Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Специальное машиностроение

КАФЕДРА СМ1«Космические аппараты и ракеты-носители»

Домашнее задание №2

по курсу «Строительная механика летательных аппаратов»

Вариант №13

Группа: СМ1-81

Студент: Новиков А.Р. ______________________
(Подпись, дата)

Преподаватель: Печников В.П. ______________________
(Подпись, дата)

Москва, 2024

1 Условие задания

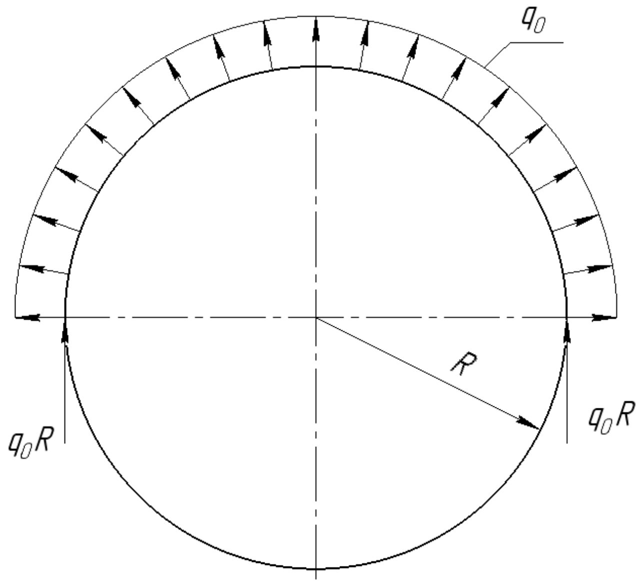

Рисунок 1.1 — Условие задания

В данном задании необходимо определить перемещения в кольце v и w.

2 Решение

Из предыдущего домашнего задания имеем следующие выражения:

- Уравновешивающая нагрузка:

$$t = \frac{4q_0}{\pi} \sin\varphi \tag{2.1}$$

- Момент на кольце:

$$\begin{cases} M_1 = q_0 R^2 \left(1 - \dfrac{3}{\pi}\cos\varphi - \dfrac{2}{\pi}\varphi\sin\varphi\right) \\ M_2 = q_0 R^2 \left(2\sin\varphi - \dfrac{3}{\pi}\cos\varphi - \dfrac{2}{\pi}\varphi\sin\varphi - 1\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

Запишем разрешающее уравнение кольца:

$$\frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = -\frac{R^3}{EJ}\left[R\left(t + \frac{dQ}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} + m\right)\right] \tag{2.3}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{2.4}$$

Коэффициенты можно найти по формулам:

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2}\left[a''_n + nb'_n - \dfrac{1}{R}(n^2-1)a'''_n\right] \\ B_n = \dfrac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2}\left[b''_n - na'_n - \dfrac{1}{R}(n^2-1)b'''_n\right] \end{cases} \tag{2.5}$$

Коэффициент A_0 задает перемещение всего кольца как одно целое, поэтому задаем его равным $A_0 = 0$.

Коэффициенты в формуле (2.5) можно найти по формулам:

$$\begin{Bmatrix} a'_n \\ a''_n \\ a'''_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{Bmatrix} \cos n\varphi d\varphi \tag{2.6}$$

$$\begin{Bmatrix} b'_n \\ b''_n \\ b'''_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} q_n \\ q_t \\ m \end{Bmatrix} \sin n\varphi d\varphi \tag{2.7}$$

В нашем случае распределенная нагрузка равна:

$$q_n = q_0, \quad \varphi < \frac{\pi}{2}, \ \varphi > \frac{3\pi}{2} \tag{2.8}$$

$$q_t = t + q_{t1} + q_{t2} \tag{2.9}$$

$$m = 0 \tag{2.10}$$

Распределим сосредоточенную нагрузку q_0R по некоторому малому угловому сектору $\Delta\varphi$:

$$q_{ti} = \frac{q_0R}{R\Delta\varphi} = \frac{q_0}{\Delta\varphi} \tag{2.11}$$

Получим следующие выражения для коэффициентов (2.6) и (2.7):

$$\begin{aligned} a''_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_t d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{4q_0}{\pi}\sin\varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}d\varphi\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}(0 - q_0 + q_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$a_n'' = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{4q_0}{\pi}\sin\varphi\cos n\varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}\cos n\varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}\cos n\varphi d\varphi\right) = \\ = \frac{1}{\pi}\left(0 - q_0\cos\frac{n\pi}{2} + q_0\cos\frac{3n\pi}{2}\right) = -\frac{2q_0}{\pi}\sin n\pi\sin\frac{n\pi}{2} \tag{2.13}$$

