

# Pracownia z Analizy Numerycznej

## Sprawozdanie do zadania P1.7

Mateusz Leonowicz

October 31, 2020

### 1 Wstęp

Wiele problemów w matematyce, fizyce czy informatyce sprowadzić można do wyznaczenia miejsc zerowych danego równania algebraicznego. Często nie wystarczy nam prosta analiza funkcji, a jedyne co możemy zrobić, to obliczenie jej wartości w danej, skończonej liczbie punktów jej dziedziny. Dlatego temat ten stał się jednym z fundamentalnych zagadnień analizy numerycznej, dzięki czemu powstało wiele metod iteracyjnych, które oczywiście mają swoje zalety i wady.

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie metod obliczania pierwiastków wielomianów w postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

które pozwalają komputerom na uzyskanie wyników z kontrolowanym błędem. Przedstawię trzy metody numeryczne oraz rozwiązania z użyciem wzorów Cardano. Opiszę ich działanie i charakterystykę, a następnie umieszczę ich porównanie razem z podsumowaniem.

Wszystkie testy przeprowadzane będą z użyciem języka do analizy numerycznej Julia.

### Contents

|          |                         |          |
|----------|-------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Wstęp</b>            | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Metoda Newtona</b>   | <b>2</b> |
| <b>3</b> | <b>Metoda bisekcji</b>  | <b>3</b> |
| <b>4</b> | <b>Metoda Bairstowa</b> | <b>4</b> |

## 2 Metoda Newtona

Niech  $f(x)$  będzie funkcją, której miejsce zerowe chcemy wyznaczyć. Niech  $\alpha$  będzie takim zerem, a  $x$  jego przybliżeniem. Z twierdzenia Taylora, wiemy, że przybliżenie funkcji  $f$ , możemy zapisać w postaci:

$$0 = f(\alpha) = f(x + e) = f(x) + e f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!} e^2 \quad \xi \in \text{interv}(x, \alpha) \quad (1)$$

Jeśli nasz wyraz  $\frac{f''(\xi)}{2!} e^2$  będzie dostatecznie mały, to możemy go pominąć i rozwiązać równanie względem  $e$ , co daje nam:

$$e = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Jeśli  $x$  jest dostatecznie dobrym przybliżeniem  $\alpha$ , to  $x - e$  będzie jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka. Na tej różnicy opiera się metoda Newtona, która po wybraniu startowego przybliżenia  $x_0$  zera  $\alpha$  polega na stosowaniu rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Dobranie startowego punktu  $x_0$  w tej metodzie jest bardzo istotne, gdyż metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna. Jeśli dobierzemy odpowiednio punkt początkowy będziemy mieli zbieżność kwadratową, z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją wielokrotne zera funkcji. Wtedy otrzymamy zbieżność liniową.

Metoda Newtona opiera się na linearyzacji funkcji  $f$ , co pozwala nam na dobre przybliżanie wartości funkcji w małym otoczeniu punktu  $x$ . Możemy więc rozumieć tę metodę, jako przybliżanie miejsc zerowych funkcji za pomocą jej stycznych, co oczywiście niesie za sobą groźbę rozbieżności.

