grApH ThEOry nOTE

mAx zHeNg

2021 年 8 月 8 日

目录

1 图的基本概念

1.1 图的基本概念

1.1.1 图的同构

PPT1

定义 1. 设有两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$，若再其顶点集合间存在双射，使得边之间存在如下关系：设 $u_1\leftrightarrow u_2, v_1\leftrightarrow v_2, u_1,v_1\in V_1, u_2,v_2\in V_2; u_1v_1\in E_1, u_2,v_2\in E_2$，且两条边的重数相同，则称 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1\cong G_2$。

判断两个图同构，通过建立双映射，罗列边。

1.1.2 完全图、偶图、补图

PPT2

定义 2. n 个顶点的完全图，记为 K_n，容易得出 $m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$。

定义 3. 偶图和完全偶图，后者记为 $K_{m,n}$，m，n 为两个顶点集的顶点数。

定义 4. 补图，对于一个简单图 $G=(V,E)$，令集合 $E_1=\{uv|u\neq v,u,v\in V\}$，则称图 $H=(V,E_1\backslash E)$ 为图 G 补图，记为 $\overline{G}$。

定义 5. 自补图：G 为自补图当且仅当若图 G 与图 G 的补图同构。

定理 1. 若 G 是 n 阶自补图，则有：$n=0,1(mod4)$。证明，因为 $m(G)=\frac{1}{4}n(n-1)$。

定义 6. 图的最大度和最小度分别用 $\Delta(G)\,\sigma(G)$ 表示；奇点和偶点分别表示度数为奇数和偶数的点。

1.1.3 图的度序列

PPT2

定义 7. 图的拓扑不变量指与图有关的一个数组，他对于与图同构的所有图来说，不会发生改变。

定理 2. 非负整数组 $(d_1, d_2, ..., d_n)$ 是图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。证明，同过构造的方法。

定理 3. 非负整数数组 $(d_1, d_2, ..., d_n)$ 是简单图图序列的充要条件是 $(d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d1+1}, d_{d_1+2}, ..., d_n)$ 是图序列。

定理 4. 一个简单图的 n 个顶点的度数不能互不相同（鸽笼原理）。

定义 8. 设 n 阶图 G 的各点的度数取 s 个不同的非负整数 $d_1, d_2, ..., d_s$，又设度数为 d_i 的点有 b_i 个（$i = 1, 2, ..., s$），则 $\sum_{i=1}^{s} = n$。故非负整数数组是 n 的一个划分，称为 G 的频序列。

定理 5. 一个图和它的补图有相同的频序列。

1.2 图的子图 *

PPT3

定义 1. 如果 $V(H) \subseteq V(G).E(H) \subseteq E(G)$，且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的重数，则称 H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$。

当 $H \subseteq G, H \neq G$, H 是 G 的真子图，记为 $H \subset G$。

定义 2. 顶点导出子图：如果 $V' \subseteq V(G)$，则 V' 为 G 的顶点子集，以两个端点均在 V' 中的边集组成图，称为 G 关于点集 V' 的点导出子图，记为 $G[V']$。

定义 3. 边导出子图：如果

1.3 图的运算

PPT3

1. 删点：删点要删边，边必须要有端点才能存在；

2. 删边：删边不删点，点可以独立存在；

3. 并运算 $\cup$：$G1 \cup G2$：两个图的并，点是点的并，边是边的并

特别地，若两个图不相交 (无公共顶点)，则称它们地并为直接并，即为 $G1+G2$;

4. 交运算 $\cap$：两个图的交，点是点的交，边是边的交；

5. 差运算 $G1-G2$：从 G1 中删去 G2 中的**边**得到的新图；

6. 对称差运算：$G1\Delta G2=G1\cup G2-(G1\cap G2)$

7. 联运算：联运算是对两个不相交的图 G1，G2 而做的。$G1\vee G2$，先做 $G1+G2$，之后将 G1 中每个顶点与 G2 中每个顶点连接，得到的新图即为 $G1\vee G2$;

8. 积图：积图 $G1\times G2$ ，通过分别求出点集和边集得到最终的积图。

点集：V=$V1\times V2$，即 V1 与 V2 的笛卡尔积。例如，$V1=\{1,2\};V2=\{3,4,5\}$，则 $V=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$。

边集：若顶点 $u=(u1,u2),v=(v1,v2)$ 满足如下两个条件之一，则连接 uv；否则，不连接 u,v.

条件：$(u1=v1\cup u2adjv2)$ 或 $(u2=v2\cup u1adjv1)$.

1.4 图的最短路算法

PPT4

Dijkstra 算法是生成最短路径树的，其思路是：首先把起点到所有点的距离存下来找个最短的，然后松弛一次再找出最短的，所谓的松弛操作就是，遍历一遍看通过刚刚找到的距离最短的点作为中转站会不会更近，如果更近了就更新距离，这样把所有的点找遍之后就存下了起点到其他所有点的最短距离。

1. 简单复杂度是 $O(n2)$。Dijkstra 算法最简单的实现方法是用一个链表或者数组来存储所有顶点的集合 Q, 所以搜索 Q 中最小元素的运算 (Extract-Min(Q)) 只需要线性搜索 Q 中的所有元素；

2. 用堆优化后的时间复杂度:$O((m+n)logn)$

1.5 图的代数表示 *

PPT4

1. 图的邻接矩阵 a_{ij} 为 v_i 与 v_j 之间的边数。

1.6 图的邻接谱理论

PPT5

定义 1. 图的邻接矩阵 A 的特征多项式：

$$f(G,\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n$$

其中, A 的特征方程有非零解的充要条件是系数行列式为 0, 即 $|A-\lambda E|=0$

定理 1. 图 G 的特征多项式的系数：

$$a_i=(-1)^i\sum_H \det H\times s(G,H), i=1,2,...,n$$

其中，右边表示对 G 的所有 i 阶点导出子图 H 求和，$s(G,H)$ 表示 G 的同构于 H 的点导出子图的数目。（这么复杂嘛）

例 1. 证明简单图 G 的特征多项式满足：

$a_1=0$;

$-a_2=m(G), m(G)$ 为图的边数总和;

$-a3$ 是 G 中含有不同的 K3 子图 (三角形) 的个数 2 倍。

证明: 由矩阵理论：对每个 $1\le i\le n, (-1)^i a_i$ 是 A(G) 的所有 i 阶主子式之和。A(G) 的非零 2 阶和 3 阶主子式必有固定形式，$\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]=$ -1 和 $\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{smallmatrix}\right]=2$ 并分别对应到 G 的一条边和 G 中的一个 K_3 子图。

