Pracownia z Analizy Numerycznej

Sprawozdanie do zadania P2.10

Mateusz Leonowicz

December 20, 2020

1 Wstęp

Częstym problemem, który pojawia się podczas pracy przy różnego rodzaju funkcjach jest trudność w ich różniczkowaniu i całkowaniu. Musimy mieć możliwość wykonywania tych operacji bez wstępnej analizy funkcji, czy też jej przekształcenia. Chcemy więc zamienić naszą skomplikowaną funkcję na jakąś inną (najlepiej wielomianową), która dobrze ją przybliża. Jest to jedno z podstawowych zagadnień analizy numerycznej.

W naszym zadaniu spojrzymy na problem z całkowaniem funkcji. W ogólności dla dowolnej funkcji f, dwóch wartości $a \leq b$ chcemy policzyć wartość funkcji ϕ:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b.$$

korzystając z interpolujących naturalnych funkcji sklejanych III stopnia.

Contents

2 Naturalna funkcja sklejana III stopnia.

Niech dana będzie interpolowana funkcja f ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $n + 1$ węzłów $t_0, t_1, \ldots, t_n$ takich, że $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. Naturalną funkcją sklejaną III stopnia będzie taka funkcja S, dla której spełnione są warunki:

- W każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ S jest wielomianem klasy Π_3.
- Funkcje S, S' i S'' są ciągłe w przedziale $[a, b]$.
- $S(t_i) = f(t_i)$ $(0 \leq i \leq n)$
- $S''(a) = S''(b) = 0$ (Warunek na S naturalne)

Jeśli chcemy mieć jednoznacznie wyznaczoną funkcję, to z pierwszego punktu wynika, że potrzebujemy dokładnie $4n$ warunków na istnienie S. Sprawdźmy czy tak jest. Z drugiego punktu, który zapewnia, że zachodzą równości:

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(t_i) &= S'_i(t_i) \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ S''_{i-1}(t_i) &= S''_i(t_i) \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{aligned} \tag{1}$$

otrzymujemy dokładnie $2(n - 1)$ warunków dla naszej funkcji S. Z trzeciego punktu mamy $2n$ warunków, a z ostatniego 2. Mamy więc wystarczającą ilość informacji, aby wprost stworzyć naszą funkcję.

Znajdźmy napierw wzór na $S_i(x)$ w przedziale $[t_i, t_{i+1}]$. Wprowadzamy nowe oznaczenie $\lambda_i = S''(t_i)$. Wiemy, że $S_i \in \Pi_3$ więc funkcja S''_i jest funkcją liniową. Z równości $S''_i(t_i) = \lambda_i$ i $S''_i(t_{i+1}) = \lambda_{i+1}$ wynika, że:

$$S''_i(x) = \frac{\lambda_i}{t_{i+1} - t_i}(t_{i+1} - x) + \frac{\lambda_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}(t_i - x)$$

Jest to oczywiście wielomian interpolacyjny dla węzłów t_i, t_{i+1} w postaci Lagrange'a. Dla ułatwienia przekształceń niech $h_i = t_{i+1} - t_i$. Jeśli zcałkujemy obie strony dwukrotnie otrzymamy wielomian S_i.

$$\begin{aligned} \int S''_i(x)\, dx &= \int \frac{\lambda_i}{h_i}(t_{i+1} - x)\, dx + \int \frac{\lambda_{i+1}}{h_i}(x - t_i)\, dx \\ &= \frac{-\lambda_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{\lambda_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + C \\ &= S'_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int S''_i(x)\, dx\, dx &= \int \frac{-\lambda_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2\, dx + \int \frac{\lambda_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + C\, dx \\ &= \frac{\lambda_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{\lambda_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + Cx + D \\ &= S_i(x) \end{aligned}$$

Teraz pozostaje wyznaczyć stałe całkowania C i D z równości $S_i(t_i) = f(t_i)$ oraz $S_i(t_{i+1}) = f(t_{i+1})$.

