

Закон Гука для анизотропных материалов

Лекция 1. Понятие потенциала удельной энергии упругой деформации

Упругое деформирование

Упругость – свойство деформируемого твёрдого тела восстанавливать свою геометрическую форму без изменений в окружающей его среде после снятия внешней нагрузки. Процесс упругого деформирования является обратимым. Материалы, обладающие таким свойством, являются упругими.

Свойство упругости конструкционного материала можно обнаружить, выполнив эксперименты при силовом нагружении. На практике свойства материалов часто исследуют на тонкостенных трубчатых образцах, которые подвергают растяжению силой N в осевом направлении и кручению моментом $M_{кр}$ (рис.1). В рабочей части такого образца длиной L будет иметь место

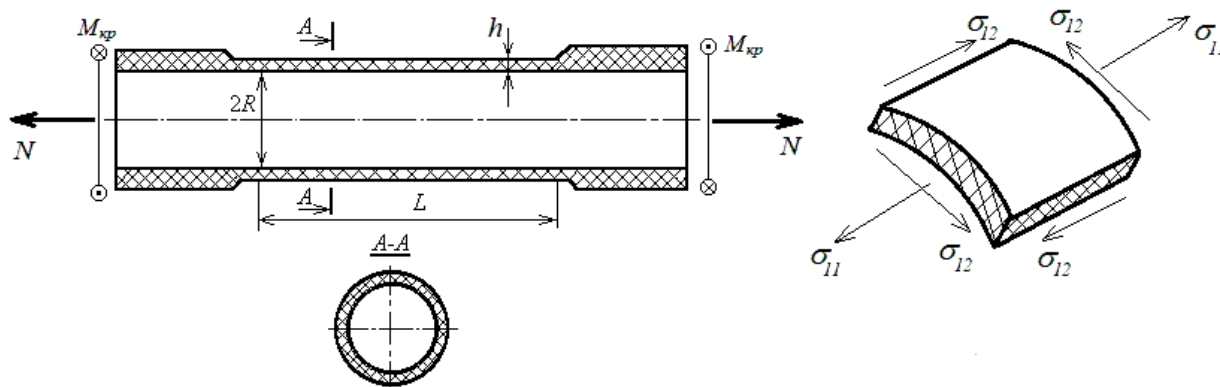


Рис.1

однородное напряжённое состояние, характеризуемое нормальным напряжением σ_{11} и касательным напряжением σ_{12} . Как известно, эти напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{N}{2\pi R h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 h}. \quad (1)$$

Эти напряжения вызывают линейные деформации ε_{11} и ε_{22} в осевом и окружном направлениях соответственно. При обработке результатов для их вычисления применяют формулы

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta R}{R}. \quad (2)$$

Здесь a – база экстензометра, на которой измеряется изменение длины в рабочей области образца. Угловая деформация γ_{12} находится по формуле

$$\gamma_{12} = \frac{R}{b} \varphi, \quad (3)$$

где φ – угол закрутки, измеряемый экстензометром на базе b .

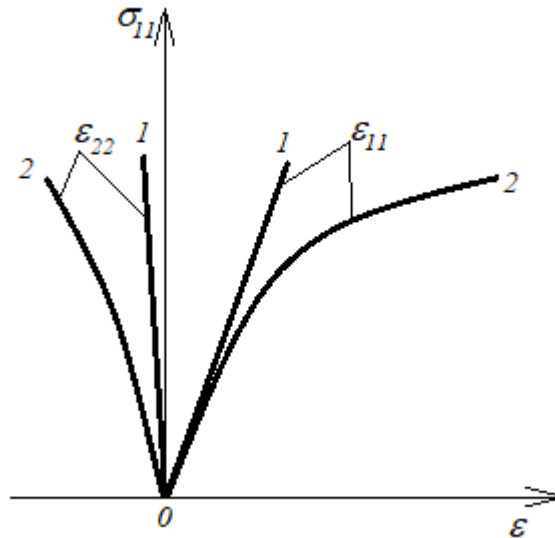


Рис.2

При осевом растяжении образца регистрируются диаграммы деформирования. На рис.2 показан их типичный вид. Диаграммы вида 1 соответствуют линейно упругому телу. Они свойственны большинству конструкционных материалов в определённом интервале изменения напряжений, например, сталям, алюминиевым сплавам. Диаграммы вида 2 характеризуют материалы с нелинейно упругими свойствами. К их числу можно отнести некоторые виды композитов, эластомеры.

