

Pracownia z Analizy Numerycznej

Sprawozdanie do zadania P1.7

Mateusz Leonowicz

November 7, 2020

1 Wstęp

Wiele problemów w matematyce, fizyce czy informatyce sprowadzić można do wyznaczenia miejsc zerowych danego równania algebraicznego. Często nie wystarczy nam prosta analiza funkcji, a jedyne co możemy zrobić, to obliczenie jej wartości w danej, skończonej liczbie punktów jej dziedziny. Dlatego temat ten stał się jednym z fundamentalnych zagadnień analizy numerycznej, dzięki czemu powstało wiele metod iteracyjnych, które oczywiście mają swoje zalety i wady.

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie metod obliczania pierwiastków wielomianów w postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

które pozwalają komputerom na uzyskanie wyników z kontrolowanym błędem. Przedstawię trzy metody numeryczne oraz rozwiązania z użyciem wzorów Cardano. Opiszę ich działanie i charakterystykę, a następnie umieszczę ich porównanie razem z podsumowaniem.

Wszystkie testy przeprowadzane będą z użyciem języka do analizy numerycznej Julia.

Contents

1	Wstęp	1
2	Metoda Newtona	2
3	Metoda bisekcji	3
4	Metoda Bairstowa	4
5	Wzory Cardano	5
6	Testy numeryczne	6
6.1	Dobór przybliżenia pierwszego pierwiastka	6
6.2	Test 1	7
6.3	Test 2	8
6.4	Test 3	9
6.5	Test 4	10
6.6	Test 5	11
6.7	Test 6	12
7	Wnioski i podsumowanie	13
7.1	Metoda bisekcji	13
7.2	Metoda Newtona	13
7.3	Wzory Cardano	13
7.4	Metoda Bairstowa	13
7.5	Podsumowanie	13

2 Metoda Newtona

Niech $f(x)$ będzie funkcją, której miejsce zerowe chcemy wyznaczyć. Niech α będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Z twierdzenia Taylora, wiemy, że przybliżenie funkcji f , możemy zapisać w postaci:

$$0 = f(\alpha) = f(x + e) = f(x) + e f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!} e^2 \quad \xi \in \text{interv}(x, \alpha) \quad (1)$$

Jeśli nasz wyraz $\frac{f''(\xi)}{2!} e^2$ będzie dostatecznie mały, to możemy go pominąć i rozwiązać równanie względem e , co daje nam:

$$e = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Jeśli x jest dostatecznie dobrym przybliżeniem α , to $x - e$ będzie jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka. Na tej różnicy opiera się metoda Newtona, która po wybraniu startowego przybliżenia x_0 zera α polega na stosowaniu rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Dobranie startowego punktu x_0 w tej metodzie jest bardzo istotne, gdyż metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna. Jeśli dobierzemy odpowiednio punkt początkowy będziemy mieli zbieżność kwadratową, z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją wielokrotne zera funkcji. Wtedy otrzymamy zbieżność liniową.

Metoda Newtona opiera się na linearyzacji funkcji f , co pozwala nam na dobre przybliżanie wartości funkcji w małym otoczeniu punktu x . Możemy więc rozumieć tę metodę, jako przybliżanie miejsc zerowych funkcji za pomocą jej stycznych, co oczywiście niesie za sobą groźbę rozbieżności.

