Trabajo Práctico 2
Optimización de Horarios de Exámen

Aplicaciones Computacionales a los Negocios

Tomas Ward y Nicolas Wolodarsky

2025

1. Introducción

El problema de la asignación de fechas en los exámenes parciales o finales, un problema que nos impacta 2 veces (o hasta 3 veces) por semestre: miles de alumnos, teniendo que rendir cientos de materias, en tan solo 10 días. ¿Cómo ordenarlos sin que haya quejas? ¿Puede no haber quejas?

Creemos que la respuesta a esta última pregunta es, no, siempre las habrá. Pero la cuestión entonces es minimizarlas, prestando atención a lo que piden los alumnos: espacio entre parciales.

En este trabajo práctico buscamos replicar y modelar este problema. Buscando soluciones óptimas guiadas por restricciones, sobre la cantidad de días, horas, aulas y más. Comenzando por simplemente asignar los horarios y las clases, y terminando en una optimización para favorecer la paz de los alumnos.

1.1. Parametros Iniciales

- **Cantidad de Parciales**: 208 (P0 - P207)
- **Días disponibles**: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}$
- **Horarios disponibles**: $H = \{9, 12, 15, 18\}$
- **Slots totales**: 36 (9 días $\times$ 4 horarios)
- **Capacidad por slot**: 75 aulas
- **Incompatibilidades**: 2,758 pares de parciales con estudiantes en común

2. Ejercicio 1: Modelo Base

La primera solución busca simplemente asignar a los parciales un día y una hora a rendir. Respetando las restricciones horarias, como de cantidad de aulas máximas a ser utilizadas por turno.

2.0.1. Conjuntos

- P: conjunto de parciales
- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}$: días disponibles
- $H = \{9, 12, 15, 18\}$: horarios disponibles
- $E \subseteq P \times P$: aristas (incompatibilidades)

2.0.2. Parámetros

- $a_p \in \mathbb{Z}_+, \forall p \in P$: aulas requeridas por parcial p
- $C = 75$: capacidad de aulas por slot

2.0.3. Variables

- $x_{p,d,h} \in \{0,1\}, \forall p \in P, \forall d \in D, \forall h \in H$
- $y_p \in \{0,1\}, \forall p \in P$

2.0.4. Función Objetivo

$$\text{máx}\, Z = \sum_{p \in P} y_p \tag{1}$$

2.0.5. Restricciones

R1) Asignación única:

$$\sum_{d \in D} \sum_{h \in H} x_{p,d,h} = y_p \quad \forall p \in P \tag{2}$$

R2) Incompatibilidades:

$$x_{p_1,d,h} + x_{p_2,d,h} \leq 1 \quad \forall (p_1, p_2) \in E, \forall d \in D, \forall h \in H \tag{3}$$

R3) Capacidad de aulas:

$$\sum_{p \in P} a_p \cdot x_{p,d,h} \leq C \quad \forall d \in D, \forall h \in H \tag{4}$$

R4) Naturaleza binaria:

$$x_{p,d,h}, y_p \in \{0,1\} \quad \forall p \in P, \forall d \in D, \forall h \in H \tag{5}$$

2.1. Resultados

2.1.1. Estadísticas de Compilación

- **Variables**: 7,696
- **Restricciones**: 99,532
- **Coeficientes no-cero**: 213,760

2.1.2. Solución Óptima

- **Estado**: Solución óptima encontrada
- **Tiempo de resolución**: 43.09 segundos
- **Parciales asignados**: **208 de 208 (100 %)**

Día	Parciales	Porcentaje
1	47	22.6 %
2	20	9.6 %
3	10	4.8 %
4	18	8.7 %
5	15	7.2 %
9	49	23.6 %
10	25	12.0 %
11	2	1.0 %
12	22	10.6 %

Cuadro 1: Distribución de parciales por día - Modelo 1

En el Cuadro 1 vemos que los días 1 y 9 son los más cargados, con casi la mitad de todos los parciales (46.2 %). El día 11 tiene apenas 2 exámenes, mientras que el resto se distribuye más o menos parejo entre los otros días.

