

Pracownia z Analizy Numerycznej

Sprawozdanie do zadania P1.7

Mateusz Leonowicz

October 30, 2020

1 Wstęp

Wiele problemów w matematyce, fizyce czy informatyce sprowadzić można do wyznaczenia miejsc zerowych danego równania algebraicznego. Często nie wystarczy nam prosta analiza funkcji, a jedyne co możemy zrobić, to obliczenie jej wartości w danej, skończonej liczbie punktów jej dziedziny. Dlatego temat ten stał się jednym z fundamentalnych zagadnień analizy numerycznej, dzięki czemu powstało wiele metod iteracyjnych, które oczywiście mają swoje zalety i wady.

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie metod obliczania pierwiastków wielomianów w postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

które pozwalają komputerom na uzyskanie wyników z kontrolowanym błędem. Przedstawię trzy metody numeryczne oraz rozwiązania z użyciem wzorów Cardano. Opiszę ich działanie i charakterystykę, a następnie umieszczę ich porównanie razem z podsumowaniem.

Wszystkie testy przeprowadzane będą z użyciem języka do analizy numerycznej Julia.

Contents

1	Wstęp	1
2	Metoda Newtona	2

2 Metoda Newtona

Niech $f(x)$ będzie funkcją, której miejsce zerowe chcemy wyznaczyć. Niech α będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Z twierdzenia Taylora, wiemy, że przybliżenie funkcji f , możemy zapisać w postaci:

$$0 = f(\alpha) = f(x + e) = f(x) + ef'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!}e^2 \quad \xi \in \text{interv}(x, \alpha) \quad (1)$$

Jeśli nasz wyraz $\frac{f''(\xi)}{2!}e^2$ będzie dostatecznie mały, to możemy go pominąć i rozwiązać równanie względem e , co daje nam:

$$e = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Jeśli x jest dostatecznie dobrym przybliżeniem α , to $x - e$ będzie jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka. Na tej różnicy opiera się metoda Newtona, która po wybraniu startowego przybliżenia x_0 zera α polega na stosowaniu rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Dobranie startowego punktu x_0 w tej metodzie jest bardzo istotne, gdyż metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna. Jeśli dobierzemy odpowiednio punkt początkowy, to będziemy mieli zbieżność kwadratową (z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją wielokrotne zera funkcji. Wtedy otrzymamy zbieżność liniową). Metoda Newtona.