

Transductor Electromagnético

Amelia Hoyos, Gabriela Sandoval

Enero 2026

1 Introducción

Un transductor es un dispositivo capaz de convertir energía de una naturaleza en energía de otra naturaleza (Pérez, 2003). En particular, el transductor electromagnético que se lleva a cabo en el Proyecto Experimental II transforma vibraciones mecánicas en energía magnética, la cual a su vez será convertida en señales eléctricas. La construcción de un transductor electromagnético exige articular conocimientos de distintas áreas de la física, especialmente de la mecánica vibracional, el electromagnetismo y el procesamiento de señales.

La primera de estas áreas estudia las vibraciones mecánicas, es decir, los movimientos oscilatorios de un objeto elástico alrededor de una posición de equilibrio, ocasionados por fuerzas externas o internas. Un material elástico es aquel que recupera su forma original al dejar de ser afectado por una fuerza, siempre que la deformación no supere su límite elástico. En estos materiales, una onda se propaga gracias a la capacidad del material almacenar energía potencial elástica, la cual se libera en forma de una fuerza restauradora que permite que una deformación se transmita a través del medio.

2 Modelo Matemático

El transductor que se desarrollará será modelado como un sistema masa–resorte–amortiguador donde una masa m se moverá armónicamente en un grado de libertad. Este movimiento $x(t)$ será modelado con la teoría de ondas y será capaz de medir la amplitud de la vibración mecánica y la frecuencia de oscilación. El resorte produce una fuerza restauradora descrita por la ley de Hooke $-kx(t)$ que es proporcional a la distancia de la masa al punto de equilibrio, con k la constante del resorte, y el amortiguamiento genera una fuerza $-c\dot{x}(t)$ proporcional a la velocidad de la masa, con c la constante de amortiguamiento.

Se pueden clasificar las vibraciones mecánicas en varios tipos: vibración libre sin amortiguamiento, vibración libre con amortiguamiento y vibración forzada. En nuestro caso se utilizará el modelo de vibraciones mecánicas forzadas con amortiguamiento para medir una vibración periódica de entrada que fuerza nuestro sistema a moverse armónicamente, donde $F(t)$ es la vibración de entrada la cual se tiene por objetivo analizar (Schmitz & Smith, 2012):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (1)$$

El modelo de vibración forzada de la ecuación diferencial no homogénea (2) se obtiene a partir de la suma de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del sistema masa–resorte–amortiguador (Figura 1), donde la ecuación de movimiento se expresa como $\sum F_x = m\ddot{x}(t)$ y la fuerza de excitación externa se define como sinusoidal $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, donde ω es la frecuencia angular y F_0 la magnitud.

$$m\ddot{x}(t) = \sum F_x = F(t) - c\dot{x}(t) - kx(t). \quad (2)$$

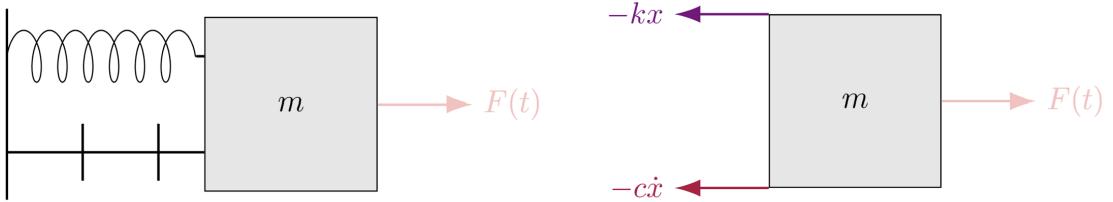


Figura 1: Diagrama de Cuerpo Libre Vibración Forzada

2.1 Solución a la ecuación diferencial masa-resorte-amortiguador

La respuesta completa del sistema (2) queda dada por la superposición de una solución homogénea, es decir la solución a la ecuación sin el término de excitación $F(t)$ y una solución particular, dado en congruencia al término de excitación (3).

