第六次图论作业

郑有为 19335286

2021 年 4 月 19 日

1 带权简单图各边权不同，证明有 Prim 算法得到的最小生成树唯一。

首先证明引理：任意最小生成树必包含边权最小的边 e_i。

反证法：若不然，将 e_i 加入最小生成树 T，构成一个回路，去掉回路中任意一条不为 e_i 的边 e_j 得到生成树 T', 显然 $\forall e_j \neq ei, w(e_i) \leq w(e_j)$, 因而有 $w(T') \leq w(T)$, 与 T 是最小生成树矛盾。

下面证明：边权各不相同的简单树的最小生成树唯一。

反证法：若存在两棵不同的树 T_1, T_2, 令 $E(T_1) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, 其中 $w(e_1) < w(e_2) < ...w(e_m)$,$E(T_2) = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$, 其中 $w(e'_1) < w(e'_2) < ...w(e'_m)$。令 $w(e_1) = w(e'_1), w(e_2) = w(e'_2), ..., w(e_{k-1}) = w(e'_{k-1})$ 而 $w(e_k) \neq w(e'_k)$, 不妨设 $w(e_k) < w(e'_k)$。

将 e_k 加入最小生成树 T_2，构成一个回路 C'，回路 $E(C')$ 不包含于 $\{e'_1, e'_2, ...e'_{k-1}, e_k\}$（因为简单图 G 中各边权不同，若 $w(e_i) = w(e_j)$，则有 $e_i = e_j$。因此根据假设我们有 $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, ...e'_{k-1} = e_{k-1}$, 若回路 $E(C') \subseteq \{e'_1, e'_2, ...e'_{k-1}, e_k\}$，则说明在 T_1 中也存在回路，与 T_1 是树矛盾。）所以回路 $E(C')$ 中必存在边 $e'_j \notin \{e'_1, e'_2, ...e'_{k-1}, e_k\}$ 满足 $w(e'_j) > w(e_k)$。

去掉回路中的边 e'_j 得到生成树 T'', 由于 $w(e'_j) > w(e_k)$, 因而有 $w(T'') < w(T_2)$, 与 T_2 是最小生成树矛盾。

综上，由于边权各不相同的简单树的最小生成树唯一，所以通过 Prim 算法得到的最小生成树也唯一。

2 用 Kruskal 算法解决带约束条件的连线问题：用最小费用解决一个能连接若干个城市的赋权有向图 D，但某些特定的城市之间要求有直通的线路连接。

定义结点和边：每个城市用结点表示，对这些结点建立一个完全图（每个结点到另一个结点都有两条有向边，且方向相反），两个城市的边权用两个城市的距离来表示（两条边都是如此）。

算法第一步：对于某些特定的城市之间要求有直通的有向线路连接起来，选中这些有向边预先加入 Kruskal 算法中生成树的已选边集，更新已选点集和未选边集。

算法第二步：对当前未选的有向边集根据边权从小到大排序，依次考虑各边，如果不与已选有向边集构成回路，则加入已选有向边集，并更新未选有向边集和点集。如此进行避圈式扩张，直至未选点集为空。

在判断是否有回路上，通过并查集来判定（复杂度 $O(1)$），则得到的连通图为弱连通图；

因而有，算法复杂度为：$O(m \cdot log(m))$。