Общим свойством для материалов с линейными и нелинейными диаграммами является то, что после снятия внешней нагрузки образец материала полностью восстанавливает свою форму. Такой же эффект имеет место и при повторном нагружении. Деформирование материала является обратимым. Для того, чтобы описать этот эффект аналитически, необходимо выполнить углублённое экспериментальное исследование материала.

Одним из таких экспериментов может быть совместное действие растягивающей силы и крутящего момента на трубчатый образец (см.рис.1).

При этом соотношение между величинами N и $M_{кр}$ может быть произвольным, как показано на рис.3. На участке OBA происходит нагрузка, или активное нагружение, когда возрастают оба силовых фактора. После достижения точки A начинается разгрузка, или пассивное нагружение. В этом случае силовые факторы уменьшаются. Эксперимент заканчивается, когда растягивающая сила и крутящий момент становятся равными нулю. Таким образом, реализуется замкнутый цикл нагружения.

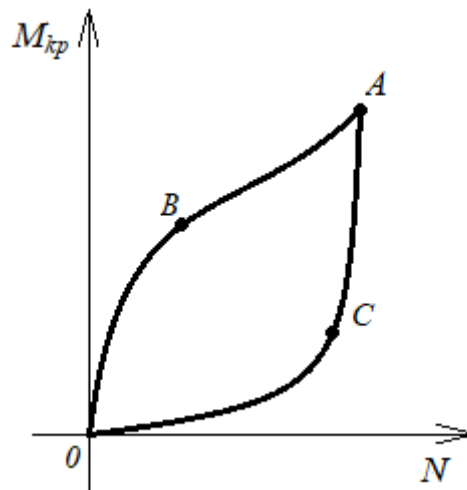


Рис.3

При нагрузке и разгрузке по формулам (1) определяются соответствующие напряжения. Этими напряжениями обусловлены деформации, вычисляемые по (2) и (3). В итоге появляется возможность построить траекторию нагружения на плоскости напряжений $\sigma_{11}-\sigma_{12}$ (рис.4а) и соответствующую траекторию деформирования $\varepsilon_{11}-\gamma_{12}$ (рис.4б). В случае упругого тела экспериментально установлен основополагающий эффект: никакие остаточные деформации не образуются после снятия нагрузки. Траектория деформирования также, как и траектория нагружения является замкнутой. Для сравнения на рис.4б показаны траектории деформирования для упругого тела (сплошная линия) и для пластического тела (пунктирная линия). Как видно, для пластического тела кривая деформирования не является замкнутой.

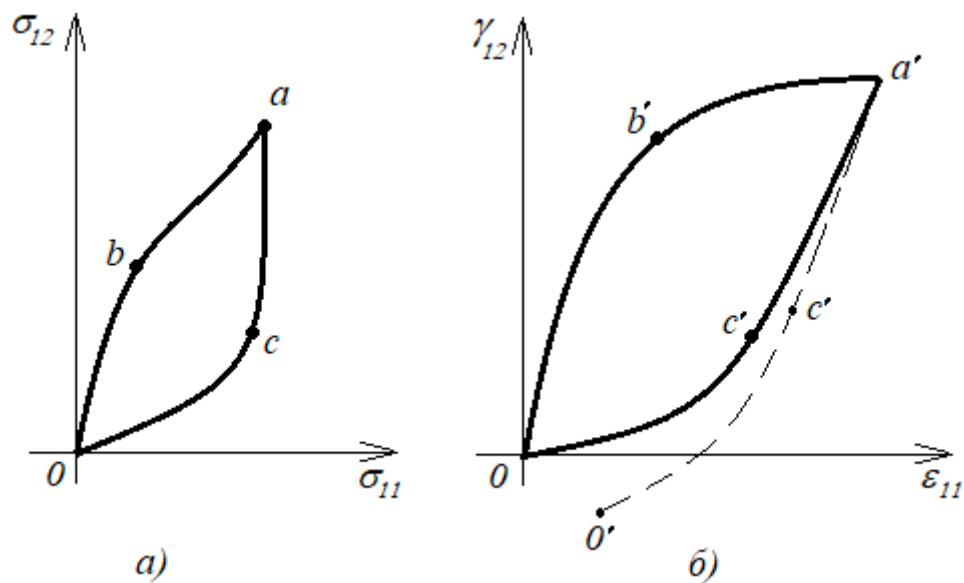


Рис.4

Данный эффект деформирования необходимо описать аналитически. Относительно просто и наглядно это можно сделать, воспользовавшись энергетическими понятиями и соотношениями, известными из курса теоретической механики. Одним из таких понятий является элементарная работа силы.

