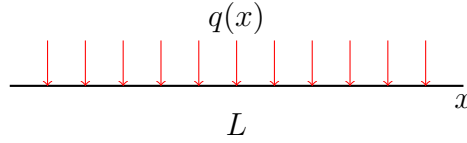


# Método de Elementos Finitos para Viga del Tipo Euler–Bernoulli

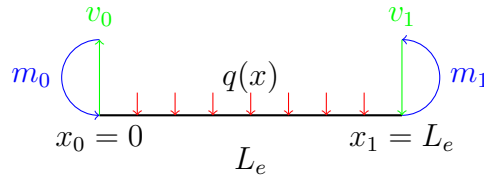
El método de elementos finitos se desarrolla en base a [1]. Consideremos una viga con módulo de elasticidad  $E$ , momento de inercia  $I$ , función de carga  $q(x)$  y longitud  $L$  que cumple la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = q(x), \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

donde  $u(x)$  es la función de deflexión de la viga perpendicular al eje neutro.



Dividimos la viga en  $n$  elementos, con  $n + 1$  nodos  $(x_i)_{i=0}^n$ . Cada elemento tiene coordenadas locales  $x_0, x_1$  y una longitud  $L_e = x_1 - x_0$ . Para el análisis de un elemento típico trasladamos su dominio a  $x \in [0, L_e]$ .



**Interpolación polinómica en el elemento** Suponemos que la deflexión en el elemento  $u_e(x)$  tiene la forma de un polinomio de tercer grado:

$$u_e(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \quad x \in [0, L_e]. \quad (2)$$

**Condiciones nodales** Definimos  $\phi(x) = \frac{du_e(x)}{dx}$  como la rotación en la viga. Para el elemento  $e$  se cumple:

$$\begin{cases} u_0 = u_e(0) = a_4, \\ u_1 = u_e(L_e) = a_1 L_e^3 + a_2 L_e^2 + a_3 L_e + a_4, \\ \phi_0 = \phi(0) = a_3, \\ \phi_1 = \phi(L_e) = 3a_1 L_e^2 + 2a_2 L_e + a_3. \end{cases} \quad (3)$$

**Coeficientes del polinomio** Resolviendo este sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(u_0 - u_1)}{L_e^3} + \frac{\phi_0 + \phi_1}{L_e^2}, \\ a_2 &= \frac{3(u_1 - u_0)}{L_e^2} - \frac{2\phi_0 + \phi_1}{L_e}, \\ a_3 &= \phi_0, \\ a_4 &= u_0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Funciones de forma de Hermite** Sustituyendo estos coeficientes en (2), y factorizando en términos de  $u_0, u_1, \phi_0, \phi_1$ , se obtiene:

$$u_e(x) = N_1(x) u_0 + N_2(x) \phi_0 + N_3(x) u_1 + N_4(x) \phi_1, \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 2\frac{x^3}{L_e^3}, \\ N_2(x) &= x - 2\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}, \\ N_3(x) &= 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x^3}{L_e^3}, \\ N_4(x) &= -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Estas funciones  $N_i(x)$  son los **polinomios de Hermite cúbicos**, que garantizan continuidad de desplazamientos y de pendientes en los nodos. En forma matricial:

$$u_e(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U}_e, \quad \mathbf{N}(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)], \quad (7)$$

con

$$\mathbf{U}_e = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \phi_0 \\ u_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

**Coordenadas normalizadas** Para el elemento  $e$  con extremos  $x_0$  y  $x_1$ , de longitud  $L_e = x_1 - x_0$ , definimos la coordenada normalizada

$$s = \frac{x - x_0}{L_e}, \quad s \in [0, 1]. \quad (9)$$

En estas coordenadas, los polinomios de Hermite toman la forma

$$\begin{aligned} N_1(s) &= 2s^3 - 3s^2 + 1, \\ N_2(s) &= L_e(s^3 - 2s^2 + s), \\ N_3(s) &= -2s^3 + 3s^2, \\ N_4(s) &= L_e(s^3 - s^2). \end{aligned} \quad (10)$$

