Глава 2. Закон Гука для многослойных композиционных материалов

Лекция 1. Преобразование характеристик упругости однонаправленного волокнистого композита при преобразовании поворота системы координат

Упругие характеристики КМ можно исследовать, применяя либо микромеханический, либо макромеханический, или феноменологический, подходы. В первом случае рассматриваются свойства связующего, армирующего материала, границы раздела между ними. Объемное содержание компонент, характер их взаимодействия определяют свойства материала в целом. Во втором случае композит рассматривается как сплошное анизотропное тело с усредненными по объему физико-механическими характеристикам. Расчет и проектирование конструкций из КМ целесообразно выполнять с помощью методов, основанных на макромеханическом подходе. Именно такие методы излагаются ниже.

При силовом нагружении в микроструктуре слоистого композита, образованного в процессе намотки, могут происходить весьма сложные процессы, обусловленные накоплением повреждений. В общем случае деформирование КМ не описывается линейными соотношениями закона Гука. Однако при проведении поверочных расчетов в первом приближении можно предполагать, что волокнистый композит обладает линейно упругими свойствами.

Рассмотрим закон Гука для монослоя в системе координат, указанной на рис.1.1. Его аналитическое выражение имеет следующий вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sigma_{11}/E_1 - \nu_{21}\sigma_{22}/E_2, \\ \varepsilon_{22} &= -\nu_{12}\sigma_{11}/E_1 + \sigma_{22}/E_2, \\ \gamma_{12} &= \sigma_{12}/G_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где ε_{11}, ε_{22} – линейные деформации в направлении осей OX_1 и OX_2 соответственно, γ_{12} – угловая деформация в плоскости армирования OX_1X_2; E_1, E_2 – модули упругости в направлении осей OX_1 и OX_2, G_{12} – модуль сдвига в

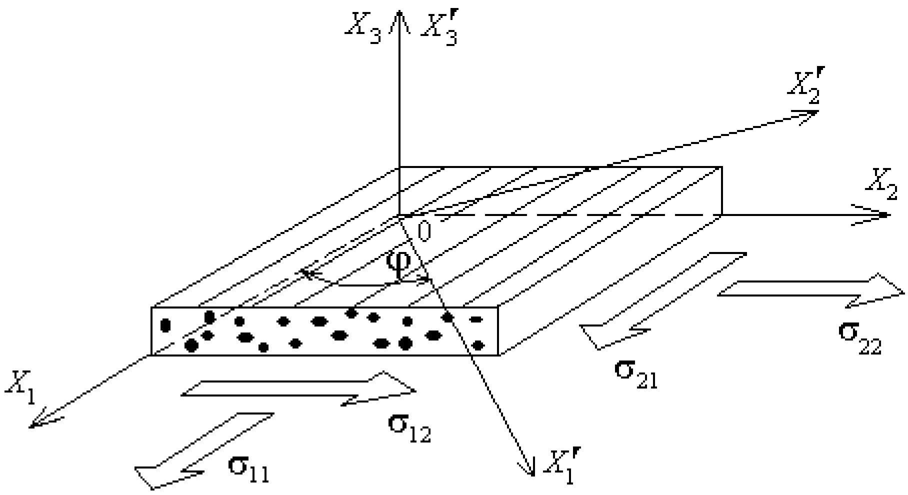


Рис.1.1. Однонаправленный волокнистый композиционный материал в системе прямоугольных декартовых координат

плоскости армирования; ν_{12} - коэффициент Пуассона, характеризующий линейную деформацию в направлении оси OX_2 при действии нормального напряжения в направлении оси OX_1; ν_{21} – коэффициент Пуассона, характеризующий линейную деформацию в направлении оси OX_1 при действии нормального напряжения в направлении оси OX_2. В матричном виде равенства (1.1) можно представить так

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}. \qquad (1.2)$$

где $\{\sigma\}=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^T$, $\{\varepsilon\}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\gamma_{12})^T$ - векторы напряжений и деформаций монослоя соответственно (здесь и далее верхний индекс “Т” обозначает операцию транспонирования матрицы). Матрица упругих податливостей [S] имеет такой вид

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Равенства, обратные равенствам (1.1), также представим в матричном виде. Будем иметь

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \qquad (1.3)$$

где [D] – матрица жесткости монослоя. Она имеет следующий вид

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1' & \mathbf{E}_1'\nu_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_2'\nu_{12} & \mathbf{E}_2' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{12} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{E}_1' = \mathbf{E}_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}), \quad \mathbf{E}_2' = \mathbf{E}_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$.

