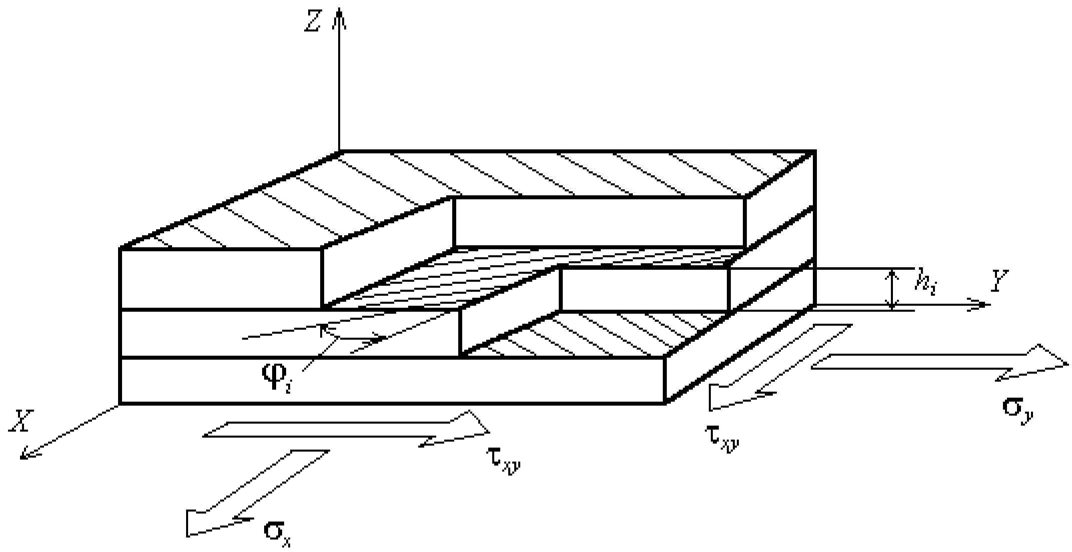
Лекция 2. Вывод соотношений закона Гука для многослойных композиционных материалов

На практике при изготовлении силовых элементов конструкций, как правило, применяются многослойные композиционные материалы (КМ). Они образуются в таких технологических процессах, как непрерывная намотка, вакуумное формование и ряде других. Основным структурным элементом многослойного композиционного материала по существу является пучок однонаправленных волокон, скрепленных отвержденным связующим, т.е. однонаправленный материал. В дальнейшем однонаправленный волокнистый композиционный материал в составе многослойного материала будем называть монослоем. Иногда в отечественной и иностранной литературе используется термин «препрег». Его расчётная схема, закон Гука в различных системах координат рассмотрены в предыдущей лекции.

Монослой является математической моделью однонаправленного армирующего материала, предварительно пропитанного связующим и приобретшего свойство монолитности после полимеризации. Как и однонаправленный материал, он рассматривается в системе прямоугольных декартовых координат X_1, X_2, X_3 (рис.1.1, лекция 1), называемой местной системой координат, или системой координат монослоя. При этом ось OX_1 ориентирована вдоль волокон, а оси OX_2 и OX_3 – перпендикулярно волокнам. Вдоль осей OX_1 и OX_2 действуют нормальные напряжения σ_{11} и σ_{22}. Вектор касательного напряжения σ_{12} параллелен плоскости OX_1X_2. Далее эту плоскость будем называть плоскостью армирования.

Совокупность монослоев, деформирующихся совместно под действием внешней нагрузки, образует многослойный композитный материал. Он рассматривается в системе прямоугольных декартовых координат OXYZ (рис.1.4). Эта система координат называется общей системой координат, или системой координат многослойного материала. Как и монослой, слоистый КМ также находится в условиях плоского напряженного состояния. Вдоль



Ри.1.4. Многослойный композиционный материал
в общей системе координат

осей OX и OY действуют нормальные напряжения σ_x и σ_y соответственно, а в плоскости OXY – касательное напряжения τ_{xy}.