定义 2. 图的邻接矩阵 A（G）的特征多项式的特征值及其重数，称为 G 的邻接谱。

例 2. 求 K_n（n 阶完全图）的谱。

一个完全图的邻接矩阵除了对角线其他的元素都是 1，邻接矩阵对应的一个特征向量为全 1 的元素，它对应的特征值 $\lambda=n-1$。

一个图有两个不连通的完全子图（分别是 n 阶和 m 阶），邻接矩阵是一个对角分块矩阵，可以看出它有两个特征向量，[0,...0,1...1] 和 [1,...,1,0,...,0]，他们是正交的且特征向量分别是 n-1 和 m-1。

所以我们可以从这样的特征向量和特征值推广可以对图得到大概的分类，分类依据是节点聚集的情况。

$|\lambda E-A(K_n)|=\left[\begin{smallmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}\lambda-n+1&-1&-1\\\lambda-n+1&\lambda&-1\\\lambda-n+1&-1&\lambda\end{smallmatrix}\right]$（第一列减去其他列的和）$=(\lambda-n+1)\left[\begin{smallmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{smallmatrix}\right]=(\lambda-n+1)(\lambda+1)^{n-1}$ 又因为矩阵线性相关，行列式为 0，故求得两个特征值 -1，n-1，它们的重数分别是 n-1 和 1。

因此有该特征谱可以表示为：$Spec(K_n)=\left[\begin{smallmatrix}-1&n-1\\n-1&1\end{smallmatrix}\right]$（第一列为特征值，第二列为重数）

例 3：若两个非同构的图具有相同的谱，则称他们为同谱图。

例 4：简单图的谱为 Spec(G) = $\left[\begin{smallmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & ... & m_s\end{smallmatrix}\right]$ 有：$\sum_{i=1}^{s} m_i\lambda_i^2 = 2m(G)$ 其中 m(G) 表示简单图的边数,m_i 表示重数。

例 5：设 λ 是简单图 G 的任意特征值，则有 $|\lambda| \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$。

1.7 图的邻接代数

PPT5

定义 3. 设 A 是无环图的邻接矩阵，C 是一个数域，称

$$\Lambda(G) = \{a_0E + a_1A + ... + a_kA^k|a_i \in C, k \in Z^+\}$$

（上面定义了一个集合）对于 **矩阵加法和数与矩阵的乘法** 来说作成数域 C 上的向量空间（性质：非空，关于加法和数乘封闭，八条（单位元，零元，负元，分配律，交换律，等等））称该空间为图 G 的邻接代数。

定理 1. 令 G 为 n 阶连通无环图，则：

$$d(G) + 1 \leq dim\Lambda(G) \leq n$$

其中，d(G) 为图的半径：任意两点路径的最大值。

定理 1 的应用: 对于完全图，有 $2 \leq dim\Lambda(K_n) \leq n$

例 6: n 阶连通无环图 G 的邻接矩阵的不同特征值个数 S 满足 $d(G) + 1 \leq S \leq n$

由矩阵理论，非负对称矩阵的不同特征值个数等于其最小多项式的次数（这是什么东西），而后者等于 G 的邻接代数的维数。

1.8 图空间简介

PPT5

定理 2. 集合 $M = G_1, G_2...G_N|G_i \ G \quad N = 2^m$，对于图的对称差运算（两个集合的并集减去交集）和数乘运算：$0 \cdot G_i = \Phi, 1 \cdot G_i = G_i$，来作为数域 F = 0,1 上的 m 维向量空间。

（基底：集合内的东西都可以表示成这组基底的线性组合。）

1.9 极图理论简介

PPT6

1.9.1 l 部图

l 部图是二部图的推广。

定义 1. **l 部图**，若简单图 G 的点集 V 有一个划分：

$$V = {}_{i=1}^{l} V_i . V_i \bigcap V_j = \Phi, i \neq j$$

，对于所有的 V_i 非空，且集合内的元素互不邻接。

定义 2. **完全 l 部图**，任意部 V_i 中的任意顶点于其他各部的所有顶点邻接，记 $K_{n_1,n-2,\ldots,n_l}$。

$$|V| = \sum_{i}^{l} n_i, |G| = \sum_{i<j}^{l} n_i \cdot n_j$$

定义 3. n 结点完全 l 部图中,$n = k \times I + r, 0 \leq r < I, |V_1| = |V_2| = \ldots = |V_r| = k + 1$, 剩下的 $|V_i| = k$，则 G 为称 **n 阶完全 l 几乎等部图**，记为 $T_{l,n}$ （V 是点集），$r = 0$，即 V_i 全部相等，则称**完全 l 等部图**。

定理 1. **连通**的偶图的二部划分是唯一的。

定理 2. n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数为 $m = n_1 \cdot n_2$，且有：$m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

定理 3. n 阶 l 部图 G 有最多边数的充要条件是 $G \cong T_{l,n}$，$\cong$ 指同构，$T_{l,n}$ 是 **n 阶完全 l 几乎等部图**

1.9.2 托兰定理

定义 4. 设 G 和 H 是两个 n 阶图，称 **G 度弱于 H**，如果存在双射 $\mu : V(G) \to V(H)$，使得

$$\forall v \in V(G), d_G(V) \leq d_H(\mu(v))$$

若 G 度弱于 H，则一定有 $m(G) \leq m(H)$

定理 4. 若 n 阶简单图 G 中不包含 K_{l+1} (l+1 阶完全图)，则 G 度弱于某个完全 l 部图 H，且若 G 具有和 H 相同的度序列，则：$G \cong H$ （同构）。

N(u) 是 u 的邻接顶点集，V 联运算：二部图连法。

定理 5. 托兰定理：若 G 是简单图，并且不包含 K_{l+1}，则：

$$m(G) \leq m(T_{l,n})$$

此外，仅当 $G \cong T_{l,n}$ 时，有 $m(G) = m(T_{l,n})$。

结论:

设 m(n,h) 表示 n 阶单图中不包含子图的最多边数,则: 1. $m(n,K_3)=\lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor$

2. 数学建模举例:

问题转化成:任意两个人之间的距离不超过 G 米的条件下,距离大于 H 米的人数对最多能达到多少。图模型:每个士兵用一个点表示,两点连线当且仅两个人距离大于 H。

在给定的长度中可以证明部数不得大于 3,遂在 $T_{3,n}$ 下有最多长度大于 H 的边,故可以得到一个散步图,每个子图的半径比较小,每个补圆圈的最小距离大于 H。

1.10 交图和团图

PPT6

定义 1. **交图**:设 S 是一个集合,$F=\{S_1,S_2,...,S_n\}$ 是 S 的不同的非空子集的一个非空族,他们的并是 S,集族 F 的交图,记为 $\Omega(F)$, 定义为: $V(\Omega(F))=F$, 当 $i\neq j$ 且 $S_i\cap S_j\neq\Phi$ 时,S_i 和 S_j 邻接。

定理 1. 每个图都可以是一个交图,证明构造,子集是每个点的两条边。

定义 2. G 是 S 上的交图,如果 S 的基数(集合元素个数)最小,称 S 的奇数位图 G 的交数,记为 $v(G)$.