Hora	Parciales	Porcentaje
9:00	46	22.1 %
12:00	53	25.5 %
15:00	64	30.8 %
18:00	45	21.6 %

Cuadro 2: Distribución de parciales por horario - Modelo 1

En el Cuadro vemos que las 15:00 es el horario con más parciales (31 %), seguido por las 12:00 (25.5 %). Los otros dos horarios tienen cargas similares, alrededor de 22 % cada uno.

2.1.3. Análisis de Dispersión

Como en el modelo final buscaremos la mayor dispersión posible entre parciales, hicimos un archivo *analizar_dispersion.py* que busca la cantidad de alumnos afectados por todo par de parciales, y su distancia entre sí, para generar un puntaje, que indica que tan bien la solución esparce los parciales entre las fechas para que los alumnos en común no tengan conflictos.

- **Pares analizados**: 2,758
- **Estudiantes afectados**: 31,464
- **Score de dispersión**: 86,056

3. Ejercicio 2: Restricción de 3 Parciales por Día

3.1. Pregunta

¿Cómo se modifica el modelo si ahora buscamos impedir que haya estudiantes rindiendo tres parciales un mismo día?

3.2. Modificaciones al Modelo

3.2.1. Nueva Variable

$$z_{p,d} \in \{0,1\} \quad \forall p \in P, \forall d \in D \tag{6}$$

Donde $z_{p,d} = 1$ si el parcial p está asignado en el día d (cualquier hora).

3.2.2. Nuevas Restricciones

R4) Linking constraint:

$$z_{p,d} = \sum_{h \in H} x_{p,d,h} \quad \forall p \in P, \forall d \in D \tag{7}$$

R5) No tres vecinos mismo día:
Para cada tripla de parciales mutuamente incompatibles (p_1, p_2, p_3) donde $(p_1, p_2) \in E$, $(p_1, p_3) \in E$ y $(p_2, p_3) \in E$:

$$z_{p_1,d} + z_{p_2,d} + z_{p_3,d} \leq 2 \quad \forall d \in D \tag{8}$$

Esta restricción asegura que no puede haber un triángulo completo en el grafo de incompatibilidades programado en el mismo día.

3.3. Resultados

3.3.1. Estadísticas de Compilación

- **Variables**: 9,568 (+24 % vs Modelo 1)
- **Restricciones**: 209,971 (+111 % vs Modelo 1)
- **Coeficientes no-cero**: 548,821

3.3.2. Solución Óptima

- **Estado**: Solución óptima encontrada
- **Tiempo de resolución**: 21.66 segundos (**más rápido que Modelo 1**)
- **Parciales asignados**: **208 de 208 (100 %)**
- **Nodos explorados**: 1

3.4. Respuestas a las Preguntas

1. **¿Se puede resolver en tiempos razonables?**
   SÍ. El problema se resuelve en 21.66 segundos, incluso más rápido que el modelo original (43.09s), debido a un preprocesamiento más efectivo.
2. **¿Se modifica la cantidad máxima de parciales?**
   NO. Ambos modelos logran asignar todos los 208 parciales (100 %).

3.5. Distribución por Día

Día	Parciales	Porcentaje
1	62	29.8 %
2	43	20.7 %
3	37	17.8 %
4	26	12.5 %
5	16	7.7 %
9	14	6.7 %
10	5	2.4 %
11	4	1.9 %
12	1	0.5 %

Cuadro 3: Distribución de parciales por día - Modelo 2

Observación: El Modelo 2 concentra significativamente más parciales en los primeros días (1-4: 80.8 % vs 45.7 % en Modelo 1).

3.6. Comparación de Distribución por Horario

Hora	Modelo 1	Modelo 2
9:00	46	92
12:00	53	91
15:00	64	23
18:00	45	2

Cuadro 4: Comparación de distribución por horario

Observación: El Modelo 2 concentra parciales en horarios matutinos (9:00 y 12:00: 88 % del total).

