ПРИЛОЖЕНИЕ А

Параметры, заданные изначальным условием задачи, когда баки не полностью заполнены

Координаты сечений:	Жесткость участков ракеты:	Погонная масса:
$x_1 := 2.0$	$EJ_1 := 40 \cdot 10^6$	$m_1 := 30$
$x_2 := 4.0$	$EJ_2 := 90 \cdot 10^6$	$m_2 := 60$
$x_3 := 5.0$	$EJ_3 := 60 \cdot 10^6$	$m_3 := 40$
$x_4 := 8.0$	$EJ_4 := 44 \cdot 10^6$	$m_4 := 30$
$x_5 := 11.0$	$EJ_5 := 44 \cdot 10^6$	$m_5 := 3500$
$x_6 := 12.0$	$EJ_6 := 60 \cdot 10^6$	$m_6 := 50$
$x_7 := 14.0$	$EJ_7 := 55 \cdot 10^6$	$m_7 := 35$
$x_8 := 16.0$	$EJ_8 := 55 \cdot 10^6$	$m_8 := 2500$
$x_9 := 19.5$	$EJ_9 := 60 \cdot 10^6$	$m_9 := 50$

Определим длины участков исходя из координат их границ:

$l_1 := x_1 = 2$ $\quad$ $l_4 := x_4 - x_3 = 3$ $\quad$ $l_7 := x_7 - x_6 = 2$

$l_2 := x_2 - x_1 = 2$ $\quad$ $l_5 := x_5 - x_4 = 3$ $\quad$ $l_8 := x_8 - x_7 = 2$

$l_3 := x_3 - x_2 = 1$ $\quad$ $l_6 := x_6 - x_5 = 1$ $\quad$ $l_9 := x_9 - x_8 = 3.5$

Задаемся сосредоточенными массами и моментами инерции:

$M_1 := 1000$ - сосредоточенная масса в сечении с координатой x_1

$M_2 := 800$ - сосредоточенная масса в сечении с координатой x_8

$J_8 := 1500$ - момент инерции за счет карданного подвеса ДУ в сечении x_8

Создадим вспомогательные вектора масс, жесткостей и длин участков, для дальнейшего обращения к ним в индексной форме:

ПРИЛОЖЕНИЕ А

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$ - вектор координат x_i

$$m := \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \end{bmatrix}$$ - вектор распределения массы по участкам l_i

$$EJ := \begin{bmatrix} EJ_1 \\ EJ_2 \\ EJ_3 \\ EJ_4 \\ EJ_5 \\ EJ_6 \\ EJ_7 \\ EJ_8 \\ EJ_9 \end{bmatrix}$$ - вектор распределения жесткости по участкам l_i

$$l := \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \end{bmatrix}$$ - вектор длин участков l_i

Общая длина ракеты:

$$L := \sum_{n=0}^{8} l_n = 19.5$$

Определим Функции Крылова:

$$i := 0, 1 .. 8$$

$$b(\omega, i) := \sqrt[4]{\omega^2 \cdot \frac{m_i}{EJ_i}}$$

$$S(\omega, i, x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\cosh\left(b(\omega, i) \cdot x\right) + \cos\left(b(\omega, i) \cdot x\right)\right)$$

$$T(\omega, i, x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\sinh\left(b(\omega, i) \cdot x\right) + \sin\left(b(\omega, i) \cdot x\right)\right)$$

$$U(\omega, i, x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\cosh\left(b(\omega, i) \cdot x\right) - \cos\left(b(\omega, i) \cdot x\right)\right)$$

$$V(\omega, i, x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\sinh\left(b(\omega, i) \cdot x\right) - \sin\left(b(\omega, i) \cdot x\right)\right)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Запишем вспомогательные матрицы сосредоточенных масс и моментов инерции:

$$M := \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix} \qquad J := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Матрицы перехода через стыки участков в общем виде со сосредоточенной массой и моментом инерции:

$$B(\omega, i) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(J_i \cdot \omega^2\right) & 1 & 0 \\ M_i \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ - через стыки с координатами x_i