Чтобы аналитически описать физико-механические свойства многослойного КМ, необходимо знать количество монослоев, толщину каждого монослоя, а также ориентацию его системы координат относительно общей системы координат. Для этой цели удобно использовать общую и местную системы координат. При этом для каждой местной системы координат ее начало, а также направление оси OX_3 должны совпадать соответственно с началом и направлением оси OZ общей системы координат. Тогда указанную выше ориентацию удобно задать с помощью угла φ между осями OX и OX_1. Этот угол называется углом армирования. При намотке угол армирования отождествляется с углом намотки. На практике угол армирования отсчитывается от некоторого базового направления, например, направления образующей наматываемой цилиндрической оболочки. Он может изменяться в пределах от 0^0 до 90^0.

Таким образом, в общем случае многослойный КМ, состоящий из n монослоев, характеризуется толщинами h_i и углами армирования φ_i монослоев. Здесь i=1,2,…,n. Совокупность величин n, h_i и φ_i определяет схему армирования многослойного КМ. Как видно, она состоит из 2n+1 величин. Одна из основных задач проектирования конструкций из КМ состоит в рациональном выборе схемы армирования.

Общая толщина многослойного материала определяется по формуле

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{h_i}.$$

В практических расчетах для i-го монослоя целесообразно применять величину δ_i, называемую относительной толщиной, или содержанием монослоя в многослойном КМ. Она подсчитывается по формуле $\boldsymbol{\delta_i} = \mathbf{h_i} / \mathbf{H}$. Очевидно, что для относительных толщин должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1. \qquad (1.13)$$

Далее, как правило, мы будем рассматривать безмоментные напряжённые состояния. В этом случае порядок расположения монослоев не влияет на физико-механические характеристики материала.

Для обозначения схемы армирования часто применяются квадратные скобки и знак дроби. Например, символ $[\mathbf{-45_2^0 / 0_5^0 / +45_2^0 / 90_7^0}]$ означает, что многослойный КМ, состоящий из 16 монослоев, содержит два монослоя с углом армирования -45^0, пять монослоев с углом армирования 0^0, два монослоя с углом армирования $+45^0$ и семь монослоев с углом армирования 90^0. В соответствии с принятым допущением физико-механические характеристики такого материала не отличаются от характеристик материала, например, такой структуры $[\mathbf{-45_2^0 / +45_2^0 / 90_7^0 / 0_5^0}]$. Для изделий, изготавливаемых методом намотки, схема армирования многослойного КМ указывается в технической документации. На основании схемы, указанной в технической документации, можно составить аналитическую формулировку схемы армирования, записав количество монослоёв, их углы армирования и относительные толщины. Если нижние индексы, указывающие на количество монослоёв, отсутствуют, то предполагается, что использован один монослой.

Пример. При непрерывной намотке оболочек вращения, например баллонов высокого давления, тонкостенных трубчатых стержней, может формироваться многослойный КМ со схемой $[(+\varphi)_n / (-\varphi)_n]$, или $[(\pm\varphi)_n]$. Многослойный КМ, состоящий из двух слоев, которые изготовлены из одного материала, имеют одинаковые толщины и равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку углы армирования, называется многослойным КМ с симметричным перекрестным армированием. При этом толщина каждого из слоёв подсчитывается по формуле $h_1 = h_2 = nh_0$, где h_0 – толщина элементарного монослоя, применяемого при формовании. Например, для однонаправленного углепластика КМУ-4Л она равняется ≈0,12 мм.

Многослойный КМ с симметричным перекрестным армированием часто образуется при непрерывной намотке оболочек вращения. В этом случае его принято называть двойным спиральным слоем.

Для многослойного КМ с симметричным перекрестным армированием аналитическая формулировка схемы армирования такова: $n = 2,\ \varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = -\varphi,\ \delta_1 = \delta_2 = 0,5$.

Пример. На практике также применяются многослойные КМ, состоящие из слоёв, уложенных параллельно базовому направлению и перпендикулярно ему. Обозначение схемы армирования этих материалов можно записать так $[(0^\circ)_n / (90^\circ)_m]$. Такой материал называют многослойным КМ с продольно-поперечным армированием. Соответствующий технологический процесс непрерывной намотки называют продольно-поперечной намоткой. Суммарную толщину такого материала можно рассчитать по формуле $H = h_0(n+m)$. Тогда аналитическая запись схемы армирования материала может быть записана так

$$n = 2, \quad \varphi_1 = 0^\circ, \quad \varphi_2 = 90^\circ, \quad \delta_1 = \frac{n}{n+m}, \ \delta_2 = \frac{m}{n+m} .$$

Часто при изготовлении оболочек вращения методом непрерывной намотки применяется комбинация рассмотренных двух вариантов схемы армирования, например, такая $\left[(\pm 30^\circ)_{n_1} / 0^\circ_{n_2} / (\pm 40^\circ)_{n_3} / 90^\circ_{n_4} / (\pm 55^\circ)_{n_3} / 90^\circ_{n_5}\right]$.

