程序报告

一、问题说明

对以下函数分别进行 n=2,3,4,5,6,7 点 Newton-Cotes 积分和 Gauss 积分（积分区间为[-1,1]），计算并比较他们的误差

$$f_1(x) = e^x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

写代码时遇到的问题

1. 计算 Gauss 点（求解 Legendre 多项式）
2. 计算 Lagrange 多项式（递归解决）
3. 积分 Lagrange 多项式（用相应单项式系数乘以相应单项式积分值再相加）

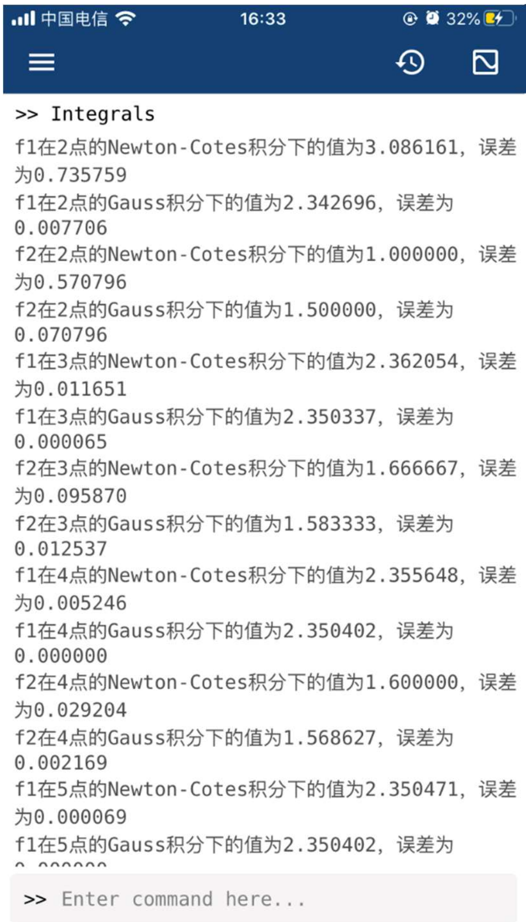
二、使用的算法

递归算法，以计算 Lagrange 多项式

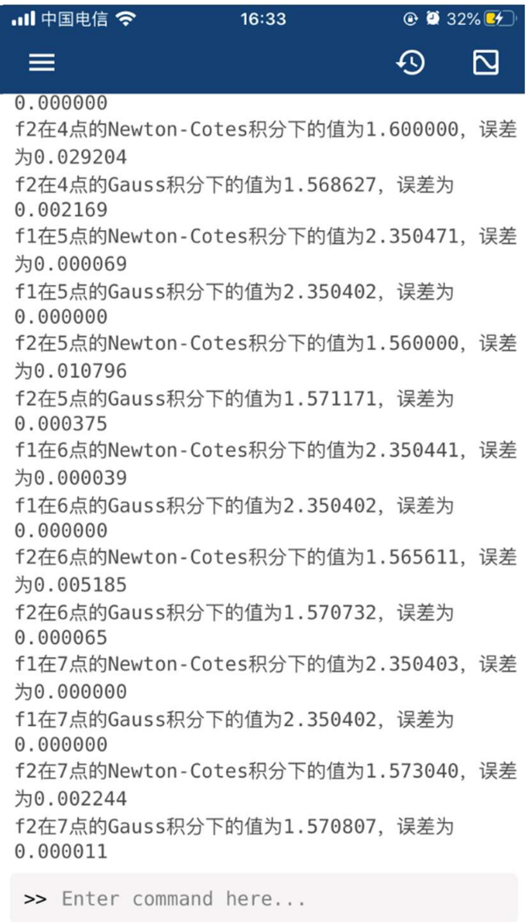
分治算法，以计算多项式积分

三、结果图

（电脑里 matlab 连接不到验证服务器，只有用手机上的）



```
>> Integrals
f1在2点的Newton-Cotes积分下的值为3.086161，误差为0.735759
f1在2点的Gauss积分下的值为2.342696，误差为0.007706
f2在2点的Newton-Cotes积分下的值为1.000000，误差为0.570796
f2在2点的Gauss积分下的值为1.500000，误差为0.070796
f1在3点的Newton-Cotes积分下的值为2.362054，误差为0.011651
f1在3点的Gauss积分下的值为2.350337，误差为0.000065
f2在3点的Newton-Cotes积分下的值为1.666667，误差为0.095870
f2在3点的Gauss积分下的值为1.583333，误差为0.012537
f1在4点的Newton-Cotes积分下的值为2.355648，误差为0.005246
f1在4点的Gauss积分下的值为2.350402，误差为0.000000
f2在4点的Newton-Cotes积分下的值为1.600000，误差为0.029204
f2在4点的Gauss积分下的值为1.568627，误差为0.002169
f1在5点的Newton-Cotes积分下的值为2.350471，误差为0.000069
f1在5点的Gauss积分下的值为2.350402，误差为
>> Enter command here...
```



```
0.000000
f2在4点的Newton-Cotes积分下的值为1.600000，误差为0.029204
f2在4点的Gauss积分下的值为1.568627，误差为0.002169
f1在5点的Newton-Cotes积分下的值为2.350471，误差为0.000069
f1在5点的Gauss积分下的值为2.350402，误差为0.000000
f2在5点的Newton-Cotes积分下的值为1.560000，误差为0.010796
f2在5点的Gauss积分下的值为1.571171，误差为0.000375
f1在6点的Newton-Cotes积分下的值为2.350441，误差为0.000039