Матрицы перехода через участки:

$$A(\omega, i, x) := \begin{bmatrix} S(\omega,i,x) & \dfrac{T(\omega,i,x)}{b(\omega,i)} & \dfrac{U(\omega,i,x)}{EJ_i \cdot (b(\omega,i))^2} & \dfrac{V(\omega,i,x)}{EJ_i \cdot (b(\omega,i))^3} \\ b(\omega,i) \cdot V(\omega,i,x) & S(\omega,i,x) & \dfrac{T(\omega,i,x)}{EJ_i \cdot b(\omega,i)} & \dfrac{U(\omega,i,x)}{EJ_i \cdot (b(\omega,i))^2} \\ EJ_i \cdot (b(\omega,i))^2 \cdot U(\omega,i,x) & EJ_i \cdot b(\omega,i) \cdot V(\omega,i,x) & S(\omega,i,x) & \dfrac{T(\omega,i,x)}{b(\omega,i)} \\ EJ_i \cdot (b(\omega,i))^3 \cdot T(\omega,i,x) & EJ_i \cdot (b(\omega,i))^2 \cdot U(\omega,i,x) & b(\omega,i) \cdot V(\omega,i,x) & S(\omega,i,x) \end{bmatrix}$$

Общая матрица перехода от первого до последнего участка есть произведение матриц перехода через участки на матрицы перехода через границы участков:

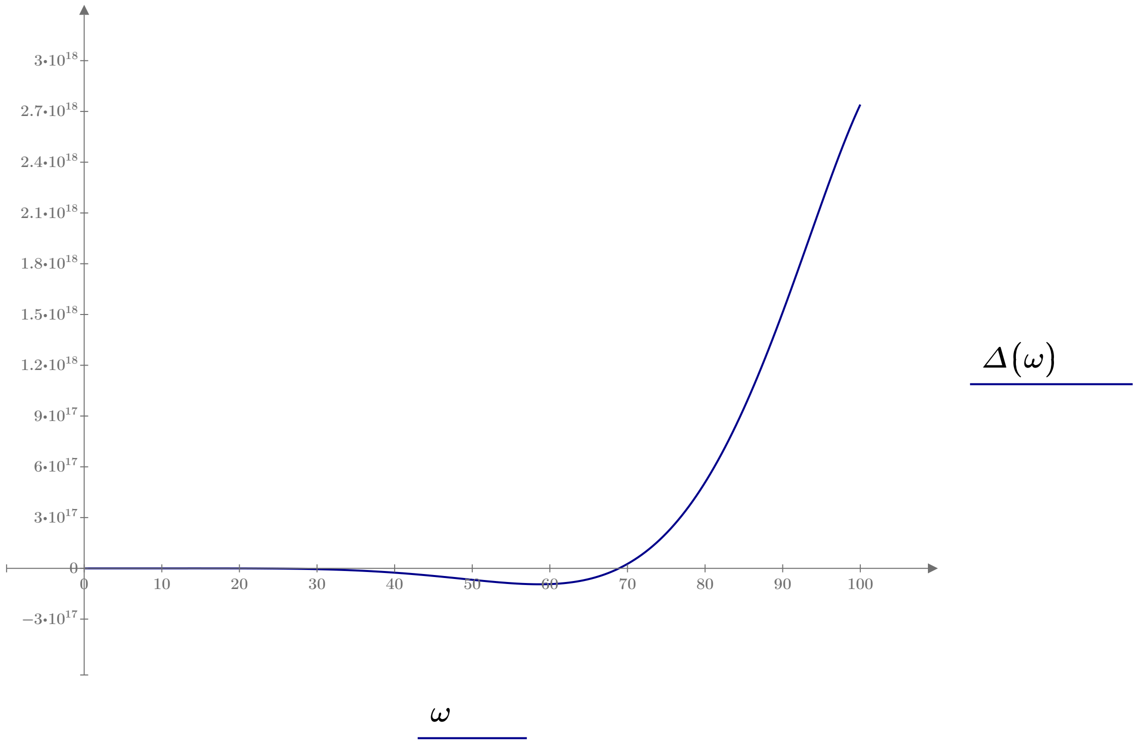
$$P(\omega) := \prod_{j=8}^{1} \left(A\left(\omega, j, l_j\right) \cdot B(\omega, (j-1)) \right) \cdot A\left(\omega, 0, l_1\right)$$