При выводе соотношений закона Гука для многослойного КМ с произвольной схемой армирования будем использовать зависимости из предыдущей лекции. Вывод основан на следующих гипотезах: 1) все монослои, входящие в состав материала, деформируются совместно, и их деформации одинаковы, т.е.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{i}}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{c}}\}, \tag{1.14}$$

где $\{\varepsilon_c\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}\}^T$ – вектор средних деформаций многослойного КМ, $\{\boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{i}}\} = (\boldsymbol{\varepsilon}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{11}}, \boldsymbol{\varepsilon}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{22}}, \boldsymbol{\gamma}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{12}})^{\mathbf{T}}$ - вектор деформаций i-го монослоя в общей системе координат; 2) напряжения связаны следующим соотношением статики

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{c}}\} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathbf{i}}\} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{i}}. \tag{1.15}$$

Здесь приняты такие обозначения: $\{\sigma_c\}=(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})^T$ – вектор средних напряжений многослойного КМ, $\{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathbf{i}}\} = (\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{11}}, \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{22}}, \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathbf{i})}_{\mathbf{12}})^{\mathbf{T}}$ - вектор напряжений i-го монослоя в общей системе координат.

Преобразуем формулу (1.15). Подставим в нее равенство (1.4) для напряжений, а затем закон Гука в форме (1.3), записанный для i-го монослоя. Будем иметь

$$\{\sigma_c\} = \sum_{i=1}^{n} [T_{1i}]\{\sigma_i\}\delta_i = \sum_{i=1}^{n} [T_{1i}][D_i]\{\varepsilon_i\}\delta_i.$$

Воспользовавшись равенством $\{\varepsilon_i\} = [T_{2i}]^{-1}\{\varepsilon_i'\}$, а также (1.14), отсюда получим

$$\{\sigma_c\} = \sum_{i=1}^{n}[T_{1i}][D_i]\{\varepsilon_i\}\delta_i = \sum_{i=1}^{n}[T_{1i}][D_i][T_{2i}]^{-1}\{\varepsilon_i'\}\delta_i = \left(\sum_{i=1}^{n}[T_{1i}][D_i][T_{2i}]^{-1}\delta_i\right)\{\varepsilon_c\}.$$

В полученной зависимости выражение в скобках по сути является матрицей жёсткости многослойного КМ. Принимая во внимание (1.5), формулу для расчёта матрицы жёсткости можно записать так

$$[G_c] = \sum_{i=1}^{n}[T_{1i}][D_i][T_{1i}]^T\delta_i. \tag{1.16}$$

Таким образом, закон Гука для многослойного КМ в матричном виде записывается так

$$\{\sigma_c\} = [G_c]\{\varepsilon_c\}. \tag{1.17}$$

Эта матрица является симметричной, положительно определенной, невырожденной матрицей с размерностью 3x3. Её элементами являются следующие величины

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{g_{xx}} &= \sum_{i=1}^{n}[E_1^{'(i)}c_i^4 + 2(E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})c_i^2s_i^2 + E_2^{'(i)}s_i^4]\delta_i,\\
\mathbf{g_{yy}} &= \sum_{i=1}^{n}[E_1^{'(i)}s_i^4 + 2(E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})c_i^2s_i^2 + E_2^{'(i)}c_i^4]\delta_i,\\
\mathbf{g_{xy}} &= \sum_{i=1}^{n}[(E_1^{'(i)} + E_2^{'(i)} - 2E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} - 4G_{12}^{(i)})c_i^2s_i^2 + E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)}]\delta_i,\\
\mathbf{g_{tt}} &= \sum_{i=1}^{n}[(E_1^{'(i)} + E_2^{'(i)} - 2E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} - 4G_{12}^{(i)})c_i^2s_i^2 + G_{12}^{(i)}]\delta_i,\\
\mathbf{g_{xt}} &= \sum_{i=1}^{n}\{[E_2^{'(i)}s_i^2 - E_1^{'(i)}c_i^2 + (E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})(c_i^2 - s_i^2)]c_is_i\}\delta_i,\\
\mathbf{g_{yt}} &= \sum_{i=1}^{n}\{[E_2^{'(i)}c_i^2 - E_1^{'(i)}s_i^2 - (E_1^{'(i)}\nu_{21}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)})(c_i^2 - s_i^2)]c_is_i\}\delta_i.
\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