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (3)$$

2.1.1 Solución Homogénea

La ecuación de movimiento homogénea es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (4)$$

Se propone una solución de la forma

$$x_h(t) = Ae^{st}, \quad (5)$$

donde $s \in \mathbb{C}$ es el valor a encontrar. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$ms^2 Ae^{st} + csAe^{st} + kAe^{st} = 0, \quad (6)$$

$$(ms^2 + cs + k)Ae^{st} = 0. \quad (7)$$

Si $Ae^{st} \neq 0$, se obtiene la ecuación característica:

$$ms^2 + cs + k = 0. \quad (8)$$

Dividiendo por m :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0. \quad (9)$$

Sus raíces son

$$s = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}. \quad (10)$$

La solución homogénea es la suma de las dos soluciones armónicas

$$x_h(t) = A_1 e^{s_+ t} + A_2 e^{s_- t}. \quad (11)$$

Existen tres posibilidades distintas (Figura 2):

1. Si $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} < 0$, la ecuación característica tendrá raíces s_-, s_+ complejas y el comportamiento será vibratorio. En este caso, denominamos al sistema como **subamortiguado**.
2. Si $(\frac{c}{2m})^2 = \frac{k}{m}$, la ecuación característica tendrá una raíz real s y no habrá oscilación en el sistema. Denominamos a este tipo de sistema como **críticamente amortiguado**.
3. Si $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} > 0$, la ecuación característica tendrá dos soluciones reales s_-, s_+ y tampoco habrá ningún tipo de oscilación en el sistema. Esto es un sistema **sobreamortiguado**

Definiendo ω_n como la frecuencia natural del sistema y el coeficiente de amortiguamiento crítico como aquel valor del coeficiente de amortiguamiento para el cual se cumple que $(\frac{c}{2m})^2 = \frac{k}{m}$.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (12)$$

$$c_{\text{crit}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}. \quad (13)$$

Definimos también el coeficiente de amortiguamiento adimensional

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad (14)$$

se distinguen entonces los tres casos,

1. Sistema subamortiguado: $\zeta < 1$.
2. Sistema críticamente amortiguado: $\zeta = 1$.
3. Sistema sobreamortiguado: $\zeta > 1$.

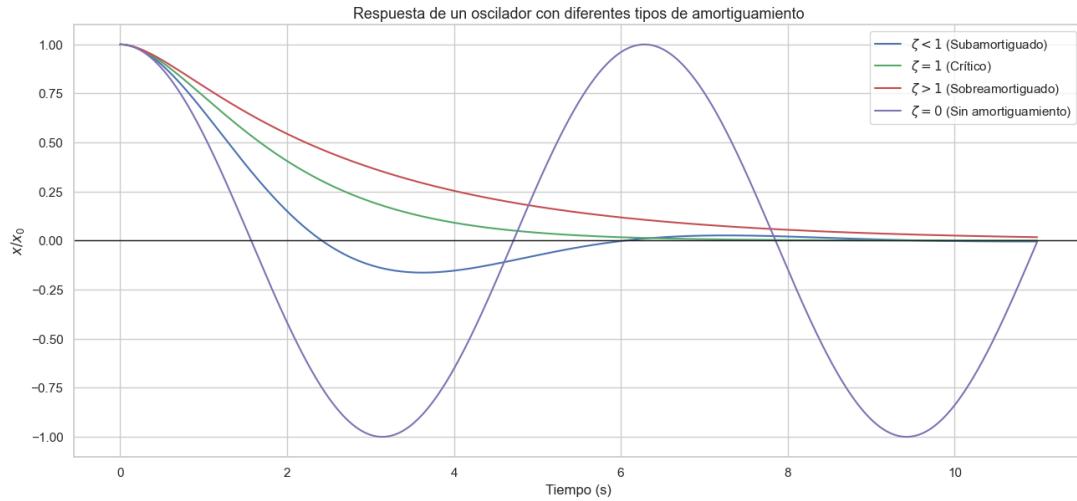


Figura 2: Respuesta de un Oscilador con Diferentes Tipos de Amortiguamiento

Para el caso **subamortiguado**, las raíces complejas conjugadas son,

$$s_{\pm} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d, \quad (15)$$

donde definimos la frecuencia natural amortiguada ω_d ,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (16)$$