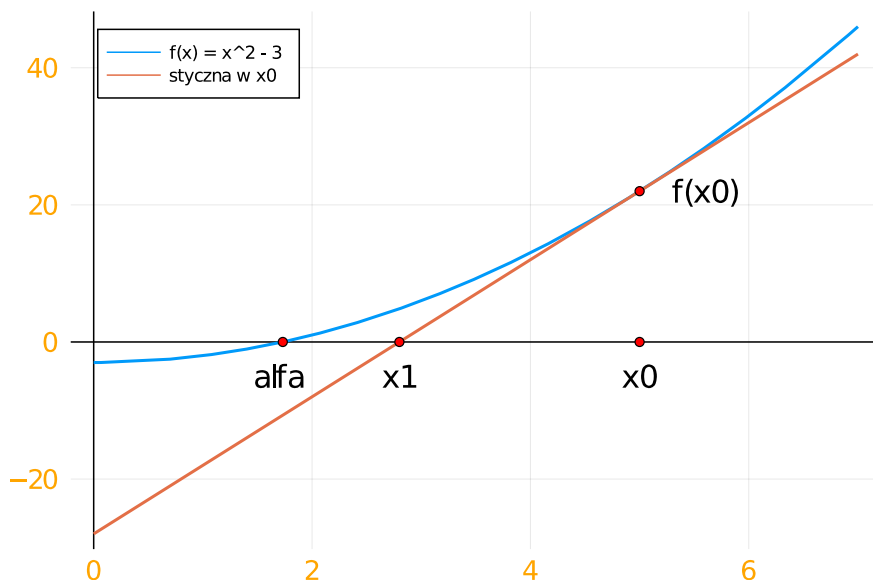


Figure 1: Interpretacja geometryczna metody Newtona

### 3 Metoda bisekcji

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i jeśli  $f(a)f(b) < 0$ , czyli funkcja zmienia znak na końcach przedziałów, to ta funkcja musi mieć zero w przedziale  $(a, b)$  i jest to oczywiście konsekwencja twierdzenia Darboux. Możemy więc zmniejszyć nasz przedział o połowę wybierając punkt  $c$ , taki że  $f(c)f(a) < 0$  lub  $f(c)f(b) < 0$ . Uzyskaliśmy nowy przedział, w którym wiemy, że znajduje się nasze miejsce zerowe. Na tym rozumowaniu opiera się metoda bisekcji, którą wyrazić można następującym algorytmem:

---

**Algorithm 1** Szukanie pierwiastka funkcji  $f$

---

**Require:**  $\epsilon$   $a_0$   $b_0$   $M$  takie, że  $f(a_0)f(b_0) < 0$

```
 $n \leftarrow 1$   
 $left \leftarrow a_0$   
 $right \leftarrow b_0$   
while  $n < M$  do  
   $c = \frac{left + right}{2}$   
  if  $f(c) = 0 \vee |left - right| < \epsilon$  then  
    pierwiastkiem jest  $c$   
  else  
     $n \leftarrow n + 1$   
  end if  
  if  $f(left)f(c) < 0$  then  
     $left \leftarrow c$   
  else  
     $right \leftarrow c$   
  end if  
end while
```

---

Algorytm uwzględnia trzy kryteria zakończenia obliczeń, ponieważ inaczej istniałoby ryzyko zapętlenia. Pierwszym jest oczywiście znalezienie takiego punktu  $c$ , że  $f(c) = 0$ . Drugim z nich jest skończona liczba iteracji wyrażona zmienną  $M$ . Oprócz tego, obliczenia są przerywane, jeżeli błąd jest dostatecznie mały, tj. mniejszy od  $\epsilon$ . Łatwo znaleźć przykłady funkcji w których brak któregoś z kryteriów mógłby prowadzić do bardzo błędnych wyników.

