

# Pracownia z Analizy Numerycznej

## Sprawozdanie do zadania P1.7

Mateusz Leonowicz

November 7, 2020

### 1 Wstęp

Wiele problemów w matematyce, fizyce czy informatyce sprowadzić można do wyznaczenia miejsc zerowych danego równania algebraicznego. Często nie wystarczy nam prosta analiza funkcji, a jedyne co możemy zrobić, to obliczenie jej wartości w danej, skończonej liczbie punktów jej dziedziny. Dlatego temat ten stał się jednym z fundamentalnych zagadnień analizy numerycznej, dzięki czemu powstało wiele metod iteracyjnych, które oczywiście mają swoje zalety i wady.

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie metod obliczania pierwiastków wielomianów w postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

które pozwalają komputerom na uzyskanie wyników z kontrolowanym błędem. Przedstawię trzy metody numeryczne oraz rozwiązania z użyciem wzorów Cardano. Opiszę ich działadnie i charakterystykę, a następnie umieszczę ich porównanie razem z podsumowaniem.

Wszystkie testy przeprowadzane będą z użyciem języka do analizy numerycznej Julia.

### Contents

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metoda Newtona</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Metoda bisekcji</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Metoda Bairstowa</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Wzory Cardano</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Testy numeryczne</b>	<b>6</b>
6.1	Dobór przybliżenia pierwiastka . . . . .	6
6.2	Test 1 . . . . .	7

## 2 Metoda Newtona

Niech  $f(x)$  będzie funkcją, której miejsce zerowe chcemy wyznaczyć. Niech  $\alpha$  będzie takim zerem, a  $x$  jego przybliżeniem. Z twierdzenia Taylora, wiemy, że przybliżenie funkcji  $f$ , możemy zapisać w postaci:

$$0 = f(\alpha) = f(x + e) = f(x) + e f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!} e^2 \quad \xi \in \text{interv}(x, \alpha) \quad (1)$$

Jeśli nasz wyraz  $\frac{f''(\xi)}{2!} e^2$  będzie dostatecznie mały, to możemy go pominąć i rozwiązać równanie względem  $e$ , co daje nam:

$$e = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Jeśli  $x$  jest dostatecznie dobrym przybliżeniem  $\alpha$ , to  $x - e$  będzie jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka. Na tej różnicy opiera się metoda Newtona, która po wybraniu startowego przybliżenia  $x_0$  zera  $\alpha$  polega na stosowaniu rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Dobranie startowego punktu  $x_0$  w tej metodzie jest bardzo istotne, gdyż metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna. Jeśli dobierzemy odpowiednio punkt początkowy będziemy mieli zbieżność kwadratową, z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją wielokrotne zera funkcji. Wtedy otrzymamy zbieżność liniową.

Metoda Newtona opiera się na linearyzacji funkcji  $f$ , co pozwala nam na dobre przybliżanie wartości funkcji w małym otoczeniu punktu  $x$ . Możemy więc rozumieć tę metodę, jako przybliżanie miejsc zerowych funkcji za pomocą jej stycznych, co oczywiście niesie za sobą groźbę rozbieżności.

