第三次图论作业

郑有为 19335286

2021 年 3 月 26 日

1 证明图 G 的生成子图集合 M 是数域 F = {0,1} 上的向量空间。

将图 G 的各节点和边分别命名为 $v_1, v_2, ..., v_n$ 和 $e_1, e_2, ..., e_m$，在 G 的生成子图中，它们的各结点和边的名称不做改变。

(1). 在 M 中定义一种运算，称为加法：对于 $G_i, G_j \in M$, 若 $G_k = G_i + G_j$，有 $E(G_k) = \{e_l | e_l \in E(G_i) \cup E(G_j) - E(G_i) \cap E(G_j)\}$，即 G_k 为图 G 的关于 G_i 和 G_j 的边集的对称差的边生成子图。

显然，对任意 G_i，G_j，$V(G_i + G_j) \subseteq V(G)$，$E(G_i + G_j) \subseteq E(G)$，即 $G_i + G_j$ 也是 G 的生成子图，故属于集合 M，即 M 关于加法封闭。

(2). 在 G 与 F 的元素之间定义数乘运算，即 $\forall G_i \in M$，有 $0 \cdot G_i = \phi, 1 \cdot G_i = G_i$。空集显然是 G 的生成子图，$\phi \in M$，有 M 关于 F 的数乘运算封闭。

(3). 加法和数乘满足以下条件：

1) $\forall G_i, G_j \in M$，因为对称差具有交换律，所以显然有 $G_i + G_j = G_j + G_i$

2) $\forall G_i, G_j, G_k \in M$, 因为对称差具有结合律, 所以显然有 $(G_i + G_j) + G_k = G_i + (G_j + G_k)$

3) 存在一个元素 $G_0 \in M$, 满足 $E(G_0) = \phi$，它是 M 的零元，满足 $\forall G_i \in M, G_0 + G_i = G_i$。

4) $\forall G_i \in M, \exists G_j = G_i$，使得 $G_i + G_j = G_i + G_i = G_0$（因为 $E(G_i)$ 与 $E(G_i)$ 的对称差是 ϕ）

5) 存在单位元 $1 \in F$, 满足 $\forall G_i \in M, 1 \cdot G_i = G_i$

6) 显然：$\forall a, b \in F\{0,1\}, G_i \in M, (ab) \cdot G_i = a(b \cdot G_i)$

7) 显然：$\forall a, b \in F\{0,1\}, G_i \in M, (a+b) \cdot G_i = a \cdot G_i + b \cdot G_i$)（F{0,1} 的加法为布尔运算中的异或（对称差），特有 $1+1=0$）

8) 显然：$\forall a \in F\{0,1\}, G_i, G_j \in M, a \cdot (G_i + G_j) = a \cdot G_i + a \cdot G_j$

2 设 G 是一个 r 度正则图，证明：

2.1 r 是 G 的一个特征值

由 G 是一个 r 度正则图，即 G 的每一个结点的度数都为 r，即 G 的邻接矩阵的每一行都有 r 个 1 和 (n-r) 个 0。我们可以得到 n 维向量 [1,1,...,1] 是 G 的一个特征向量，并有

$$A(G) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 A(G) 为 G 的邻接矩阵，可以看到 r 满足 $A(G)\mathbf{x} = r\mathbf{x}$，即 r 是 G 的一个特征值。

2.2 特征值 r 的重数等于 G 的连通分支数

设 G 的连通分支数位 k，A(G) 可以通过行的重新排列得到一个对角分块矩阵，除了对角线上 k 个分块子矩阵，其他位置都为 0。

由于 G 为正则图，每一个结点的度数相同，而每一个对角分块矩阵是不连通的，因而有每一个对角分块矩阵的特征值都是 r，由于共有 k 个对角分块矩阵，故特征值 r 的重数为 k，等于连通分支数。

2.3 G 的任意特征值满足：$|\lambda| \leq r$

反证法：若存在 G 的一个特征值 $\lambda' > r$, 有

$$|A(G) - \lambda' E| = |A(G) - \lambda E + (\lambda - \lambda')E| \neq 0$$

所以与 λ' 是特征值矛盾，故 G 的任意特征值满足：$|\lambda| \leq r$。