

Pracownia z Analizy Numerycznej

Sprawozdanie do zadania P1.7

Mateusz Leonowicz

October 31, 2020

1 Wstęp

Wiele problemów w matematyce, fizyce czy informatyce sprowadzić można do wyznaczenia miejsc zerowych danego równania algebraicznego. Często nie wystarczy nam prosta analiza funkcji, a jedyne co możemy zrobić, to obliczenie jej wartości w danej, skończonej liczbie punktów jej dziedziny. Dlatego temat ten stał się jednym z fundamentalnych zagadnień analizy numerycznej, dzięki czemu powstało wiele metod iteracyjnych, które oczywiście mają swoje zalety i wady.

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie metod obliczania pierwiastków wielomianów w postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

które pozwalają komputerom na uzyskanie wyników z kontrolowanym błędem. Przedstawię trzy metody numeryczne oraz rozwiązania z użyciem wzorów Cardano. Opiszę ich działanie i charakterystykę, a następnie umieszczę ich porównanie razem z podsumowaniem.

Wszystkie testy przeprowadzane będą z użyciem języka do analizy numerycznej Julia.

Contents

1	Wstęp	1
2	Metoda Newtona	2
3	Metoda bisekcji	3
4	Metoda Bairstowa	4

2 Metoda Newtona

Niech $f(x)$ będzie funkcją, której miejsce zerowe chcemy wyznaczyć. Niech α będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Z twierdzenia Taylora, wiemy, że przybliżenie funkcji f , możemy zapisać w postaci:

$$0 = f(\alpha) = f(x + e) = f(x) + e f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2!} e^2 \quad \xi \in \text{interv}(x, \alpha) \quad (1)$$

Jeśli nasz wyraz $\frac{f''(\xi)}{2!} e^2$ będzie dostatecznie mały, to możemy go pominąć i rozwiązać równanie względem e , co daje nam:

$$e = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Jeśli x jest dostatecznie dobrym przybliżeniem α , to $x - e$ będzie jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka. Na tej różnicy opiera się metoda Newtona, która po wybraniu startowego przybliżenia x_0 zera α polega na stosowaniu rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Dobranie startowego punktu x_0 w tej metodzie jest bardzo istotne, gdyż metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna. Jeśli dobierzemy odpowiednio punkt początkowy będziemy mieli zbieżność kwadratową, z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją wielokrotne zera funkcji. Wtedy otrzymamy zbieżność liniową.

Metoda Newtona opiera się na linearyzacji funkcji f , co pozwala nam na dobre przybliżanie wartości funkcji w małym otoczeniu punktu x . Możemy więc rozumieć tę metodę, jako przybliżanie miejsc zerowych funkcji za pomocą jej stycznych, co oczywiście niesie za sobą groźbę rozbieżności.

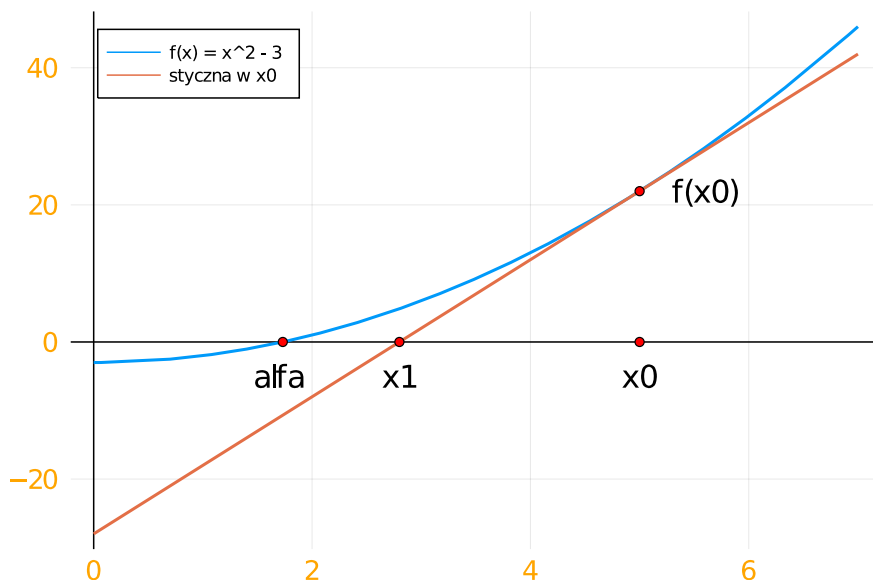


Figure 1: Interpretacja geometryczna metody Newtona

3 Metoda bisekcji

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a)f(b) < 0$, czyli funkcja zmienia znak na końcach przedziałów, to ta funkcja musi mieć zero w przedziale (a, b) i jest to oczywiście konsekwencja twierdzenia Darboux. Możemy więc zmniejszyć nasz przedział o połowę wybierając punkt c , taki że $f(c)f(a) < 0$ lub $f(c)f(b) < 0$. Uzyskaliśmy nowy przedział, w którym wiemy, że znajduje się nasze miejsce zerowe. Na tym rozumowaniu opiera się metoda bisekcji, którą wyrazić można następującym algorytmem:

Algorithm 1 Szukanie pierwiastka funkcji f

Require: ϵ, a_0, b_0, M takie, że $f(a_0)f(b_0) < 0$

```

 $n \leftarrow 1$ 
 $left \leftarrow a_0$ 
 $right \leftarrow b_0$ 
while  $n < M$  do
   $c = \frac{left + right}{2}$ 
  if  $f(c) = 0 \vee |left - right| < \epsilon$  then
    pierwiastkiem jest  $c$ 
  else
     $n \leftarrow n + 1$ 
  end if
  if  $f(left)f(c) < 0$  then
     $left \leftarrow c$ 
  else
     $right \leftarrow c$ 
  end if
end while

```

Algorytm uwzględnia trzy kryteria zakończenia obliczeń, ponieważ inaczej istniałoby ryzyko zapętlenia. Pierwszym jest oczywiście znalezienie takiego punktu c , że $f(c) = 0$. Drugim z nich jest skończona liczba iteracji wyrażona zmienną M . Oprócz tego, obliczenia są przerywane, jeżeli błąd jest dostatecznie mały, tj. mniejszy od ϵ . Łatwo znaleźć przykłady funkcji w których brak któregoś z kryteriów mógłby prowadzić do bardzo błędnych wyników.

