

## **Лекция 6. Критерии разрушения**

### **однонаправленного волокнистого композиционного материала**

Рассмотрим критерии разрушения для однонаправленных волокнистых КМ, полученных на основе феноменологического подхода. Основное внимание уделим критериям, часто используемым в расчётах на прочность элементов конструкций из КМ.

Как было отмечено в предыдущей лекции, критерии разрушения разрабатываются на основе анализа большого массива экспериментальных данных о разрушении материалов. Эксперименты необходимо выполнять для каждого вида волокнистых КМ. При этом замена даже одного из компонентов материала, например, связующего, требует повторения всего комплекса опытов. Именно экспериментальным путём можно получить численные значения прочностных характеристик материала, входящих в выражение критерия разрушения (1.80). При таком подходе не рассматриваются процессы, происходящие в микроструктуре материала.

Однако в некоторых случаях можно обосновать критерий разрушения не только на основе обработки экспериментальных данных, но и посредством простейшего анализа возможных механизмов разрушения однонаправленного КМ. Например, исследование микроструктуры этого материала позволяет сформулировать предположение о том, что механизмы разрушения материала при растяжении вдоль волокон и при растяжении поперёк волокон будут различными. Вследствие такой анизотропии свойств материала можно прогнозировать возможный вид аналитического выражения критерия разрушения. Как известно, подобный приём, являющийся по сути сочетанием микромеханического и феноменологического подходов, в случае изотропных материалов был применён при обосновании критерия максимальных касательных напряжений.

### **Критерий максимальных напряжений**

Основными видами нагружения однонаправленного КМ являются растяжение и сжатие в направлении вдоль (в направлении оси  $OX_1$ ) и поперёк (в направлении оси  $OX_2$ ) волокон, чистый сдвиг в плоскости армирования (в

плоскости  $OX_1X_2$ ) (рис.1.23). В силу анизотропии материала на макроуровне и особенностей его микроструктуры можно предположить, что разрушение материала на микроуровне будет происходить по-разному в зависимости от вида нагружения.

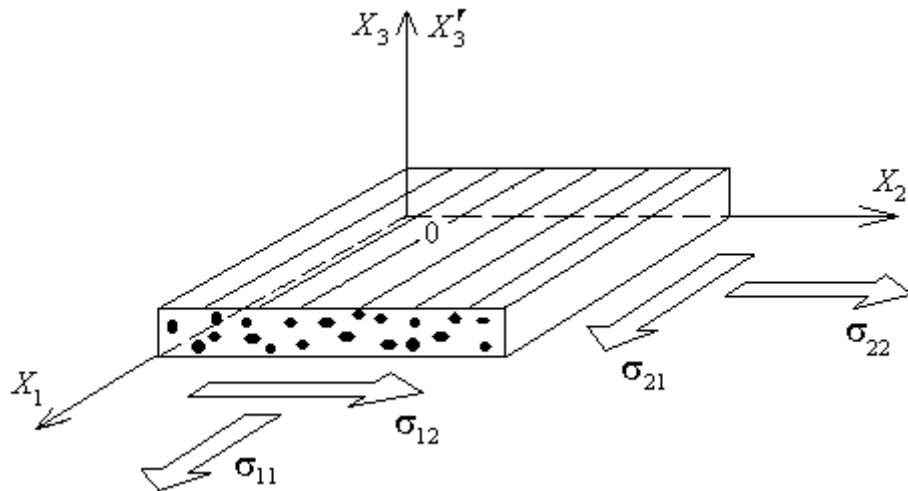


Рис.1.23. Нагружение однонаправленного КМ

Как и в случае описания упругих свойств, при анализе прочностных характеристик однонаправленный волокнистый КМ рассматриваем как сплошную ортотропную среду. Указанные виды нагружения будут порождать в микроструктуре материала разные механизмы разрушения. Под механизмом разрушения однонаправленного волокнистого КМ понимаются физико-механические процессы (образование микротрещин, пор, расслоений, разрывов волокон и пр.), происходящие в нём при отмеченных выше нагружениях. Понятно, что в данном случае будем иметь пять механизмов разрушения – при растяжении и сжатии вдоль волокон, при растяжении и сжатии поперёк волокон и при чистом сдвиге в плоскости армирования. Рассмотрим процессы, которые могут происходить в каждом из механизмов разрушения (рис.1.24).

1. При растяжении вдоль волокон (см. рис.1.24а) основную нагрузку воспринимают волокна, имеющие более высокие жесткостные и прочностные характеристики. При этом в волокнах происходит дробление, накапливаются микротрещины, которые могут прорасти в связующее. В итоге образуется магистральная трещина, приводящая к разрушению материала.