**Coordenadas naturales** También es usual emplear coordenadas naturales  $\xi \in [-1, 1]$ . Para un elemento definido en  $x_0, x_1$  con  $L_e = x_1 - x_0$ , se tiene la transformación

$$\xi = \frac{2(x - x_0)}{L_e} - 1, \quad x = \frac{L_e}{2}(\xi + 1) + x_0. \quad (11)$$

En estas coordenadas, las funciones de forma cúbicas de Hermite son

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(2 + \xi), & N_2(\xi) &= \frac{L_e}{8}(\xi - 1)^2(\xi + 1), \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(2 - \xi), & N_4(\xi) &= -\frac{L_e}{8}(\xi - 1)(\xi + 1)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

**Relaciones con esfuerzos internos** De la teoría de vigas de Euler-Bernoulli se tiene:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2}, \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3}, \quad x \in [0, L]. \quad (13)$$

Como  $u_e(x) = [N(x)]\{U_e\}$ , resulta:

$$\begin{aligned} M_e(x) &= -EI [N''(x)]\{U_e\}, \\ V_e(x) &= -EI [N'''(x)]\{U_e\}. \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $[N''(x)]$  y  $[N'''(x)]$  denotan, respectivamente, el vector de segundas y terceras derivadas de las funciones de forma.

**Esfuerzos nodales equivalentes** Evaluando para nuestro elemento de viga equivalente con  $x_0 = 0$  y  $x_1 = L_e$ , las componentes de los esfuerzos nodales equivalentes (fuerzas cortantes y momentos en los extremos) expresadas en términos de los grados de libertad elementales  $u_0, \phi_0, u_1, \phi_1$  son:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{EI}{L_e^3} (12 u_0 + 6L_e \phi_0 - 12 u_1 + 6L_e \phi_1), \\ m_0 &= \frac{EI}{L_e^3} (6L_e u_0 + 4L_e^2 \phi_0 - 6L_e u_1 + 2L_e^2 \phi_1), \\ f_1 &= \frac{EI}{L_e^3} (-12 u_0 - 6L_e \phi_0 + 12 u_1 - 6L_e \phi_1), \\ m_1 &= \frac{EI}{L_e^3} (6L_e u_0 + 2L_e^2 \phi_0 - 6L_e u_1 + 4L_e^2 \phi_1). \end{aligned}$$

Estas expresiones corresponden a las componentes del vector de fuerzas nodales equivalentes

$$F_e = \begin{bmatrix} f_0 \\ m_0 \\ f_1 \\ m_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

que pueden obtenerse directamente multiplicando la matriz de rigidez elemental por el vector de desplazamientos nodales. La matriz de rigidez elemental (forma estándar para el elemento de viga Euler–Bernoulli con DOFs  $[u_0, \phi_0, u_1, \phi_1]$ ) es entonces:

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Por tanto, el sistema matricial elemental queda

$$K_e U_e = F_e, \quad (17)$$

donde

$$U_e = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \phi_0 \\ u_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

**Vector de fuerzas nodales equivalentes** Para hallar el vector de fuerzas nodales equivalentes internas se utiliza el *principio del trabajo virtual*. Introducimos un desplazamiento virtual  $\delta u$ , que es una variación infinitesimal hipotética compatible con las restricciones geométricas. El trabajo virtual se define como el trabajo de las fuerzas sobre ese desplazamiento virtual. El Principio del Trabajo Virtual establece que, para un sistema en equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas externas es igual al trabajo virtual de las fuerzas internas:

$$\delta W = \delta W_{\text{ext}} - \delta W_{\text{int}} = 0. \quad (19)$$

Aquí nos interesa obtener el vector elemental de fuerzas equivalentes  $\mathbf{F}_e$  asociado a las cargas externas. Por el principio del trabajo virtual, podemos identificar las fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{F}_e^{(M)}$  que producirían el mismo trabajo sobre los grados de libertad del elemento:

$$\delta W_{\text{ext}} = (\mathbf{F}_e^{(M)})^T \delta \mathbf{U}_e. \quad (20)$$

Para una distribución continua  $q(x)$  sobre el elemento, el trabajo virtual externo es

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_1} q(x) \delta u(x) dx. \quad (21)$$

Usando la interpolación  $u_e(x) = [N(x)] \mathbf{U}_e$  y la correspondiente variación virtual  $\delta u(x) = [N(x)] \delta \mathbf{U}_e$ , se obtiene