$$\begin{aligned} S_i(t_i) &= \frac{\lambda_i}{6h_i}(t_{i+1} - t_i)^3 + t_i C + D = f(t_i) \\ S_i(t_{i+1}) &= \frac{\lambda_{i+1}}{6h_i}(t_{i+1} - t_i)^3 + t_{i+1} C + D = f(t_{i+1}) \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy postać naszej funkcji sklejanej.

$$S_i(x) = \frac{\lambda_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{\lambda_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{f(t_{i+1})}{h_i} - \frac{\lambda_{i+1} h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{f(t_i)}{h_i} - \frac{\lambda_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x) \tag{2}$$

Musimy jeszcze wyznaczyć wartości $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ tak, aby zapewnić ciągłość pierwszej pochodnej. Aby to zrobić zróżniczkujemy wielomian (2) i skorzystamy z równości (1).

Otrzymujemy:

$$S_i'(x) = \frac{-\lambda_i}{2h_i}(t_{i+1}-x)^2 + \frac{\lambda_{i+1}}{2h_i}(x-t_i)^2 + \left(\frac{f(t_{i+1})}{h_i} - \frac{\lambda_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{f(t_i)}{h_i} - \frac{\lambda_i h_i}{6}\right)$$
$$S_{i-1}'(x) = \frac{-\lambda_{i-1}}{2h_{i-1}}(t_i-x)^2 + \frac{\lambda_i}{2h_{i-1}}(x-t_{i-1})^2 + \left(\frac{f(t_i)}{h_{i-1}} - \frac{\lambda_i h_{i-1}}{6}\right) - \left(\frac{f(t_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{\lambda_{i-1}h_{i-1}}{6}\right)$$

i podstawiajac $x = t_i$ dostajemy:

$$S_i'(t_i) = -\frac{h_i}{3}\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} - \frac{f(t_i)}{h_i} + \frac{f(t_{i+1})}{h_i}$$
$$S_{i-1}'(t_i) = \frac{h_{i-1}}{6}\lambda_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}\lambda_i - \frac{f(t_{i-1})}{h_{i-1}} + \frac{f(t_i)}{h_{i-1}}$$

Przyrównujemy do siebie dwa wyrażenia:

$$h_{i-1}\lambda_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\lambda_i + h_i\lambda_{i+1} = \frac{6}{h_i}(f(t_{i+1}) - f(t_i)) - \frac{6}{h_{i-1}}(f(t_i) - f(t_{i-1}))$$

Dostaliśmy więc układ $n-1$ równań dla $n-1$ niewiadomych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Możemy rozwiązać ten układ, a otrzymane wyniki wykorzystać do konstrukcji naszego wielomianu.

Wprowadzamy nowe oznaczenia:

$$u_i = 2(h_{i-1}+h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(f(t_{i+1}) - f(t_i)), \quad v_i = b_i - b_{i-1}$$

Pamiętając, że $\lambda_0 = \lambda_n = 0$ nasz układ przedstawia się w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Teraz stosując eliminację Gaussa możemy w prosty sposób rozwiązać ten układ równań. Algorytm możemy wyrazić w sposób następujący.

Algorithm 1 Wyznaczanie wartości λ_i

Require: $n, (t_i), f(t_i)$
  for $i = 0 : n-1$ **do**
    $h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$
    $b_i \leftarrow \frac{6(f(t_{i+1}) - f(t_i))}{h_i}$
  end for
  $u_1 \leftarrow 2(h_0 + h_1)$
  $v_1 \leftarrow b_1 - b_0$
  for $i = 2 : n-1$ **do**
    $u_i \leftarrow 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}}$
    $v_i \leftarrow b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}v_{i-1}}{u_{i-1}}$
  end for
  $\lambda_0 \leftarrow 0$
  $\lambda_n \leftarrow 0$
  for $i = n-1 : 1$ **do**
    $\lambda_i \leftarrow \frac{(v_i - h_i\lambda_{i+1})}{u_i}$
  end for
  return λ