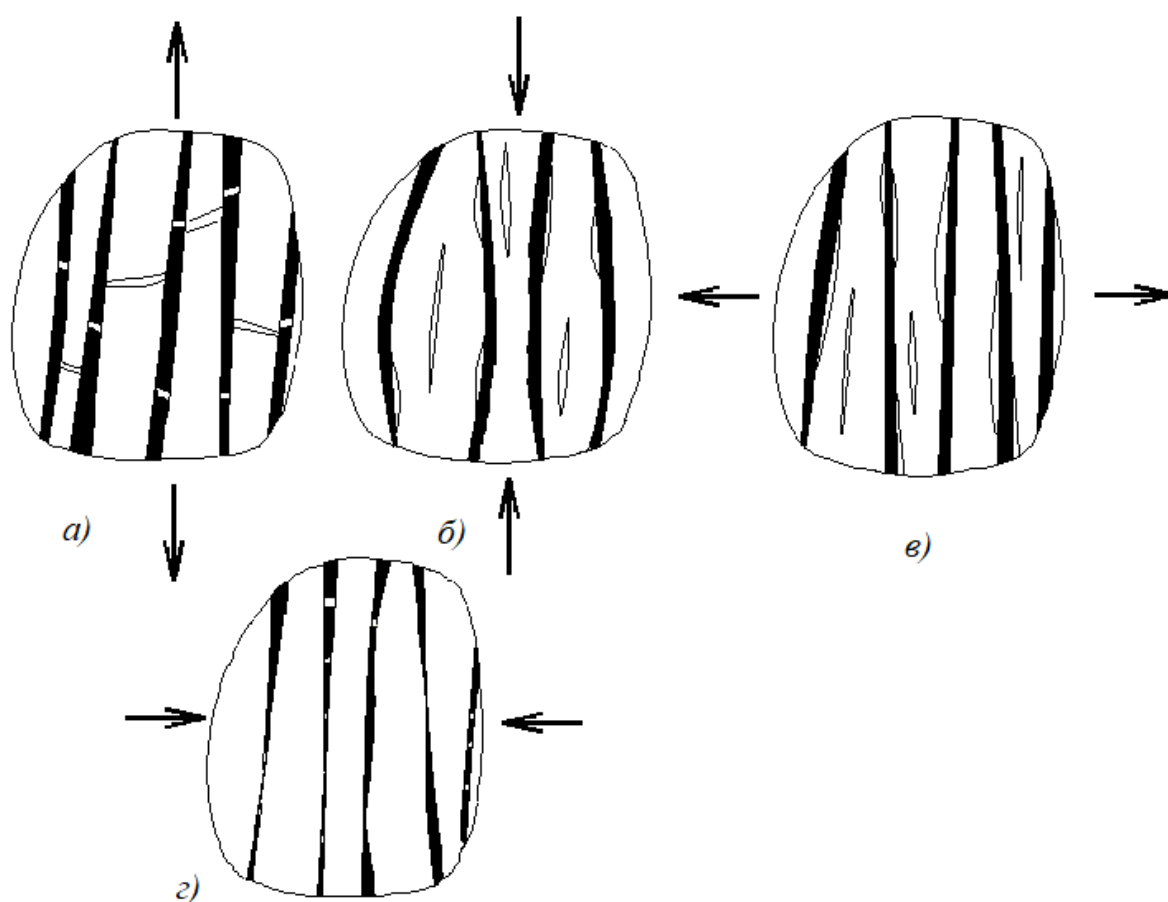


Рис.1.24. Разрушение однонаправленного волокнистого КМ  
в зависимости от вида нагружения

2. При сжатии вдоль волокон (см.рис.1.24б) механизм разрушения иной. Волокна можно рассматривать как отдельные прямолинейные стержни в упругой среде. При сжатии они теряют устойчивость, что может вызвать как расслоения по границам раздела волокна и связующего, так и образование продольных трещин в связующем. В итоге происходит исчерпание несущей способности материала.

3. При растяжении поперёк волокон (см. рис.1.24в) основную нагрузку воспринимают связующее и граница раздела. При таком нагружении образуются трещины в связующем, происходит образование расслоений и пустот по границе раздела. Накопление повреждений приводит к образованию магистральной трещины, ориентированной вдоль волокон. В результате этих процессов происходит разделение образца материала на части.

4. При сжатии поперёк волокон (см. рис.1.24г) происходит сдавливание волокон, как правило, весьма хрупких. В итоге происходит их дробление и смятие. Кроме этого, разрушается и менее прочное связующее. При возрастании нагрузки компоненты КМ фрагментируются. Это является причиной потери несущей способности материала.

5. При чистом сдвиге в плоскости армирования имеют место процессы, аналогичные процессам при растяжении поперёк волокон. Основную нагрузку воспринимает связующее. Разрушение материала происходит вследствие расслоений по границе раздела и исчерпания несущей способности связующего.

Микроструктурные исследования показывают, что представленные механизмы разрушения реализуются на практике для таких материалов, как стекло-, органо-, углепластики. Для этих материалов также было установлено, что виды нагружения не влияют численные значения величин, характеризующих приведённые выше механизмы разрушения. В этом смысле механизмы разрушения можно рассматривать как взаимно независимые. Например, чистый сдвиг не влияет на прочность материала при растяжении вдоль волокон и наоборот: растяжение вдоль волокон не оказывает влияние на прочностные свойства материала при чистом сдвиге.

Представленный анализ и экспериментальные данные позволили сформулировать следующий критерий разрушения однонаправленных волокнистых КМ: разрушение материала произойдёт, если выполнится одно из условий

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{11} = F_{+1}, \sigma_{11} > 0; \\ \sigma_{11} = -F_{-1}, \sigma_{11} < 0. \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} \sigma_{22} = F_{+2}, \sigma_{22} > 0; \\ \sigma_{22} = -F_{-2}, \sigma_{22} < 0. \end{array} \right\}; |\sigma_{12}| = F_{12}. \quad (1.95)$$

Здесь  $F_{+1}, F_{-1}, F_{+2}, F_{-2}, F_{12}$  – пределы прочности однонаправленного волокнистого КМ при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокон, т.е. вдоль осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , при чистом сдвиге в плоскости армирования  $Ox_1x_2$  соответственно.

Численные значения некоторых из этих параметров для разных материалов приведены в табл.1 (лекция 5). На основании приведённых выше механизмов разрушения однонаправленного КМ логично предположить, что материал не одинаково сопротивляется растягивающей и сжимающей нагрузки. Это выражается в неравенствах  $F_{+1} \neq F_{-1}$ ,  $F_{+2} \neq F_{-2}$ . Действительно, опытным путём установлено, что при нагружении вдоль волокон выполняется соотношение  $F_{+1} > F_{-1}$ , при нагружении поперёк волокон -  $F_{+2} < F_{-2}$ .

Критерий разрушения (1.95) называется критерием максимальных напряжений. Формулировка критерия в виде (1.95) имеет место только в системе координат однонаправленного КМ (см. рис.1.23). Указанные выше пределы прочности определяются экспериментально при соответствующих нагружениях. Из равенств (1.95) следует, что в пространстве напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  поверхностью разрушения является поверхность прямоугольного параллелепипеда (рис.1.25). Такая форма поверхности разрушения подчёркивает независимость механизмов разрушения однонаправленного КМ.

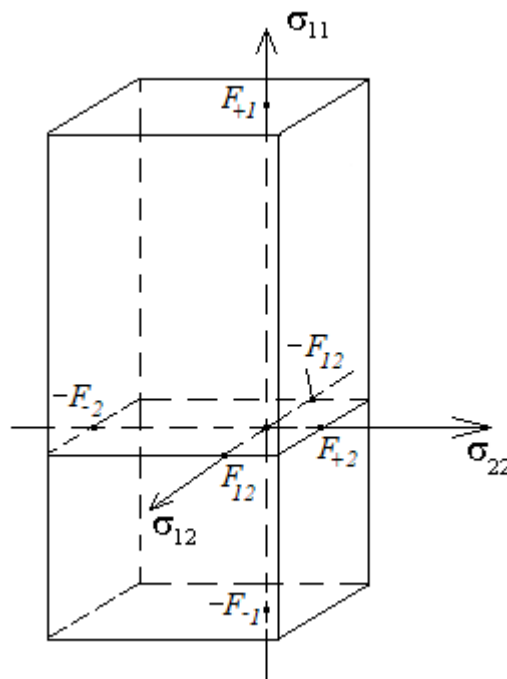


Рис.1.25. Поверхность разрушения в соответствии с критерием максимальны напряжений

На рис.1.26 на плоскости напряжений  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$  изображено сечение этой поверхности плоскостью  $\sigma_{12}=0$ . В результате получили кривую разрушения, являющуюся контуром прямоугольника. На плоскости  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$  отмечены две траектории нагружения: траектория 1, для которой  $\sigma_{22}=0$  и траектория 2, на которой  $\sigma_{22} \neq 0$ . Как видно из рис. 1.26, действие напряжения  $\sigma_{22}$  не оказывает влияния на величину предела прочности при растяжении вдоль оси  $OX_1$ . В обоих случаях имеем один и тот же предел прочности  $F_{+1}$ .