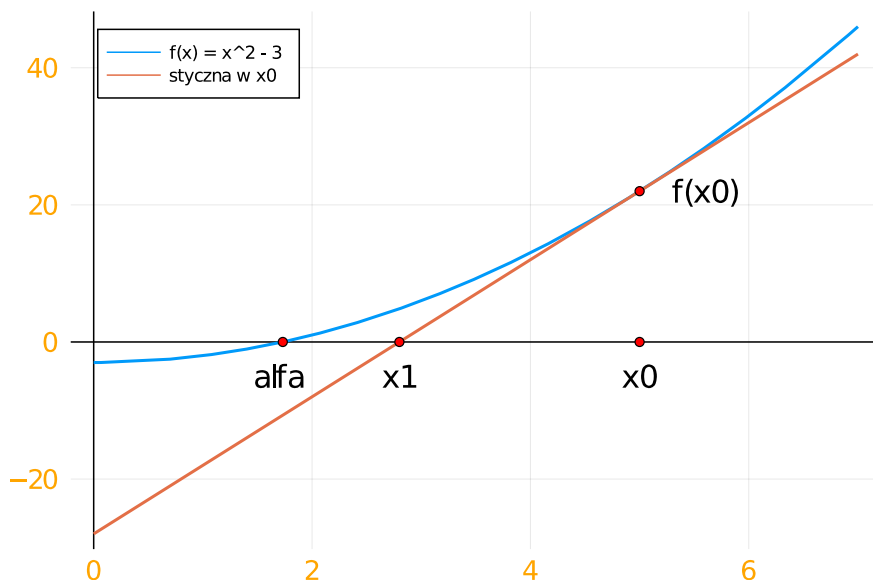


Figure 1: Interpretacja geometryczna metody Newtona

### 3 Metoda bisekcji

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i jeśli  $f(a)f(b) < 0$ , czyli funkcja zmienia znak na końcach przedziałów, to ta funkcja musi mieć zero w przedziale  $(a, b)$  i jest to oczywiście konsekwencja twierdzenia Darboux. Możemy więc zmniejszyć nasz przedział o połowę wybierając punkt  $c$ , taki że  $f(c)f(a) < 0$  lub  $f(c)f(b) < 0$ . Uzyskaliśmy nowy przedział, w którym wiemy, że znajduje się nasze miejsce zerowe. Na tym rozumowaniu opiera się metoda bisekcji, którą wyrazić można następującym algorytmem:

---

**Algorithm 1** Szukanie pierwiastka funkcji  $f$

---

**Require:**  $\epsilon, a_0, b_0, M$  takie, że  $f(a_0)f(b_0) < 0$

```

 $n \leftarrow 1$ 
 $left \leftarrow a_0$ 
 $right \leftarrow b_0$ 
while  $n < M$  do
   $c = \frac{left + right}{2}$ 
  if  $f(c) = 0 \vee |left - right| < \epsilon$  then
    pierwiastkiem jest  $c$ 
  else
     $n \leftarrow n + 1$ 
  end if
  if  $f(left)f(c) < 0$  then
     $left \leftarrow c$ 
  else
     $right \leftarrow c$ 
  end if
end while

```

---

Algorytm uwzględnia trzy kryteria zakończenia obliczeń, ponieważ inaczej istniałoby ryzyko zapętlenia. Pierwszym jest oczywiście znalezienie takiego punktu  $c$ , że  $f(c) = 0$ . Drugim z nich jest skończona liczba iteracji wyrażona zmienną  $M$ . Oprócz tego, obliczenia są przerywane, jeżeli błąd jest dostatecznie mały, tj. mniejszy od  $\epsilon$ . Łatwo znaleźć przykłady funkcji w których brak któregoś z kryteriów mógłby prowadzić do bardzo błędnych wyników.

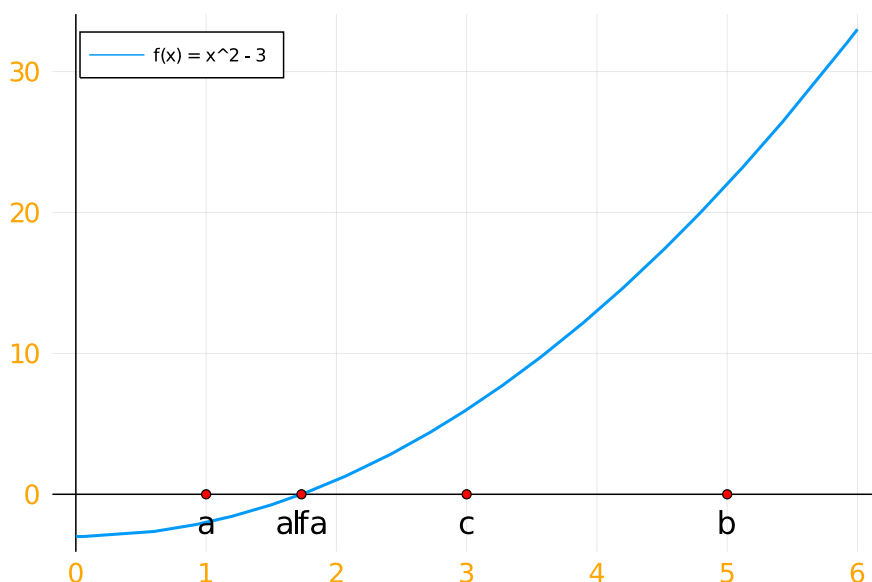


Figure 2: Interpretacja geometryczna metody bisekcji

## 4 Metoda Bairstowa

Wymienione metody do tej pory, oprócz oczywistych problemów z wybraniem początkowych wyrazów, czy niejednorodną zbieżnością, mają jedną o wiele poważniejszą dla nas wadę. W ich aktualnej postaci, jeśli nasza funkcja  $f$  będzie miała pierwiastki zespolone, to ich nie wyznaczymy. Do tego potrzebujemy bardziej zaawansowanego i ogólnego algorytmu. Najpierw przedstawię kilka letmatów, które przydadzą się do wyprowadzenia metody Bairstowa.