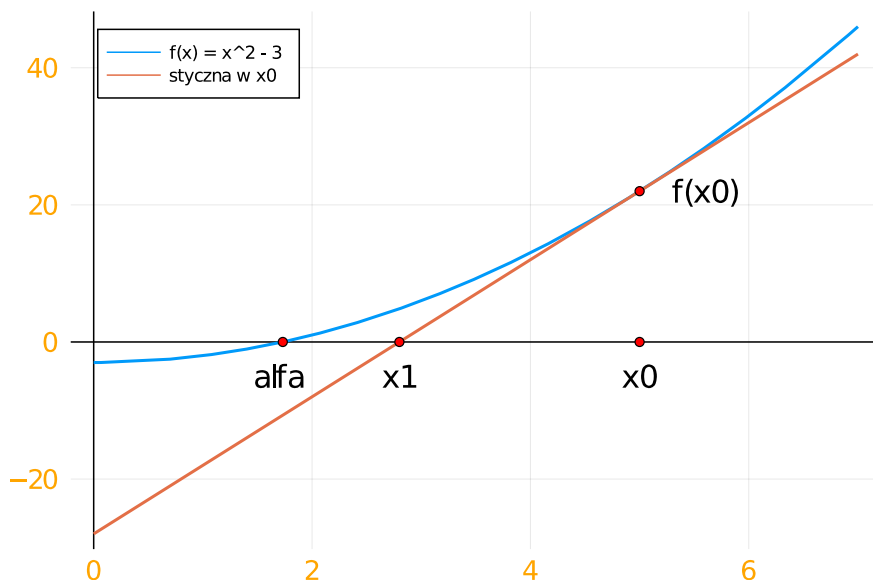


Figure 1: Interpretacja geometryczna metody Newtona

3 Metoda bisekcji

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a)f(b) < 0$, czyli funkcja zmienia znak na końcach przedziałów, to ta funkcja musi mieć zero w przedziale (a, b) i jest to oczywiście konsekwencja twierdzenia Darboux. Możemy więc zmniejszyć nasz przedział o połowę wybierając punkt c , taki że $f(c)f(a) < 0$ lub $f(c)f(b) < 0$. Uzyskaliśmy nowy przedział, w którym wiemy, że znajduje się nasze miejsce zerowe. Na tym rozumowaniu opiera się metoda bisekcji, którą wyrazić można następującym algorytmem:

Algorithm 1 Szukanie pierwiastka funkcji f

Require: ϵ a_0 b_0 M takie, że $f(a_0)f(b_0) < 0$

```

 $n \leftarrow 1$ 
 $left \leftarrow a_0$ 
 $right \leftarrow b_0$ 
while  $n < M$  do
   $c = \frac{left + right}{2}$ 
  if  $f(c) = 0 \vee |left - right| < \epsilon$  then
    pierwiastkiem jest  $c$ 
  else
     $n \leftarrow n + 1$ 
  end if
  if  $f(left)f(c) < 0$  then
     $left \leftarrow c$ 
  else
     $right \leftarrow c$ 
  end if
end while

```

Algorytm uwzględnia trzy kryteria zakończenia obliczeń, ponieważ inaczej istniałoby ryzyko zapętlenia. Pierwszym jest oczywiście znalezienie takiego punktu c , że $f(c) = 0$. Drugim z nich jest skończona liczba iteracji wyrażona zmienną M . Oprócz tego, obliczenia są przerywane, jeżeli błąd jest dostatecznie mały, tj. mniejszy od ϵ . Łatwo znaleźć przykłady funkcji w których brak któregoś z kryteriów mógłby prowadzić do bardzo błędnych wyników.

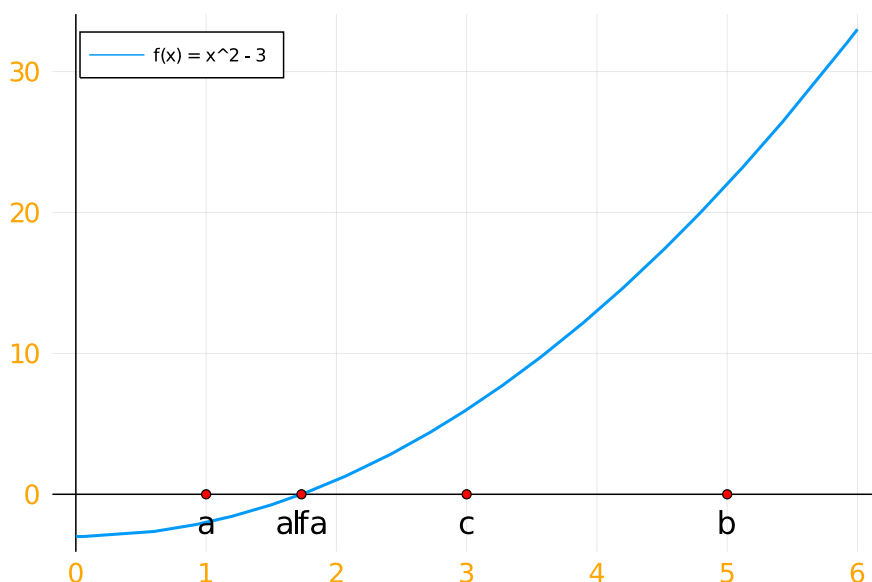


Figure 2: Interpretacja geometryczna metody bisekcji

4 Metoda Bairstowa

Wymienione metody do tej pory, oprócz oczywistych problemów z wybraniem początkowych wyrazów, czy niejedynolitą zbieżnością, mają jedną o wiele poważniejszą dla nas wadę. W ich aktualnej postaci, jeśli nasza funkcja f będzie miała pierwiastki zespolone, to ich nie wyznaczymy. Do tego potrzebujemy bardziej zaawansowanego i ogólnego algorytmu. Najpierw przedstawię kilka letmatów, które przydadzą się do wyprowadzenia metody Bairstowa.