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{x_0}^{x_1} q(x) [N(x)] \delta \mathbf{U}_e dx = \left( \int_{x_0}^{x_1} [N(x)]^T q(x) dx \right)^T \delta \mathbf{U}_e. \quad (22)$$

De aquí se identifica el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a la carga distribuida:

$$\mathbf{F}_e^{(q)} = \int_{x_0}^{x_1} [N(x)]^T q(x) dx. \quad (23)$$

Al transformar a coordenadas naturales  $\xi \in [-1, 1]$  (con  $x = x(\xi)$  y  $dx = \frac{L_e}{2} d\xi$ ) la expresión toma la forma

$$\mathbf{F}_e^{(q)} = \int_{-1}^1 [N(\xi)]^T q(x(\xi)) \frac{L_e}{2} d\xi. \quad (24)$$

Para evaluar numéricamente se emplea la cuadratura de Gauss–Legendre con  $n$  puntos  $(\xi_i, w_i)$ :

$$\mathbf{F}_e^{(q)} \approx \sum_{i=1}^n w_i [N(\xi_i)]^T q(x(\xi_i)) \frac{L_e}{2}. \quad (25)$$

Si existe una carga puntual de magnitud  $P$  aplicada en la posición  $x_c$  dentro del elemento, su trabajo virtual es

$$\delta W_{\text{ext}} = P \delta u(x_c) = P [N(x_c)] \delta \mathbf{U}_e. \quad (26)$$

Por tanto, la contribución nodal equivalente es

$$\mathbf{F}_e^{(P)} = [N(x_c)]^T P. \quad (27)$$

De manera análoga, si existe un momento puntual de magnitud  $M$  aplicado en  $x_c$ , el trabajo virtual externo es

$$\delta W_{\text{ext}} = M \delta \phi(x_c), \quad (28)$$

donde la rotación virtual se expresa como

$$\delta \phi(x) = \frac{d \delta u}{dx} = N'(x) \delta \mathbf{U}_e, \quad (29)$$

siendo  $N'(x) = \frac{dN}{dx}$  el vector de derivadas de las funciones de forma respecto a  $x$ , y  $\mathbf{U}_e$  el vector de grados de libertad elementales. Sustituyendo en la expresión del trabajo virtual, se obtiene:

$$\delta W_{\text{ext}} = M N'(x_c) \delta \mathbf{U}_e. \quad (30)$$

Por el principio del trabajo virtual, la contribución nodal equivalente asociada al momento puntual es

$$\mathbf{F}_e^{(M)} = [N'(x_c)]^T M. \quad (31)$$

Sumando todas las contribuciones se obtiene el vector total de fuerzas nodales equivalentes del elemento:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_e^{(q)} + \sum_{j=1}^p [N(x_j)]^T P_j + \sum_{k=1}^m [N'(x_k)]^T M_k, \quad (32)$$

donde las sumas recorren, respectivamente, las  $p$  cargas puntuales  $P_j$  aplicadas en  $x_j$  y los  $m$  momentos puntuales  $M_k$  aplicados en  $x_k$  dentro del elemento.

**Ensamblaje global** Partiendo de  $\mathbf{F}_e$  y  $\mathbf{K}_e$  de cada elemento, se construyen el vector global de fuerzas  $\mathbf{F}$  y la matriz global de rigidez  $\mathbf{K}$ . El procedimiento consiste en sumar cada contribución local en las posiciones globales correspondientes a los grados de libertad del elemento. Así,

$$K_{IJ} =: \sum_e (K_e)_{ij} \quad \text{con } I \leftrightarrow i, J \leftrightarrow j \text{ de acuerdo a la numeración global,} \quad (33)$$

$$F_I =: \sum_e (F_e)_i \quad \text{con } I \leftrightarrow i \text{ de acuerdo a la numeración global.} \quad (34)$$

Es decir, cada entrada  $(i, j)$  de la matriz elemental  $\mathbf{K}_e$  se agrega en la entrada  $(I, J)$  de la matriz global  $\mathbf{K}$ , donde  $I$  y  $J$  son los grados de libertad globales asociados a los grados de libertad locales  $i$  y  $j$  del elemento  $e$ . De este modo, las contribuciones de todos los elementos se integran en el sistema global

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (35)$$

donde  $\mathbf{U}$  reúne los desplazamientos y giros en todos los nodos de la estructura.