$$b_n'' = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{4q_0}{\pi}\sin\varphi\sin n\varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}\sin n\varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{q_0}{\Delta\varphi}\sin n\varphi d\varphi\right) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(0 - q_0\sin\frac{n\pi}{2} + q_0\sin\frac{3n\pi}{2}\right) = \frac{2q_0}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi, \ n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{4q_0}{\pi}\cdot\pi - q_0\sin\frac{\pi}{2} + q_0\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{q_0}{\pi}(4-1-1) = \frac{2q_0}{\pi}, \ n = 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q_0\cos n\varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} q_0\cos n\varphi d\varphi\right) = \frac{q_0}{\pi n}\left(\sin n\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin n\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) = \\ = \frac{q_0}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2}\right) = -\frac{2q_0}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi \tag{2.15}$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q_0\sin n\varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} q_0\sin n\varphi d\varphi\right) = -\frac{q_0}{\pi n}\left(\cos n\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos n\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) = \\ = -\frac{q_0}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1 + 1 - \cos\frac{3\pi n}{2}\right) = -\frac{q_0}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} a_n''' = 0 \\ b_n''' = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Проверим полученные коэффициенты с помощью выражений:

$$\begin{cases} B - a_1'' + b_1' = 0 \\ C - b_1'' - a_1' = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} 0 - 0 + 0 = 0 \\ \frac{4q_0}{\pi} - \frac{2q_0}{\pi} - \frac{2q_0}{\pi} = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Условия (2.18) выполняются, значит коэффициенты найдены правильно.

Получим коэффициенты разложения (2.5):

$$A_n = 0 \tag{2.20}$$

$$B_n = \frac{R^4}{EJn^2(n^2-1)^2}\left[\frac{2q_0}{\pi}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi + n\frac{2q_0}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi\right] = \frac{4q_0R^4}{\pi EJn^2(n^2-1)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi \tag{2.21}$$

Получим следующее разложение функции касательных перемещений:

$$v = \frac{4q_0R^4}{\pi EJ}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi\sin n\varphi \tag{2.22}$$

Примем количество членов ряда (2.4) равным $N = 50$. Построим эпюры перемещений и изгибающего момента:

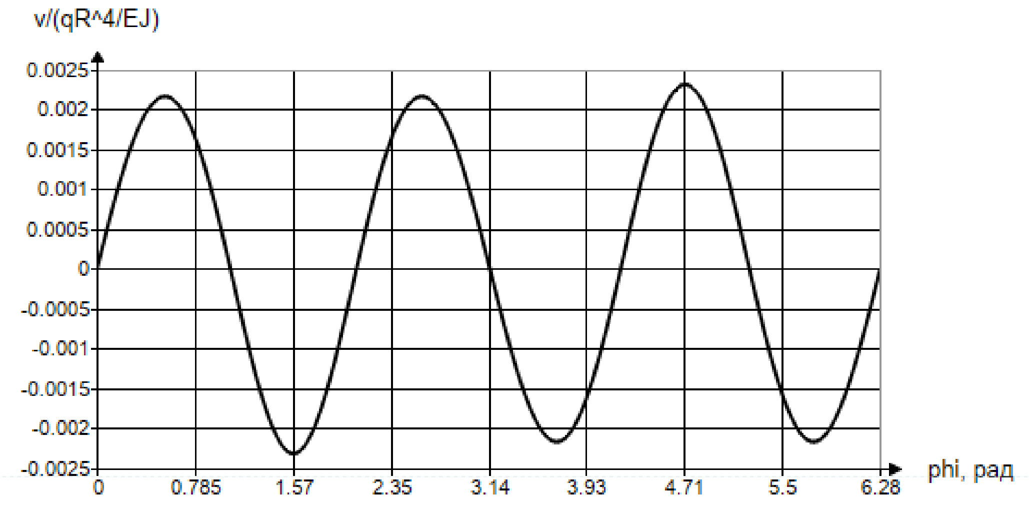

Рисунок 2.1 — Эпюра касательных перемещений

Найдем нормальные перемещения:

$$w = -\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{4q_0R^4}{\pi EJ}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)^2(n+1)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi\cos(n\varphi) \tag{2.23}$$