定理 3. (2). 若 G 有 m 条边,n_0 个孤立点,无 K_2 支,则 $v(G)\leq m+n_0$。

(3). 若 G 为连通图(阶数大于 3),G 中没有三角形当且仅当 $v(G)=m$。

定义 3. 简单图 G 的一个**团**(Clique)指 V 中的一个子集 V_1,使得 $G[V_1]$(V_1 的生成子图)是完全图。

定义 4. 一个给定的**图 G 的团图**是 G 的团的族的交图。

定理 4. 一个图 G 是一个团图当且仅当它含有完全子图的一个族 F,他们的并是 G,且如果 F 的某个子族 F' 中的每一对完全子图的交非空,则 F' 的所有元素的交就非空。

2 树

2.1 树的基本概念

PPT7

定义 1. 树是连通的无圈图，若不连通则为森林。

定理 1. 树和森林都是偶图，也都是简单图。

定理 2. 每棵非平凡树至少有两片树叶。

定理 3. G 是树当且仅当任意两点有且仅有唯一路径。

定理 4. $m = n - 1$,m 为树的边数，n 为树的点数，做归纳证明。

推论 1. 有 k 分支的森林有，n-k 条边。

定理 5. n 阶连通图的边数至少为你 n-1，证明技巧，有无 1 度顶点。

定理 6. 任意树的两个不邻接的点之间添加一条边可以得到唯一的圈。

定理 7. G 是一棵树且最大度 $\delta > k$，则 G 至少有 k 个一度顶点。

定理 8. 正整数序列 $s = (d_1, d_2, ..., d_n)$，满足 $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$，且 $\sum d_i = 2(n-1)$，则存在一个树度数序列为 S

2.2 树的形心

PPT7

回顾 1. 图的顶点的离心率：$e(v) = max\{d(u,v)|u \in V(G)\}$；

图的半径：$r(G) = min\{e(v)|v \in G\}$；

图的直径：$d(G) = max\{e(v)|v \in G\}$；

图的中心点：离心率等于半径的点；

图的中心：图的中心点的集合 1。

定理 9. 每棵树的中心是有一个点或者两个相邻的点组成（证明：每次删去一层叶子）。

定义 2. 树的形心：设 u 是树 T 的任意一个顶点，T 在**顶点 u 的分支**是包含 u 作为一个叶子节点的极大子树，其分支数为 u 的度数; 树 T 在 u 分支中边的最大数目称为**点 u 的权**；树 T 中权值最小的点是它的一个**形心点**；（树 T 中权值最大的点是 T 的所有叶子结点，其权为 T 图的边数）所有形心点的集合称为树的**形心**。

定理 10. 每棵树的形心是有一个点或者两个相邻的点组成（证明：每次删去一层叶子）。

2.3 生成树的概念和性质

PPT8

2.3.1 生成树的概念和性质

定义 1. 若 n 阶图 G 的 n 阶（边）生成子图 T 为树，则称 T 为 G 的生成树（生成树一般不唯一）。

定理 1. 每个连通图必包含一棵生成树（证明：破圈法）。

2.3.2 生成树的计数问题

1. Cayley 凯莱递推计数法

定义 2. 图 G 的边 e 称为被收缩，是指删掉 e 后，把 e 的两个端点重合，如此得到的图记为 $G.e$。

定理 2. (凯莱定理) 设 e 是 G 的一条边，则 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$ (τ 是生成数的个数，证明思路：$\tau(G-e)$ 是 G 中不包含 e 的生成数的个数，: $\tau(G.e)$ 是 G 中包含生成数的个数)。

算法 1. 由凯莱定理递归，算法复杂度 $O(2^m)$，(但是你需要思考停机条件是什么)。

2. 关联矩阵计数法

定义 3. $n \times m$ 矩阵的一个阶数为 $min\{n, m\}$ 的子方阵，称为他的一个主子阵，主子阵的行列式为主子行列式; 一个矩阵有 $C_{max(n,m)}^{min(n,m)}$ 个主子阵。

定理 3. 设 A_m(n-1 阶方阵) 是连通图 G 的基本关联矩阵的主子阵 $A_f(n-1 \times m$ 的矩阵)，则 A_m 非奇异的充要条件是相应于 A_m 的列的那些边构成的 G 的一棵生成树。

Background1. 图的基本关联矩阵：在关联矩阵中划去任意一点所对应的行，得到的矩阵，其秩为 $n-1$。

Background2. 非奇异矩阵就是满秩矩阵，也叫做可逆矩阵。

算法 2.

(1). 给出关联矩阵，进一步写出一个基本关联矩阵；

(2). 找出基本关联矩阵的非奇异主子阵，对于每一个主子阵，画出其相应生成树。

定理 4. (矩阵树定理) 设 G 是顶点集合为 $V(G) = v_1, v_2, ..., v_n$ 的图，设 $A = (a_{ij})$ 是 G 的邻接矩阵，$C = (c_{ij})$ 是 n 阶方阵，其中 $C_{ij} = (i ==$

$j)?(d(v_i)):(-a_{ij})$。**G 的生成树的棵数是 C 的任意一个元素的代数余子式**。(矩阵 C 又称为图的拉普拉斯矩阵，又可以定义为 $C=D(G)-A(G)$，$D(G)$ 是图的对角度数矩阵，对角未度数，其余元素为 0，$A(G)$ 是邻接矩阵)

Background2. 代数余子式：在 n 阶行列式中，把元素 a_{oe} 所在的第 o 行和第 e 列划去后，留下来的 n-1 阶行列式叫做元素 a_{oe} 的余子式，记作 M_{oe}，将 M_{oe} 再乘以 $(-1)^{o+e}$ 记为 A_{oe}，A_{oe} 叫做元素 a_{oe} 的代数余子式。

