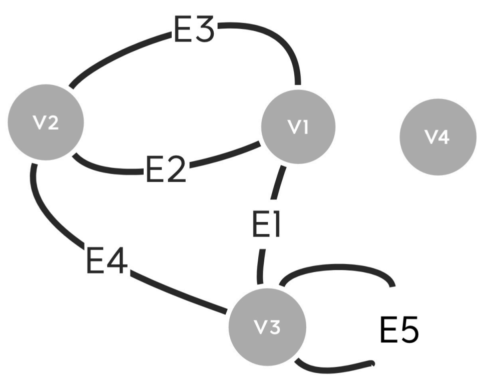
第二次图论作业

郑有为 19335286

2021 年 3 月 19 日

1

(1). 图 G 的几何实现



(2). 矩阵 G 的邻接矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2

证明二部图可以表示为如下矩阵，且 A_{21} 是 A_{12} 的转置矩阵。

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

证明：对于二部图 G，其顶点集可以分为两个子集：M,N，满足 $\forall v \in M, w \in M, e=(v,w) \notin E(G)$，E(G) 为二部图的边集。

于是，我们构造一个邻接矩阵 A，A 为 |M|+|N| 阶方阵，并且满足矩阵的前 |M| 个索引对应到顶点集 M 的各个顶点，第 |M+1| 到 |M|+|N| 个索引对应到顶点集 N 的各个顶点。

显而易见，A 的子矩阵 A[1:|M|][1:|M|] 表示顶点集 |M| 的各点间边的关系，即顶点集 M 关于 G 的点生成子图的邻接矩阵，设为 G_M, 而由于二部图的性质，该顶点集任意两点没有边相连，即 G_M 为全零 |M| 阶方阵。

同理，A 的子矩阵 A[|M|+1:|M|+|N|][|M|+1:|M|+|N|] 表示顶点集 |N| 的各点间边的关系，是 N 关于 G 的点生成子图的邻接矩阵，记为 G_N, 而由于二部图的性质，该顶点集任意两点没有边相连，即 G_N 为全零 |M| 阶方阵。

上述两个全零方阵对应到 A 的分块矩阵的两个全零子方阵，下面证明 A_{21} 和 A_{12} 互为转置矩阵。

由于 G 是无向图，其邻接矩阵 A 为对称矩阵。令顶点 $u \in M$ 在矩阵中的索引是 a, 顶点 $v \in N$ 在矩阵中的索引是 b, 由于前面的构造，有 $1 \leq a \leq |M|$, $|M|+1 \leq b \leq |M|+|N|$。A[b][a] 可在子矩阵 A_{12} 中表示成 $A_{12}[b-|M|][a]$, 同时有 A[a][b] 在子矩阵 A_{21} 中表示成 $A_{21}[a][b-|M|] = A_{12}^T[a][b-|M|]$ ，最后由 a，b 的任意性，有 A_{21} 和 A_{12} 互为转置矩阵，证毕。