Theorem 1. *Wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w przestrzeni zespolonej, gdy każdy z nich liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

Theorem 2. *Jeśli wielomian $w(x)$ stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma współczynniki $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, oraz $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest jego miejscem zerowym, to $\bar{\alpha}$ też jest jego miejscem zerowym, a iloczyn kwadratowy $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ dzieli bez reszty wielomian $w(x)$.*

Proof. Mamy wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$, oraz z założenia wiemy, że $w(\alpha) = 0$. Korzystając z dwóch własności sprzężenia $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ otrzymujemy wprost równość: $w(\bar{\alpha}) = 0$. Ponieważ α jest pierwiastkiem nierzeczywistym, to $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Z twierdzenia o reszcie, wynika, że iloczyn $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ dzieli nasz wielomian bez reszty. \square

Theorem 3. *Dzielenie wielomianu*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

Przez wielomian w postaci $(x^2 - ux - v)$ $u, v \in \mathbb{C}$ daje iloraz i resztę równe:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2 x^0 \\ r(x) &= b_1(x - u) + b_0 \end{aligned}$$

Których współczynniki dane są rekurencyjnym wzorem:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = 0, \quad b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2} \quad (n \leq k \leq 0). \quad (3)$$

Dowód jest dość prosty i polega na porównaniu współczynników po obu stronach równania:

$$w(x) = \phi(x)(x^2 - ux - v) + r(x)$$

Dla każdego wielomianu w stopnia $n \leq 2$ znajdziemy więc takie u i v , że nasz wielomian $(x^2 - ux - v)$ będzie dzielił w bez reszty. Na szukaniu tych rzeczywistych czynników opiera się metoda Bairstowa. W $r(x)$ nasze współczynniki b_0 i b_1 zależą od u i v , więc zapiszmy:

$$b_0(u, v) = 0 \quad b_1(u, v) = 0$$

Są to równania nieliniowe, dwuargumentowe. Szukamy więc takich poprawek oznaczonych δu i δv , które spełniałyby równanie:

$$b_0(u + \delta u, v + \delta v) = b_1(u + \delta u, v + \delta v) = 0$$

Z twierdzenia Taylora możemy zlinearyzować powyższe równości, co daje:

$$\begin{aligned} b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &= 0 \\ b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zdefiniujmy więc wyrazy pomocnicze, które oczywiście spełniają rekurencyjną zależność z (3):

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Podstawiając do równań z (4) i uzależniając równania od δv i δu otrzymujemy:

$$\delta u = (c_1 b_1 - c_2 b_0) \frac{1}{J}$$

$$\delta v = (c_1 b_0 - c_0 b_1) \frac{1}{J}$$

$$J = c_0 c_2 - c_1^2$$

Otrzymaliśmy więc wzór na lepsze przybliżenie naszej pary (u, v) .

5 Wzory Cardano

Do rozwiązywania takich problemów w przypadku wielomianów 3 stopnia posłużyć również mogą wzory dające nam wprost pierwiastki funkcji. Wzory Cardano są dość skomplikowane matematycznie, ale są proste do wyprowadzenia i udowodnienia, dlatego przedstawię krótki opis. Niech f będzie wielomianem 3 stopnia:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

wtedy możemy przekształcić naszą funkcję f do alternatywnej postaci

$$g(y) = y^3 + Qy - 2R$$

$$y = x + \frac{b}{3a}, \quad Q = \frac{3ac-b^2}{9a^2}, \quad R = \frac{9abc-27a^2d-2b^3}{54a^3}$$

Teraz, niech $y = (u + v)$, gdzie $uv = -Q$. Przekształcając otrzymujemy nową postać naszej funkcji.

$$g(u + v) = u^3 - 2Ru^3 - Q^3$$

Widzimy, że otrzymujemy funkcję kwadratową względem u^3 , więc dostajemy równości:

$$u^3 = \frac{2R \pm \sqrt{4Q^3 + 4R^2}}{2} = R \pm \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Niech $u^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$. Mamy wtedy:

$$v^3 = -\frac{Q^3}{u^3} = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Jeśli weźmiemy $u^3 = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$, to analogicznie otrzymamy $v^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że

$$S = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Wtedy istnieje oczywiście 9 kombinacji dla wartości v, u , ale tylko 3 z nich pasują do naszych warunków. Są to

$$u = S \wedge v = T$$

$$u = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \wedge v = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T$$

$$u = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \wedge v = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T$$