**Theorem 1.** *Wielomian stopnia  $n$  ma dokładnie  $n$  pierwiastków w przestrzeni zespolonej, gdy każdy z nich liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

**Theorem 2.** *Jeśli wielomian  $w(x)$  stopnia  $n \in \mathbb{N}$  ma współczynniki  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , oraz  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  jest jego miejscem zerowym, to  $\bar{\alpha}$  też jest jego miejscem zerowym, a iloczyn kwadratowy  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  dzieli bez reszty wielomian  $w(x)$ .*

*Proof.* Mamy wielomian  $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$ , oraz z założenia wiemy, że  $w(\alpha) = 0$ . Korzystając z dwóch własności sprzężenia  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ ,  $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$  otrzymujemy wprost równość:  $w(\bar{\alpha}) = 0$ . Ponieważ  $\alpha$  jest pierwiastkiem nierzeczywistym, to  $\alpha \neq \bar{\alpha}$ . Z twierdzenia o reszcie, wynika, że iloczyn  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  dzieli nasz wielomian bez reszty.  $\square$

**Theorem 3.** *Dzielenie wielomianu*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

Przez wielomian  $w$  postaci  $(x^2 - ux - v)$   $u, v \in \mathbb{C}$  daje iloraz i resztę równe:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2 x^0 \\ r(x) &= b_1(x - u) + b_0 \end{aligned}$$

Których współczynniki dane są rekurencyjnym wzorem:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = 0, \quad b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2} \quad (n \leq k \leq 0). \quad (3)$$

Dowód jest dość prosty i polega na porównaniu współczynników po obu stronach równania:

$$w(x) = \phi(x)(x^2 - ux - v) + r(x)$$

Dla każdego wielomianu  $w$  stopnia  $n \leq 2$  znajdziemy więc takie  $u$  i  $v$ , że nasz wielomian  $(x^2 - ux - v)$  będzie dzielił  $w$  bez reszty. Na szukaniu tych rzeczywistych czynników opiera się metoda Bairstowa. W  $r(x)$  nasze współczynniki  $b_0$  i  $b_1$  zależą od  $u$  i  $v$ , więc zapiszmy:

$$b_0(u, v) = 0 \quad b_1(u, v) = 0$$

Są to równania nieliniowe, dwuargumentowe. Szukamy więc takich poprawek oznaczonych  $\delta u$  i  $\delta v$ , które spełniałyby równanie:

$$b_0(u + \delta u, v + \delta v) = b_1(u + \delta u, v + \delta v) = 0$$

Z twierdzenia Taylora możemy zlinearyzować powyższe równości, co daje:

$$\begin{aligned} b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &= 0 \\ b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zdefiniujmy więc wyrazy pomocnicze, które oczywiście spełniają rekurencyjną zależność z (3):

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Podstawiając do równań z (4) i uzależniając równania od  $\delta v$  i  $\delta u$  otrzymujemy:

$$\delta u = (c_1 b_1 - c_2 b_0) \frac{1}{J}$$

$$\delta v = (c_1 b_0 - c_0 b_1) \frac{1}{J}$$

$$J = c_0 c_2 - c_1^2$$

Otrzymaliśmy więc wzór na lepsze przybliżenie naszej pary  $(u, v)$ .

## 5 Wzory Cardano

Do rozwiązywania takich problemów w przypadku wielomianów 3 stopnia posłużyć również mogą wzory dające nam wprost pierwiastki funkcji. Wzory Cardano są dość skomplikowane matematycznie, ale są proste do wyprowadzenia i udowodnienia, dlatego przedstawię krótki opis. Niech  $f$  będzie wielomianem 3 stopnia:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

wtedy możemy przekształcić naszą funkcję  $f$  do alternatywnej postaci

$$g(y) = y^3 + Qy - 2R$$

$$y = x + \frac{b}{3a}, \quad Q = \frac{3ac-b^2}{9a^2}, \quad R = \frac{9abc-27a^2d-2b^3}{54a^3}$$

Teraz, niech  $y = (u + v)$ , gdzie  $uv = -Q$ . Przekształcając otrzymujemy nową postać naszej funkcji.

$$g(u + v) = u^6 - 2Ru^3 - Q^3$$

Widzimy, że otrzymujemy funkcję kwadratową względem  $u^3$ , więc dostajemy równości:

$$u^3 = \frac{2R \pm \sqrt{4Q^3 + 4R^2}}{2} = R \pm \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Niech  $u^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$ . Mamy wtedy:

$$v^3 = -\frac{Q^3}{u^3} = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Jeśli weźmiemy  $u^3 = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$ , to analogicznie otrzymamy  $v^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$ . Bez straty ogólności przyjmijmy, że

$$S = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Wtedy istnieje oczywiście 9 kombinacji dla wartości  $v, u$ , ale tylko 3 z nich pasują do naszych warunków. Są to

$$u = S \wedge v = T$$

$$u = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \wedge v = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T$$

$$u = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \wedge v = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T$$

Nasze pierwiastki zespolone  $x_0, x_1, x_2$  równe więc są:

$$x_0 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_1 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

Wzory te dają nam pierwiastki wielomianu najszybciej, ale może się okazać, że proste operacje arytmetyczne, które wykonywane są po drodze bardzo wpłyną na nasz wynik dając przekłamanie zera. Głównie problemem okazać się może utrata cyfr znaczących przy odejmowaniu dwóch bliskich sobie liczb.