定理 5. 完全图的生成树个数为 n^{n-2}，可以用矩阵树定理直接算出来。

2.3.3 回路系统简介

定义 4. 设 T 是连通图 G 中的一颗生成树，把属于 G 但不属于 T 的边称为 G 关于 T 的连枝，T 中的边称为 T 关于 G 的树枝。

定义 5. 假设 T 是连通图 G 的一棵生成树，由 G 的对应于 T 的一条连枝于 T 中的树枝构成唯一的圈 C，称为 G 关于 T 的一个基本圈，或者基本回路。若 G 是 (n,m) 连通图，把 G 对应于 T 的 m-n+1 个基本回路称为 G 对应于 T 的基本回路组。记为 C_f

定理 6. 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，有 $m+n-1$ 个基本回路 C_i，定义：$1\cdot G_i=G_i, 0\cdot G_i=\Phi$，其中 G_i 是 G 的回路 (与基本回路区分开)。则 G 的回路组作成的集合对于该数乘和图的对称差运算来说作成数域 $F=\{0,1\}$ 上 $m+n-1$ 维的向量空间。

需要注意的是基本回路时基于一棵生成树而产生的，所以图不仅只有一种基本回路组。

2.4 最小生成树算法

PPT9

最小生成树：原图的极小连通子图，且包含原图中的所有 n 个结点，并且有保持图连通的最少的边。

1. Kruskal 算法

思路：从 G 中的最小边开始，进行避圈式扩张。复杂度：$O(m\cdot log(m))$

2. 破圈法 (管梅谷)

思路：从赋权图 G 的任意圈开始，去掉该圈中权值最大的一条边，称为破圈。不断破圈，直到 G 中没有圈为止，最后剩下的 G 的子图为 G 的最小生成树。

3. Prim 算法

从 G 中的任意点开始，选择关联的权重最小且不生成圈的边添加，直到得到最小生成树。简单实现的复杂度: $O(n^2)$, 堆优化复杂度: $O(n \cdot log(n))$（不确定）

区分：Dijkstra 算法是生成最短路径树的，其思路是：首先把起点到所有点的距离存下来找个最短的，然后松弛一次再找出最短的，所谓的松弛操作就是，遍历一遍看通过刚刚找到的距离最短的点作为中转站会不会更近，如果更近了就更新距离，这样把所有的点找遍之后就存下了起点到其他所有点的最短距离。(Prim 算法的代码实现和 Dijkstra 很像)

例 5. 连通图 G 的树图是这样的图：它的顶点是 G 的生成树 $T_1, T_2, ...$，它们相连仅当它们恰好存在 n-2 条公共边，证明任何连通图的树图都是连通图（证明方法：一步一步构造出任意 T_i, T_j 的一条路）。

2.5 计算机中的树

定义 2：一棵树 T，如果每条边都有一个方向，称这种树为有向树。对于 T 的顶点 v 来说，以点 v 为终点的边数称为点 v 的入度，以点 v 为起点的边数称为点 v 的出度。入度与出度之和称为点 v 的度。

定义 3：一棵非平凡的有向树 T，如果恰有一个顶点的入度为 0，而其余所有顶点的入度为 1，这样的有向树称为根树。其中**入度为 0 的点称为树根**，**出度为 0 的点称为树叶**，**入度为 1，出度大于 0 的点称为内点**。又将内点和树根统称为**分支点**。

定义 4：对于根树 T，顶点 v 到树根的距离称为点 v 的层数；所有顶点中的层数的最大者称为根树 T 的树高。

定义 5：对于根树 T，若规定了每层顶点的访问次序，这样的根树称为有序树。

定义 6：对于根树 T，由点 v 及其 v 的后代导出的子图，称为根树的子根树。

定义 7：对于根树 T，若每个分支点至多 m 个儿子，称该根树为 m 元根树；若每个分支点恰有 m 个儿子，称它为完全 m 元树。

定理 2：在完全 m 元树 T 中，若树叶数为 t，分支点数为 i，则：$(m-1)i = t-1$。

定义 8 设 T 是一棵二元树，若对所有 t 片树叶赋权值 $w_i (1 \le i \le t)$,

且权值为 w_i 的树叶层数为 $L(w_i)$, 称:

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i \cdot L(w_i)$$

为该赋权二元树的权。而在所有赋权为 w_i 的二元树中；W(T) 最小的二元树称为**最优二元树**（可以通过哈夫曼算法得到）。

3 图的连通性

3.1 割边、割点、块

`PPT10`

定义 1 割边：边 e 为图 G 的一条割边，如果 $\omega(G-e) \leq \omega(G)$，$\omega(G)$ 表示极大连通子图的数量。

定理 1:（充要条件）边 e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中。

推论 1：e 为连通图 G 的一条边，如果 e 含于 G 的某圈中，则 $G-e$ 连通。

例 1：求证: (1) 若 G 的每个顶点的度数均为偶数，则 G 没有割边; (2) 若 G 为 k 正则二部图 ($k \leq 2$)，则 G 无割边。

证明: (1) 若不然，设 $e = uv$ 为 G 的割边。则 $G-e$ 的含有顶点 u(或 v) 的那个分支中点 u(或 v) 的度数为奇，而其余点的度数为偶数，与**握手定理**推论相矛盾。

定义 2 **连通图的秩**：一个具有 n 个顶点的连通图 G，定义 $n-1$ 为该连通图的**秩**；具有 p 个分支的图的秩定义为 $n-p$。记为 $R(G)$。

定义 3 **边割集**: 设 S 是连通图 G 的一个边子集, 如果: (1) $R(G-S) = n-2$; (2) 对 S 的任一真子集 S_1, 有 $R(G-S_1) = n-1$。称 S 为 G 的一个边割集，简称 G 的一个边割（任意一个图都会有边割集）。

定义 4 **关联集**：在 G 中，与顶点 v 关联的边的集合，称为 v 的关联集，记为：$S(v)$。

定义 5 **断集**：在 G 中，如果 $V = V1 \cup V2, V1 \cap V2 = \Phi$,$E_1$ 是 G 中端点分属于 V_1 与 V_2 的 G 的边子集，称 E_1 是 G 的一个断集 (割集、关联集是断集，但逆不一定)。

定理 2：任意一个断集均是若干关联集的环和（$E_1 \oplus E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1) = E_1 \cup E_2 - E1 \cap E_2$）。

定理 3：连通图 G 的断集的集合作成子图空间的一个子空间，其维数为 n-1。该空间称为图的断集空间。(其基为 n-1 个线性无关的关联集)