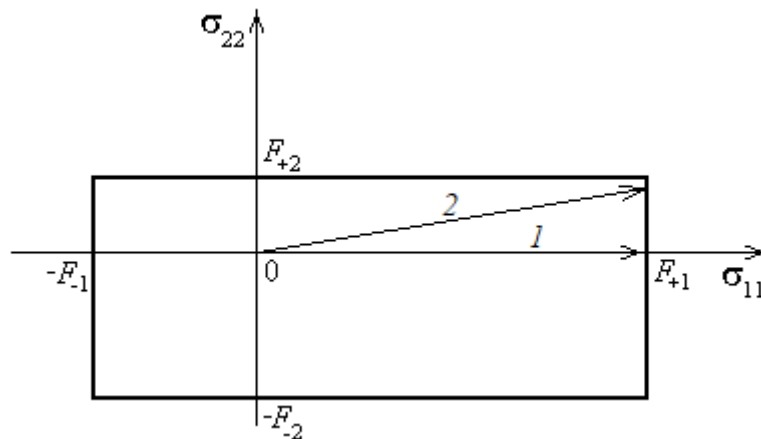


Рис.1.26. Кривая разрушения на плоскости напряжений  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$

Достоинство критерия максимальных напряжений состоит в его относительной простоте. Соотношения (1.95) можно охарактеризовать как кусочно-линейные. Соответствующая поверхность разрушения (см. рис.1.25) является негладкой. В ряде случаев эта особенность критерия максимальных напряжений упрощает решение практических задач. С его помощью получены теоретические результаты, удовлетворительным образом согласующиеся с опытными данными. Он применим и для монослоя, т.е. в том случае, когда однонаправленный волокнистый КМ деформируется в составе многослойного КМ.

Пример. В опыте на одноосное растяжение образец с площадью поперечного сечения  $S$ , изготовленный из однонаправленного композита, нагружен так, что армирующие волокна образуют угол  $\beta$  с линией действия растягивающей силы  $P$  (рис.1.27). Определить зависимость предельной растягивающей силы  $P^*$  от угла  $\beta$ . Для однонаправленного КМ справедлив критерий максимальных напряжений.

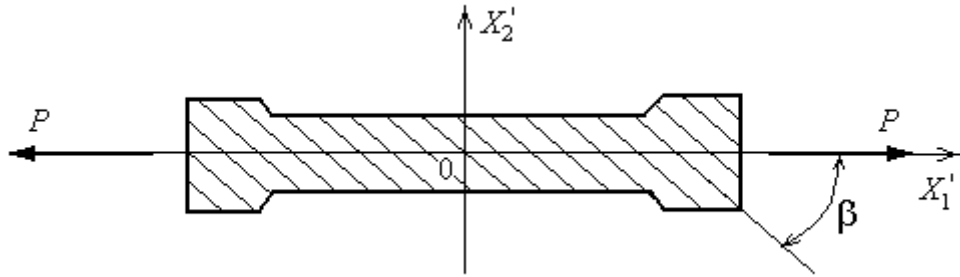


Рис.1.27. Одноосное растяжение однонаправленного КМ

Заметим, что критерий разрушения (1.95) записан в системе координат однонаправленного КМ. Поэтому определим напряжения, действующие на КМ, в этой системе координат. Воспользуемся равенством для напряжений из формул (1.4) (см. лекцию №1). Очевидно, что в данном случае в системе координат  $O X_1' X_2'$  будем иметь  $\sigma_{11}' = P/S$ ,  $\sigma_{22}' = 0$ ,  $\sigma_{12}' = 0$ . Из соотношений (1.4) получим

$$\{\sigma\} = [T_1]^{-1} \{\sigma'\}.$$

Элементы матрицы  $[T_1]^{-1}$  получаются из элементов исходной матрицы  $[T_1]$  заменой угла  $\varphi$  на  $-\varphi$ . После преобразований будем иметь

$$\sigma_{11} = (P/S) \cos^2 \varphi ; \quad \sigma_{22} = (P/S) \sin^2 \varphi ; \quad \sigma_{12} = (P/S) \sin \varphi \cos \varphi .$$

Разрушение монослоя произойдет, когда выполнится одно из условий (1.95).

Поэтому из последних равенств получим при  $\varphi = \beta$

$$F_{+1} = (P^*/S) \cos^2 \beta ; \quad F_{+2} = (P^*/S) \sin^2 \beta ; \quad F_{12} = (P^*/S) \sin \beta \cos \beta .$$

Здесь через  $P^*$  обозначена разрушающая растягивающая сила. Из данных равенств вытекают следующие соотношения

$$P^* = (F_{+1} S) / \cos^2 \beta , \tag{1.96}$$

$$P^* = (F_{+2} S) / \sin^2 \beta , \tag{1.97}$$

$$P^* = (F_{12} S) / (\sin \beta \cos \beta) . \tag{1.98}$$

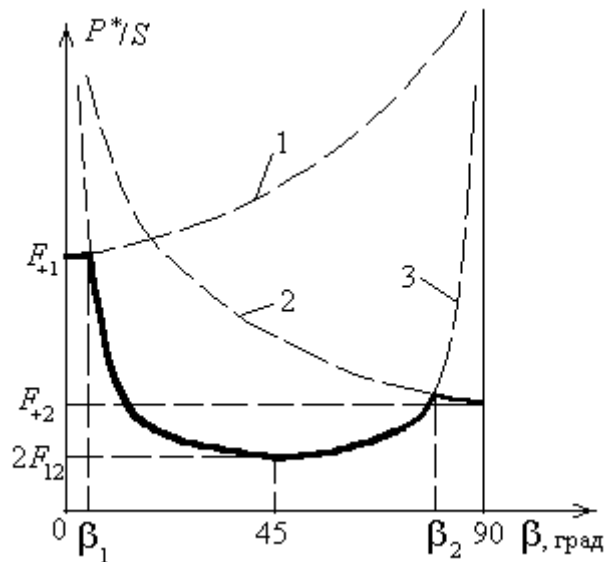


Рис.1.28. Зависимость разрушающей силы  $P^*$  от угла  $\beta$   
для однонаправленного КМ

Для заданного угла  $\beta$  разрушающей силой будет наименьшая из сил, определенных по формулам (1.96)-(1.98). График искомой зависимости представлен на рис.1.28. Он состоит из трех кривых 1,2,3, которые описываются соотношениями (1.96), (1.97), (1.98) соответственно. Углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определяются по формулам  $\operatorname{tg}\beta_1 = F_{12} / F_{+1}$ ,  $\operatorname{tg}\beta_2 = F_{+2} / F_{12}$ . Заметим, что при  $\beta=45^\circ$  справедливо равенство  $P^*=2F_{12}S$ . Следовательно, теоретически опыт на одноосное растяжение образца при  $\beta=45^\circ$  можно использовать для косвенного определения предела прочности однонаправленного композита при чистом сдвиге.