Nasze pierwiastki zespolone x_0, x_1, x_2 równe więc są:

$$x_0 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_1 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

Wzory te dają nam pierwiastki wielomianu najszybciej. Może okazać się jednak, że proste operacje arytmetyczne, które wykonywane są po drodze bardzo wpłyną na nasz wynik dając przekłamane zera. Głównie problemem okazać się może utrata cyfr znaczących przy odejmowaniu dwóch bliskich sobie liczb.

6 Testy numeryczne

Tę sekcję poświęcę na porównanie opisanych przeze mnie metod poprzez zestawienie ze sobą wyników zbieżnością do pierwiastków wybranych przeze mnie wielomianów 3-go stopnia. Metodę bisekcji potraktuję raczej jako ciekawostkę i umieszczę ją tylko w pierwszych testach, ponieważ sam problem doboru przedziału dyskwalifikuje ją jako efektywną metodę. Dodatkowo, po zakończeniu algorytmów metod bisekcji i Newtona z uzyskanego pierwiastka obliczam dwa pozostałe dzieląc mój początkowy wielomian przez otrzymane przybliżenie.

Najpierw przedstawię wyniki wszystkich stworzonych przeze mnie różnorodnych testów, które dają dość obiektywny pogląd na efektywność algorytmów. W testach znajdować się będą tabelki dla każdej metody, w których umieszczę przybliżenie mojego głównego pierwiastka i wartość funkcji w tym punkcie. Dodatkowo dla interesujących iteracji dodam ilość cyfr znaczących każdego przybliżenia.

Następnie wszystko podsumuję w sekcji umieszczonej po testach, w której wyciągnę wnioski z uzyskanych wyników. Tam również znajdzie się odpowiedź do naszego zadania, oraz jej uzasadnienie.

Wszystkie obliczenia oraz dodatkowe wykresy umieściłem w jupyterze, w którym zaimplementowana jest całość kodu wraz z opisami. Do obliczeń używam 128-bitowej precyzji oraz wyłącznie poprawnie numerycznych algorytmów.

Przez C z. oznaczam liczbę cyfr znaczących, a $e(x)$ oznacza błąd bezwzględny przybliżenia pierwiastka.

6.1 Dobór przybliżenia pierwszego pierwiastka

Dla metody Newtona będę stosował algorytm do wybierania pierwszego przybliżenia pierwiastka. Polega on na rozpoznaniu, czy pierwiastek rzeczywisty funkcji leży między zerami jej pochodnej, czy poza nimi. Niech f będzie wielomianem 3-go stopnia i niech f' będzie jego pochodną. Jeśli f' ma pierwiastki rzeczywiste, to niech będą to $x_1 \leq x_2$. Sprawdźmy więc, czy funkcja zmienia znak poza zerami pochodnej. Jeżeli

$$\operatorname{sgn}(x_1 - \frac{1}{2}) = \operatorname{sgn}(a)$$

to nasze pierwsze przybliżenie będzie równe $x_1 - \frac{1}{2}$. Jeśli ten warunek nie zachodzi, to sprawdzamy analogicznie dla punktu $x_2 + \frac{1}{2}$. Jeśli funkcja nie zmienia znaku poza tymi punktami, to wybieramy dowolnie punkt między zerami pochodnej. Jeśli nasza pochodna nie ma pierwiastków rzeczywistych, to pozostaje nam dobrać punkt startowy arbitralnie.

6.2 Test 1

Prosta funkcja przykładowa, aby zaprezentować sposób prezentacji danych oraz kryteria porównawcze.