La solución es

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)). \quad (17)$$

Para el caso **críticamente amortiguado**, existe una raíz doble,

$$s = -\omega_n. \quad (18)$$

La solución es

$$x_h(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t}. \quad (19)$$

Para el caso **sobreamortiguado**, las raíces son reales y distintas,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (20)$$

La solución es,

$$x_h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (21)$$

Se debe tener en cuenta que m , c y k son parámetros que deben caracterizarse y varían según los materiales seleccionados. Se utilizará una mesa de vibración con $F(t)$ frecuencia conocida. Para que la vibración mecánica capturada por el transductor esté sincronizada con la vibración de entrada, se requiere que el amortiguamiento c sea crítico. Es decir, que no esté sobreamortiguado, ya que en ese caso la respuesta del sistema masa-resorte-amortiguador sería demasiado lenta frente a la vibración de entrada y no seguiría fielmente la señal de entrada, ni subamortiguado, ya que esto generaría oscilaciones adicionales y un desfase respecto a la excitación.

2.1.2 Solución particular

En régimen permanente cuando el dispositivo se estabiliza, el término transitorio $x_h(t)$ se atenúa debido al amortiguamiento, la respuesta del sistema está dominada por la solución particular $x_p(t)$, cuya amplitud depende de la frecuencia de excitación ω y de los parámetros dinámicos del sistema. La parte no homogénea o particular se propone de la forma,

$$x_p(t) = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t). \quad (22)$$

Derivamos para hallar la primera y segunda derivada de la solución particular y al sustituir se obtiene:

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 B \sin(\omega t) - \omega^2 C \cos(\omega t)) + c(\omega B \cos(\omega t) - \omega C \sin(\omega t)) \\ + k(B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)) = F_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (23)$$

Igualando los coeficientes de las funciones trigonométricas se obtiene el sistema:

$$-\omega^2 m B - c \omega C + k B = F_0, \quad (24)$$

$$-\omega^2 m C + c\omega B + kC = 0. \quad (25)$$

Encontramos el coeficiente C:

$$C = -\frac{c\omega B}{k - m\omega^2}. \quad (26)$$

Sustituyendo la expresión obtenida para C en la primera ecuación se encuentra,

$$B = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}. \quad (27)$$

Reescribiendo la expresión en términos de $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ y $c = 2m\zeta\omega_n$:

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}. \quad (28)$$

$$C = -\frac{F_0}{m} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}. \quad (29)$$

Expresando la solución particular como:

$$x_p(t) = A_3 \sin(\omega t + \phi), \quad (30)$$

la amplitud se define como:

$$A_3 = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad (31)$$

$$= \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]^2}}, \quad (32)$$

$$= \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}, \quad (33)$$

$$= \frac{F_0}{k\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}. \quad (34)$$

El desfase se define como:

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right). \quad (35)$$

Para usar los valores correctos del ángulo en todos los cuadrantes, se escribe:

$$\phi = \arctan 2\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - \omega^2/\omega_n^2}\right). \quad (36)$$

2.1.3 Condiciones iniciales

Para las condiciones iniciales,

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (37)$$

solucionamos el problema de condiciones iniciales. Para el caso particular en $t = 0$:

$$x_p(0) = A_3 \sin(\omega \cdot 0 + \phi), \quad (38)$$

$$\dot{x}_p(0) = A_3\omega \cos(\omega \cdot 0 + \phi). \quad (39)$$

Ahora, incluyendo esta corrección para el caso particular, se desarollará el problema de condiciones iniciales para los distintos casos de la solución homogénea. Para el caso homogéneo **críticamente amortiguado**,

$$x_h(0) = A_1, \quad (40)$$

$$\dot{x}_h(0) = -\omega_n A_1 + A_2. \quad (41)$$

Ahora incluyendo las condiciones particulares,

$$x(0) = x_p(0) + x_h(0) = x_{p0} + A_1 = x_0, \quad (42)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0) = \dot{x}_{p0} - \omega_n f A_1 + A_2 = \dot{x}_0, \quad (43)$$