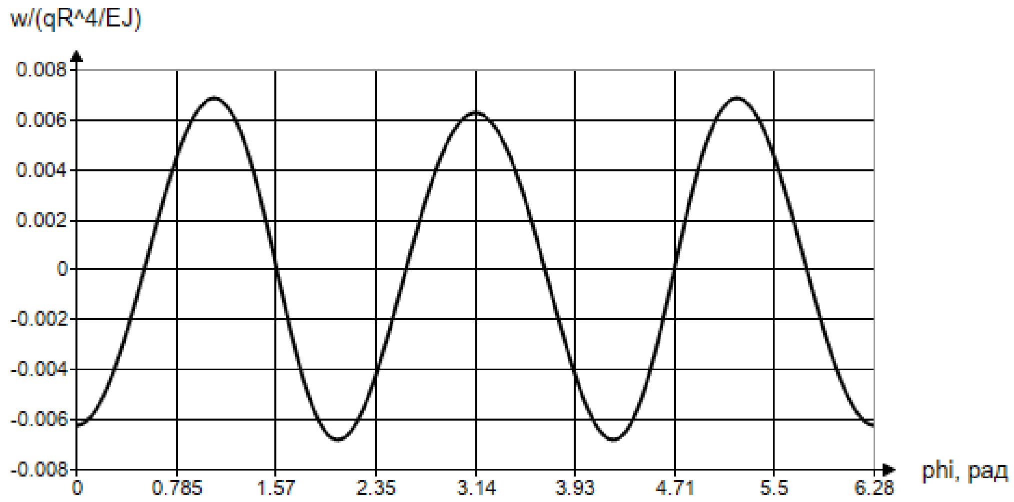

Рисунок 2.2 — Эпюра нормальных перемещений

Найдем изгибающий момент:

$$M = \frac{EJ}{R^2}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w\right) = \frac{4q_0R^2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}\sin\frac{\pi n}{2}\cos n\pi\cos n\varphi \tag{2.24}$$

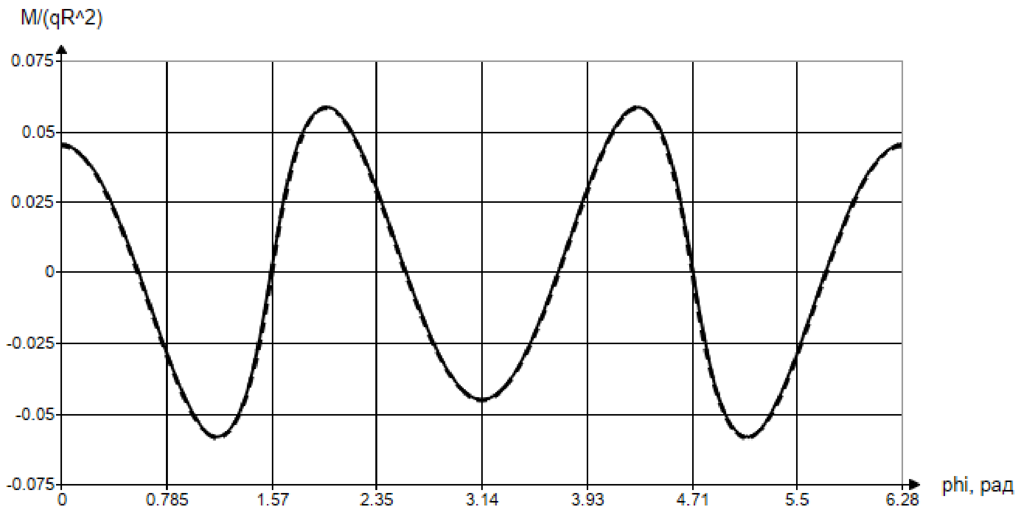

Рисунок 2.3 — Эпюра изгибающего момента

Сплошной линией обозначено текущее решение $M_2(\varphi)$, а прерывистой — аналитическое решение из прошлого задания $M_1(\varphi)$. Для сравнения возьмем значения моментов в нескольких точках:

- $\varphi = 0: \ M_1(0) = 0.0451; \ M_2(0) = 0.0451$
- $\varphi = \frac{\pi}{4}: \ M_1(\frac{\pi}{4}) = -0.02879; \ M_2(\frac{\pi}{4}) = -0.02891$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}: \ M_1(\frac{\pi}{2}) = 0; \ M_2(\frac{\pi}{2}) = 0.00003$
- $\varphi = \frac{3\pi}{4}: \ M_1(\frac{3\pi}{4}) = 0.02879; \ M_2(\frac{3\pi}{4}) = 0.02889$
- $\varphi = \pi: \ M_1(\pi) = -0.04507; \ M_2(\pi) = -0.04515$
- $\varphi = \frac{5\pi}{4}: \ M_1(\frac{5\pi}{4}) = 0.02879; \ M_2(\frac{5\pi}{4}) = -0.02885$
- $\varphi = \frac{3\pi}{2}: \ M_1(\frac{3\pi}{2}) = 0; \ M_2(\frac{3\pi}{2}) = -0.00003$
- $\varphi = \frac{7\pi}{4}: \ M_1(\frac{7\pi}{4}) = -0.02879; \ M_2(\frac{7\pi}{4}) = -0.02899$

Как можно увидеть, решения с высокой точностью совпадают.