### Критерий разрушения Хашина-Ротема

Как было отмечено выше, при нагружении поперёк волокон и при чистом сдвиге нагрузку воспринимает связующее, которое, как правило, является изотропным материалом. Поэтому уместно предположить, что одноосное нагружение поперёк волокно может влиять на предел прочности при сдвиге  $F_{12}$ , и наоборот, чистый сдвиг может влиять на пределы прочности при нагружении поперёк волокон  $F_{+2}$  и  $F_{-2}$ . Чтобы отразить этот эффект, критерий разрушения можно сформулировать следующим образом: разрушение однонаправленного волокнистого КМ произойдёт, если выполнится одно из условий



$$\sigma_{11} = F_{+1}, \sigma_{11} > 0; \quad \sigma_{11} = -F_{-1}, \sigma_{11} < 0, \quad (1.99)$$

$$\frac{\sigma_{22}^2}{F_{+2}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} = 1. \quad (1.100)$$

В этом критерии предполагается, что пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль волокон одинаковы. Поэтому вводится следующее обозначение  $F_{+2} = F_{-2} = F_2$ . Как видно, нагружения в направлении поперёк волокон и при чистом сдвиге не влияют на пределы прочности материала  $F_{+1}$  и  $F_{-1}$ . Условия разрушения (1.99) и (1.100) составляют сущность критерия разрушения Хашина-Ротема.

В общем случае в силу различных механизмов разрушения пределы прочности при растяжении и сжатии поперёк волокон могут существенным образом различаться, т.е.  $F_{+2} \neq F_{-2}$ . Для описания этого эффекта зависимость (1.100) можно уточнить и представить таким образом

$$A\sigma_{22} + B\sigma_{22}^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} = 1. \quad (1.101)$$

Константы  $A$  и  $B$ , входящие в выражение (1.101), определяются в опытах на растяжение и сжатие поперёк волокон. Действительно, при  $\sigma_{22} > 0$  разрушение происходит, когда  $\sigma_{22} = F_{+2}$ . Тогда из равенства (1.100) при  $\sigma_{12} = 0$  следует

$$AF_{+2} + BF_{+2}^2 = 1. \quad (1.102)$$

Аналогично для сжатия будем иметь

$$-AF_{-2} + BF_{-2}^2 = 1. \quad (1.103)$$

Решая уравнения (1.102) и (1.103) совместно относительно констант  $A$  и  $B$ , будем иметь

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & F_{+2}^2 \\ 1 & F_{-2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+2} & F_{+2}^2 \\ -F_{-2} & F_{-2}^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_{-2}^2 - F_{+2}^2}{F_{+2}F_{-2}^2 + F_{+2}^2F_{-2}} = \frac{F_{-2}^2 - F_{+2}^2}{F_{+2}F_{-2}(F_{-2} + F_{+2})} = \frac{F_{-2} - F_{+2}}{F_{+2}F_{-2}} = \frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}},$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} F_{+2} & 1 \\ -F_{-2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+2} & F_{+2}^2 \\ -F_{-2} & F_{-2}^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_{-2} + F_{+2}}{F_{+2}F_{-2}(F_{-2} + F_{+2})} = \frac{1}{F_{+2}F_{-2}}.$$

Тогда равенство (1.101) примет такой вид

$$\left( \frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}} \right) \sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}^2}{F_{+2}F_{-2}} + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} = 1. \quad (1.104)$$

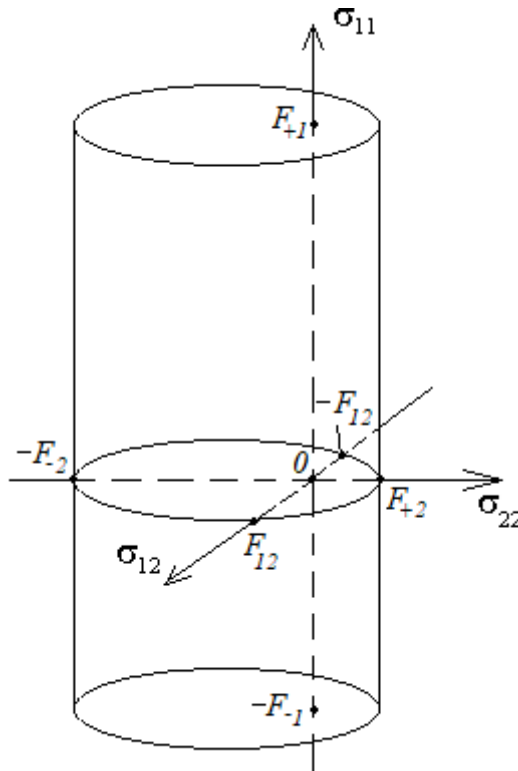


Рис.1.29. Поверхность разрушения  
в соответствии с условиями (1.99) и (1.104)

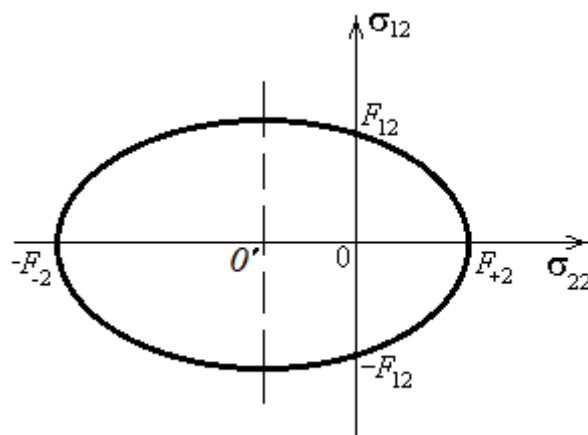


Рис.1.30. Кривая разрушения в  
соответствии с условиями (1.99) и (1.104) при  $\sigma_{11} = 0$

Поверхность разрушения, соответствующая условиям (1.99) и (1.104), в пространстве напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  представляет собой поверхность эллиптического цилиндра, ограниченного плоскостями  $\sigma_{11} = F_{+1}$  и  $\sigma_{11} = -F_{-1}$  (рис.1.29). При этом начало координат смещено относительно центра симметрии эллиптического основания цилиндра.

Если использовать условия (1.99) и (1.100), то начало координат совпадает с центром симметрии эллиптического основания, т.е. с точкой  $O'$  на рис.1.30. В этом случае выполняется равенство  $F_{+2} = F_{-2}$ .

Пример. Рассмотрим образец материала, изображённый на рис.1.27. Определим зависимость предела прочности материала  $F$  от угла  $\beta$ . Для однонаправленного КМ справедлив критерий разрушения Хашина-Ротема в форме (1.99) и (1.100).