Значение определителя, отвечающего за наличие ненулевых решений:

$$\Delta(\omega) := P(\omega)_{2,0} \cdot P(\omega)_{3,1} - P(\omega)_{3,0} \cdot P(\omega)_{2,1}$$

$\omega := 0, 0.1 .. 100$

ПРИЛОЖЕНИЕ А



Первая собственная частота:

$$\omega := 31$$

$$P(\omega)_{2,0} \cdot P(\omega)_{3,1} - P(\omega)_{2,1} \cdot P(\omega)_{3,0} = 0$$

$$\omega_1 := \mathbf{Find}(\omega) = 17.571$$

Вторая собственная частота:

$$\omega := 70$$

$$P(\omega)_{2,0} \cdot P(\omega)_{3,1} - P(\omega)_{2,1} \cdot P(\omega)_{3,0} = 0$$

$$\omega_2 := \mathbf{Find}(\omega) = 68.909$$

Построение эпюр:

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исходя из системы (21), приняв $u_1(0)=1$, получим:

$$u_1(\omega) := \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{P(\omega)_{2,0}}{P(\omega)_{2,1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

В уже проведенном расчете матрица перехода P соответствует всей длине ракеты. Запишем эту матрицу для неопределенной координаты x.

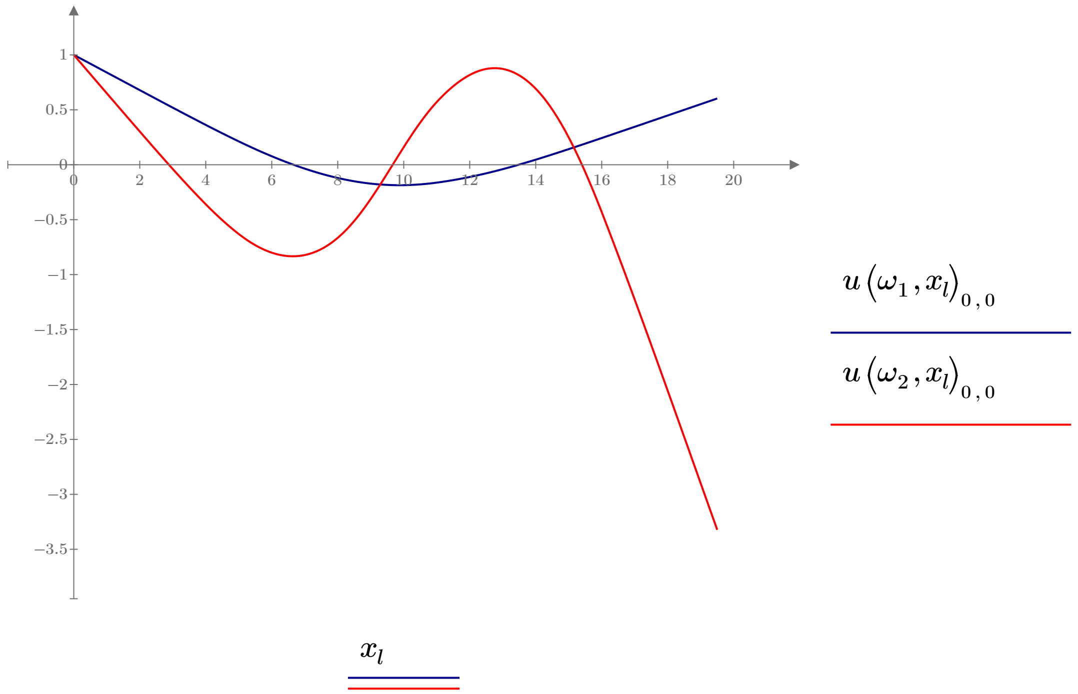
$$I(x) := \left\| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{while } X_i < x \\ \quad \| \; i \leftarrow i+1 \end{array} \right.$$

$$P(\omega, x) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } I(x) = 0 \\ \quad \| \; P(\omega,x) \leftarrow A(\omega, I(x), x) \\ \text{if } I(x) = 1 \\ \quad \| \; P(\omega,x) \leftarrow A\left(\omega, I(x), x - X_{I(x)-1}\right) \cdot B(\omega, I(x)-1) \cdot A(\omega, 0, l_1) \\ \text{if } I(x) > 1 \\ \quad \| \; P(\omega,x) \leftarrow A\left(\omega, I(x), x - X_{I(x)-1}\right) \cdot B(\omega, (I(x)-1)) \\ \qquad\qquad \cdot \prod_{j=I(x)-1}^{1} \left(A\left(\omega, j, l_j\right) \cdot B(\omega, (j-1))\right) \cdot A(\omega, 0, l_1) \\ P(\omega, x) \end{array} \right.$$