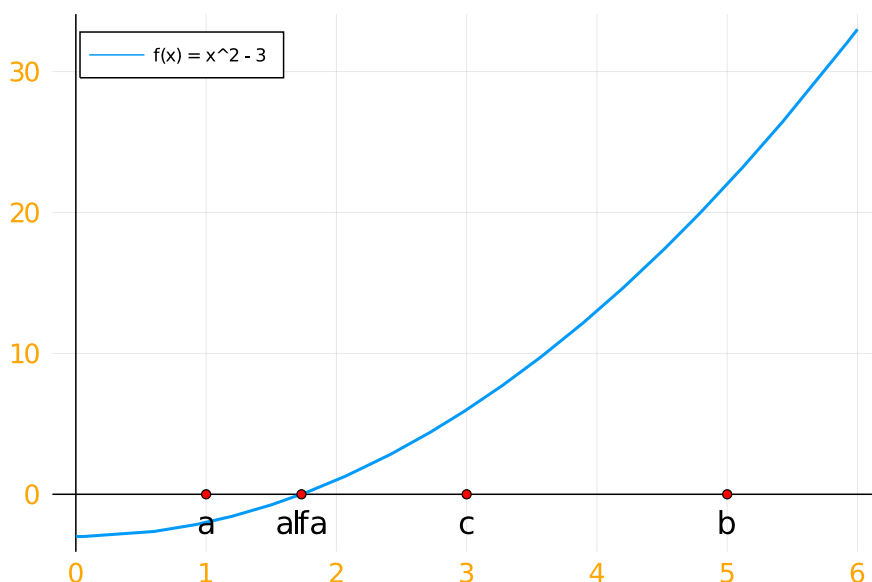


Figure 2: Interpretacja geometryczna metody bisekcji

## 4 Metoda Bairstowa

Wymienione metody do tej pory, oprócz oczywistych problemów z wybraniem początkowych wyrazów, czy niejedynolitą zbieżnością, mają jedną o wiele poważniejszą dla nas wadę. W ich aktualnej postaci, jeśli nasza funkcja  $f$  będzie miała pierwiastki zespolone, to ich nie wyznaczymy. Do tego potrzebujemy bardziej zaawansowanego i ogólnego algorytmu. Najpierw przedstawię kilka letmatów, które przydadzą się do wyprowadzenia metody Bairstowa.

**Theorem 1.** *Wielomian stopnia  $n$  ma dokładnie  $n$  pierwiastków w przestrzeni zespolonej, gdy każdy z nich liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

**Theorem 2.** *Jeśli wielomian  $w(x)$  stopnia  $n \in \mathbb{N}$  ma współczynniki  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , oraz  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  jest jego miejscem zerowym, to  $\bar{\alpha}$  też jest jego miejscem zerowym, a iloczyn kwadratowy  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  dzieli bez reszty wielomian  $w(x)$ .*

*Proof.* Mamy wielomian  $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$ , oraz z założenia wiemy, że  $w(\alpha) = 0$ . Korzystając z dwóch własności sprzężenia  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ ,  $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$  otrzymujemy wprost równość:  $w(\bar{\alpha}) = 0$ . Ponieważ  $\alpha$  jest pierwiastkiem nierzeczywistym, to  $\alpha \neq \bar{\alpha}$ . Z twierdzenia o reszcie, wynika, że iloczyn  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  dzieli nasz wielomian bez reszty.  $\square$

**Theorem 3.** *Dzielenie wielomianu*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

Przez wielomian  $w$  postaci  $(x^2 - ux - v)$   $u, v \in \mathbb{C}$  daje iloraz i resztę równe:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2 x^0 \\ r(x) &= b_1(x - u) + b_0 \end{aligned}$$

Których współczynniki dane są rekurencyjnym wzorem:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = 0, \quad b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2} \quad (n \leq k \leq 0). \quad (3)$$

Dowód jest dość prosty i polega na porównaniu współczynników po obu stronach równania:

$$w(x) = \phi(x)(x^2 - ux - v) + r(x)$$

Dla każdego wielomianu  $w$  stopnia  $n \leq 2$  znajdziemy więc takie  $u$  i  $v$ , że nasz wielomian  $(x^2 - ux - v)$  będzie dzielił  $w$  bez reszty. Na szukaniu tych rzeczywistych czynników opiera się metoda Bairstowa. W  $r(x)$  nasze współczynniki  $b_0$  i  $b_1$  zależą od  $u$  i  $v$ , więc zapiszmy:

$$b_0(u, v) = 0 \quad b_1(u, v) = 0$$

Są to równania nieliniowe, dwuargumentowe. Szukamy więc takich poprawek oznaczonych  $\delta u$  i  $\delta v$ , które spełniałyby równanie:

$$b_0(u + \delta u, v + \delta v) = b_1(u + \delta u, v + \delta v) = 0$$

Z twierdzenia Taylora możemy zlinearyzować jedną z powyższych równości, co daje:

$$\begin{aligned} b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &= 0 \\ b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zdefiniujmy więc wyrazy pomocnicze, które oczywiście spełniają rekurencyjną zależność z (3):

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} \quad d_k = \frac{\partial b_{k-1}}{\partial v} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Podstawiając do równań z (4) i uzależniając równania od  $\delta v$  i  $\delta u$  otrzymujemy:

$$\delta u = (c_1 b_1 - c_2 b_0) \frac{1}{J}$$

$$\delta v = (c_1 b_0 - c_0 b_1) \frac{1}{J}$$

$$J = c_0 c_2 - c_1^2$$

Otrzymaliśmy więc wzór na lepsze przybliżenie naszej pary  $(u, v)$ .