定义 6 **基本割集**：定义 6 设 G 是连通图，T 是 G 的一棵生成树。如果 G 的一个割集 S 恰好包含 T 的一条树枝，称 S 是 G 的对于 T 的一个基本割集。

定理 4：连通图 G 的断集均可表为 G 的对应于某生成树 T 的基本割集的环和。

定理 5：连通图 G 对应于某生成树 T 的基本割集的个数为 n-1, 它们作成断集空间的一组基。

(我们在子图空间基础上，先后引进了图的回路空间和断集空间，它们都是子图空间的子空间)

定义 7 **割点**：在 G 中，如果 E(G) 可以划分为两个非空子集 E1 与 E2, 使 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 以点 v 为公共顶点，称 v 为 G 的一个割点。

定理 6：G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点，当且仅当 $\omega(G-v) > \omega(G)$, $\omega(G)$ 表示极大连通子图的数量。

定理 7：v 是树 T 的顶点，则 v 是割点，当且仅当 v 是树的分支点。

定理 8：设 v 是无环连通图 G 的一个顶点，则 v 是 G 的割点，当且仅当 $V(G-v)$ 可以划分为两个非空子集 V1 与 V2, 使得对任意 $x \in V1, y \in V2$, 点 v 在每一条 x 到 y 的路上。

例 5 求证：无环（无自环）非平凡连通图至少有两个非割点（思路：而非平凡生成树至少两片树叶）。

例 6 求证：恰有两个非割点的连通单图是一条路（思路：G 的任意生成树为）。

例 7 求证：若 v 是单图 G 的割点，则它不是 G 的补图的割点。

定义 8 **块**：没有割点的连通图称为是一个块图，简称块；G 的一个子图 B 称为是 G 的一个块，如果 (1). 它本身是块；(2). 若没有真包含 B 的 G 的块存在。

定理 9：若 $|V(G)| \geq 3$, 则 G 是块，当且仅当 G 无环且任意两顶点位于同一圈上（必要性：归纳法，找圈；充分性：反证）。

定理 10：点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块。

（该定理揭示了图中的块与图中割点的内在联系：不同块的公共点一定

是图的割点。也就是说，图的块可以按割点进行寻找。所以，该定理的意义在于：可以得到寻找图中全部块的算法。）

定义 9 **块割点树**：设 G 是非平凡连通图。$B_1, B_2, ..., B_k$ 是 G 的全部块，而 $v_1, v_2, ..., v_t$ 是 G 的全部割点。构造 G 的块割点树 bc(G)：**它的顶点是 G 的块和割点，连线只在块割点之间进行，一个块和一个割点连线，当且仅当该割点是该块的一个顶点**。

3.2 图的连通度与敏格尔定理

PPT11

3.2.1 点、边连通度

定义 1 **顶点割**：给定连通图 G，设 $V' \subseteq G$，若 $G - V'$ 不连通，称 V' 为 G 的一个点割集，含有 k 个顶点的点割集称为 k 顶点割。G 中点数最少的顶点割称为最小顶点割。

定义 2 **点连通度**：在 G 中，若存在顶点割，称 G 的最小顶点割的顶点数称为 G 的点连通度；否则称 n-1 为其点连通度. G 的点连通度记为 $\kappa(G)$, 简记为 κ；若 G 不连通，$\kappa(G) = 0$.

定义 3 **边连通度**：在 G 中，最小边割集所含边数称为 G 的边连通度。边连通度记为 $\lambda(G)$ 。若 G 不连通或 G 是平凡图，则定义 $\lambda(G) = 0$。

定义 4 在 G 中，若 $\kappa(G) \geq k$, 称 G 是 k 连通的；若 $\lambda(G) \geq k$，称 G 是 k 边连通的。

定理 1 (惠特尼 1932) ：对任意图 G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。（后者是图的最小度，后半部分证明：最小度顶点的关联集作成 G 的断集，前半部分的证明：快逃）

定理 2 设 G 是 (n, m) 连通图，则 $\kappa(G) \leq \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$。

定义 **哈拉里图**：存在一个 (n, m) 图 G，使得 $\kappa(G) = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$，哈拉里构造了**连通度是 k**，边数为 $m = \lceil \frac{nk}{2} \rceil$ 的图 $H_{k,n}$，称为哈拉里图。

定理 2 设 G 是 (n, m) 单图，若 $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则 G 连通。

定理 3 设 G 是 n 阶简单图, 若对任意正整数 $k < n$, 有: $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, 则 G 是 k 连通的。

定理 4 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则有 $\lambda(G) = \delta(G)$。

3.2.2 坚韧度

定义 1 **坚韧度**：用 C (G) 表示图 G 的全体点割集构成的集合，非平凡非完全图的坚韧度，记作 $\tau(G)$，定义为：

$$\tau(G) = min\{\frac{|S|}{\omega(G-S)}|S \in C(G)\}$$

$\omega(G)$ 表示极大连通子图的数量。定义 2 设 G 是一个非完全 $n(n \geq 3)$ 阶连通图，$S* \in C(G)$。若 S* 满足：

$$\tau(G) = \frac{|S*|}{\omega(G-S*)}$$

称 S* 是 G 的坚韧集。

易知：坚韧集是那些顶点数尽可能少，但产生的分支数尽可能多的点割集，同时，坚韧集不唯一。因此，坚韧度可以作为网络容错性参数的度量。仿照点坚韧度，可以定义边坚韧度。

3.2.3 图的核度

定义 3 设 G 是一个非平凡连通图，则称：$h(G) = max\{\omega(G-S)-|S||S \in C(G)\}$ 为图的核度。若 S* 满足：$(G) = \omega(G-S*)-|S*|$，称 S* 为图的核，一般地，核度越小，连通程度越高。

3.2.4 敏格尔定理

PPT12

定义 1：S 分离 u 和 v

定理 1 **敏格尔定理**：

（1）假设 u 和 v 是两个不相邻的顶点，则 **G 中分离 u 和 v 的最少点数等于独立的 (x,y) 路的最大数目**。（独立指没有相邻的内点）

（2）假设 u 和 v 是两个不相邻的顶点，则 **G 中分离 x 和 y 的最少边数等于 G 中边不重合的 (x,y) 路的最大数目**。（边不同，比如两条路可以交叉）

直观意义是在每一条路上设置一个关卡（点/边）。

定理 2 **惠特尼 (1932)** 一个非平凡图 G 是 k 连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点间至少存在 k 条内点不相交的 (u,v) 路。（k 连通的定义：分

离中两个不相邻的顶点至少需要 k 个顶点，若 $\tau(G) \geq k$, 称 G 是 k 连通的）（证明用敏格尔定理）

定理 3 一个非平凡的图 G 是 $k(k \geq 2)$ 边连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点间至少存在 k 条边不重的 (u ,v) 路。

推论对于一个阶数至少为 3 的无环图 G，下面命题等价：

1. G 是 2 连通的
2. G 中任意两点位于同一个圈上
3. G 无孤立点，且任意两条边在同一个圈上

3.3 图的宽直径简介

3.3.1 问题背景

直径：$max\{e(v)|v \in G\}$ 能够刻画网络中的通信延迟。

定理 1 强连通有向图直径和最大度的关系：$n \leq 2, \Delta$ 为最大度，则...