В (1.18) использованы обозначения $c_i=\cos\varphi_I$, $s_i=\sin\varphi_I$; индекс ”i” указывает на принадлежность величины к i-ому монослою. Если все монослои изготовлены из одного и того же материала, то этот индекс в обозначениях характеристик упругости можно опустить. С помощью зависимостей (1.18) определяются характеристики упругости слоистого КМ с произвольной схемой армирования. Полученные формулы справедливы и в том случае, когда некоторые из монослоев выполнены из изотропных материалов. Для таких монослоев целесообразно считать угол армирования равным нулю. Формулы (1.18) обычно применяются при проведении поверочных расчетов конструкций.

Развёрнутая формулировка равенства (1.18) имеет такой вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= g_{xx}\varepsilon_x + g_{xy}\varepsilon_y + g_{xt}\gamma_{xy},\\ \sigma_y &= g_{xy}\varepsilon_x + g_{yy}\varepsilon_y + g_{yt}\gamma_{xy},\\ \tau_{xy} &= g_{xt}\varepsilon_x + g_{yt}\varepsilon_y + g_{tt}\gamma_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Матрица [S_c], обратная матрице жесткости [G_c], называется матрицей податливости. Расчёт элементов матрицы [S_c] производится по правилу обращения квадратной невырожденной матрицы. Закон Гука в этом случае записывается так

$$\{\varepsilon_c\} = [S_c]\{\sigma_c\}, \tag{1.20}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{xx}\sigma_x + s_{xy}\sigma_y + s_{xt}\tau_{xy},\\ \varepsilon_y &= s_{xy}\sigma_x + s_{yy}\sigma_y + s_{yt}\tau_{xy},\\ \gamma_{xy} &= s_{xt}\sigma_x + s_{yt}\sigma_y + s_{tt}\tau_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

На практике часто применяются многослойные КМ, в состав которых входят монослои с углами армирования 0°, 90°, слои с симметричным перекрёстным армированием. Пример схемы армирования подобного материала был приведён выше, т.е. $\left[(\pm 30^\circ)_{n_1} / 0^\circ_{n_2} / (\pm 40^\circ)_{n_3} / 90^\circ_{n_4} / (\pm 55^\circ)_{n_3} / 90^\circ_{n_5}\right]$. Учитывая тот факт, что в (1.18) первые четыре зависимости являются чётными функциями, а последние две – нечётными функциями относительно угла армирования, а также то, что монослои, входящие в состав слоя с симметричным перекрёстным армированием имеют одинаковую толщину, можно показать, что закон Гука (1.19) упростится и примет такой вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= g_{xx}\varepsilon_x + g_{xy}\varepsilon_y,\\ \sigma_y &= g_{xy}\varepsilon_x + g_{yy}\varepsilon_y,\\ \tau_{xy} &= g_{tt}\gamma_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

При этом расчётные формулы для определения элементов матрицы податливости [Sc] в соответствии с правилом обращения квадратной матрицы таковы

$$s_{xx} = \frac{g_{yy}}{\Delta},\quad s_{yy} = \frac{g_{xx}}{\Delta},\ s_{xy} = -\frac{g_{xy}}{\Delta},\quad s_{tt} = \frac{1}{g_{tt}}. \tag{1.23}$$

Здесь принято обозначение $\Delta = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$. Равенства (1.21) также становятся проще и имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{xx}\sigma_x + s_{xy}\sigma_y,\\ \varepsilon_y &= s_{xy}\sigma_x + s_{yy}\sigma_y,\\ \gamma_{xy} &= s_{tt}\tau_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

При обработке экспериментальных данных, полученных на образцах из многослойного КМ, равенства (1.23) целесообразно записывать с применением технических характеристик – модулей упругости и коэффициентов Пуассона. Именно эти величины устанавливаются при экспериментальном исследовании физико-механических характеристик многослойных КМ. Соответствующие равенства записываются так

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y,\\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_y},\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}.\end{aligned}\right\} \tag{1.24′}$$

Физический смысл величин $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ очевиден: это модули упругости в направлении осей OX и OY (см. рис.1.4) , модуль сдвига в плоскости OXY и соответствующие коэффициенты Пуассона.