Основные энергетические соотношения

Элементарная работа силы, приложенной к материальной точке, на изменении радиуса-вектора, задающего положение этой точки в пространстве, вычисляется по формуле

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \varphi, \quad (4)$$

где φ - угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$.

Элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося относительно неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела, т.е.

$$dA = M_z \cdot d\varphi. \quad (5)$$

Воспользуемся определениями (4) и (5) для анализа упругого деформирования при экспериментальном исследовании трубчатого образца.

При растяжении силой N для элементарной работы в соответствии с равенством (4) будем иметь

$$d\bar{A} = N \cdot du,$$

где $u = \varepsilon_{11}a$. Тогда можно записать

$$d\bar{A} = N \cdot a d\varepsilon_{11} = 2\pi R h \sigma_{11} a d\varepsilon_{11} = (2\pi R h a) \sigma_{11} d\varepsilon_{11}.$$

Введём обозначение $V = 2\pi R h a$. Можно заметить, что V – объём части образца, на которой измеряется линейная деформация. Эта величина зависит от конструкции экстензометра. Тогда можно ввести понятие удельной элементарной работы, т.е. элементарной работы, отнесённой к единице объёма. В рассматриваемом случае нагружения она вычисляется по формуле

$$dA = d\bar{A} / V = \sigma_{11} d\varepsilon_{11}. \quad (6)$$

Аналогичные рассуждения можно выполнить и при кручении трубчатого образца. Если воспользоваться второй формулой из (1) и равенством (3), то будем иметь

$$d\bar{A} = M_{кр} d\varphi = 2\pi R^2 h \sigma_{12} \frac{b d\gamma_{12}}{R} = 2\pi R b h \sigma_{12} d\gamma_{12} = V \sigma_{12} d\gamma_{12}.$$

Здесь V – объём части образца, на которой измеряется угловая деформация. Этот объём также определяется устройством экстензометра. Удельная работа в данном случае вычисляется по формуле

$$dA = d\bar{A} / V = \sigma_{12} d\gamma_{12}. \quad (7)$$

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что нормальное напряжение σ_{11} совершает работу на линейной деформации ε_{11} , а касательное напряжение σ_{12} – на угловой деформации γ_{12} . Величины σ_{11} и ε_{11} , а также σ_{12} и γ_{12} образуют энергетические пары. По терминологии, принятой в теоретической механике, напряжения можно назвать обобщёнными силами, а малые деформации – обобщёнными перемещениями.

Аналогичным способом можно установить энергетические пары $\sigma_{22} - \varepsilon_{22}$, $\sigma_{33} - \varepsilon_{33}$, $\sigma_{13} - \gamma_{13}$, $\sigma_{23} - \gamma_{23}$. Тогда в общем случае напряжённо-деформированного состояния окрестности точки деформируемого твёрдого тела для

элементарной удельной работы напряжений на приращении соответствующих деформаций будем иметь следующее выражение

$$dA = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + \sigma_{12}d\gamma_{12} + \sigma_{13}d\gamma_{13} + \sigma_{23}d\gamma_{23}. \quad (8)$$

Имея ввиду, что $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, i \neq j$, это равенство можно представить так

$$dA = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}d\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}d\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}d\varepsilon_{23} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}.$$

В практических расчётах удобно ввести вспомогательные векторы

$$\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T, \{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T.$$

Тогда выражение (8) примет следующий вид

$$dA = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}.$$

Полная работа напряжений на заданном пути деформирования вычисляется по формуле

$$A = \int_{\varepsilon} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \int_{\varepsilon} \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}. \quad (9)$$

В частности, для случая, показанного на рис.4б, полная работа напряжений σ_{11} и σ_{12} на деформациях ε_{11} и γ_{12} соответственно для пути деформирования $ob'a'$ подсчитывается таким образом

$$A_{ob'a'} = \int_{ob'a'} \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{12}d\gamma_{12}. \quad (10)$$

Используя равенство (10) опишем аналитически эффект упругого деформирования, описанный выше: замкнутой траектории нагружения соответствует замкнутая траектория деформирования.

Потенциал удельной энергии упругой деформации

Существование замкнутой траектории деформирования, обусловленной замкнутой траекторией нагружения, энергетически означает, что полная удельная работа напряжений, совершаемая на соответствующих деформациях при активном нагружении, равна работе этих же напряжения на тех же деформациях при пассивном нагружении. Это означает, что процесс деформирования обратимый, т.е. никакие изменения в теле и окружающей среде не происходят. В таком процессе произведённая работа не затрачивается

на образование новых поверхностей (например, микротрещин), остаточных деформаций, нагрев тела, фазовых превращений и других подобных эффектов. Отсюда следует, что суммарная удельная работа напряжений на замкнутой траектории нагружения, а, следовательно, и замкнутой траектории деформирования, должна равняться нулю.