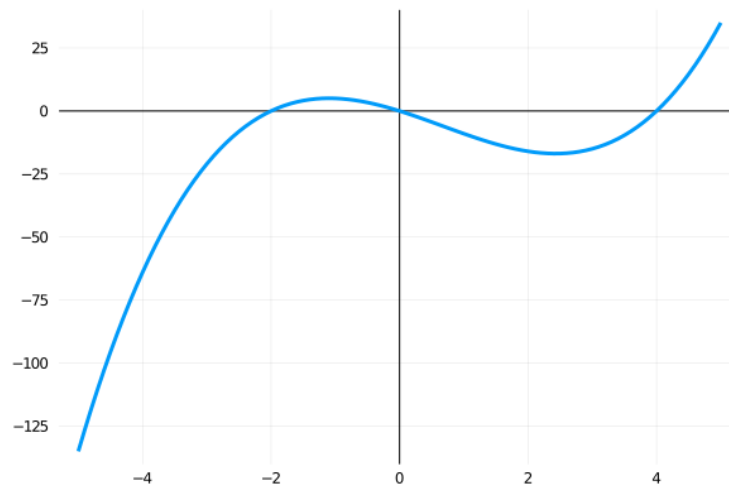


Figure 3: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	87.40256216597504	683055.1593426905	0	0	0
5	4	0	inf+	inf+	inf+
10	4	0	inf+	inf+	inf+

Metoda Bisekcji

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	2.500000	-8.125000	0	0	0
5	4.531250	15.722198	1	0	0
10	4.018555	0.448762	2	2	2
15	3.999481	-0.012448	3	3	3
20	3.999982	-0.000435	5	5	5

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	-3.14625657737552	-25.77238332178403	0	0	0
5	-1.5183794715 - 2.1659587805i	34.78812403 - 0.6466883761i	0	2	0
10	-2.0	0.0	inf+	inf+	inf+
15	-2.0	0.0	inf+	inf+	inf+

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 0 \quad e(x_1) = 0 \quad e(x_2) = 0$$

6.3 Test 2

Funkcja, która ma miejsca zerowe odległe od 0, oraz podwójny pierwiastek rzeczywisty.

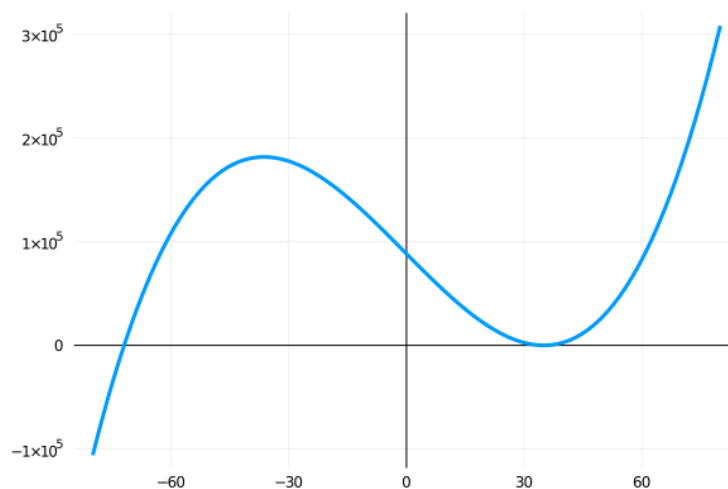


Figure 4: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3815x - 88200$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	23.11296895543223	13439.605853832152	0	0	0
5	34.33910684864469	46.44676930300225	1	0	0
10	34.97947097899548	0.04508550349326828	2	0	0
25	34.999999399616065	3.9879819941898415e-11	8	inf+	8
40	34.9999999967189	-1.9895119090292067e-12	9	inf+	9

Metoda Bisekcji

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	-100	-510300	0	0	0
5	-75	-36300	0	0	0
15	-72.003173828125	-36.339313896678505	2	1	1
25	-72.00000286102295	-0.032755853497292285	6	2	2

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	75.91167528178869	247569.41096827542	0	0	0
5	-71.99999999198174	9.18010833055059e-5	7	2	2
10	-71.9999999999976	2.7679476488628924e-9	13	3	3
20	-72.0	0.0	inf+	6	6

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 0 \quad e(x_1) = 0 \quad e(x_2) = 0$$

6.4 Test 3

Funkcja mająca 2 pierwiastki zespolone i jeden rzeczywisty znacznie oddalony od 0.