Пусть  $F$  - искомый предел прочности материала при растяжении под углом  $\beta$  к направлению армирования. Тогда в соответствии с формулой (1.4) (см. лекцию №1) напряжения в однонаправленном КМ в его системе координат определяются по формулам

$$\sigma_{11} = F \cos^2 \beta, \quad \sigma_{22} = F \sin^2 \beta, \quad \sigma_{12} = F \sin \beta \cos \beta.$$

На основании условий (1.99) и (1.100) отсюда будем иметь

$$F(\beta) = \frac{F_{+1}}{\cos^2 \beta}, \quad (1.105)$$

$$F(\beta) = \frac{F_2 F_{12}}{\sin \beta \sqrt{F_{12}^2 \sin^2 \beta + F_2 \cos^2 \beta}}. \quad (1.106)$$

График зависимости  $F(\beta)$  показан на рис.1.31. Как обычно, разрушающим будет минимальное напряжение из прогнозируемых по формулам (1.105) и (1.106). Следует иметь в виду, что напряжение, рассчитываемое по формуле (1.106), может иметь точки экстремума. Действительно, имеем

$$\frac{dF}{d\beta} = -F_{12} F_2 \frac{F_{12}^2 \sin 2\beta \sin \beta + F_2^2 \cos 2\beta \cos \beta}{\sin^2 \beta (F_{12}^2 \sin^2 \beta + F_2^2 \cos^2 \beta)^{3/2}}$$

Преобразуем числитель этого выражения. Для этого применяем следующие тригонометрические тождества

$$\sin 2\beta \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos \beta - \cos 3\beta), \quad \cos 2\beta \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos \beta + \cos 3\beta),$$

$$\cos 3\beta = \cos \beta(4\cos^2 \beta - 3).$$

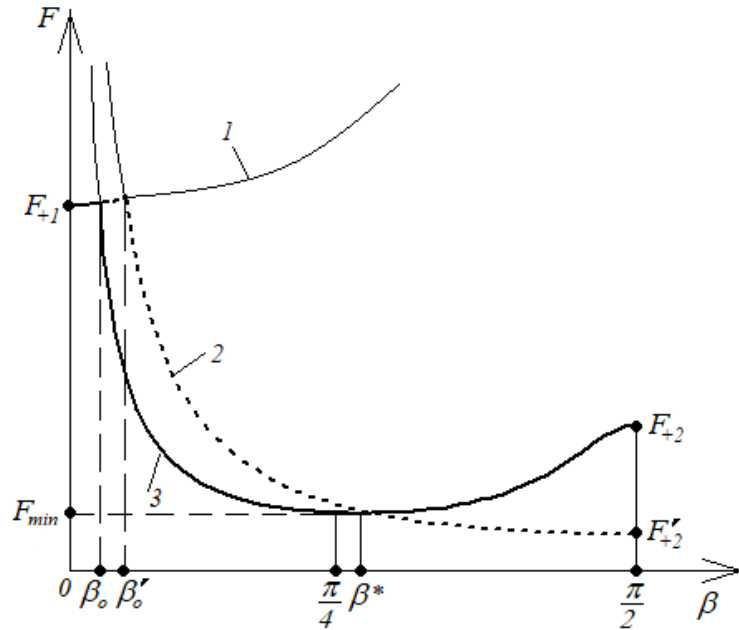


Рис.1.31. Зависимость предела прочности однонаправленного КМ от угла  $\beta$ :

1 – кривая в соответствии с формулой (1.105); 2 – кривая в соответствии с формулой (1.106) при  $F_2 < \sqrt{2}F_{12}$ ; 3 – кривая в соответствии с формулой

$$(1.106) \text{ при } F_2 > \sqrt{2}F_{12}$$

После преобразований и приравнивания нулю получим тригонометрическое уравнение следующего вида

$$\cos \beta \left[ 2F_{12}^2 - F_2^2 + 2(F_2^2 - F_{12}^2) \cos^2 \beta \right] = 0.$$

Таким образом, точки экстремума находим из условий

$$\cos \beta = 0, \quad \cos^2 \beta = \frac{F_2^2 - 2F_{12}^2}{2(F_2^2 - F_{12}^2)}.$$

Следовательно, значения углов, при которых функция (1.106) достигает экстремального значения, определяем по формулам

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 = \beta^* = \arccos \sqrt{\frac{F_2^2 - 2F_{12}^2}{2(F_2^2 - F_{12}^2)}}.$$

Из полученных соотношений следует, что при  $F_2 < \sqrt{2}F_{12}$  в точке  $\beta = \beta_1$  получим единственное экстремальное значение, в которой  $F_{max}=F_2$ . Если выполняется условие  $F_2 > \sqrt{2}F_{12}$ , то в дополнение к точке  $\beta = \beta_1$  получим второе экстремальное значение при  $\beta = \beta_2$ . В этой точке имеем минимум, подсчитываемый по формуле

$$F_{\min} = 2F_{12}\sqrt{1 - \frac{F_{12}^2}{F_2^2}}.$$

Характерный угол  $\beta_0$  можно найти, приравняв выражения (1.105) и (1.06). При этом получим после преобразований следующее уравнение

$$F_{+1}^2 F_{12}^2 \operatorname{tg}^4 \beta + F_{+1}^2 F_2^2 \operatorname{tg}^2 \beta - F_{12}^2 F_2^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $\operatorname{tg}^2 \beta$ , в итоге получим формулу для расчёта угла  $\beta_0$

$$\beta_0 = \arctg \sqrt{\left[ \frac{F_2}{2F_{12}} \left( \sqrt{\frac{F_2^2}{F_{12}^2} + \frac{4F_{12}^2}{F_{+1}^2}} - \frac{F_2}{F_{12}} \right) \right]}.$$

Для большинства материалов справедливо соотношение  $F_{+1} \gg F_{12}$ . Из полученной формулы следует, что угол  $\beta_0$  весьма мал. Как правило, его значение не превышает  $10^\circ$ . Величину предела прочности при  $\beta = \beta_0$  проще всего можно получить из формулы (1.105), воспользовавшись из известным равенством  $\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta$ . После преобразований будем иметь

$$F_0 = F_{+1} \left[ 1 + \frac{F_2^2}{2F_{12}^2} \left( \sqrt{1 + \frac{4F_{12}^4}{F_2^2 F_{+1}^2}} - 1 \right) \right]. \quad (1.107)$$

Интересно отметить, что из формулы (1.107) следует  $F_0 > F_{+1}$ . Таким образом, чтобы получить максимальный предел прочности материала при нагружении, показанном на рис. 1.27, надо создать небольшой угол между линией действия растягивающей силы и направлением укладки волокон. Такой эффект подтверждён экспериментально. Объяснение заключается в том, что при такой взаимной ориентации силы и направления армирования в восприятии

нагрузки включаются не только волокна, но и связующее. При этом в связующем помимо нормальных напряжений возникают незначительные касательные напряжения, не вызывающие его разрушения.

### Критерий разрушения Цая-Ву

Особенностью критерия максимальных напряжений и критерия Хашина-Ротема, рассмотренных выше, является наличие нескольких аналитических зависимостей, выполнение которых должно приводить к разрушению материала. В случае критерия максимальных напряжений используем зависимости (1.95), в случае критерия Хашина-Ротема – (1.99) и (1.101). В пространстве напряжений, действующих на однонаправленный КМ, этим критериям соответствует негладкая поверхность разрушения.

В расчётной практике часто применяется критерий разрушения, записанный одним аналитическим выражением. Примером такого критерия может быть критерий Мизеса-Хилла (1.89) (см. лекция №6). При плоском напряжённом состоянии из (1.89) будем иметь следующую квадратичную зависимость

$$\frac{\sigma_{11}^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{F_2^2} - 2\Phi_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} = 1, \quad (1.108)$$

где

$$\Phi_{12} = A_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_3^2} \right).$$

Применение критерия (1.108) для описания прочностных свойств однонаправленных волокнистых КМ вызывает некоторые затруднения, связанные с корректным определением параметра  $\Phi_{12}$ . Здесь в качестве величины  $F_3$  выступает предел прочности однонаправленного КМ в поперечном направлении. Экспериментально её определить технически сложно. Кроме этого, при некоторых значениях величины  $\Phi_{12}$  поверхность разрушения, определяемая равенством (1.108), становится незамкнутой. Это означает, что при определённом пути нагружения на плоскости  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  добиться разрушения материала не удастся. Этот факт противоречит экспериментально наблюдаемым эффектам.