При повороте системы координат монослоя на угол φ вокруг оси OX_3 (см. рис.1.1) компоненты векторов $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$, характеризующие напряженно-деформированное состояние монослоя, изменяются. Формулы, по которым вычисляются значения напряжений и деформаций монослоя в такой системе координат, вытекают из формул преобразования матриц напряжений и деформаций при преобразовании поворота прямоугольной декартовой системы координат относительно начала координат (см. лекции по МДТТ за 6-ой семестр). Они имеют вид

$$\{\sigma'\} = [\mathbf{T}_1]\{\sigma\}, \quad \{\varepsilon'\} = [\mathbf{T}_2]\{\varepsilon\}. \tag{1.4}$$

Здесь $\{\sigma'\} = (\sigma_{11}', \sigma_{22}', \sigma_{12}')^{\mathbf{T}}$; $\{\varepsilon'\} = (\varepsilon_{11}', \varepsilon_{22}', \gamma_{12}')^{\mathbf{T}}$ - векторы напряжений и деформаций монослоя в системе координат $OX_1'X_2'X_3'$, повернутой на угол φ вокруг оси OX_3. Матрицы $[T_1]$, $[T_2]$ определяются следующим образом

$$[\mathbf{T}_1] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{T}_2] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}.$$

Для них справедливы следующие соотношения

$$[T_1]^{-1} = [T_2]^T, \quad [T_2]^{-1} = [T_1]^T \ . \tag{1.5}$$

Рассмотрим вывод соотношений закона Гука в системе координат $OX_1'X_2'X_3'$, повёрнутой на угол φ относительно оси OX_3 (рис.1.1). Применяя формулы (1.4), равенство (1.2) можно представить таким образом

$$[\mathrm{T}_2]^{-1}\{\varepsilon'\} = [S][\mathrm{T}_1]^{-1}\{\sigma'\}\,.$$

Умножая это равенство слева на матрицу $[\mathrm{T}_2]$ и воспользовавшись соотношениями (1.5), получим

$$\{\varepsilon'\} = [\mathrm{T}_2][S][\mathrm{T}_2]^T\{\sigma'\}\,.$$

Отсюда видно, что в преобразованной системе координат соотношения закона Гука имеют такой вид

$$\{\varepsilon'\} = [S']\{\sigma'\}\,, \tag{1.6}$$

где $[S']$ - матрица податливости однонаправленного композита в системе координат $OX_1'X_2'X_3'$. Она определяется таким образом

$$[\mathrm{S}'] = [\mathrm{T}_2][S][\mathrm{T}_2]^T\,. \tag{1.7}$$

Аналогичным образом можно получить выражение для матрицы жёсткости. Соответствующее равенство для закона Гука в матричном виде записывается так

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{D}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\}, \tag{1.8}$$

где

$$[\mathbf{D}'] = [\mathbf{T_1}][\mathbf{D}][\mathbf{T_1}]^{\mathbf{T}}\,. \tag{1.9}$$

Запишем выражение (1.6) в развёрнутом виде. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11}' &= s_{11}\sigma_{11}' + s_{12}\sigma_{22}' + s_{13}\sigma_{12}', \\ \varepsilon_{22}' &= s_{12}\sigma_{11}' + s_{22}\sigma_{22}' + s_{23}\sigma_{12}', \\ \gamma_{12}' &= s_{13}\sigma_{11}' + s_{23}\sigma_{22}' + s_{33}\sigma_{12}'. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Здесь коэффициенты податливости рассчитываются по следующим формулам

$$\left.\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{\cos^4\varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{\sin^4\varphi}{E_2},\\
s_{22} &= \frac{\sin^4\varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{\cos^4\varphi}{E_2},\\
s_{12} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2 2\varphi - \frac{\nu_{12}}{E_1},\\
s_{33} &= \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2 2\varphi + \frac{1}{G_{12}},\\
s_{13} &= \left[2\left(\frac{\sin^2\varphi}{E_2} - \frac{\cos^2\varphi}{E_1}\right) + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi,\\
s_{23} &= \left[2\left(\frac{\cos^2\varphi}{E_2} - \frac{\sin^2\varphi}{E_1}\right) - \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\cos 2\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