3.6.1. Análisis de Dispersión

Al igual que en el ejercicio anterior, analizamos la dispersión temporal entre parciales usando el archivo *analizar_dispersion.py*, y a nuestra sorpresa, el modelo rindió peor. Tiene sentido, ya que como vimos, casi todos los parciales se tomasn en los primeros 4 días.

- **Pares analizados**: 2,758
- **Estudiantes afectados**: 31,464
- **Score de dispersión**: 79,945

4. Ejercicio 3: Minimización de Concentración Temporal

4.1. Problema

Minimizar la concentración temporal de parciales para estudiantes, evitando que tengan múltiples exámenes en días consecutivos.

4.2. Desafío: Información Limitada

Solo conocemos estudiantes en común entre **pares** de parciales (w_{pq}), no la lista completa de estudiantes por parcial ni sus calendarios individuales.

4.3. Estrategia de Solución

4.3.1. Aproximación por Pares

Al minimizar la proximidad entre parciales que comparten estudiantes, dispersamos indirectamente los exámenes de cada estudiante individual.

Intuición: Si dos parciales tienen estudiantes en común y están en días consecutivos, esos estudiantes experimentarán concentración temporal.

4.3.2. Conjunto de Días Críticos

Definimos pares de días consecutivos que queremos evitar:

$$D_{\text{consecutivos}} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(9,10),(10,11),(11,12)\} \tag{9}$$

Nota: El fin de semana (días 6-8) separa naturalmente las semanas, por lo que $(5,9)$ NO se considera consecutivo.

4.4. Modelo Matemático

4.4.1. Conjuntos y Parámetros

$$\begin{aligned}
P &= \{P_0, P_1, \ldots, P_{207}\} && \text{208 parciales} \\
D &= \{1,2,3,4,5,9,10,11,12\} && \text{días disponibles} \\
H &= \{9,12,15,18\} && \text{horarios disponibles} \\
E &\subseteq P \times P && \text{2,758 pares con estudiantes en común} \\
w_{pq} &\in \mathbb{N} && \text{cantidad de estudiantes compartidos entre } p \text{ y } q \\
\text{aulas}_p &\in \mathbb{N} && \text{aulas requeridas por parcial } p \\
\text{capacidad} &= 75 && \text{aulas máximas por slot}
\end{aligned}$$

4.4.2. Variables de Decisión

$$
\begin{aligned}
x_{p,d,h} &\in \{0,1\} && \text{parcial } p \text{ en día } d, \text{ hora } h \\
y_p &\in \{0,1\} && \text{parcial } p \text{ asignado} \\
z_{p,d} &\in \{0,1\} && \text{parcial } p \text{ en día } d \text{ (cualquier hora)} \\
\text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} &\in \{0,1\} && p \text{ en } d_1 \text{ Y } q \text{ en } d_2 \text{ (consecutivos)}
\end{aligned}
$$

4.4.3. Función Objetivo

$$
\text{mín} \quad 20 \sum_{(p,q)\in E} \sum_{(d_1,d_2)\in D_{\text{consecutivos}}} w_{pq} \cdot \text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} - 10000 \sum_{p\in P} y_p \tag{10}
$$

Interpretación:

- **Término 1**: Penaliza con peso 20 cada par de parciales con estudiantes en común en días consecutivos
- **Término 2**: Maximiza la cantidad de parciales asignados (prioridad principal con peso 10,000)

4.4.4. Restricciones

R1 - Asignación única: Cada parcial se asigna a lo sumo un slot

$$
\sum_{d\in D} \sum_{h\in H} x_{p,d,h} = y_p \quad \forall p \in P \tag{11}
$$

R2 - Incompatibilidades: Parciales con estudiantes en común no pueden estar en el mismo slot

$$
x_{p,d,h} + x_{q,d,h} \leq 1 \quad \forall (p,q) \in E, \forall d \in D, \forall h \in H \tag{12}
$$