В связи с этим на основании подхода Мизеса-Хилла для волокнистых однонаправленных КМ были разработаны адаптированные варианты критерия разрушения. В частности, предлагалось в критерии разрушения (1.108) для коэффициента  $\Phi_{12}$  использовать следующее равенство

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2F_1F_2}. \quad (1.109)$$

Поверхность разрушения в соответствии с (1.108) и (1.109) в пространстве напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  является замкнутой и гладкой. Она представляет собой поверхность эллипсоида, оси которого повернуты относительно начала координат. Центр симметрии совпадает с началом координат. В качестве примера на рис.1.33 показана построенная по формулам (1.108) и (1.109) кривая разрушения на плоскости напряжений  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при условии  $\sigma_{12}=0$ .

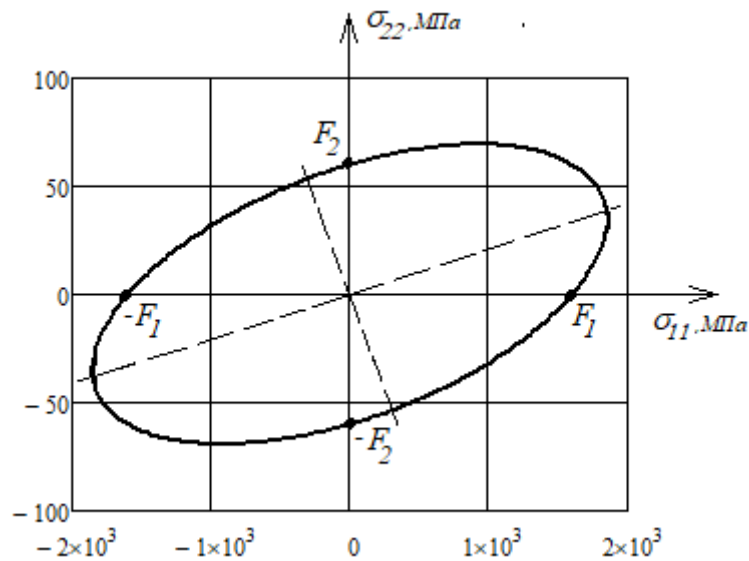


Рис.1.32. Кривая разрушения однонаправленного КМ в случае  $\sigma_{12}=0$ , построенная по формулам (1.108) и (1.109) при  $F_1=1600$  МПа,  $F_2=60$  МПа

Как было отмечено выше, в силу особенностей механизмов разрушения однонаправленного КМ при растяжении и сжатии пределы прочности  $F_{+1}$  и  $F_{-1}$  могут различаться. Для того, чтобы этот эффект отразить, в развитие критерия (1.108) был предложен квадратичный критерий разрушения следующего вида

$$f_1\sigma_{11} + f_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2\Phi_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{33}\sigma_{12}^2 = 1. \quad (1.110)$$

Равенство (1.110) является аналитическим выражением критерия разрушения Цая-Ву. Достоинством этого критерия является то, что параметр  $\Phi_{12}$  рассматривается как независимая характеристика материала, подлежащая экспериментальному определению. В пространстве напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  равенству (1.110) соответствует поверхность разрушения в виде поверхности эллипсоида, оси симметрии которого повёрнуты относительно осей системы координат, а центр симметрии смещён относительно начала координат. В качестве примера на рис.1.33 показана кривая разрушения на плоскости  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при  $\sigma_{12}=0$ .

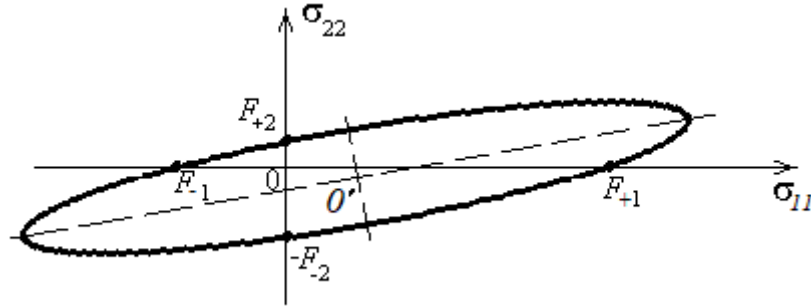


Рис.1.33. Кривая разрушения на плоскости  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при  $\sigma_{12}=0$   
в соответствии с критерием Цая-Ву

Коэффициенты  $f_1, f_2, F_{11}, F_{22}, \Phi_{12}, F_{33}$  находятся в опытах на растяжение и сжатие в направлении укладки волокон, на чистый сдвиг в плоскости армирования и двухосное нагружение. В частности, из опытов при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон из уравнений, аналогичных уравнениям (1.101)-(1.103), можно получить

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & F_{+1}^2 \\ 1 & F_{-1}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+1} & F_{+1}^2 \\ -F_{-1} & F_{-1}^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{F_{+1}} - \frac{1}{F_{-1}}, & f_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & F_{+2}^2 \\ 1 & F_{-2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+2} & F_{+2}^2 \\ -F_{-2} & F_{-2}^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}}, \\
 F_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} F_{+1} & 1 \\ -F_{-1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+1} & F_{+1}^2 \\ -F_{-1} & F_{-1}^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{F_{+1}F_{-1}}, & F_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} F_{+2} & 1 \\ -F_{-2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{+2} & F_{+2}^2 \\ -F_{-2} & F_{-2}^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{F_{+2}F_{-2}}.
 \end{aligned} \tag{1.111}$$

Из опытов при чистом сдвиге будем иметь



$$F_{33} = \frac{1}{F_{12}^2}.$$

При экспериментальном определении параметра  $\Phi_{12}$  имеются определённые технические сложности, связанные с большим разбросом искомой величины. При двухосном растяжении, когда  $\sigma_{22} = \kappa\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12} = 0$ , из (1.110) будем иметь

$$f_1\bar{\sigma}_{11} + \kappa f_2\bar{\sigma}_{11} + F_{11}\bar{\sigma}_{11}^2 + \kappa^2 F_{22}\bar{\sigma}_{11}^2 + 2\kappa\Phi_{12}\bar{\sigma}_{11}^2 = 1.$$

где  $\bar{\sigma}_{11}$  - напряжение, при котором происходит разрушение,  $\kappa$  – скалярный параметр. Отсюда следует, что

$$\Phi_{12} = \frac{1 - (f_1\bar{\sigma}_{11} + \kappa f_2\bar{\sigma}_{11} + F_{11}\bar{\sigma}_{11}^2 + \kappa^2 F_{22}\bar{\sigma}_{11}^2)}{2\kappa\bar{\sigma}_{11}^2}.$$