3 Całkowanie funkcji sklejanej III stopnia.

W drugiej części zadania chcemy obliczyć wartość całki $\Phi'(x)$ danej wzorem:

$$\Phi'(x) = \int_a^x S(t) \approx \Phi(x)\, dt$$

wiedząc, że $S(t)$ jest naturalną funkcją sklejaną III stopnia, oraz znając najmniejsze takie t_k, że $x \leq t_k$ możemy naszą całkę podzielić na sumę całek w następujący sposób:

$$\Phi'(x) = \int_{t_0}^{t_1} S_0(u)\, du + \int_{t_1}^{t_2} S_1(u)\, du + \ldots + \int_{t_k}^{x} S_k(u)\, du$$

Następnie, aby ułatwić nam wyznaczenie S_i przekształcimy wzór (2) na taki, który pozwoli nam w łatwy sposób policzyć współczynniki wielomianu.

$$\begin{aligned}
S_i(x) &= \frac{\lambda_i}{6h_i}(t_{i+1}-x)^3 + \frac{\lambda_{i+1}}{6h_i}(x-t_i)^3 + \left(\frac{f(t_{i+1})}{h_i} - \frac{\lambda_{i+1}h_i}{6}\right)(x-t_i) + \left(\frac{f(t_i)}{h_i} - \frac{\lambda_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-x) \\
&= x^3\left(-\frac{\lambda_i}{6h} + \frac{\lambda_{i+1}}{6h}\right) + x^2\left(\frac{\lambda_i}{2h}t_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1}}{2h}t_i\right) + \\
&+ x\left(-\frac{-\lambda_i}{2h}t_{i+1}^2 + \frac{\lambda_{i+1}}{2h}t_i^2 + \frac{f(t_{i+1})}{h} - \frac{\lambda_{i+1}h}{6} - \frac{f(t_i)}{h} + \frac{\lambda_i h}{6}\right) \\
&+ \frac{\lambda_i}{6h}t_{i+1}^3 - \frac{\lambda_{i+1}}{6h}t_i^3 - \frac{f(t_{i+1})}{h}t_i + \frac{\lambda_{i+1}h}{6}t_i + \frac{f(t_i)}{h}t_{i+1} - \frac{\lambda_i h}{6}t_{i+1}
\end{aligned}$$

Reszta obliczeń polega na wykorzystaniu powyższych własności i podstawieniu odpowiednich wartości.

4 Testy numeryczne

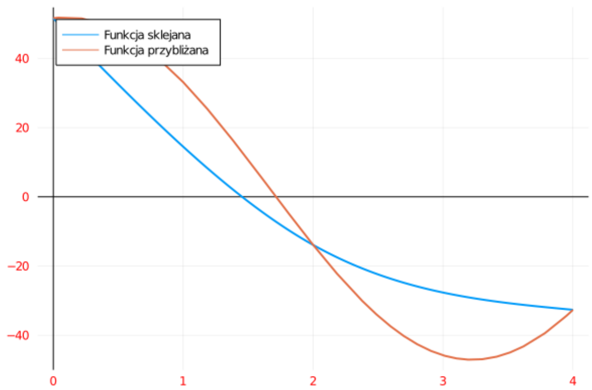
W tej sekcji sprawdzać będziemy jak skuteczną metodą przybliżania wartości całki jest całkowanie funkcji sklejanej III stopnia. Policzę przybliżenia wartości całek oraz ich błąd bezwzględny uwzględniając różne ilości przedziałów. Dodatkowo pokażę ile potrzebujemy przedziałów, aby uzyskać satysfakcjonujący błąd (jeśli to możliwe).