**Condiciones de contorno.** Para que el sistema sea físicamente coherente y matemáticamente bien condicionado, es necesario imponer las condiciones de contorno que representan los apoyos de la viga. En la implementación se han considerado tres tipos de vigas. En la *viga simplemente apoyada*, el desplazamiento vertical se anula en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$ , mientras que las rotaciones permanecen libres:

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (36)$$

Este caso representa los apoyos clásicos de pasador y rodillo. En la *viga empotrada*, el nodo fijo carece de libertad de movimiento, de modo que se imponen simultáneamente desplazamiento y rotación nulos en el extremo empotrado:

$$u(0) = 0, \quad \phi(0) = 0. \quad (37)$$

El otro extremo conserva todos sus grados de libertad. En la *viga con apoyos intermedios*, las restricciones de desplazamiento no se aplican en los bordes sino en nodos interiores  $x = a$  y  $x = b$ . De este modo se imponen

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \quad (38)$$

lo que permite modelar situaciones con apoyos adicionales a lo largo de la viga.

**Aplicación de las condiciones de contorno en el sistema global.**

En el método de elementos finitos, las condiciones de contorno esenciales se traducen en grados de libertad cuyo valor es conocido de antemano. Para que el sistema global refleje esta situación, la ecuación correspondiente a cada grado de libertad restringido debe sustituirse por una ecuación que imponga directamente el valor prescrito  $U_I = U_I^{\text{impuesto}}$ . En términos prácticos, esto significa modificar tanto la matriz de rigidez como el vector de fuerzas: primero se resta del vector de fuerzas la contribución asociada al grado de libertad restringido, de modo que no interfiera con el equilibrio del resto del sistema. Después, en la matriz de rigidez se cambia la fila que corresponden a dicho grado de libertad, ya que esa ecuación deja de ser una relación de equilibrio independiente. En su lugar, se coloca un uno en la diagonal y ceros en el resto de los valores de la fila correspondiente al grado de libertad restringido. Finalmente, la entrada del vector de fuerzas en la misma posición se reemplaza por el valor prescrito. De esta forma, el sistema global conserva su estructura algebraica y puede resolverse de manera estable, al tiempo que asegura que la solución obtenida cumpla con exactitud las restricciones físicas que imponen los apoyos y empotramientos de la viga.

**Resolución del sistema y obtención de resultados.** Una vez incorporadas las condiciones de contorno, el sistema global

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (39)$$

se resuelve para obtener el vector de desplazamientos y giros nodales  $\mathbf{U}$ . Conocidos estos valores, es posible reconstruir los campos de desplazamiento y rotación dentro de cada elemento mediante las funciones de forma de Hermite. Para un elemento genérico se tiene

$$u_e(x) = [N(x)] \mathbf{U}_e, \quad \phi_e(x) = [N'(x)] \mathbf{U}_e, \quad (40)$$

donde  $u_e(x)$  representa el desplazamiento transversal del eje de la viga,  $\phi_e(x)$  el giro de la sección transversal,  $[N(x)]$  es el vector de funciones de forma de Hermite y  $\mathbf{U}_e$  es el vector de desplazamientos y giros nodales correspondientes al elemento.

A partir de estas expresiones, las magnitudes internas se calculan derivando las funciones de forma y aplicando la relación constitutiva de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Así, el momento flector  $M_e(x)$  y la fuerza cortante  $V_e(x)$  se expresan como

$$M_e(x) = -EI [N''(x)] \mathbf{U}_e, \quad V_e(x) = -EI [N'''(x)] \mathbf{U}_e, \quad (41)$$

donde  $E$  es el módulo de Young y  $I$  el momento de inercia de la sección transversal.



Al evaluar estas expresiones en todos los elementos y ensamblar los resultados, se obtiene el comportamiento completo de la viga: desplazamientos y giros en cada nodo, así como la distribución continua de momentos y cortantes a lo largo de toda la estructura.

## References

- [1] Daryl L. Logan. *A First Course in the Finite Element Method*, chapter 4: Development of Beam Equations. Cengage Learning, Boston, MA, 6th edition, 2017.