Эта формула справедлива для любого значения  $\kappa$ , не равного нулю. Таким образом, для различных двухосных растяжений в соответствии с условиями  $\sigma_{22} = \kappa\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12} = 0$  должно получаться одно и тоже значение параметра  $\Phi_{12}$ . Однако на практике такой ситуации достичь не удаётся. Поэтому используют различные приближённые формулы для расчёта этого параметра, например, такую

$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{F_{+1}F_{-1}F_{+2}F_{-2}}}. \quad (1.112)$$

Критерий (1.109) можно представить в матричном виде, если ввести матрицу напряжений КМ  $\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$ , а также матрицы прочностных характеристик

$$\{f\} = (f_1, f_2, 0)^T, \quad [F] = \begin{bmatrix} F_{11} & \Phi_{12} & 0 \\ \Phi_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}.$$

Тогда будем иметь

$$\{f\}^T \{\sigma\} + \{\sigma\}^T [F] \{\sigma\} = 1. \quad (1.113)$$

Пример. Используя критерий разрушения Цая-Ву, построить кривую разрушения однонаправленного волокнистого КМ на плоскости нормальных

напряжений  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при  $\sigma_{12}=0$ . Прочностные характеристики материала таковы:  $F_{+1}=1600$  МПа,  $F_{-1}=800$  МПа,  $F_{+2}=60$  МПа,  $F_{-2}=400$  МПа. Для определения параметра  $\Phi_{12}$  воспользоваться формулой (1.112).

Запишем критерий Цая-Ву (1.109) для случая  $\sigma_{12}=0$ . Будем иметь

$$f_1\sigma_{11} + f_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + 2\Phi_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1. \quad (1.114)$$

В соответствии с формулами (1.111) должно быть

$$f_1 = \frac{1}{F_{+1}} - \frac{1}{F_{-1}}, \quad F_{11} = \frac{1}{F_{+1}F_{-1}}, \quad f_2 = \frac{1}{F_{+2}} - \frac{1}{F_{-2}}, \quad F_{22} = \frac{1}{F_{+2}F_{-2}}.$$

Рассматривая равенство (1.114) как квадратное уравнение относительно неизвестной величины  $\sigma_{22}$ , решим его. Получим два корня

$$(\sigma_{22})_1 = \frac{-(2\Phi_{12}\sigma_{11} + f_2) + \sqrt{D(\sigma_{11})}}{2F_{22}}, \quad (\sigma_{22})_2 = \frac{-(2\Phi_{12}\sigma_{11} + f_2) - \sqrt{D(\sigma_{11})}}{2F_{22}},$$

где  $D(\sigma_{11})$  - дискриминант квадратного уравнения, вычисляемый здесь по формуле

$$D(\sigma_{11}) = 4(\Phi_{12}^2 - F_{11}F_{22})\sigma_{11}^2 + 4(\Phi_{12}f_2 - F_{22}f_1)\sigma_{11} + 4F_{22} + f_2^2.$$

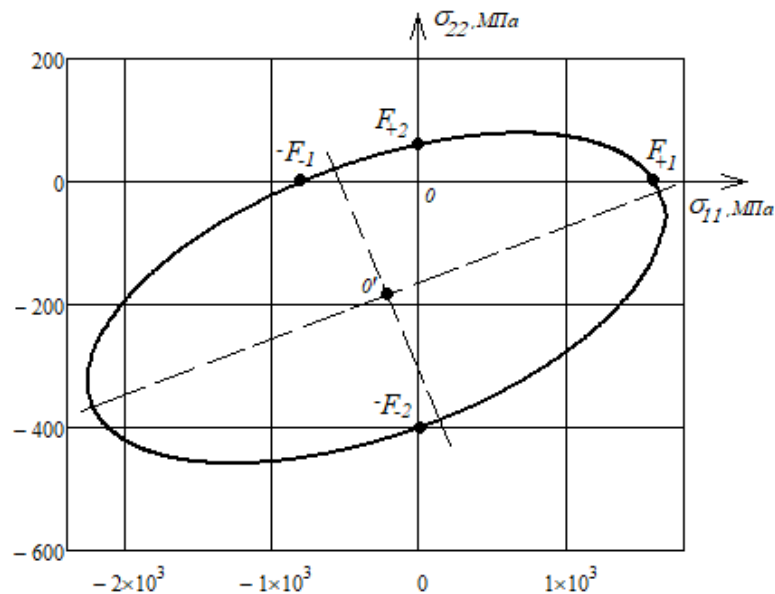


Рис.1.34. Кривая разрушения в соответствии с критерием Цая-Ву

на плоскости  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при  $\sigma_{12}=0$ :  $F_{+1}=1600$  МПа,

$F_{-1}=800$  МПа,  $F_{+2}=60$  МПа,  $F_{-2}=400$  МПа.

Решая неравенство  $D(\sigma_{11}) \geq 0$  можно найти пределы изменения величины  $\sigma_{11}$ . В данном случае имеем  $X_1 \leq \sigma_{11} \leq X_2$ , где  $X_1=1667$  МПа,  $X_2=-2256$  МПа. Искомая кривая разрушения приведена на рис.1.34.

Пример. Рассмотрим образец материала, изображённый на рис.1.27. Определим зависимость предела прочности материала  $F$  от угла  $\beta$ . Для однонаправленного КМ справедлив критерий разрушения Цая-Ву. Прочностные характеристики материала заданы:  $F_{+I}=1400$  МПа,  $F_{-I}=600$  МПа,  $F_{+2}=40$  МПа,  $F_{-2}=200$  МПа,  $F_{12}=50$  МПа.

Пусть  $F$  - искомый предел прочности материала при одноосном нагружении под углом  $\beta$  к направлению армирования. Тогда в соответствии с формулой (1.4) (см. лекцию №1) напряжения в однонаправленном КМ в его системе координат определяются по формулам

$$\sigma_{11} = F \cos^2 \beta, \quad \sigma_{22} = F \sin^2 \beta, \quad \sigma_{12} = F \sin \beta \cos \beta.$$

Воспользуемся матричным представлением критерия разрушения в форме (1.113). Здесь вектор напряжения удобно записать так  $\{\sigma\} = \{c(\beta)\} F$ , где  $\{c(\beta)\} = (\cos^2 \beta, \sin^2 \beta, \sin \beta \cos \beta)$ . Тогда из формулы (1.113) следует квадратное уравнение относительно искомой величины

$$M(\beta)F^2 + N(\beta)F - 1 = 0. \quad (1.115)$$

В формуле (1.115) введены следующие обозначения

$$M(\beta) = \{c(\beta)\}^T [F] \{c(\beta)\}, \quad N(\beta) = \{f\}^T \{c(\beta)\}.$$

Коэффициенты матриц  $\{f\}$  и  $[F]$  рассчитываются по формулам (1.111).

Решение уравнения (1.115) имеет такой вид

$$F_p(\beta) = \frac{-N(\beta) + \sqrt{N(\beta)^2 + 4M(\beta)}}{2M(\beta)},$$

$$F_c(\beta) = \frac{-N(\beta) - \sqrt{N(\beta)^2 + 4M(\beta)}}{2M(\beta)}.$$

В этих формулах величины  $F_p(\beta)$  и  $F_c(\beta)$  – искомые пределы прочности при растяжении и сжатии соответственно. Графики их зависимости приведены на рис.1.35.