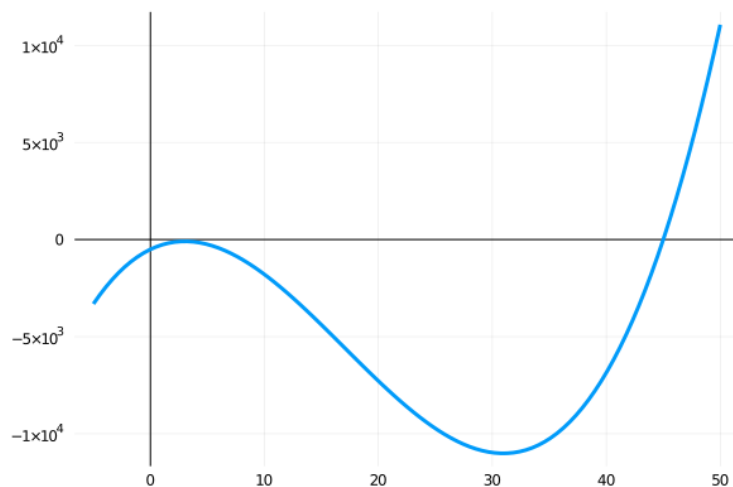


Figure 5: $f(x) = x^3 - 51x^2 + 281.25x - 506.25$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	289.1961123377604	2.0002217043731242e7	0	0	0
5	73.9670126666814	145952.2308328106	0	0	0
10	45.00001645738978	0.029067887456002296	6	0	0
15	45.0	0	inf+	inf+	inf+

Metoda Bisekcji

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	25.0	-9725.0	0	0	0
5	43.75	-2078.515625	0	0	0
15	44.921875	-137.4760627746582	1	0	0
20	44.99998092651367	-0.03368851466803574	5	4	4

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	75.91167528178869	247569.41096827542	0	0	0
5	-71.99999999198174	9.18010833055059e-5	7	2	2
10	-71.99999999999976	2.7679476488628924e-9	13	3	3
20	-72.0	0.0	inf+	inf+	inf+

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 0 \quad e(x_1) = 8.881784197001252e - 16 \quad e(x_2) = 8.881784197001252e - 16$$

6.5 Test 4

Funkcja, która ma pierwiastki rzeczywiste bardzo blisko siebie

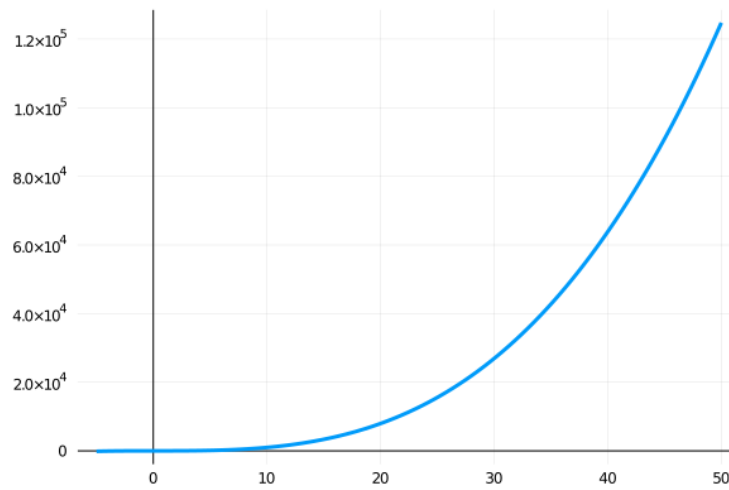


Figure 6: $f(x) = x^3 + 2.36995x^2 - 38.976263499999995x + 68.71088465$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	2.0113803008969344	7.732777080647594	0	0	0
5	0.4263474940328461	0.05932089727765367	1	1	1
10	0.10692149626617695	7.912797366119274e-5	1	2	2
15	0	0	inf+	inf+	inf+

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	0.84033613 + 1.21947221im	-3.07751250 + 0.56499945im	0	inf+	0
5	0.37452953 + 0.39006335im	9.18010833055059e-5	1	inf+	1
15	0.10000018685790094	1.8685859924824825e-9	7	inf+	3
25	0.10000000000000013	1.2490009027033043e-18	15	inf+	6
40	0.1	0	+inf	inf+	11

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 0 \quad e(x_1) = 2.3629366184170625e - 10 \quad e(x_2) = 2.3629364796391844e - 10$$

6.6 Test 5

Funkcja, o wybranych współczynnikach tak, aby obliczenia były 'niebezpieczne' numerycznie.