f1在6点的Gauss积分下的值为2.350402，误差为0.000000
f2在6点的Newton-Cotes积分下的值为1.565611，误差为0.005185
f2在6点的Gauss积分下的值为1.570732，误差为0.000065
f1在7点的Newton-Cotes积分下的值为2.350403，误差为0.000000
f1在7点的Gauss积分下的值为2.350402，误差为0.000000
f2在7点的Newton-Cotes积分下的值为1.573040，误差为0.002244
f2在7点的Gauss积分下的值为1.570807，误差为0.000011
>> Enter command here...
```

四、结果分析

1.随着 n 的增加，同样的函数在同样的数值积分方法下误差越来越小

2.在程序误差范围内，n 相同时，无论 f1 还是 f2，Newton-Cotes 积分的误差均比 Gauss 积分的误差大

3.n 相同时，f2 在 Gauss 积分下收敛得比 f1 在 Gauss 积分下慢，f2 在 Newton-Cotes 积分下收敛得比 f1 在 Newton-Cotes 积分下慢

五、收敛性分析

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_{-1}^{1} R_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x)dx$$

$$|E_n(f)| = |\int_{-1}^{1} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x)dx| \le \frac{\max\limits_{-1\le x\le 1}|f^{(n+1)}(x)|\int_{-1}^{1}|\omega_n(x)|dx}{(n+1)!}$$

$$\max_{-1\le x\le 1}|f_1^{(n+1)}(x)| = \frac{1}{e},\ \max_{-1\le x\le 1}|f_2^{(n+1)}(x)| \le (n+1)!$$

进一步结论没做出来，对 Gauss 积分，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|E_n(f)| = 0$，但收敛速度不清楚，对 Newton-Cotes 积分，$\int_{-1}^{1}|\omega_n(x)|dx \le 2 * \max\limits_{-1\le x\le 1}|\omega_n(x)| = O(\frac{n!^2}{2n^n\left(\frac{n}{2}\right)!^2})$，对 f1 和 f2 也有 $\lim\limits_{n\to\infty}|E_n(f)| = 0$，可能结果分析的第三点和

$$\max_{-1\le x\le 1}|f_1^{(n+1)}(x)| = \frac{1}{e},\ \max_{-1\le x\le 1}|f_2^{(n+1)}(x)| \le (n+1)!$$

有关