Используя соотношения (1.23) и равенства (1.4) можно получить формулы для расчёта технических характеристик упругости

$$E_x = g_{xx} - \frac{g_{xy}^2}{g_{yy}}, \quad E_y = g_{yy} - \frac{g_{xy}^2}{g_{xx}}, \quad \mathrm{G}_{xy} = g_{tt}, \quad \nu_{xy} = \frac{g_{xy}}{g_{yy}}, \quad \nu_{yx} = \frac{g_{xy}}{g_{xx}} \ . \qquad (1.25)$$

Следует отметить, что часто при выполнении проектных расчетов зависимости (1.19) используются в более простом виде. Упрощение основывается на том, что для большинства волокнистых композитов модуль упругости вдоль волокон E_1 существенно превосходит модули E_2 и G_{12}. Действительно, величина E_1 определяется в основном упругими свойствами волокон, а величины E_2 и G_{12} – упругими свойствами связующего. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь по сравнению с E_1. С физической точки зрения, это означает, что слоистый волокнистый композит рассматривается как совокупность несвязанных между собой волокон, воспринимающих нагрузку только при определенных условиях нагружения. Как было отмечено ранее, модель деформирования волокнистого композита, согласно которой E_2=0, G_{12}=0, $E_1 \neq 0$, называется нитяной, или сетчатой, моделью волокнистого композита. При расчете с помощью нитяной модели считается, что $\sigma_{22}=\sigma_{12}$ =0.

В случае применения нитяной модели волокнистого КМ коэффициенты матрицы жесткости (1.18) рассчитываются по формулам

$$\begin{gathered}
g_{xx} = \sum_{i=1}^{n} E_{1i} \cos^4 \varphi_i \delta_i, \ g_{yy} = \sum_{i=1}^{n} E_{1i} \sin^4 \varphi_i \delta_i, \ g_{xy} = g_{tt} = \sum_{i=1}^{n} E_{1i} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i \delta_i, \\
g_{xt} = -\sum_{i=1}^{n} E_{1i} \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i \delta_i, \ g_{xt} = -\sum_{i=1}^{n} E_{1i} \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i \delta_i.
\end{gathered} \qquad (1.26)$$

<u>Пример.</u> Определить элементы матриц жесткости и податливости слоистого композита с симметричным перекрестным армированием (рис.1.5).

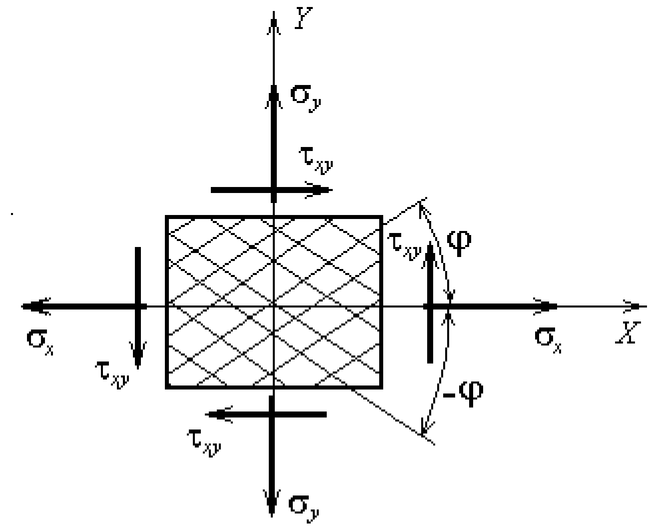


Рис.1.5. Многослойный композит с симметричным перекрёстным армированием при плоском напряжённом состоянии

