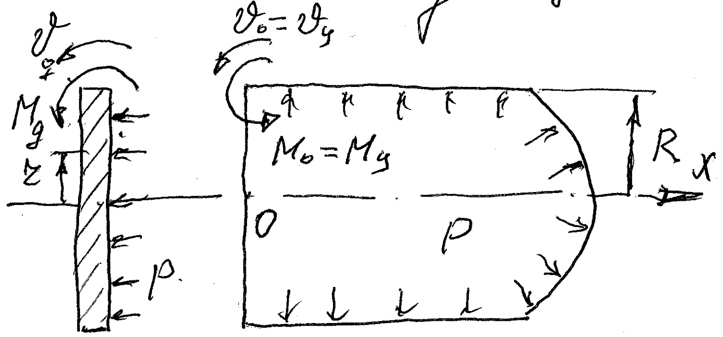
Цилиндрическая оболочка с плоским днищем.



Условие сопряжения днища и цилиндрической оболочки.

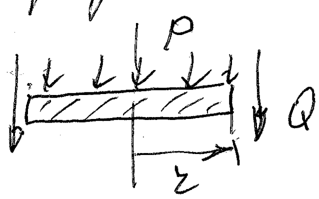
$$M_д = -M_ц|_{x=0}$$

$$\vartheta_д = \vartheta_ц|_{x=0}$$

$$w|_x = 0.$$

Рассмотрим днище

Вырезаем среднюю часть днища радиуса r и определяем перерезывающую силу.



$$Q\cdot 2\pi r = p\pi r^2$$

$$Q = -\frac{pr}{2}$$

Разрешающее уравнение круглой пластины

$$\left(\frac{1}{r}(\vartheta r)'\right)' = \frac{Q}{D_д}$$

где $D_д$ - цилиндрическая жесткость днища.

Решение

$$(\vartheta r)' = r\int \frac{Q}{D_д}\,dr + C_1^* r$$

$$\vartheta = \frac{1}{r}\int r\int \frac{Q}{D_д}\,dr + \frac{C_1^* r^2}{2r} + C_2\frac{1}{r}$$

Обозначим $C_1 = C^*/2$, при $r \to 0$ $C_2 \to 0$.

Подставляем выражение перерезывающей силы

$$\vartheta = -\frac{p}{2r}\int r\int \frac{r}{D_д}\,dr + C_1 r$$

$$\vartheta = -\frac{pr^3}{16D_д} + C_1 r \to \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{3r^2 p}{16D_д} + C_1$$

$$\to \frac{\vartheta}{r} = -\frac{pr^2}{16D_д} + C_1$$

Радиальный изгибающий момент в пластине

$$M_r = D_д\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right)$$

подставим найденные ранее формулы для ϑ

получим после простых преобразований

$$M_r = D_g\left[C_1(1+\mu) - \frac{pr^2}{16D_g}(3+\mu)\right]$$

Рассмотрим оболочку. Используем приведённое ранее выражение для осевого момента.

$$M_y = M_0 e^{-kx}(\cos kx + \sin kx) + \frac{Q_0}{k} e^{-kx} \sin kx.$$

где M_0 и Q_0 — краевые момент и перерезывающая сила на торце оболочки при $x = 0$., т.е. при $x = 0$ $M_0 = M_y = -M_g$.

Из последнего равенства и формулы для момента M_r на границе пластины и оболочки при $r = R$ имеем

$$-D_g\left[C_1(1+\mu) - \frac{pR^2}{16D_g}(3+\mu)\right] = M_0$$

следовательно,

$$C_1 = -\frac{1}{D_g(1+\mu)}\left[M_0 - \frac{pR^2}{16}(3+\mu)\right]$$

Таким образом осуществлено сопряжение оболочки и пластины по изгибающему моменту.

