第四次图论作业

郑有为 19335286

2021 年 4 月 7 日

1 证明：在任意一棵非平凡树 T 中，任意一条最长路的起点和终点均是树叶。

反证法：

令 T 中存在一条最长路 P, 它的起点和终点至少有一个是非叶子节点，设其为 u。由于 u 不是叶子节点，其度数大于等于 2，即存在一个结点 v, 满足 $v \in V(T)$、$v \notin V(P)$ 且 u, v 邻接。

将边 (u, v) 加入 P 构成新的路 P'，显然 P' 的长度比 P 的长度大 1，这与 P 是 T 的最长路矛盾，因此，由反证法有：任意一棵非平凡树中，任意一条最长路的起点和终点均是树叶。

2 证明：当 $m(G) = n(G) - 1$ 时，以下三个结论等价：(1). G 是连通图、(2). G 是无圈图、(3). G 是树。

证明思路：在给定条件下，由结论 (1) 推导出结论 (2)，再由结论 (2) 推导出结论 (3)，最后由结论 (3) 推导出结论 (1)，得到三者等价的结论。

2.1 连通图 G 满足 $m(G) = n(G) - 1$，证明 G 是无圈图。

归纳基础：当 $n(G) = 1, m(G) = 0$ 时，连通图 G 是平凡图，显然无圈。

归纳假设：当 $n(G) = k, m(G) = k - 1$ 时，连通图 G 无圈。

当 $n(G)=k+1, m(G)=k$ 时，且由于 G 连通，至少存在一个 1 度顶点。（若不然，每个结点的度数 ≥ 2，总度数 $\geq 2k+2$，由握手定理有 $m(G)\geq k+1$，与 $m(G)=k$ 矛盾）

设 G 中一个 1 度顶点为 u，与其邻接的边为 e。构造图 G 的生成子图 G'，满足 $V(G')=V(G)-\{u\}, E(G')=E(G)-\{e\}$，显然 $n(G')=k, m(G')=k-1$，由归纳假设有 G' 是无圈图。

可以看到：G 在 G' 的基础上添加了一个 1 度结点 u，显然不产生圈（因为圈中任意节点的度数大于等于 2），所以 G 也无圈。

综上，有满足 $m(G)=n(G)-1$ 的连通图 G，是无圈图。

2.2 无圈图 G 满足 $m(G)=n(G)-1$，证明 G 是树。

证明：树是无圈连通图，问题转变成证明图 G 连通。

反证法：若 G 不是连通的，即存在若干个连通分支 $G_i, 1\leq i\leq k, 2\leq k\leq n(G)$（设连通分支数为 k）。显然有 $\sum_{i=1}^{k} n(G_i)=n(G), \sum_{i=1}^{k} m(G_i)=m(G)$

对于每一个连通分支 G_i，G_i 无圈且连通，所以 G_i 是一棵树，满足 $m(G_i)=n(G_i)-1$，所以有 $m(G)=\sum_{i=1}^{k} m(G_i)=\sum_{i=1}^{k}(n(G_i)-1)=n(G)-k$，由于 $k\geq 2$，得到 $m(G)\leq n(G)-2$，与条件 $m(G)=n(G)-1$ 矛盾。

故由反证法有：无圈图 G 满足 $m(G)=n(G)-1$ 时，G 连通；再由连通无圈图为树，有结论：无圈图 G 满足 $m(G)=n(G)-1$ 时，G 是树。

2.3 树 G 满足 $m(G)=n(G)-1$，证明 G 是连通。

证明：由树的定义，树是无圈连通图，显然有 G 是连通的。

3 证明：对每个 m，仅当 $n=2m+2$ 时，饱和烃分子 C_mH_n 能存在。

稳定分子对应的图结构必然连通，由题目描述，还应满足无圈且 C 分子对应的顶点度数 4，H 分子对应的顶点度数 1。即该图各点的度数只能是 4 或者 1，并且是连通无圈图（即一棵树）。

下面证明满足上述条件的 C_mH_n 必定满足 $n=2m+2$。

证明：原子总数即总节点数为 $n+m$，C 价键为 4，H 价键为 1，分别对应图中结点的度数。故有图的度数和为 $4m+n$，由握手定理有边数为 $\frac{4m+n}{2}$。最后，由于该结构满足树结构，满足边数等于点数减一，代入上式有：$\frac{4m+n}{2}=n+m-1$，化简得到 $n=2m+2$，证毕。