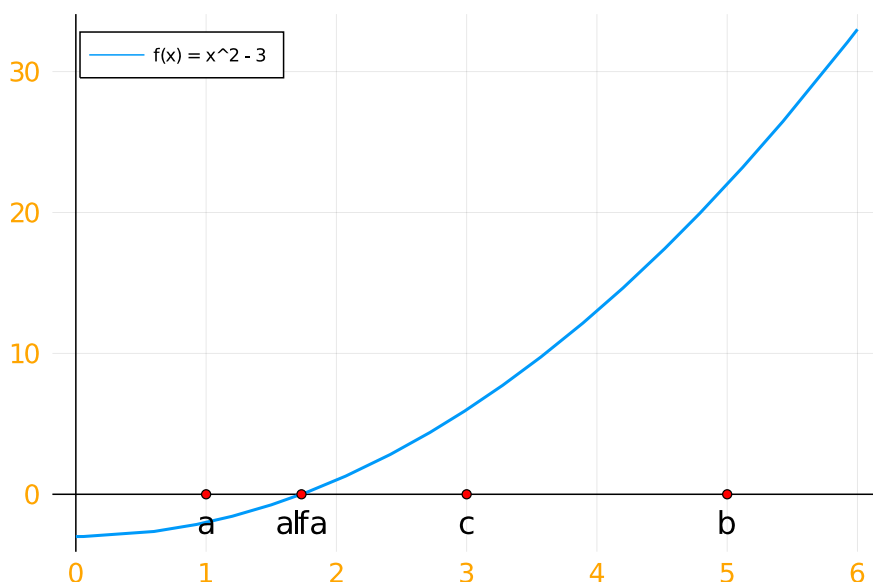


Figure 2: Interpretacja geometryczna metody bisekcji

4 Metoda Bairstowa

Wymienione metody do tej pory, oprócz oczywistych problemów z wybraniem początkowych wyrazów, czy niejednorodną zbieżnością, mają jedną o wiele poważniejszą dla nas wadę. W ich aktualnej postaci, jeśli nasza funkcja f będzie miała pierwiastki zespolone, to ich nie wyznaczymy. Do tego potrzebujemy bardziej zaawansowanego i ogólnego algorytmu. Najpierw przedstawię kilka letmatów, które przydadzą się do wyprowadzenia metody Bairstowa.

Theorem 1. *Wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w przestrzeni zespolonej, gdy każdy z nich liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

Theorem 2. *Jeśli wielomian $w(x)$ stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma współczynniki $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, oraz $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest jego miejscem zerowym, to $\bar{\alpha}$ też jest jego miejscem zerowym, a iloczyn kwadratowy $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ dzieli bez reszty wielomian $w(x)$.*

Proof. Mamy wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$, oraz z założenia wiemy, że $w(\alpha) = 0$. Korzystając z dwóch własności sprzężenia $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ otrzymujemy wprost równość: $w(\bar{\alpha}) = 0$. Ponieważ α jest pierwiastkiem nierzeczywistym, to $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Z twierdzenia o reszcie, wynika, że iloczyn $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ dzieli nasz wielomian bez reszty. \square

Theorem 3. *Dzielenie wielomianu*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

Przez wielomian w postaci $(x^2 - ux - v)$ $u, v \in \mathbb{C}$ daje iloraz i resztę równe:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2 x^0 \\ r(x) &= b_1(x - u) + b_0 \end{aligned}$$

Których współczynniki dane są rekurencyjnym wzorem:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = 0, \quad b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2} \quad (n \leq k \leq 0). \quad (3)$$

Dowód jest dość prosty i polega na porównaniu współczynników po obu stronach równania:

$$w(x) = \phi(x)(x^2 - ux - v) + r(x)$$

Dla każdego wielomianu w stopnia $n \leq 2$ znajdziemy więc takie u i v , że nasz wielomian $(x^2 - ux - v)$ będzie dzielił w bez reszty. Na szukaniu tych rzeczywistych czynników opiera się metoda Bairstowa. W $r(x)$ nasze współczynniki b_0 i b_1 zależą od u i v , więc zapiszmy:

$$b_0(u, v) = 0 \quad b_1(u, v) = 0$$

Są to równania nieliniowe, dwuargumentowe. Szukamy więc takich poprawek oznaczonych δu i δv , które spełniałyby równanie:

$$b_0(u + \delta u, v + \delta v) = b_1(u + \delta u, v + \delta v) = 0$$

Z twierdzenia Taylora możemy zlinearyzować powyższe równości, co daje:

$$\begin{aligned} b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &= 0 \\ b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zdefiniujmy więc wyrazy pomocnicze, które oczywiście spełniają rekurencyjną zależność z (3):

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Podstawiając do równań z (4) i uzależniając równania od δv i δu otrzymujemy:

$$\delta u = (c_1 b_1 - c_2 b_0) \frac{1}{J}$$

$$\delta v = (c_1 b_0 - c_0 b_1) \frac{1}{J}$$

$$J = c_0 c_2 - c_1^2$$

Otrzymaliśmy więc wzór na lepsze przybliżenie naszej pary (u, v) .