Указанный материал состоит из двух монослоев одинаковой толщины, имеющих равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку углы армирования с базовым направлением (на рис.1.5 это направление совпадает с направлением оси OX). Таким образом, в этом случае будем иметь n=2; $\delta_1=\delta_2=0{,}5$; $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=-\varphi$. Учитывая, что g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}, g_{tt} являются четными, а g_{xt}, g_{yt} – нечетными функциями относительно углов армирования, из (1.18) получим

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{g_{xx}} &= \mathbf{E_1'c^4 + 2(E_1'\nu_{21} + 2G_{12})c^2s^2 + E_2's^4,}\\
\mathbf{g_{yy}} &= \mathbf{E_1's^4 + 2(E_1'\nu_{21} + 2G_{12})c^2s^2 + E_2'c^4,}\\
\mathbf{g_{xy}} &= \mathbf{(E_1' + E_2' - 2E_1'\nu_{21} - 4G_{12})c^2s^2 + E_1'\nu_{21},}\\
\mathbf{g_{tt}} &= \mathbf{(E_1' + E_2' - 2E_1'\nu_{21} - 4G_{12})c^2s^2 + G_{12},}\\
\mathbf{g_{xt}} &= \mathbf{0,}\\
\mathbf{g_{yt}} &= \mathbf{0.}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

Здесь c=cosφ, s=sinφ. Индекс “i” опущен, так как монослои изготовлены из одного материала. Таким образом, матрица жесткости будет иметь вид

$$\mathbf{[G]} = \begin{bmatrix} \mathbf{g_{xx}} & \mathbf{g_{xy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g_{xy}} & \mathbf{g_{yy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{g_{tt}} \end{bmatrix}.$$

Обратив эту матрицу, получим матрицу податливости [S]. Она может быть представлена так

$$\mathbf{[S]}=\begin{bmatrix} \mathbf{s_{xx}} & \mathbf{s_{xy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{s_{xy}} & \mathbf{s_{yy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{s_{tt}} \end{bmatrix},$$

Элементы этой матрицы определяем по формуле (1.23), а технические характеристики упругости - по формуле (1.25).

При использовании нитяной модели для волокнистого КМ из (1.26) следует

$$\mathbf{g_{xx}=E_1c^4,\ g_{yy}=E_1s^4,\ g_{xy}=g_{tt}=E_1c^2s^2,\ g_{xt}=g_{yt}=0.}$$

Отсюда видно, что Δ=0, и матрица жесткости композита является вырожденной. В соотношении (1.22) только два уравнения являются взаимно независимыми. Действительно, из (1.22) для нормальных напряжений получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma_x} &= \mathbf{E_1c^2(c^2}\boldsymbol{\varepsilon_x}\mathbf{+s^2}\boldsymbol{\varepsilon_y}\mathbf{),} \\ \boldsymbol{\sigma_y} &= \mathbf{E_1s^2(c^2}\boldsymbol{\varepsilon_x}\mathbf{+s^2}\boldsymbol{\varepsilon_y}\mathbf{).} \end{aligned}\right\}.$$

Разделив второе равенство на первое, получим, что $\boldsymbol{\sigma_y=\sigma_x}\mathbf{tg^2}\boldsymbol{\varphi}$. Физически это означает, что материал способен воспринимать только такую силовую нагрузку, при которой выполняется данная зависимость. В противном случае он становится кинематически изменяемым и неспособным к сопротивлению внешней силовой нагрузке.

Пример. Определить элементы матрицы жесткости для многослойного композита с продольно-поперечным армированием.

Как было показано, выше для такого материала n=2. Рассмотрим общий случай, когда слои изготовлены из разных материалов, например, из углепластика и органопластика. Углы армирования и относительные толщины таковы

$$\varphi_1=0^\circ,\quad \varphi_2=90^\circ,\quad \delta_1=\frac{n}{n+m}=\delta,\ \delta_2=\frac{m}{n+m}=1-\delta.$$

