

Metoda elementów skończonych

1. Wstęp teoretyczny.

Program służy do symulacji niestacjonarnego transferu ciepła. Do wykonania symulacji wykorzystujemy niejawną schemat wyznaczania temperatury:

$$\left([H] + \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0$$

gdzie:

$$[H] = \int_V k \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \\ + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS,$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_{\infty} dS,$$

$$[C] = \int_V c \rho \{N\} \{N\}^T dV.$$

c- ciepło właściwe materiału,

ρ - gęstość materiału,

α - współczynnik konwekcji,

k- współczynnik przewodności cieplnej,

t_{∞} - temperatura otoczenia

$\{N\}$ - wektor funkcji kształtu

$\{t\}$ - wektor temperatur

2.Program.

Napisany w języku C++ program został podzielony na struktury:

GData- zawiera wszystkie dane potrzebne do stworzenia siatki oraz wszystkie potrzebne współczynniki znane przed uruchomieniem programu.

Node- zawiera informacje o węźle elementu skończonego. Składa się z id węzła, współrzędnych oraz informacji o tym, czy występuje warunek brzegowy.

Element- zawiera id elementu, tablicę przechowującą id węzłów, z których składa się element oraz wszystkie lokalne macierze.

Universal- zawiera dane wspólne dla wszystkich elementów: punkty całkowania, wartości pochodnych funkcji kształtu.

Matrices- zawiera macierze uniwersalne dla każdego elementu: macierz funkcji kształtu oraz macierze pochodnych funkcji kształtu (po ξ i η)

Grid- struktura generująca siatkę. Zawiera tablicę przechowującą elementy i węzły, macierze globalne, globalny wektor obciążeń i wektor temperatur. Zawiera większość wykonywanych przez program metod.

Matrix- pomocnicza struktura zawierająca metody odpowiedzialne za operacje na macierzach np. mnożenie macierzy. Wszystkie macierze i wektory w programie są obiektami tej struktury.

W programie wykorzystano metodę całkowania Gaussa z dwupunktowym schematem, a do rozwiązywania układu równań metodę eliminacji Gaussa.

3.Testy.

Testy przeprowadzono dla danych z pliku pdf Test Cases znajdującego się na stronie internetowej.

- 100 – initial temperature
- 500 – simulation time [s],
- 50 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m²K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 4 – N_H,
- 4 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m³].

Pierwsza iteracja:

Macierz [C]:

Zapisana do pliku w celu lepszego wglądu

```
Matrix C
674.074 337.037 0 0 337.037 168.519 0 0 0 0 0 0 0 0 0
337.037 1348.15 337.037 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0 0 0 0 0
0 337.037 1348.15 337.037 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0 0 0 0
0 0 337.037 674.074 0 0 168.519 337.037 0 0 0 0 0 0
337.037 168.519 0 0 1348.15 674.074 0 0 337.037 168.519 0 0 0 0
168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0
0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519 0 0
0 0 168.519 337.037 0 0 674.074 1348.15 0 0 168.519 337.037 0 0
0 0 0 337.037 168.519 0 0 1348.15 674.074 0 0 337.037 168.519 0
0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519
0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519
0 0 0 0 0 0 168.519 337.037 0 0 674.074 1348.15 0 0 168.519 337.037
0 0 0 0 0 0 0 337.037 168.519 0 0 674.074 337.037 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 337.037 1348.15 337.037 0
0 0 0 0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 337.037 1348.15 337.037
0 0 0 0 0 0 0 0 0 168.519 337.037 0 0 337.037 674.074
```

Macierz [H] bez warunków brzegowych:

```
Matrix H
16.6667 -4.16667 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0
0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0
0 0 -4.16667 16.6667 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 0 0 0 0
-4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0
-8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0
0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0
0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 0
0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0
0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 0
0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333
0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 16.6667 -4.16667 0 0
0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0
0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -4.16667 16.6667
```

Wektor {P}

```
wektor P
15033.3
18066.7
18066.7
15033.3
18066.7
12133.3
12133.3
18066.7
18066.7
12133.3
12133.3
18066.7
15033.3
18066.7
18066.7
15033.3
```

Druga iteracja:

Macierze pozostają bez zmian, wektor P po zmianie:

```
wektor P
24105
31323.9
31323.9
24105
31323.9
27820.8
27820.8
31323.9
31323.9
27820.8
27820.8
31323.9
24105
31323.9
31323.9
24105
```

Minimalne i maksymalne temperatury w każdej iteracji:

```
Po upływie 50 sekund, temperatura minimalna: 110.039 Temperatura maksymalna: 365.815
Po upływie 100 sekund, temperatura minimalna: 168.838 Temperatura maksymalna: 502.59
Po upływie 150 sekund, temperatura minimalna: 242.801 Temperatura maksymalna: 587.374
Po upływie 200 sekund, temperatura minimalna: 318.618 Temperatura maksymalna: 649.385
Po upływie 250 sekund, temperatura minimalna: 391.256 Temperatura maksymalna: 700.066
Po upływie 300 sekund, temperatura minimalna: 459.039 Temperatura maksymalna: 744.061
Po upływie 350 sekund, temperatura minimalna: 521.588 Temperatura maksymalna: 783.381
Po upływie 400 sekund, temperatura minimalna: 579.031 Temperatura maksymalna: 818.991
Po upływie 450 sekund, temperatura minimalna: 631.69 Temperatura maksymalna: 851.431
Po upływie 500 sekund, temperatura minimalna: 679.9 Temperatura maksymalna: 881.06
```

Drugi przypadek

- 100 – initial temperature
- 100 – simulation time [s],
- 1 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m²K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 31 – N_H,
- 31 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m³].

```
Po upływie 1 sekund, temperatura minimalna: 100 Temperatura maksymalna: 149.557
Po upływie 5 sekund, temperatura minimalna: 100 Temperatura maksymalna: 226.683
Po upływie 10 sekund, temperatura minimalna: 100 Temperatura maksymalna: 276.701
Po upływie 15 sekund, temperatura minimalna: 100.009 Temperatura maksymalna: 312.451
Po upływie 20 sekund, temperatura minimalna: 100.064 Temperatura maksymalna: 341.085
```

4.Wnioski.

Obliczone przez program wartości są zgodne z wynikami zawartymi w pliku na stronie internetowej więc możemy założyć, że symulacja wykonuje się poprawie.

Wraz ze zwiększeniem gęstości siatki wzrasta czas wykonywania programu oraz zużycie pamięci. Aby przyspieszyć program przy tworzeniu siatki korzystam z OpenMP aby obliczanie macierzy lokalnych dla każdego elementu było wykonywane na wielu wątkach