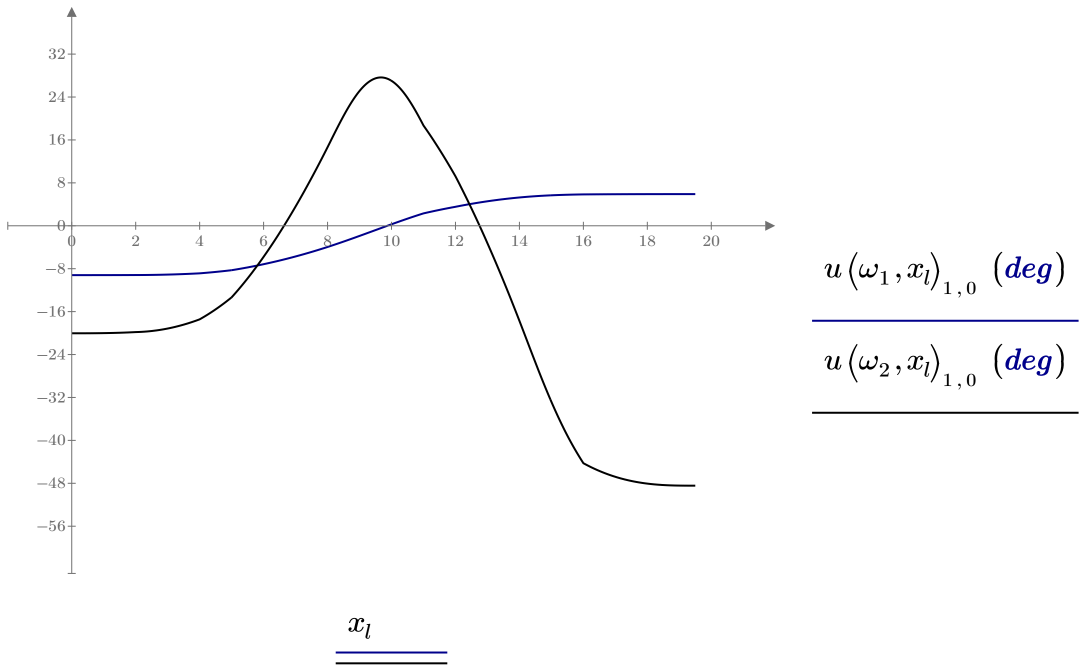
$$u(\omega, x) := P(\omega, x) \cdot u_1(\omega)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Форма упругой линии: $x_l := 0, 0.01 .. L$