Осуществим стыковку по углам, т.е.

$$\vartheta_g\big|_{r=R} = \vartheta_y\big|_{x=0}$$

С учетом найденного выражения для C_1 преобразуем выражение для ϑ_g при $r = R$

$$\vartheta_g\big|_{r=R} = -\frac{pR^3}{16D_g} - \frac{R}{D_g(1+\mu)}\left[M_0 - \frac{pR^2}{16}(3+\mu)\right]$$

После преобразований

$$\vartheta_g\big|_{r=R} = -\frac{R}{D_g(1+\mu)}\left(M_0 - \frac{pR^2}{8}\right).$$

Рассмотрим оболочку. Используем приведенное ранее выражение для угла поворота ϑ_y.

$$\vartheta_y = \frac{M_0}{D_y K} e^{-Kx} \cos Kx + \frac{Q_0}{2D_y K^2} e^{-Kx} (\cos Kx + \sin Kx)$$

Выполняем условие сопряжения при $x = 0$ и $r = R$ по ϑ-углу.

$$-\frac{R}{D_g(1+\mu)}\left(M_0 - \frac{pR^2}{8}\right) = \frac{M_0}{D_y K} + \frac{Q_0}{2D_y K^2}$$

Разрешающее уравнение краевого эффекта

$$w^{IV} + 4K^4 w = \frac{1}{D_y}\left(p - \mu \frac{T_1}{R}\right)$$

Здесь D_y – цилиндрическая жесткость оболочки,

$$4K^4 = \frac{Eh}{R^2 D_y}. \quad \text{т.к.} \ D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \rightarrow K = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{Rh}}$$

Находим усилие $T_1 = \frac{pR}{2}$ в оболочке.

Учитывая разрешающее уравнение находим решение краевого эффекта с частным решением:

$$w = -\frac{M_0}{2DK^2} e^{-Kx} (\cos Kx - \sin Kx) - \frac{Q_0}{2DK^3} e^{-Kx} \cos Kx +$$

$$+ \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

или $w|_{x=0} = -\frac{M_0}{2D_y K^2} - \frac{Q_0}{2D_y K^3} + \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0.$

Это уравнение и уравнение стыковки по ϑ и моментам образуют систему.

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 0 \rightarrow -\frac{M_0}{2D_y K^2} - \frac{Q_0}{2D_y K^3} + \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0 \\ + \\ \vartheta_g = \vartheta_y \rightarrow \frac{M_0}{D_y K} + \frac{Q_0}{2D_y K^2} + \left(M_0 - \frac{pR^2}{8}\right)\frac{R}{D_g(1+\mu)} = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{K} \end{matrix} \right.$$

~~Вычитая~~ Складывая первое уравнение и второе умноженное на $1/K$, исключим перерезывающую силу Q_0.

В результате получим

$$\frac{M_0}{K}\left(\frac{1}{2D_y K} + \frac{R}{D_g(1+\mu)}\right) + pR^2\left(\frac{1}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{R}{8D_g(1+\mu)K}\right) = 0$$

Следовательно, наиболее опасный изгибающий момент в месте сопряжения пластины и оболочки

$$M_0 = -pR^2k\left(\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{Eh} - \frac{R}{8D_g(1+\mu)k}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{2D_y k} + \frac{R}{D_g(1+\mu)}\right)}$$

Если цилиндрическая жесткость пластины $D_g \to \infty$, то на границе оболочки возникает защемление. В этом случае момент

$$M_0\Big|_{D_g\to\infty} = -2pR^2k^2\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{Eh}D_y.$$

Рассмотрим случай, когда жесткости оболочки и пластины равны, т.е. $D_g = D_y$ и сравним с абсолютно жесткой пластиной т.е. с защемленной оболочкой.

Иначе, сопоставим две последние формулы. Можно показать, что

$$\frac{M_0|_{D_g=D_y}}{M_0|_{D_g\to\infty}} \approx \frac{R}{h},$$ т.е. краевой момент возрастает в R/h раз при слабой пластине по сравнению с защемлением. Поэтому пластина должна быть достаточно жесткой, т.е. с толщиной значительно превышающей толщину оболочки h.

После нахождения опасного момента и известной силы T_1 напряжения можно найти по формулам

$$\sigma_1 = \frac{6M_0}{h^2} + \frac{T_1}{h}$$

Окружной момент в краевом эффекте равен μM_0, а окружная сила $T_2 = PR$. В этом случае окружные напряжения

$$\sigma_2 = \frac{6\mu M_0}{h^2} + \frac{T_2}{h}$$ как правило меньше.