第五次图论作业

郑有为 19335286

2021 年 4 月 14 日

1 求 $K_{3,3}$ 的生成树数目

使用矩阵树定理计算生成树数目，拉普拉斯矩阵 $C = D(G) - A(G)$：

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D(G) - A(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$K_{3,3}$ 的生成树数目 $\tau(K_{3,3})$ 等于 C 的任意一个元素的代数余子式

$$\tau(K_{3,3}) = (-1)^{0+0} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 81$$

故，$K_{3,3}$ 的生成树数目 $\tau(K_{3,3})$ 为 81。

2 证明：若 e 是 K_n 的一条边，$K_n - e$ 的生成树数目为 $(n-2)n^{n-3}$

同样用矩阵树定理计算生成树数目，令 $e = (v_a, v_b), G = K_n - e$, 则有图 G 的拉普拉斯矩阵 $C = D(G) - A(G)$，其中：

$$D_{i,j} = \begin{cases} n-1, & \text{如果} i = j \\ n-2, & \text{如果} \{i,j\} = \{a,b\}, a \neq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i \neq j \text{且} \{i,j\} \neq \{a,b\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

我们得到这样的一个矩阵 C：在对角线上除了 $C_{a,a}, C_{b,b} = n-2$ 之外，其他元素等于 $n-1$；对于非对角线元素，除了 $C_{a,b}, C_{b,a} = 0$ 之外，其他元素等于 -1。

G 的生成树数目 $\tau(G)$ 等于 C 的任意一个元素的代数余子式，对此，我们取第 a 行第 a 列对应的余子式，该余子式为：

$$(-1)^{b+b} \cdot \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} - 2 \cdot n^{n-3} = (n-2)n^{n-3}$$

故有 $K_n - e$ 的生成树数目为 $(n-2)n^{n-3}$。