定理 2 连通无向图直径和最大度的关系：...

定理 3 连通无向图直径和最小度 δ 的关系：$d(G) \leq \frac{3n}{\delta+1}$，$n$ 为阶数。

定理 4 连通无向图边数和直径和阶数的关系：$E(G) \leq k + \frac{1}{2}(n-k+4)(n-k+1)$。

定理 5 n 级超立方网络的直径为 n。

定义 **平均距离**：$\mu(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$。

定理 6 G 是 n 阶连通无向图，则 $\mu(G) \leq \frac{n}{\delta+1} + 2$。

定理 7 G(n,m) 图：若 G 为无向图，满足最小度 $\sigma =$，若 G 为有向图，满足最小度 $\sigma =$。

3.3.2 宽直径相关概念

定义 1 **路族，路族的宽度，路族的长度**：设 $x, y \in V(G)$, $C_w(x,y)$ 表示 G 中 w 条内点不交路的路族，w 称为路族的宽度，$C_w(x,y)$ 中最长路的路长成为该路族的长度，记为：$l(C_w(x,y))$。

定义 2 **宽距离**：设 $x, y \in V(G)$, 定义 x 与 y 间所有宽度为 w 的路族长度的最小值 $d_w(x,y)$ 为 x 与 y 间 w 宽距离，即：$d_w(x,y) = min\{l(C_w(u,v)) : \forall C_w(u,v)\}$。

定义 3 **宽直径**：设 G 是 **w 连通**的，G 的所有点对间的 **w 宽距离的最大值**，称为 G 的 w 宽直径，记为 $d_w(G)$。即：$d_w(G) = max\{d_w(x,y) :$

$x, y \in V(G)\}$

4 欧拉图与哈密尔顿图

4.1 欧拉图极其性质

定义 1 **欧拉图**：对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图。欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路

定理 1 下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：(1) G 是欧拉图；(2) G 的顶点度数为偶数；(3) G 的边集合能划分为圈。

推论 1 连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 的顶点度数为偶。推论 2 连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数。

4.2 Fleury 算法

方法是尽可能避割边行走。（割边指未选边子图的割边）

例 4：证明若 G 有 $2k > 0$ 个奇数顶点，则存在 k 条边不重的迹 $Q_1, Q_2, ...Q_k$，使得：$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup ... \cup E(Q_k)$ （证明思路：加边扩展到可以欧拉环游，然后再把加的边删掉。）

例 5 设 G 是非平凡的欧拉图，且 $v \in V(G)$。证明：G 的每条具有起点 v 的都能扩展成 G 的欧拉环游当且仅当 G-v 是森林。（不懂）

4.3 中国邮路问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道**至少**行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最短？

定理 2 若 W 是包含图 G 的每条边至少一次的闭途径，则 W 具有最小权值当且仅当下列两个条件被满足：

(1) G 的每条边在 W 中最多重复一次；

(2) 对于 G 的每个圈上的边来说，在 W 中重复的边的总权值不超过该圈非重复边总权值。

（证明应该好好看看）

例 6 如果一个非负权的边赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v, 设计一个求其最优欧拉环游的算法。

(1) 在 u 与 v 间求出一条最短路 P; (最短路算法)

(2) 在最短路 P 上，给每条边添加一条重复边得 G 的欧拉母图 G*;

(3) 在 G 的欧拉母图 G* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉环游。

4.4 哈密尔顿图的概念

定义 1 **哈密尔顿图**

定义 2 **哈密尔顿路**

定理 1 哈密尔顿图必要条件：若 G 为 H 图，则对 V(G) 的任意非空子集 S，有 $\omega(G-S) \leq |S|$, 其中 ω 表示图的连通度。

定理 2 哈密尔顿图充分条件：对于 $n>3$ 的简单图 G, 若 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, ($\delta$ 指图的最小度）则是哈密尔顿图。

定理 3 哈密尔顿图充分条件：对于 $n>3$ 的简单图 G，任意不相邻的顶点有 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 是哈密尔顿图。

引理 1 对于简单图 G，如果 G 中存在两个不相邻的顶点 u 和 v，满足 $d(u)+d(v) \geq n$, 那么，G 是哈密尔顿图当且仅当 $G+uv$ 是哈密尔顿图。

定义 3 **闭图**: n 阶简单图中, 若对 $d(u)+d(v) \geq n$ 的任意一对顶点 u, v, 均有 u 邻接 v，则称 G 是一个闭图。

引理 2 若 G_1, G_2 是同一个点集 V 的两个闭图，则 $G=G_1 \cap G_2$ 也是闭图。

定义 4 闭包称 $\overline{G}$ 是图 G 的闭包，如果它是原图的极小闭图。

引理 3 一个图的闭包是唯一的。

定理 4 闭包定理图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图。

推论 1 G 是 $n>3$ 的简单图：(1) 若 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，则 G 是 H 图。(Dirac 定理）(2) 若对于 G 的任意不相邻顶点 u 和 v，都有 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 是 H 图。(Ore 定理）

定理 5 度序列判定法 Chvatal 定理简单图 G 的 (n > 3)

范定理：若图中每对距离为 2 的点中至少有一点的度数至少是图的点数的一半，则图是哈密尔顿图。

4.5 TSP 问题

一个商人要到若干个城市，每座城市只经过一次，如何安排路线使得总行程最短。

4.5.1 边交换近似算法

(1). 找到一个哈密尔顿圈 $C_0 = v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ (2). 若存在 $w(v_i, v_i + 1) + w(v_j, v_j + 1) \geq w(v_i, v_j) + w(v_i + 1, v_j + 1)$，则把 C 修改为 $C_1 = v_1, v_2, ..., v_i, v_j, ...v_{i+1}, v_{j+1}...v_n, v_1$