Равенства (1.10) можно также записать с применением технических характеристик упругости. В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{\sigma'_{11}}{E'_1} - \frac{\nu'_{21}}{E'_2}\sigma'_{22} + \frac{\eta'_{31}}{G'_{12}}\sigma'_{12},\\
\varepsilon'_{22} &= -\frac{\nu'_{12}}{E'_1}\sigma'_{11} + \frac{\sigma'_{22}}{E'_2} + \frac{\eta'_{32}}{G'_{12}}\sigma'_{12},\\
\gamma'_{12} &= \frac{\eta'_{13}}{E'_1}\sigma'_{11} + \frac{\eta'_{23}}{E'_2}\sigma'_{22} + \frac{\sigma'_{12}}{G'_{12}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

В формулах (1.12) E'_1, E'_2 – модули упругости в направлении осей OX'_1 и OX'_2 соответственно; G'_{12} - модуль сдвига в плоскости $OX'_1X'_2$; ν'_{12} и ν'_{21} - коэффициенты Пуассона, их физический смысл аналогичен смыслу коэффициентов ν_{12} и ν_{21}, входящих в выражение (1.1) ; η'_{31} и η'_{32} - коэффициенты влияния первого рода, характеризующие линейные деформации в направлении осей OX'_1 и OX'_2 при действии касательных напряжений в плоскости $OX'_1X'_2$; η'_{13} и η'_{23} - коэффициенты влияния второго рода, характеризующие угловые деформации в плоскости $OX'_1X'_2$ при действии нормальных напряжений в направлении осей OX'_1 и OX'_2.

Пример. Образец композиционного материала в виде «лопатки», показанный на рис.1.2, растягивается силой Р. Определить деформации, возникающие в образце. Сечение образца прямоугольное и тонкостеннное, его площадь F.

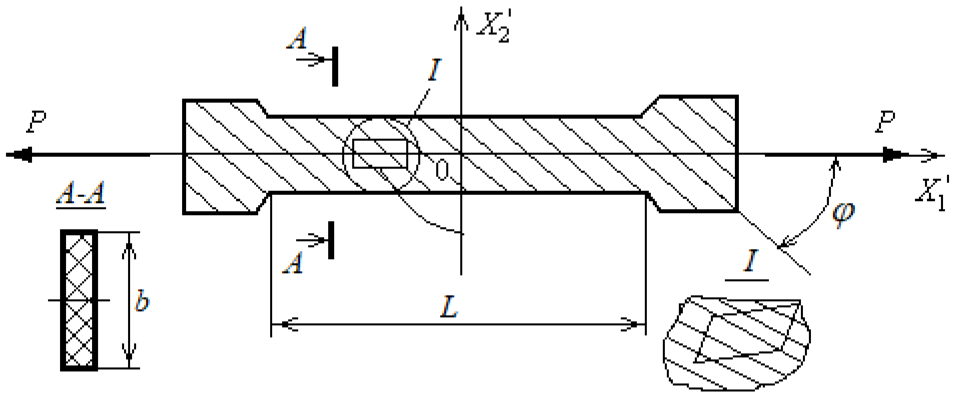


Рис.1.2. Образец композиционного материала

Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся законом Гука для однонаправленного композита в форме (1.12). При этом учтём, что в соответствии с рис.1.2 должно быть по условию $\sigma'_{22} = \sigma'_{12} = 0$. Тогда из (1.12) получим

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\sigma'_{11}}{E'_1},\ \ \varepsilon'_{22} = -\frac{\nu'_{12}}{E'_1}\sigma'_{11},\ \ \gamma'_{12} = \frac{\eta'_{13}}{E'_1}\sigma'_{11}.$$

Здесь $\sigma'_{11} = P/F$, где F – площадь поперечного сечения образца.

Таким образом, в образце появляются линейные деформации и угловая деформация. При нагружении произойдет изменение длины L и ширины образца b. Прямоугольный элемент, выделенный из средней части образца, превратится в параллелограмм (см. рис.1.2).

Пример. Построить график зависимости модуля упругости E'_1 и коэффициента Пуассона ν'_{12} от угла φ. При расчёте принять следующие характеристики однонаправленного композита $E_1 = 1,\quad E_2 = 0,25,\quad G_{12} = 0,4,\quad \nu_{12} = 0,25.$ Такое представление характеристик упругости означает, что их значения нормированы по параметру E_1, т.е. отнесены к модулю E_1.