На основании изложенного для варианта нагружения, показанного на рис.4а, можно записать равенство

$$A_{ob'd'} + A_{a'c'o} = 0.$$

Отсюда следует интегральный вид этого равенства

$$\oint_{\varepsilon} \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{12} d\gamma_{12} = 0. \quad (11)$$

Из (11) вытекает, что выражение, стоящее под знаком интеграла, является полным дифференциалом некоторой функции $U(\varepsilon_{11}, \gamma_{12})$. Следовательно, подынтегральное выражение в равенстве (11) можно представить так

$$\sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{12} d\gamma_{12} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}} d\varepsilon_{11} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{12}} d\gamma_{12} = dU. \quad (12)$$

Из этих равенств получаем формулы

$$\sigma_{11} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{12}}, \quad (13)$$

а также зависимость

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \gamma_{12}} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{11}}. \quad (14)$$

Отметим ещё одно следствие из равенства (11). Полная удельная работа напряжений на соответствующих деформациях, производимая на пути из начального состояния (точки 0) в конечное (точку А), не зависит от вида траектории нагружения, а, следовательно, траектории деформирования.

Функция $U(\varepsilon_{11}, \gamma_{12})$ называется потенциалом удельной энергии упругой деформации, а равенство (14) - условием существования этого потенциала.

Выражения (13) показывают, что при упругом деформировании функции $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, \gamma_{12})$ и $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\varepsilon_{11}, \gamma_{12})$ являются потенциальными.

Формулу (12) можно записать таким образом

$$dA = dU.$$

Из этого энергетического равенства следует, что удельная элементарная работа, произведённая напряжениями на приращениях деформаций, в обратимом процессе упругого деформирования затрачивается на приращение энергии упругого деформирования.

Всё вышеизложенное можно обобщить на трёхмерный случай напряжённо-деформированного состояния малой окрестности деформируемого твёрдого тела. Потенциал удельной энергии упругой деформации в общем случае имеет вид $U = U(\varepsilon_{ij})$. Формуле (11) будет соответствовать выражение

$$\oint_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0. \quad (15)$$

В матричном виде это равенство записывается следующим образом

$$\oint_{\varepsilon} \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\} = 0.$$

Для напряжений справедливы зависимости

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (16)$$

Условие существования потенциала (13) в обобщённом виде можно записать таким образом

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (17)$$

В этом равенстве имеем $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Из полученных результатов вытекает метод построения зависимостей $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$, связывающих напряжения и деформации в упругом теле. Используя экспериментальные данные для деформируемого твёрдого тела,

необходимо выбрать такое выражение для потенциала $U = U(\varepsilon_{ij})$, при котором зависимости $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$, полученные по формулам (16), будут наилучшим образом описывать экспериментальные данные. Например, если в результате экспериментальных исследований образца материала, изображённого на рис.1, установлено, что диаграммы деформирования линейны на некотором интервале изменения напряжений, то потенциал удельной энергии деформации должен быть записан в виде квадратичного полинома, т.е.

$$U(\varepsilon_{11}, \gamma_{12}) = \frac{1}{2} (a_{11}\varepsilon_{11}^2 + 2a_{12}\varepsilon_{11}\gamma_{12} + a_{22}\gamma_{12}^2). \quad (18)$$

Тогда по формулам (13) получим линейные зависимости

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\gamma_{12}, \\ \sigma_{12} &= a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\gamma_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} определяются при обработке экспериментальных результатов. Их значения должны быть такими, чтобы расхождение между теоретическими и экспериментальными данными было минимальным.

Важную роль при анализе зависимости $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$ играет условие существования потенциала (17). Это условие справедливо для упругого деформирования. Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим следующий пример.

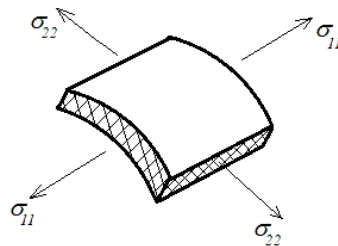


Рис.5

Пусть при экспериментальном исследовании образца, изображённого на рис.1, в его рабочей области реализовано напряжённое состояние двухосного растяжения (рис.5). При этом траектории нагружения были выбраны так, что на плоскости деформаций $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}$ переход из начального состояния в

конечное (точку a) осуществлялся по трём траекториям деформирования (рис.6).