$$(44)$$

$$A_1 = x_0 - x_{p0} \quad (45)$$

$$A_2 = \dot{x}_0 - \dot{x}_{p0} + \omega_n f A_1. \quad (46)$$

Para el caso **subamortiguado**,

$$x(0) = x_p(0) + x_h(0) = A_1 + x_{p0} = x_0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t) &= -\omega_n f A_1 e^{-\omega_n f t} \cos(\omega_d t) - \omega_d A_1 e^{-\omega_n f t} \sin(\omega_d t) - \\ &\quad \omega_n f A_2 e^{-\omega_n f t} \sin(\omega_d t) + e^{-\omega_n f t} \cos(\omega_d t) \omega_d A_2, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\dot{x}_h(0) = -\omega_n f A_1 + \omega_d A_2 + \dot{x}_{p0}, \quad (49)$$

$$(50)$$

$$A_1 = x_0 - x_{p0}, \quad (51)$$

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \omega_n f A_1 - \dot{x}_{p0}}{\omega_d}. \quad (52)$$

Para el caso **sobreamortiguado**,

$$x_h(0) = A_1 + A_2, \quad (53)$$

$$x_0 = x_p(0) + x_h(0) = x_{p0} + A_1 + A_2. \quad (54)$$

Calculando $\dot{x}_h(t)$,

$$\dot{x}_h(t) = (-\omega_n f + \omega_n \sqrt{f^2 - 1} A_1) e^{(-\omega_n f + \omega_n \sqrt{f^2 - 1})t} \quad (55)$$

$$+ (-\omega_n f - \omega_n \sqrt{f^2 - 1} A_2) e^{(-\omega_n f - \omega_n \sqrt{f^2 - 1})t}, \quad (56)$$

$$= A_1 r_1 e^{r_1 t} + A_2 r_2 e^{r_2 t}, \quad (57)$$

$$\dot{x}_h(0) = A_1 r_1 + A_2 r_2, \quad (58)$$

con:

$$r_1 = -\omega_n f + \omega_n \sqrt{f^2 - 1}, \quad (59)$$

$$r_2 = -\omega_n f - \omega_n \sqrt{f^2 - 1}, \quad (60)$$

obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones que hay que resolver,

$$x_0 = x_{p0} + A_1 + A_2, \quad (61)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_{p0} + A_1 r_1 + A_2 r_2. \quad (62)$$

2.1.4 Solución General

La solución general del sistema es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (63)$$

donde,

$$x_p(t) = A_3 \sin(\omega t + \varphi), \quad (64)$$

$$A_3 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad (65)$$

$$\phi = \arctan 2 \left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \right), \quad (66)$$

$$x_h(t) = \begin{cases} e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)), & \zeta < 1 \\ (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t}, & \zeta = 1 \\ A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, & r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \zeta > 1 \end{cases} \quad (67)$$

y A_1, A_2 son los descritos anteriormente para cada tipo de sistema.

3 Modelo Físico

Para medir la distancia del objeto respecto a la posición de equilibrio, en el transductor electromagnético se empleará un imán unido a la masa del resorte que se desplazará a lo largo del eje central x de una bobina de N vueltas y radio r . Según la ley de Faraday, cuando el flujo magnético ϕ_B que atraviesa una superficie S varía en el tiempo, se induce una fuerza electromotriz ε (fem) en el circuito que la delimita.

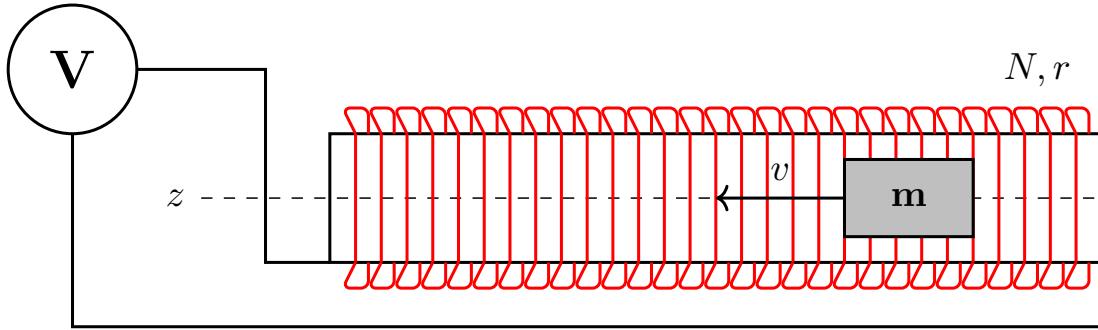


Figura 3: Diagrama del modelo electromagnético.