4.1 Test 1

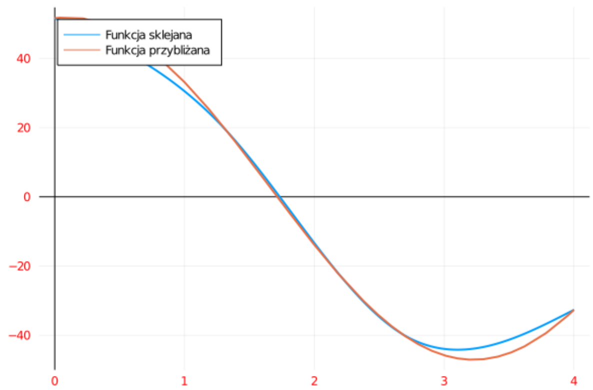
Funkcja przykładowa, aby zaprezentować sposób prezentacji danych oraz kryteria porównawcze.

$$x = 2.4$$
$$a = 0$$
$$b = 4$$
$$f(x) = 5sin(x) + \frac{1}{10}x^2 + 50cos(x) + log(x+5)$$
$$\Phi(x) = 47.284690044648194$$

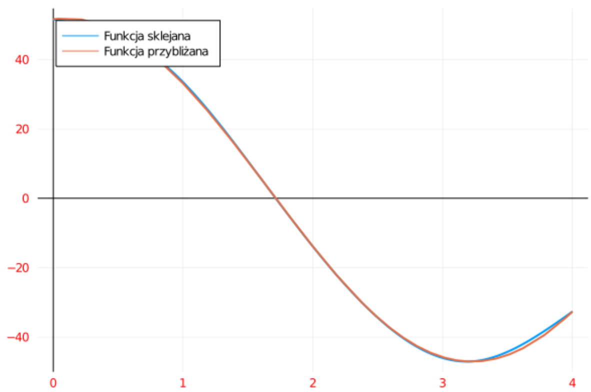
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	-20.582009632895932	67.86669967754412
3	34.00320421138793	13.281485833260263
5	46.63022254583059	0.6544674988176027
20	47.205650943683715	0.0790391009644793
100	46.01890472357011	1.2657853210780843
130	47.28465506244014	3.498220805653318e-5



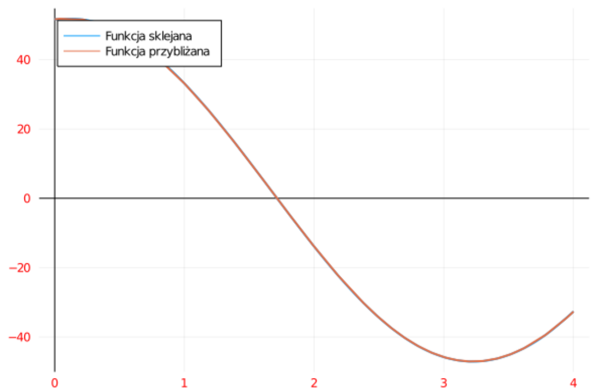
(a) $n = 2$



(b) $n = 3$



(c) $n = 5$



(d) $n = 20$

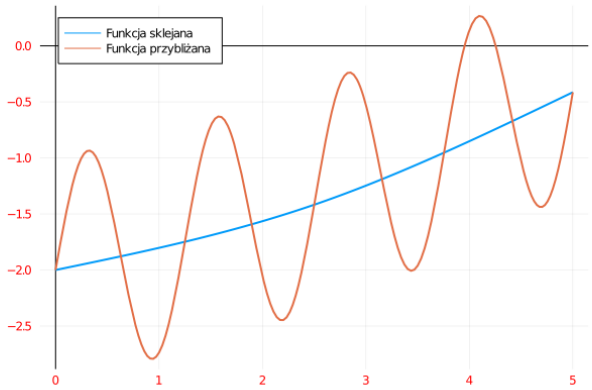
Widzimy, że aby otrzymać 2 cyfry znaczące potrzebowaliśmy złożyć ze sobą 20 wielomianów. Co ciekawe, dla coraz większej liczby przedziałów wartość naszej całki zaczęła coraz bardziej różnić się od wartości przybliżanej. Dopiero w okolicy 100 funkcji sklejanych otrzymaliśmy błąd rzędu 5 cyfr znaczących.