4.5.2 最优 H 圈的下界

可以通过如下方法求出最优 H 圈的下界：1. 在图 G 中删去任意一点得到 G_1 2. 对子图 G_1 求出一棵最小生成树 T；3. 在 v 的关联边中选出两条权值最小者 e_1, e_2 若 H 是最优圈，则：$W(H) \geq W(T) + W(e_1) + W(e_2)$。

5 图的匹配问题

5.1 图的匹配与贝尔热定理

定义 1 匹配、对集、独立集 M: 若 M 是 G 的一个边子集，如果 M 中的每条边的两个端点只有该条边与这两个端点相连，则 M 称为一个匹配或对集或边独立集。

定义 2 M 饱和点与非饱和点：与匹配 M 的任意边关联的点称为 M 饱和点，否则称为非饱和点。

定义 3 最大匹配和完美匹配：如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个最大匹配。特别是，若最大匹配饱和了 G 中的所有顶点，称为 G 的一个完美匹配。一个图不一定存在完美匹配。

定义 4 M 交错路和 M 可扩路：M 是图 G 的一个匹配，G 是一条 M 饱和边和非饱和边交错形成的路，称为 G 中的一条交错路。特别的，如果 M 交错路的起点和终点都是 M 的非饱和点，则称 M 交错路为 **M 可扩路**。

定理 1 贝尔热定理：G 的匹配是 M 的最大匹配，当且仅当 G 不包含 M 可扩路。（它提供了一种扩充图的匹配的思路）

5.2 偶图的匹配问题

匹配是否存在，如何求出匹配？不同完美匹配的个数？

定理 2 Hall 定理：G 是 (X,Y) 二部图，G 存在饱和 X 的每个顶点的匹配（从 X 到 Y 的匹配）的充要条件是：对于任意 S 属于 X，有 |N(S)| 大于等于 |S|，其中 N(S) 是 S 的邻集，即图 G 中与所有 S 相邻接的顶点集

合。(显然，S 在 X 当中，所以 N(S) 在 Y 当中，都是点集)(若 X 饱和 Y，Y 饱和 X 不一定，因为两个点集的点数未必相同，完美匹配需要划分两边的点数相同)(充分性证明：用可扩路)。

推论：若 G 是正则偶图，则 G 存在完美匹配。(正则图是指各顶点的度均相同的无向简单图)

例子 1：每个 K 立方体都有完美匹配（k 大于等于 2）

例子 2：求 $K_{2n}, K_{n,n}$ 完全图的完美匹配个数：

例子 3：树中至多存在一个完美匹配。(反证法：多完美匹配存在圈，与树矛盾)

5.3 点覆盖与哥尼定理

定义 5 点覆盖、最小点覆盖和覆盖数：G 的一个顶点子集 K 称为 G 的一个点覆盖，如果 G 的每一条边都至少存在一个端点在 K 中。G 中包含点数最少的点覆盖称为最小点覆盖，其包含的点数为 G 的覆盖数，记为 $\alpha(G)$。

定理 3 匹配与覆盖关系：设 M 是 G 的匹配，K 是 G 的覆盖，若 |M| = |K|，则 M 是 G 的最大匹配，K 是 G 的最小覆盖。(M 是边数，K 是点数)

至于为什么一个图的匹配数小于等于覆盖数，可以这样理解，对于图的匹配的每一条边至少对应一个覆盖点，对于非匹配部分可能还需要覆盖点，因此覆盖点数总是大于等于匹配边数。

定理 4 哥尼定理：在偶图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

例 4：矩阵的一行或一列成为矩阵的一条线，在布尔矩阵中，证明包含所有”1“的线的最小数目，等于具有性质”任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目“。

定理 5 托特定理：G 有完美匹配当且仅当对 V(G) 的任意非空真子集 S，有 $o(G-S) \leq |S|$，前者表示奇分支的数目（连通分支的顶点总数为奇数称为奇分支）

推论皮得森定理：没有割边的三正则图存在完美匹配。

5.4 匈牙利算法

5.4.1 在偶图中寻找完美匹配

问题：偶图 $G=(X,Y),|X|=|Y|$，在 G 中求一完美匹配 M

基本思想：从任一初始匹配 M_0 出发，通过寻求 M_0 的一条可扩路 P，令 $M_1=M_0\Delta E(P)$，得到比 M_0 大的匹配 M_1，迭代。

定义 1 交错树：$G=(X,Y)$，M 是 G 的匹配，u 是 M 的非饱和点，H 是 G 扎根于点 u 的 M 交错树，如果：(1) $u\in V(H)$ (2) $\forall v\in V(H),(u,v)$ 路是一个交错路。

直接看算法：**偶图的完美匹配算法：匈牙利算法**令 M 是初始匹配。H 是扎根于 M 的非饱和点 u 的交错树，令 $S=V(H)\cap X,T=V(H)\cap Y$。(a) 若 M 饱和 X 的所有顶点，停止。否则，设 u 为 X 中 M 非饱和顶点，置 $S=\{u\},T=\{\Phi\}$；(b) 若 $N(S)=T$，则 G 中不存在完美匹配，否则设 $y\in N(S)-T$。（$N(S)$ 指 S 的临接点集）(c) 若 y 为 M 饱和点，且存在 z，$yz\in M$，置 $S=S\cup\{z\},T=T\cup\{y\}$，转 (b)。否则，设 P 为 M 可扩路，置 $M_1=M\Delta E(P)$，转 (a)。(Δ 是运算符）

算法性质：复杂度为 $O(|X|^3)$ (1) 最多循环 $|X|$ 次 (2) 初始匹配最多扩张 $|X|$ 次 (3) 生长树最多生长 $2|X|-1$ 次

5.4.2 在偶图中寻找最大匹配

问题：在一般偶图上求最大匹配 M

分析：使用匈牙利算法求完美匹配时，当在扎根于 M 非饱和点 u 的交错树上有 |N(S)|<|S| 时，由 Hall 定理，算法停止。要求出最大匹配，应该继续检查 X-S 是否为空，如果不为空，则检查是否在其上有 M 非饱和点。一直到所有 M 非饱和点均没有 M 可扩路才停止。

偶图寻找最大匹配算法设 M 是 $G=(X,Y)$ 的初始匹配。(1) 置 $S=\Phi,T=\Phi$; (2) 若 $X-S$ 已经 M 饱和, 停止; 否则, 设 u 是 $X-S$ 中的一非饱和顶点, 置 $S=S\cup\{u\}$。(3) 若 $N(S)=T$, 转 (5); 否则, 设 $y\in N(S)-T$。(4) 若 y 是 M 饱和的，设 $yz\in M$，置 $S=S\cup\{z\},T=T\cup\{y\}$，转 (3); 否则，存在 (u,y) 交错路是 M 可扩路 P, 置 $M=M\Delta E(P)$，转 (1). (5) 若 $X-S=\Phi$，停止；否则转 (2)。