На основании формул (1.18) получим

$$\left.\begin{aligned}
g_{xx} &= \frac{E_1^{(1)}\delta}{1-\nu_{12}^{(1)}\nu_{21}^{(1)}} + \frac{E_2^{(2)}(1-\delta)}{1-\nu_{12}^{(2)}\nu_{21}^{(2)}},\\
g_{yy} &= \frac{E_2^{(1)}\delta}{1-\nu_{12}^{(1)}\nu_{21}^{(1)}} + \frac{E_1^{(2)}(1-\delta)}{1-\nu_{12}^{(2)}\nu_{21}^{(2)}},\\
g_{xy} &= \frac{E_1^{(1)}\nu_{21}^{(1)}\delta}{1-\nu_{12}^{(1)}\nu_{21}^{(1)}} + \frac{E_2^{(2)}\nu_{12}^{(2)}(1-\delta)}{1-\nu_{12}^{(2)}\nu_{21}^{(2)}},\\
g_{tt} &= G_{12}^{(1)}\delta + G_{12}^{(2)}(1-\delta).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.28)$$

Рассмотрим ряд частных случаев. Пусть оба монослоя изготовлены из одинакового материала. Тогда из (1.28) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
g_{xx} &= \frac{E_1\delta + E_2(1-\delta)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{yy} &= \frac{E_2\delta + E_1(1-\delta)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{xy} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{tt} &= G_{12}.
\end{aligned}\right\}$$

Предположим, что первый монослой выполнен из изотропного материала с параметрами E и ν. Такие материалы называют многослойными металло-композитами. Из (1.28) следует

$$\left.\begin{aligned}
g_{xx} &= \frac{E\delta}{1-\nu^2} + \frac{E_2(1-\delta)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{yy} &= \frac{E\delta}{1-\nu^2} + \frac{E_1(1-\delta)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{xy} &= \frac{E\nu\delta}{1-\nu^2} + \frac{E_1\nu_{21}(1-\delta)}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\
g_{tt} &= \frac{E\delta}{2(1+\nu)} + G_{12}(1-\delta).
\end{aligned}\right\}$$

Если при этом для волокнистого композита применяется нитяная модель, то отсюда получим следующие выражения

$$\left.\begin{aligned} g_{xx} &= \frac{E\delta}{1-\nu^2}, \\ g_{yy} &= \frac{E\delta}{1-\nu^2} + E_1(1-\delta), \\ g_{xy} &= \frac{E\nu\delta}{1-\nu^2}, \\ g_{tt} &= \frac{E\delta}{2(1+\nu)}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

Как видно, в данное случае эффект Пуассона, а также жесткость материала на сдвиг в плоскости армирования обусловлены только наличием изотропного слоя.

Вопросы для самоподготовки

1. Что такое схема армирования многослойного КМ?
2. При изготовлении композитного баллона высокого давления получили многослойный КМ, схема армирования которого такова

   $$\left[(\pm 30^\circ)_{10} / 0^\circ_6 / (\pm 40^\circ)_8 / 90^\circ_6 / (\pm 55^\circ)_7 / 90^\circ_2\right],$$

   Толщина монослоя равна h_o. Предполагая, что толщина монослоя, уложенного перпендикулярно базовому направлении, в два раза меньше, чем толщины других монослоёв, составить аналитическую запись схемы армирования этого многослойного КМ.
3. Какие гипотезы принимаются при выводе соотношений закона Гука для многослойного КМ с заданной схемой армирования?
4. При намотке цилиндрической оболочки был получен многослойный материал со схемой армирования $\left[(\pm\varphi^\circ)/90^\circ\right]$. Толщины монослоёв одинаковы, двойные спиральные слои и кольцевой слой выполнены из разных материалов. Применяя нитяную модель однонаправленного КМ, составить матрицу жесткости для многослойного материала.
5. Вывести формулы (1.23) и (1.25).
6. Показать, что для многослойного КМ в формулах (1.24) выполняется равенство $E_y \nu_{xy} = E_x \nu_{yx}$.

7. Для многослойного композита с продольно-поперечным армированием $\left[0^\circ/90^\circ\right]$ составить матрицу жесткости. Монослои равной толщины изготовлены из одинакового материала.
8. Для многослойного композита с симметричным перекрёстным армированием построить графики зависимости модулей упругости E_x и E_y от угла φ. При расчёте принять следующие характеристики для однонаправленного композита $E_1 = 1, E_2 = 0,25, G_{12} = 0,4, \nu_{12} = 0,25.$