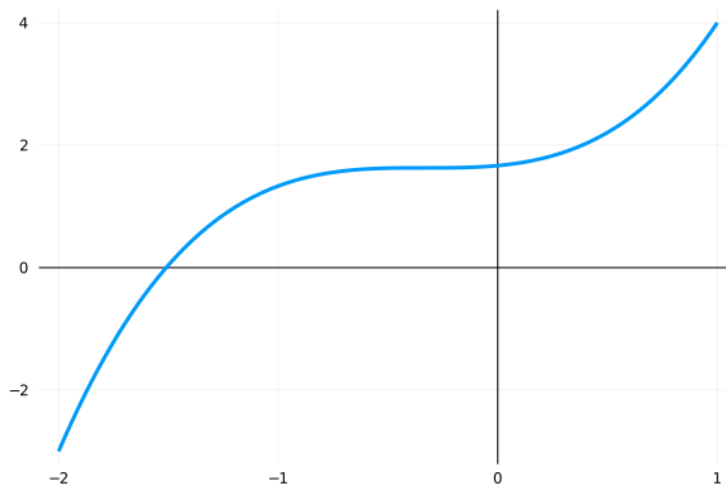


Figure 7: $f(x) = x^3 + 1.0000001038583122x^2 + 0.33333364701740337x + 1.6666667812898837$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	-1955.1001700352447	-7.4693857239496355e9	0	0	0
10	-51.181437422003114	-131467.652885827	0	0	0
20	-1.5770066485475038	-0.29398900499360264	2	0	0
25	-1.510116082353336	-2.97379159244366e-16	20	16	16

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	-2.1962930904616655	-4.835994078624513	0	0	0
10	-1.486247437 - 1.562610208im	8.54254956 - 2.415611203im	0	0	0
20	0.5921042807 + 1.019336546im	-0.4625127 + 1.559847674im	0	1	0
25	0.2550579892 + 1.019123845im	0	inf+	inf+	inf+

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 1.731027414741959e - 7 \quad e(x_1) = 6.924109678897218e - 8 \quad e(x_2) = 6.924109678897218e - 8$$

6.7 Test 6

Funkcja, dla której ciężko wybrać właściwe początkowe przybliżenie pierwiastka.

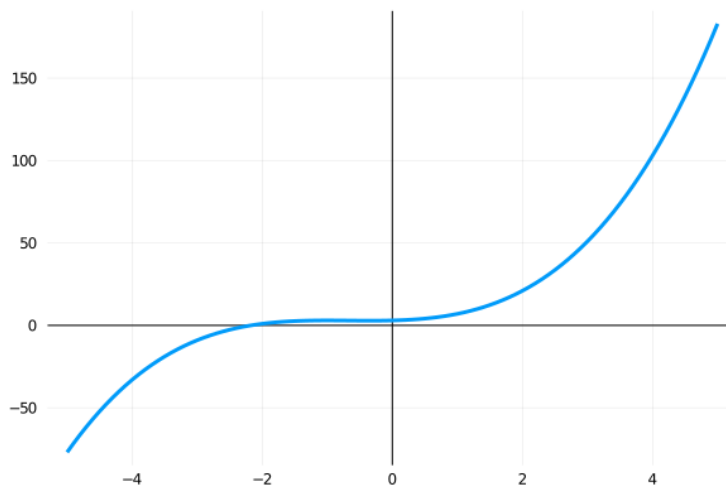


Figure 8: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1x + 3$

Metoda Newtona

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	87.40256216597504	683055.1593426905	0	0	0
5	16.732615031525334	-131467.652885827	0	0	0
10	1.5437877415713737	12.98962828477444	0	0	0
20	4.263718879956009	121.1337352919147	0	0	0
21	2.5950439877792135	36.53923411927553	0	0	0
22	1.4381143629749316	11.548729387762949	0	0	0
23	0.5468007419391421	4.308271373440125	0	0	0
24	-0.5080684029847669	2.8770491250635657	0	0	0
25	10.648772161362636	1447.973348832624	0	0	0
40	8.55818117413703	784.8653963832828	0	0	0
48	-2.182745085909218	-0.05341140744611266	2	0	0
49	-2.1746057681803856	-0.00030077451451259693	5	0	0
50	-2.174559411791341	-9.721197942146932e-9	10	7	7

Metoda Bairstowa

Iteracja	x_0	$f(x_0)$	C.z. x_0	C.z. x_1	C.z. x_2
1	0.121495327 + 1.228746647im	-0.417133300 + 0.02512335599im	0	0	0
2	0.088623332 + 1.172063711im	-0.007673587 + 0.005065978im	2	2	2
3	0.087280433 + 1.171310438im	-0.4625127 + 1.559847674im	5	4	5
4	0.087279705 + 1.171312110im	1.62191396e-11 + 2.4867478e-12im	6	6	6
5	0.087279705 + 1.171312111im	1.36092529e-15 + 3.8459193e-16im	15	13	13
15	0.087279705 + 1.17131211im	1.36092529e-15 + 3.8459193e-16im	15	13	13

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 1.3766765505351941e - 14 \quad e(x_1) = 9.90189642062563e - 15 \quad e(x_2) = 9.90189642062563e - 15$$