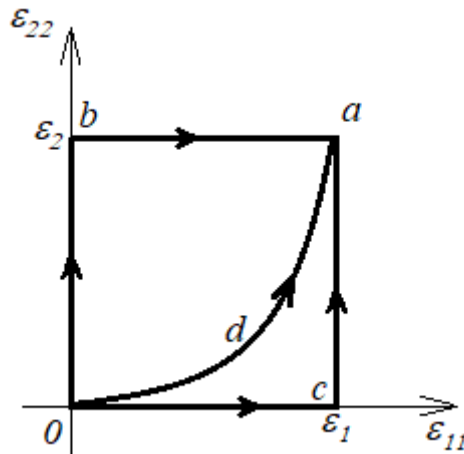


Рис.6

Предположим, что в результате испытаний образцов материала были получены линейные диаграммы деформирования, которые удовлетворительно аналитически описываются следующими зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Покажем, что исследуемый материал является упругим, а его свойства могут быть описаны равенствами (20), при выполнении условия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad (21)$$

т.е. должно быть $c_{12} = c_{21}$. В этом случае должен существовать потенциал удельной энергии упругой деформации.

Выше для упругого тела было доказано, что полная удельная работа напряжений на соответствующих деформациях, производимая на пути из начального состояния в конечное, не зависит от вида траектории деформирования. Воспользуемся этим свойством и рассмотрим три возможных траектории деформирования. Для каждой из них подсчитаем полную работу напряжений на соответствующих деформациях. Для произвольной траектории деформирования с учётом (21) имеем выражение

$$A = \int_{\varepsilon} \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} = \int_{\varepsilon} (c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22}) d\varepsilon_{11} + (c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22}) d\varepsilon_{22}. \quad (22)$$

Рассмотрим траекторию деформирования *oca*. Учитываем, что $A_{oca} = A_{oc} + A_{ca}$. На отрезке *oc* должно быть $\varepsilon_{22} = 0$, $d\varepsilon_{22} = 0$. Тогда из (22) получим

$$A_{ob} = \int_0^{\varepsilon_1} c_{11}\varepsilon_{11} d\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}c_{11}\varepsilon_1^2.$$

На отрезке *oa* имеем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$, $d\varepsilon_{11} = 0$. Тогда будем иметь

$$A_{ca} = \int_0^{\varepsilon_2} (c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_{22}) d\varepsilon_{22} = c_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}c_{22}\varepsilon_2^2.$$

Для суммарной работы получим выражение

$$A_{oca} = \frac{1}{2}c_{11}\varepsilon_1^2 + c_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}c_{22}\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2}(c_{11}\varepsilon_1^2 + 2c_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + c_{22}\varepsilon_2^2). \quad (23)$$

Аналогичные расчёты выполним для траектории деформирования *obc*. В данном случае имеем $A_{oba} = A_{ob} + A_{ba}$. В итоге приходим к зависимости

$$A_{oba} = \frac{1}{2}(c_{11}\varepsilon_1^2 + 2c_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + c_{22}\varepsilon_2^2). \quad (24)$$

Рассмотрим теперь траекторию деформирования *oda*. Зададим для неё следующее уравнение $\varepsilon_{22} = C\varepsilon_{11}^2$. Тогда равенство (22) примет такой вид

$$A_{oda} = \int_0^{\varepsilon_1} (c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}C\varepsilon_{11}^2) d\varepsilon_{11} + (c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}C\varepsilon_{11}^2) 2C\varepsilon_{11} d\varepsilon_{11}.$$

Из этого выражения с учётом равенства $\varepsilon_2 = C\varepsilon_1^2$ после преобразований будем иметь

$$A_{oda} = \frac{1}{2}c_{11}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}c_{22}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{3}(c_{12} + 2c_{21})\varepsilon_1\varepsilon_2. \quad (25)$$

Сравним выражения (23)-(25). Как видно, для выполнения равенств $A_{oca} = A_{oba} = A_{oda}$ необходимо, чтобы было $a_{12} = a_{21}$. В этом случае условие (21) выполняется. Потенциал удельной энергии упругой деформации существует и его можно записать в следующем виде

$$U(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) = \frac{1}{2}(c_{11}\varepsilon_{11}^2 + 2c_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + c_{22}\varepsilon_{22}^2). \quad (26)$$

При выполнении равенства (21) при любом уравнении траектории деформирования полная удельная работа напряжений на соответствующих деформациях, производимая на пути из начального состояния в конечное, не зависит от вида этого уравнения.