## 6 Testy numeryczne

Tę sekcję poświęcę na porównanie opisanych przeze mnie metod poprzez zestawienie ze sobą wyników zbieżnością do pierwiastków wybranych przeze mnie wielomianów 3-go stopnia. Metodę bisekcji potraktuję raczej jako ciekawostkę i umieszczę ją tylko w pierwszych testach, ponieważ sam problem doboru przedziału dyskwalifikuje ją jako efektywną metodę.

### 6.1 Dobór przybliżenia pierwiastka

Dla metody Newtona będę stosował algorytm do wybierania pierwszego przybliżenia pierwiastka. Polega on na rozpoznaniu, czy pierwiastek rzeczywisty funkcji leży między zerami jej pochodnej, czy poza nimi. Niech  $f$  będzie wielomianem 3-go stopnia i niech  $f'$  będzie jego pochodną. Jeśli  $f'$  ma pierwiastki rzeczywiste, to niech będą to  $x_1 \leq x_2$ . Sprawdźmy więc, czy funkcja zmienia znak poza zerami pochodnej. Jeżeli

$$\operatorname{sgn}(x_1 - \frac{1}{2}) = \operatorname{sgn}(a)$$

to nasze pierwsze przybliżenie będzie równe  $x_1 - \frac{1}{2}$ . Jeśli ten warunek nie zachodzi, to sprawdzamy analogicznie dla punktu  $x_2 + \frac{1}{2}$ . Jeśli funkcja nie zmienia znaku poza tymi punktami, to wybieramy dowolnie punkt między zerami pochodnej.

Jeśli nasza pochodna nie pierwiastków rzeczywistych, to pozostaje nam dobrać punkt startowy arbitralnie.

Przez  $C$ . z. oznaczam liczbę cyfr znaczących, a  $e(x)$  oznacza błąd bezwzględny przybliżenia pierwiastka.

## 6.2 Test 1

Prosta funkcja przykładowa, aby zaprezentować sposób prezentacji danych oraz kryteria porównawcze.

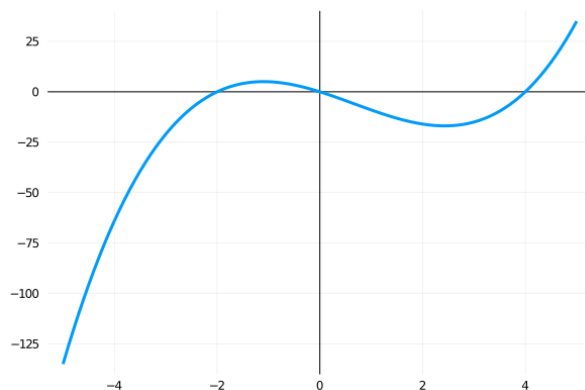


Figure 3:  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

### Metoda Newtona

Iteracja	$x_0$	$f(x_0)$	C.z. $x_0$	C.z. $x_1$	C.z. $x_2$
1	87.40256216597504	683055.1593426905	0	0	0
5	3.999999999999987	-2.486899575160354e-14	14	14	14
10	3.999999999999987	-2.486899575160354e-14	14	14	14

### Metoda Bisekcji

Iteracja	$x_0$	$f(x_0)$	C.z. $x_0$	C.z. $x_1$	C.z. $x_2$
1	2.500000	-8.125000	0	0	0
5	4.531250	15.722198	1	0	0
10	4.018555	0.448762	2	2	2
15	3.999481	-0.012448	3	3	3
20	3.999982	-0.000435	5	5	5

### Metoda Bairstowa

Iteracja	$x_0$	$f(x_0)$	C.z. $x_0$	C.z. $x_1$	C.z. $x_2$
1	-3.14625657737552	-25.77238332178403	0	0	0
5	-1.5183794715 - 2.1659587805i	34.78812403 - 0.6466883761i	0	2	0
10	-2.0	0.0	20	20	20
15	-2.0	0.0	20	20	20

Błędy bezwzględne dla wzorów Cardano:

$$e(x_0) = 0 \quad e(x_1) = 0 \quad e(x_2) = 0$$