Воспользуемся формулами (1.11) и зависимостями (1.12). Сопоставляя их, получим, что имеют место равенства

$$E_1' = \frac{1}{s_{11}} = \left[\frac{\sin^4\varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{\cos^4\varphi}{E_2}\right]^{-1},$$

$$\nu_{12}' = -s_{12}E_1' = -\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2 2\varphi - \frac{\nu_{12}}{E_1},\right]E_1'.$$

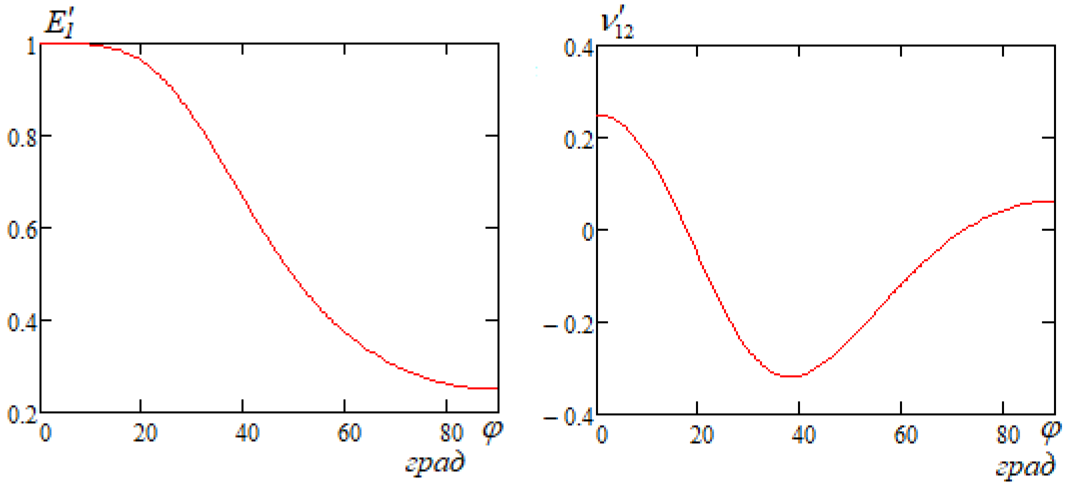


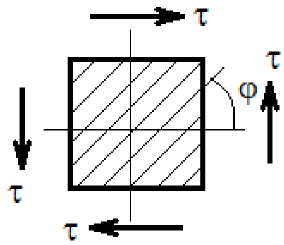
Рис.1.3. Графики зависимости характеристик упругости E_1' и ν_{12}' от угла φ

Соответствующие графики приведены на рис.1.3. Обращает на себя внимание тот факт, что коэффициент Пуассона ν_{12}' может принимать как нулевые, так и отрицательные значения.

Вопросы для самоподготовки

1. Вывести формулу для определения элементов матрицы жесткости однонаправленного композита $[D']$.
2. Каков физический смысл коэффициентов влияния?
3. Показать, что матрицы упругих податливостей $[S']$ и жесткости $[D']$ взаимно обратны.
4. Для двух квадратных матриц $[A]$ и $[B]$ справедлива формула $([A][B])^T = [B]^T[A]^T$. Используя её показать, что матрица $[S']$ симметрична.

5. В однонаправленном композите реализовано напряженное состояние чистого сдвига (см. рис). Величина напряжения равна τ. Определить деформации, возникающие в материале. Характеристики упругости E_1, E_2, G_{12}, ν_{12} известны.



6. Построить графики зависимости модулей упругости E_2' и G_{12}', коэффициента влияния η_{13}' от угла φ. При расчёте принять следующие характеристики однонаправленного композита $E_1 = 1, E_2 = 0,25, G_{12} = 0,4, \nu_{12} = 0,25.$
7. График зависимости коэффициента Пуассона ν_{12}' имеет немонотонный характер (см. рис.1.3). Определить значение угла φ^*, при котором этот параметр принимает экстремальное значение. При расчёте принять следующие характеристики однонаправленного композита $E_1 = 1, E_2 = 0,25, G_{12} = 0,4, \nu_{12} = 0,25.$