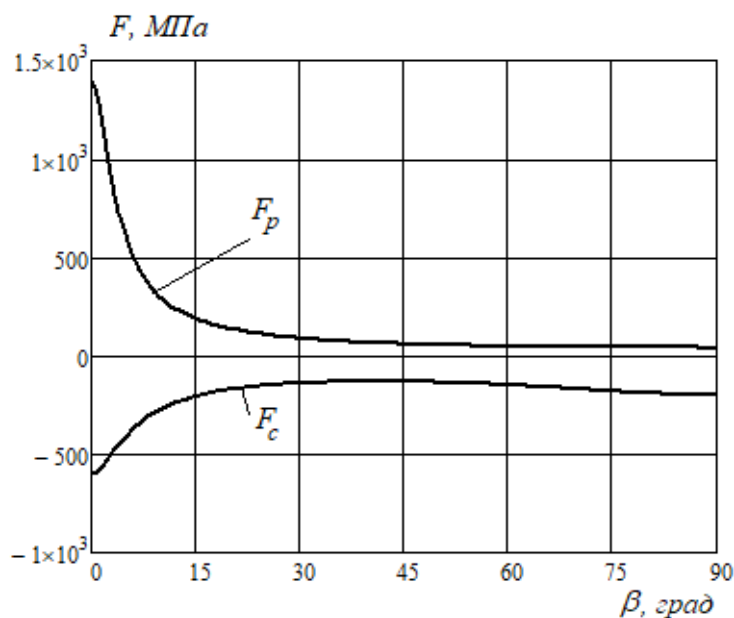


Рис.1.35. График зависимости предела прочности  $F$  от угла  $\beta$

в соответствии с критерием Цая-Ву:  $F_{+I}=1400$  МПа,  $F_{-I}=600$  МПа,

$F_{+2}=40$  МПа,  $F_{-2}=200$  МПа,  $F_{I2}=50$  МПа

Можно заметить, что в случае применения критериев разрушения максимальных напряжений и Хашина-Ротема определение предела прочности при сжатии требует отдельного рассмотрения. В данном случае в одном расчёте получаем пределы прочности на растяжение и сжатие.

### Вопросы для самоподготовки

1. Какое количество параметров характеризует прочностные свойства однонаправленного волокнистого КМ в соответствии с критерием максимальных напряжений? Назовите их.
2. В чём заключается принципиальное отличие критерия разрушения Цая-Ву от критерия максимальных напряжений и критерия Хашина-Ротема?
3. Определите значения пределов прочности однонаправленного волокнистого КМ для углов  $\beta=\beta_1$  и  $\beta=\beta_2$ , показанных на рис.1.28.

4. Используя критерий разрушения Цая-Ву, построить кривую разрушения однонаправленного волокнистого КМ на плоскости нормальных напряжений  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  при  $\sigma_{12} = \bar{\sigma}_{12} = 20$  МПа. Прочностные характеристики материала таковы:  $F_{+1}=1600$  МПа,  $F_{-1}=800$  МПа,  $F_{+2}=60$  МПа,  $F_{-2}=400$  МПа,  $F_{12}=50$  МПа. Для определения параметра  $F_{12}$  воспользоваться формулой (1.112).
5. В тонкостенном трубчатом образце (см. рис.1.36), изготовленном из однонаправленного волокнистого КМ, армирующие волокна ориентированы под углом  $\varphi$  к образующей. Образец нагружен внутренним давлением  $p$ . Определить зависимость разрушающего давления  $p^*$  от угла  $\varphi$ . Толщина образца  $H=3$  мм, радиус цилиндрической части  $R=80$  мм. Материал подчиняется критерию разрушения Цая-Ву. Прочностные характеристики материала заданы:  $F_{+1}=1600$  МПа,  $F_{-1}=800$  МПа,  $F_{+2}=60$  МПа,  $F_{-2}=400$  МПа,  $F_{12}=0$  МПа.

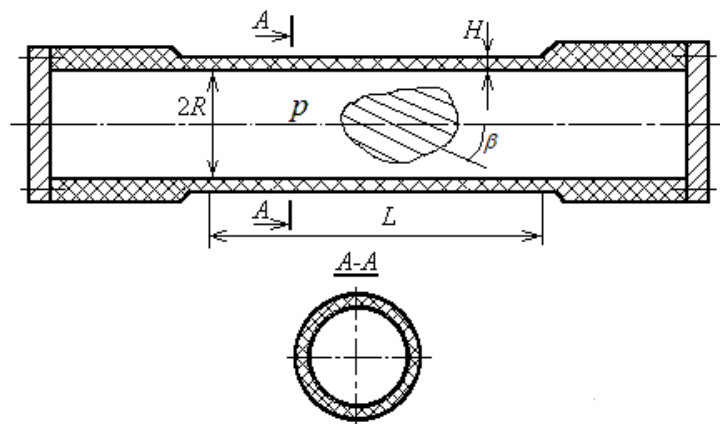


Рис.1.36. К задаче 2 и 3

6. Как известно, при закручивании тонкостенного цилиндрического образца, изображённого на рис.1.36, крутящим моментом  $M_{кр}$  в его рабочей части длиной  $L$  можно получить напряжённое состояние чистого сдвига. Полагая, что волокна однонаправленного волокнистого КМ, из которого изготовлен образец, ориентированы под углом  $\beta$ , построить зависимость разрушающего крутящего момента  $M_{кр}^*$  от этого угла. Однонаправленный КМ подчиняется критерию разрушения Цая-Ву. Толщина

образца  $H=2,5$  мм, радиус цилиндрической части  $R=75$  мм. Прочностные характеристики материала заданы:  $F_{+1}=1400$  МПа,  $F_{-1}=600$  МПа,  $F_{+2}=50$  МПа,  $F_{-2}=300$  МПа,  $F_{12}=0$  МПа.

7. Используя критерий разрушения Хашина-Ротема в форме (1.99) и (1.101), построить график зависимости предела прочности однонаправленного волокнистого КМ при чистом сдвиге  $\tau_p$  в зависимости от угла  $\varphi$  (см. рис.1.37). Пределы прочности материала заданы.

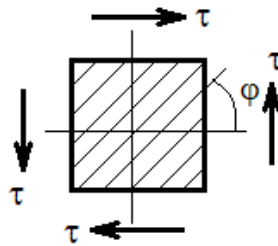


Рис.1.37. К задаче 6

8. Используя критерий разрушения Хашина-Ротема в форме (1.99) и (1.101), построить кривую разрушения на плоскости  $\sigma_{11}-\sigma_{22}$  при  $\sigma_{12}=30$  МПа. Прочностные характеристики материала таковы:  $F_{+1}=1600$  МПа,  $F_{-1}=800$  МПа,  $F_{+2}=80$  МПа,  $F_{-2}=400$  МПа,  $F_{+2}=60$  МПа