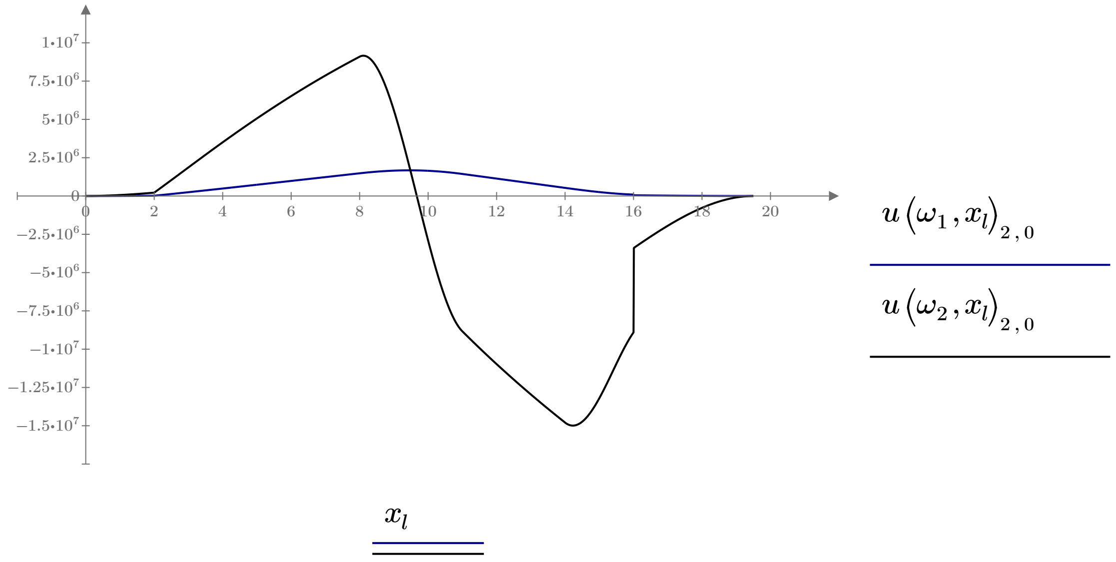


Форма угла поворота:

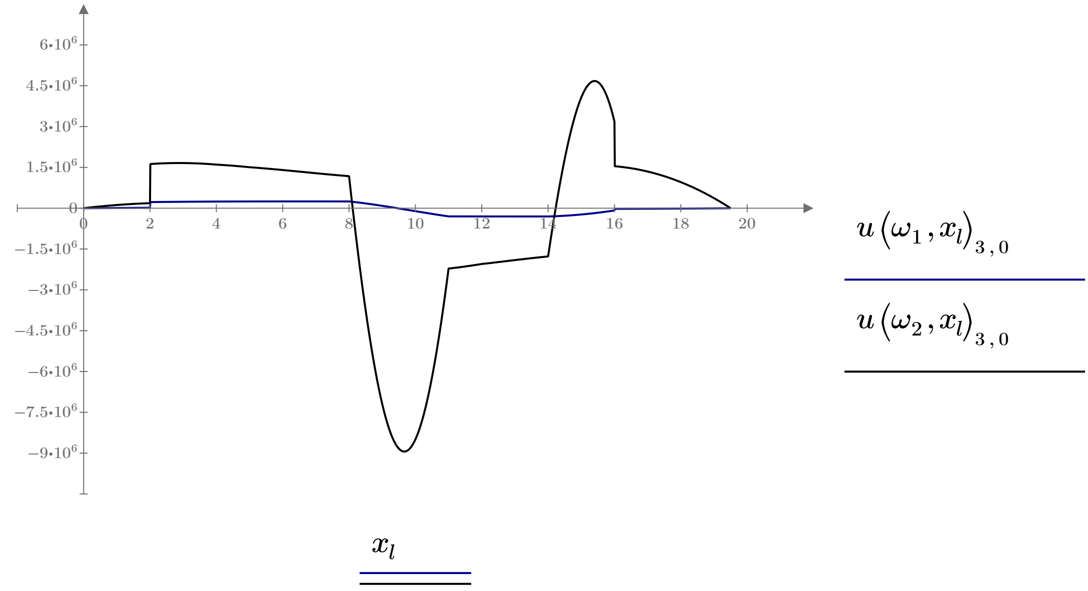


ПРИЛОЖЕНИЕ А

Эпюра изгибающих моментов:



Эпюры поперечных сил:



ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычислим значения приведенных масс для расчетных случаев:

$$m(x) := \text{for } i \in 0,1..7 \quad \left\| \begin{array}{l} \text{if } X_i < x < X_{i+1} \\ \quad \| m_{i+1} \\ \text{else if } 0 < x < X_0 \\ \quad \| 24 \end{array} \right.$$

Повторно выразим форму для перемещений:

$$f_n(\omega, x) := u(\omega, x)_{0,0}$$

Приведенная масса по первому тону:

$$m_1 := \int_0^L m(x) \cdot f_n(\omega_1, x)^2 \, \mathrm{d}x = 529.372$$

Приведенная масса по второму тону:

$$m_2 := \int_0^L m(x) \cdot f_n(\omega_2, x)^2 \, \mathrm{d}x = 3.209 \cdot 10^3$$