数独の CNF 記述

数独の規則は以下の通りです。

規則１．各マスには一つの番号が入る。

規則 2．各行に同じ番号が 2 回以上表れることはない。

規則 3．各列に同じ番号が 2 回以上表れることはない。

規則 4．各ボックスに同じ番号が 2 回以上表れることはない。

まず各マスには１~９の変数を用意します。９ｘ９の数独の場合は 81 マスがあるので、変数の数は 729 個となります。これは i 行 j 列(0≦i, j<9)のマスに 9 個の変数(１~９)が入ることを意味します。これを xij1~xij9 という変数で表すことにします。

次には各マスにおいて規則１を導入するため、各マスに対して$(xij1 \lor xij2 \lor \cdots \lor xij9)$を書きます。各マスへの規則１の導入により、CNF 節の数は 81 個になりました。

次に規則２を考えます。

$$(\neg xi1k \lor \neg xi2k) \land (\neg xi1k \lor \neg xi3k) \land (\neg xi1k \lor \neg xi4k) \land \ldots \land (\neg xi11k \lor \neg xi91k)$$
$$\land (\neg xi2k \lor \neg xi3k) \land \cdots \land (\neg xi2k \lor \neg xi9k)$$
$$\land (\neg xi3k \lor \neg xi4k) \land \cdots \land (\neg xi3k \lor \neg xi9k) \cdots$$
$$\land (\neg xi8k \lor \neg xi9k)$$

を書くことで規則２を導入し、i 行目には同じ番号が 2 回以上表れないようにすることができます。そのため節の数は８から１までの和で求めることができます(36 個)。そしてこの 36 に各マスの変数の個数 k (9 個)、行の個数(9 個)を掛ければ、CNF 節の総数は 2916 になることが分かります。

規則３は規則２から i と j を入れ替えることで簡単に求めることができます。

規則４の場合、規則２や規則 3 と比べて行と列がブロックになっているだけなので、同じようなプロセスで節を書いていくことができます。規則 2、３と４の導入により、節の数は 2916x3=8748 個が増え、最終的な節の数は規則１から規則４までの節の数の和で求めることができます(81＋8748＝8929 個)。