,\cancel{\sin^2\beta}\, r^2}$$

$$T_1 = \frac{Q(s-s_0)}{\pi R^2}\cos\varphi.$$

$$S' = -\frac{Q s_0\sin\varphi}{\pi\sin\beta\, s^2} = -\frac{Q r_0\sin\varphi\,\cancel{\sin^2\beta}}{\pi\,\cancel{\sin\beta\sin\beta}\, r^2}$$

$r_0 = r = R$

$$S' = -\frac{Q}{\pi R}\sin\varphi.$$