7 Wnioski i podsumowanie

7.1 Metoda bisekcji

Metoda ta w żadnym teście nie uzyskała nawet 8 cyfr znaczących dla każdego pierwiastka, nawet pomimo tego, że ręcznie podałem jej dość mały początkowy przedział. Miało to zobrazować, dlaczego metoda ta nie jest zbyt użytecznym sposobem na wyliczanie pierwiastków wielomianu 3-go stopnia. Dodatkowo zera funkcji wolno zbiegają i średnio potrzebowały co najmniej 15 iteracji, aby uzyskać nawet słabe przybliżenia zer funkcji. Mimo to jest prosta w aplikacji i zrozumienia, więc może stanowić dobre tło dla innych metod.

7.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona dużo lepiej radziła sobie ze znajdowaniem zer naszych funkcji w większości przypadków. W każdym teście metoda w najwyżej 20 iteracjach znajdowała bardzo dobre przybliżenia zer. Wyjątkiem był Test 6, w którym wyznaczone początkowe x_0 było bardzo nietrafione, co spowodowało, że metoda przez ponad 40 iteracji nawet nie zbliżała się do szukanej wartości. Jest to wynik bardzo niezadowolający nawet pomimo tego, że finalnie udało jej się to zero znaleźć. Musimy pamiętać jednak, że istnieją funkcje, dla których ta metoda nigdy nie będzie zbiegać do miejsc zerowych funkcji, co oczywiście może mieć przykre konsekwencje przy rozwiązywaniu różnych problemów.

Metoda ta więc może być przydatna tylko, jeśli znamy jakieś własności funkcji pozwalające określić punkt startowy, lub jeśli znamy same przybliżenia. W takim wypadku metoda jest jak najbardziej prawidłowa. Dla naszego problemu jednak, ten algorytm nie może być uznany jako numerycznie efektywny.

7.3 Wzory Cardano

Korzystanie ze wzorów Cardano jest oczywiście najszybszym sposobem na uzyskanie pierwiastków wielomianu, ponieważ polega na przeprowadzeniu konkretnej ilości, chociaż dość sporej, operacji arytmetycznych. Uzyskane wyniki są wyjątkowo dobrymi przybliżeniami naszych pierwiastków niemal w każdym przypadku i najczęściej błąd bezwzględny tych wartości jest zaniedbywalny. Istnieją jednak funkcje, których współczynniki mogą niestety dać przekłamanie (choć nieznaczące) zera. Wtedy nasz błąd zwiększa się do rzędu $e - 5$, a być może nawet więcej. Uważać więc trzeba, aby nasze wykonywane operacje nie obejmowały odejmowania dwóch bardzo bliskich liczb, gdyż może to prowadzić (zwłaszcza gdy używamy mniejszej precyzji bitowej) do błędnych wyników. Mimo tego, wzory Cardano są efektywnym sposobem na wyznaczanie pierwiastków wielomianów 3-go stopnia.

7.4 Metoda Bairstowa

Metoda Bairstowa była zdecydowanie najlepszą metodą do wyznaczania pierwiastków wielomianów 3-go stopnia. Jest ona zbieżna w każdym przypadku i nierzadko potrzeba niewielkiej ilości iteracji, aby uzyskać bardzo satysfakcjonujące wyniki. Możemy oczywiście przeprowadzać dalsze iteracje, aby zwiększyć dokładność naszych zer, oczywiście z pewnym, ale sporym górnym ograniczeniem. Dodatkowo wybór dwóch startowych wartości, mimo że zmienia prędkość zbieżności, a czasem i błąd bezwzględny przybliżeń, nie jest problemem, gdyż bardzo łatwo je określić i dopasować do potrzeb zadania.

7.5 Podsumowanie

Z wybranych przeze mnie metod wyznaczania zer wielomianu 3-go stopnia najlepsza jest metoda Bairstowa, która ma wysoką zbieżność oraz wysoki poziom bezpieczeństwa przy uzyskiwaniu przybliżeń zer funkcji. Być może udałoby się skonstruować bardziej konkretny sposób dla konkretnych zer funkcji, lecz byłoby to problematyczne w identyfikacji i implementacji. Dlatego to właśnie metodę Bairstowa zaproponowałbym jako sposób na efektywne wyznaczanie zer funkcji takich wielomianów.

References

- [1] David Kincaid, Ward Cheney. Analiza numeryczna, Warszawa, 2006..
- [2] Wikipedia: <https://pl.wikipedia.org/>