5.5 最优匹配算法

问题：设 $G=(X,Y)$ 是边赋权完全偶图，且 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}, w_{ij}=w(x_iy_j)$。在 G 中求出一个具有最大权值的完美匹配。由于 $K_{n,n}$ 有 $n!$ 个不同完美匹配，所以枚举计算量是 $n!$。

定义 2 可行顶点标号：设 $G=\{X,Y\}$，对于任意的 $x\in X, y\in Y$，有：$l(x)+l(y)\geq w(x,y)$ 称 l 是赋权完全偶图 G 的可行顶点标号。对于任意的赋权完全偶图 G，均存在 G 的可行顶点标号。事实上，以下一种设计就是 G 的一个可行定点标号。

$$l(x)=max_{y\in Y}(w(xy)),若x\in X,l(y)=0,若y\in Y$$

定义 3 相等子图设 l 是赋权完全偶图 $G=(X,Y)$ 可行顶点标号，令：

$$E_l=\{xy\in E(G)|l(x)+l(y)=w(x,y)\}$$

称 $G_l=G[E_l]$ 为 G 的对应于 l 的相等子图。

定理设 l 是**赋权**完全偶图 $G=(X,Y)$ 的可行顶点标号，若相等子图 G_l 有完美匹配 $M*$, 则 $M*$ 是 G 的最优匹配。

根据上面定理，如果找到一种恰当可行顶点标号，使得对应的相等子图有完美匹配 M*, 则求出了 G 的最优匹配。

Kuhn 算法：采用顶点标号修改策略

(1) 若 X 是 M 饱和的，则 M 是最优匹配。否则，令 u 是一个 M 非饱和点，置 $S=\{u\}, T=\Phi$ (2) 若 $T\subset N_{G_l}(S)$，转 (3)。否则，计算：

$$\alpha_l=min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(xy)\}$$

$$\hat{l}=l(v)-\alpha_l,v\in S;l(v)+\alpha_l,v\in T;l(v),else$$

给出新的可行顶点标号，在新标号下重新开始。(3) 在 $N_{G_l}(S)/T$ 中选择点 y。若 y 是 M 饱和的，$yz\in M$，则置 $S=S\cup\{z\}, T=T\cup\{y\}$ 转 (2); 否则，设 P 是 G_l 中 M 可扩路，置 $M=M\Delta E(P)$, 转 (1)。

6 图的着色

6.1 图的边着色

6.1.1 相关概念

定义 1 **k 边可着色**：设 G 是图，对 G 的边进行染色，若**相邻边染不同的颜色**，则称对 G 进行**正常边着色**。如果能用 k 种颜色对 G 进行正常边着色，称 G 是 **k 边可着色**的

定义 2 **边色数**：设 G 是图，对 G 进行正常边着色所需要的最少颜色数，成为 G 的边色数。

6.1.2 几类特殊图的边色数

偶图的边色数

定理 1 偶图的边色数：$\chi'(K_{m,n}) = \Delta$

定义 3 缺色：设 π 是 G 的一种正常边着色，若点 u 关联的边的着色没有用到色 i，则称点 u 缺 i 色。

定理 2 哥尼定理：若 G 是偶图，则 $\chi'(G) = \Delta$。（Δ 最大度）（证明，归纳法）

一般简单图边着色

引理：设 G 是简单图，x 与 y_1 是 G 中不相邻的两个顶点，π 是 G 的一个正常 k 边着色。若对该着色 π，x, y_1 以及与 x 相邻点均至少缺少一种颜色，则 $G + xy_1$ 是 k 边可着色的。

定理 3 维津定理：若 G 是单图，则 $\chi'(G) = \Delta$或者$\Delta + 1$

三类特殊简单图的边色数

定理 4 简单图 G 且最大度大于 0，若 G 只有一个最大度顶点或者两个相邻的最大度顶点，则 $\chi'(G) = \Delta$。

定理 5 设 G 是单图，若点数 $n = 2k + 1$ 且边数 $m > k\Delta$, 则：$\chi'(G) = \Delta + 1$。

定理 6 设 G 是奇数阶 Δ 正则单图，若 $\Delta > 0$，则：$\chi'(G) = \Delta + 1$。

定理 7 设无环图 G 中边数最大的重数为 μ，则 $\chi'(G) \le \Delta + \mu$。

6.1.3 边着色的应用

分配课时问题，比赛安排问题，看课件，感觉考试靠的就是这种。

6.2 图的点着色

6.2.1 相关概念

定义 1 **正常顶点着色，点色数**：设 G 是一个图，对 G 的每个顶点着色，使得**相邻顶点着不同颜色**，称为对 G 的正常顶点着色；如果用 k 种颜色可以对 G 进行正常顶点着色，称 G 可 k 正常顶点着色；对图 G 正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图 G 的点色数，图 G 的点色数用 $\chi(G)$ 表示。(而边色数是 χ')

定义 2 **k 色图**：色数为 k 的图称为 k 色图。

6.2.2 点色数几个结论

定理 1：对任意 G，有 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$。

算法：图 G 的 $\Delta(G) + 1$ 的正常点着色算法，该算法不能算出点色数。

定理 2 (布鲁克斯，1941) 若 G 是连通的单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则有 $\chi(G) \leq \Delta(G)$。

定义 3 次大度：设 G 是至少有一条边的简单图，定义：

$$\Delta_2(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{y \in N(u), d(v) \leq d(u)} d(v)$$

其中 $N(u)$ 是 G 中点 u 的邻域，称 Δ_2 为 G 的次大度。

计算次大度方法：令 $V_2(G) = \{v | v \in V(G), N(v)$中存在点 u，满足$d(u) \geq d(v)\}$，那么 $\Delta_2(G) = max\{d(v) | v \in V_2(G)\}$。

定理 3：设 G 是一个非空简单图，则：$\chi(G) \leq \Delta_2(G) + 1$。

推论：设 G 是非空简单图，若 G 中最大度的点互不邻接，则有 $\chi(G) \leq \Delta(G)$。

6.2.3 四色定理与五色定理

定理 4 希伍德每个平面图是 5 可着色的。

6.2.4 顶点着色的应用

课程安排问题