R3 - Capacidad de aulas: Máximo 75 aulas por slot

$$
\sum_{p\in P} \text{aulas}_p \cdot x_{p,d,h} \leq 75 \quad \forall d \in D, \forall h \in H \tag{13}
$$

R4 - Linking: Conecta $z_{p,d}$ con $x_{p,d,h}$

$$
z_{p,d} = \sum_{h\in H} x_{p,d,h} \quad \forall p \in P, \forall d \in D \tag{14}
$$

R5 - Linearización del AND lógico: $\text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} = z_{p,d_1} \wedge z_{q,d_2}$

$$
\text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} \leq z_{p,d_1} \tag{15}
$$

$$
\text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} \leq z_{q,d_2} \tag{16}
$$

$$
\text{ambos\_consec}_{p,q,d_1,d_2} \geq z_{p,d_1} + z_{q,d_2} - 1 \tag{17}
$$

$\forall (p,q) \in E, \forall (d_1,d_2) \in D_{\text{consecutivos}}$

Componente	**Cantidad**
Variables $x_{p,d,h}$	$208 \times 9 \times 4 = 7,488$
Variables y_p	208
Variables $z_{p,d}$	$208 \times 9 = 1,872$
Variables ambos_consec	$2,758 \times 7 = 19,306$
Total Variables	**28,874**
Restricciones R1	208
Restricciones R2	$2,758 \times 9 \times 4 = 99,288$
Restricciones R3	$9 \times 4 = 36$
Restricciones R4	$208 \times 9 = 1,872$
Restricciones R5 (lin)	$2,758 \times 7 \times 3 = 57,918$
Total Restricciones	**159,322**

Cuadro 5: Dimensiones del Modelo de Optimización

4.5. Resultados Obtenidos

4.5.1. Métricas de Resolución

- **Tiempo de preprocesamiento**: 4.63 segundos
- **Tiempo total de resolución**: ∼120 segundos
- **Parciales asignados**: **208/208 (100 %)**
- **Valor objetivo**: Concentración minimizada exitosamente

4.5.2. Distribución por Día

Día	**Parciales**	**Porcentaje**
1	38	18.3 %
2	18	8.7 %
3	6	2.9 %
4	42	20.2 %
5	13	6.3 %
	Fin de semana	
9	28	13.5 %
10	16	7.7 %
11	13	6.3 %
12	34	16.3 %

Cuadro 6: Distribución de parciales por día

4.5.3. Distribución por Horario

Horario	Parciales	Porcentaje
9:00	67	32.2 %
12:00	45	21.6 %
15:00	54	26.0 %
18:00	42	20.2 %

Cuadro 7: Distribución de parciales por horario

4.6. Análisis de la Solución

4.6.1. Características Destacadas

- **Distribución balanceada**: Los días con más carga (1, 4, 9, 12) están bien separados temporalmente
- **Días de respiro**: Los días 3 y 5 tienen baja carga (6 y 13 parciales), actuando como "buffer"
- **Fin de semana como separador**: La segunda semana (días 9-12) está naturalmente separada de la primera (días 1-5)
- **Capacidad respetada**: Ningún slot supera las 75 aulas disponibles

4.6.2. Patrones Observados

Primera semana (días 1-5):

- Días 1 y 4 concentran la mayor carga (38 y 42 parciales)
- Día 3 funciona como separador intermedio (solo 6 parciales)
- Total primera semana: 117 parciales (56.3 %)

Segunda semana (días 9-12):

- Distribución más uniforme que la primera semana
- Día 12 cierra con alta carga (34 parciales)
- Total segunda semana: 91 parciales (43.7 %)

4.7. Eficiencia del Modelo

4.7.1. Reducción de Complejidad

Comparado con un modelo que considerara TODOS los pares de días:

Aspecto	Modelo Completo	Modelo Consecutivos
Pares de días considerados	$9 \times 9 = 81$	7
Variables ambos	$2,758 \times 81 = 223,398$	$2,758 \times 7 = 19,306$
Reducción	–	**91.4 %**
Tiempo de resolución	> 10 minutos	~ 2 minutos

Cuadro 8: Comparación de complejidad

4.7.2. Justificación del Enfoque

1. **Días consecutivos son críticos**: Un estudiante con parciales lunes-martes experimenta máxima presión
2. **Distancia natural**: Parciales en días no-consecutivos ya tienen separación aceptable
3. **Fin de semana**: Actúa como separador natural entre semanas
4. **Trade-off óptimo**: 91 % menos variables con mínima pérdida de calidad

5. Comparación de Soluciones Alternativas

Durante el desarrollo del proyecto, se evaluaron tres enfoques diferentes para la función objetivo. A continuación se presenta un análisis comparativo de los resultados obtenidos.

5.0.1. Métricas de Comparación

Métrica	**Modelo 1**	**Modelo 2**	**Modelo 3**
Score total de dispersión	86,056	79,945	**93,253**
Promedio de distancia (días)	3.08	2.42	**3.25**
Promedio ponderado	2.74	2.54	**2.96**
Pares en días consecutivos	528 (19.1 %)	754 (27.3 %)	**278 (10.1 %)**
Pares en mismo día	286 (10.4 %)	**269 (9.8 %)**	353 (12.8 %)
Pares lejanos ($\geq$ 5 días)	740 (26.8 %)	374 (13.6 %)	**799 (29.0 %)**

Cuadro 9: Comparación de métricas entre modelos alternativos

5.0.2. Análisis por Modelo

Modelo 1 - Enfoque Balanceado

- Score intermedio de dispersión (86,056 puntos)
- Consecutivos moderados (19.1 %)
- Solución equilibrada sin extremos

Modelo 2 - Enfoque de Concentración

- Menor score de dispersión (79,945 puntos)
- Mayor proporción de días consecutivos (27.3 %)
- Tiende a agrupar parciales en fechas cercanas
- Mejor performance en pares del mismo día (9.8 %)

Modelo 3 - Enfoque de Máxima Dispersión

- Mejor score total de dispersión (93,253 puntos)
- Mínima proporción de días consecutivos (10.1 %)
- Máxima proporción de pares bien separados (29.0 %)
- Trade-off aceptable: mayor proporción de mismo día (12.8 %)

5.0.3. Distribución de Distancias

Distancia (días)	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
0	10.4 %	9.8 %	12.8 %
1	19.1 %	27.3 %	**10.1 %**
2	15.2 %	21.9 %	18.5 %
3	16.6 %	16.2 %	17.8 %
4	11.8 %	11.2 %	11.9 %
≥ 5	26.8 %	13.6 %	**29.0 %**

Cuadro 10: Distribución porcentual de distancias entre pares de parciales

5.0.4. Justificación del Modelo Seleccionado

El Modelo 3 fue seleccionado como solución final por las siguientes razones:

1. **Mejor score de dispersión**: 93,253 puntos, 8 % superior al Modelo 1 y 17 % superior al Modelo 2
2. **Minimización de días consecutivos**: Solo 10.1 % de pares en días consecutivos, significativamente menor que los otros modelos
3. **Maximización de separación**: 29 % de pares separados por 5 o más días
4. **Trade-off justificado**: El incremento en pares del mismo día (12.8 %) es manejado por la restricción R2 de incompatibilidades

5.0.5. Conclusión

El análisis comparativo demuestra que maximizar la distancia temporal entre parciales con estudiantes en común produce la mejor dispersión global. La estrategia de penalizar únicamente días consecutivos (Modelo 3) resulta más efectiva que enfoques que intentan balancear múltiples criterios simultáneamente, logrando una distribución temporal que minimiza la concentración de exámenes para los estudiantes.

El modelo seleccionado representa el mejor balance entre eficiencia computacional (tiempo de resolución ~2 minutos) y calidad de solución (máxima dispersión temporal).