En este caso, el flujo magnético producido por el imán atraviesa el área transversal de la bobina, πr^2 , generando un voltaje que, de acuerdo con la ley de Lenz, produce una corriente en el circuito en sentido opuesto al cambio en el flujo magnético (Ling et al., 2022):

$$\varepsilon(t) = -N \frac{d\phi_B}{dt}. \quad (68)$$

Para un imán cilíndrico uniformemente magnetizado como el que se usará en el dispositivo, con radio a , longitud L , magnetización M , μ_0 la permeabilidad del vacío, V volumen y $\eta = MV$ el momento dipolar magnético, colocado con su eje de simetría coincidente con el eje central x de la bobina, el campo axial sobre el eje a una distancia x desde el extremo cercano del imán viene dado, usando la aproximación dipolar para $x \gg L, a$, es

$$B_x(x(t)) = \frac{\mu_0 M}{2} \left(\frac{x(t) + L}{\sqrt{(x(t) + L)^2 + a^2}} - \frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + a^2}} \right) \approx \frac{\mu_0 \eta}{2\pi} \frac{1}{x^3(t)}, \quad (69)$$

Cerca de la bobina, esta aproximación no es válida, donde los efectos de borde y no linealidades se vuelven importantes. El flujo magnético es, suponiendo que el vector de área y el campo magnético son paralelos,

$$\phi_B(t) = \int_S B(r, t) \cdot dA = \|B(r, t)\| \|A\| \cos(0) = AB_x(x(t)), \quad (70)$$

y la fuerza electromotriz, Partiendo de la expresión para la fuerza electromotriz inducida

$$\varepsilon(t) = \frac{3NA\mu_0\eta}{2\pi} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)^4}, \quad (71)$$

se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para la posición $x(t)$. Reordenando términos, esta puede escribirse como

$$\dot{x}(t) = \frac{2\pi}{3NA\mu_0\eta} \varepsilon(t) x(t)^4. \quad (72)$$

Esta ecuación es separable, por lo que se pueden agrupar los términos dependientes de x en un lado y los dependientes del tiempo en el otro,

$$\frac{dx}{x^4} = \frac{2\pi}{3NA\mu_0\eta} \varepsilon(t) dt. \quad (73)$$

Integrando ambos lados entre la posición inicial x_0 en $t = 0$ y la posición $x(t)$ en un tiempo t , se obtiene

$$\int_{x_0}^{x(t)} x^{-4} dx = \frac{2\pi}{3NA\mu_0\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (74)$$

La integral del lado izquierdo se evalúa de forma directa, dando como resultado

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x(t)^3} - \frac{1}{x_0^3} \right) = \frac{2\pi}{3NA\mu_0\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (75)$$

Despejando $x(t)$, se llega finalmente a la expresión

$$x(t) = \left(\frac{1}{x_0^3} - \frac{2\pi}{NA\mu_0\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{-1/3}, \quad (76)$$

que permite determinar la posición experimental a partir de la señal de fuerza electromotriz medida. Tenemos un modelo experimental para hallar el desplazamiento de la masa respecto a su posición de equilibrio y un modelo teórico contra el cual compararlo. Debido a que el microcontrolador sólo adquiere muestras discretas de la fuerza electromotriz detectada, la integral en (76) se debe aproximar numéricamente mediante una regla de integración adecuada.

Bibliografía

- Ling, S. J., Moebs, W., & Sanny, J. (2022). *University physics, volume 2* (1st). OpenStax, Rice University.
<https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-2>
- Pérez, E. H. (2003). *Transductores* (tech. rep.). Escuela Universitaria de Ingenieros Técnicos de Telecomunicación (ULPGC), Departamento de Señales y Comunicaciones, Grupo de Ingeniería Acústica.
- Schmitz, T. L., & Smith, K. S. (2012). *Mechanical vibrations: Modeling and measurement*. Springer.