4.2 Test 2

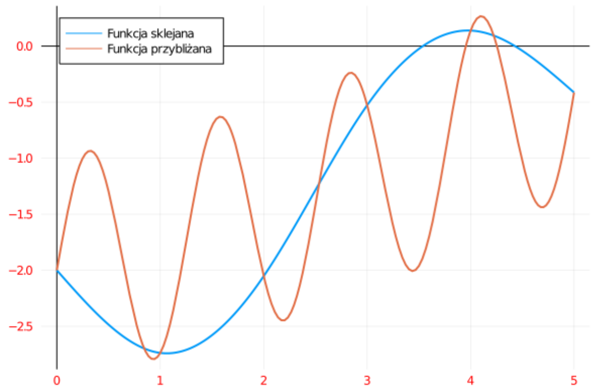
Funkcja która wygląda na okresową, ale z przesuniętym każdym okresem w górę.

$$x = 3$$
$$a = 0$$
$$b = 5$$
$$f(x) = sin(5x) + \exp(\frac{x}{5}) - 3$$
$$\Phi(x) = -4.537468415475691$$

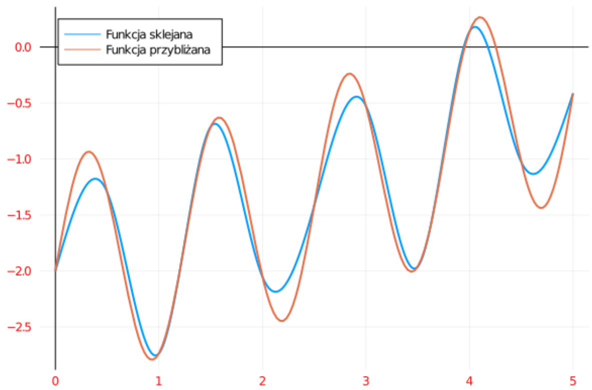
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	-6.693193	2.155724
5	-6.331958	1.794490
10	-5.317852	0.780384
20	-4.803045	0.265577
50	-4.609706	0.072237
250	-4.548728	0.011260
1000	-4.540150	0.002681
50000	-4.537521	0.000053



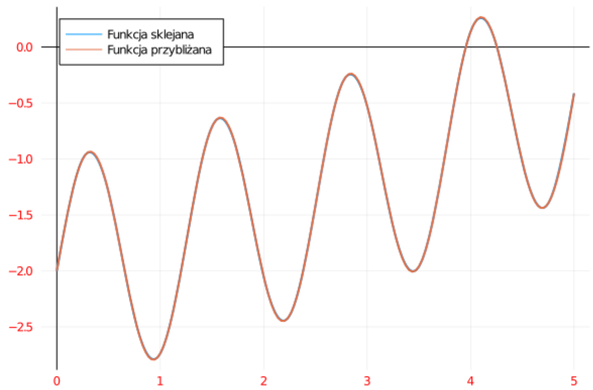
(e) $n = 2$



(f) $n = 5$



(g) $n = 10$



(h) $n = 20$

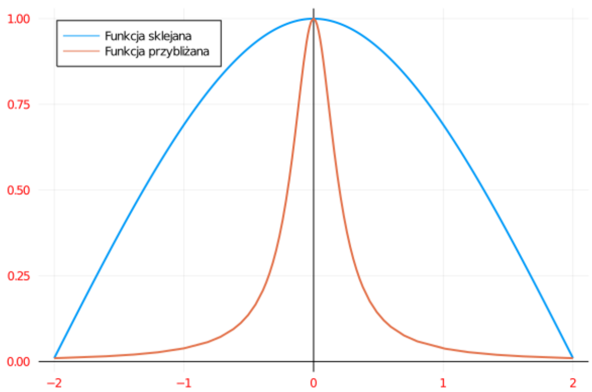
Do otrzymania jednej cyfry znaczącej potrzebowaliśmy jedynie 10 wielomianów, ale aby uzyskać każdą kolejną cyfrę potrzebowaliśmy wykonywać coraz to więcej operacji. Do uzyskania 5 cyfr znaczących potrzebowaliśmy już 50000 wielomianów co może sugerować, że zbieżnośc tej metody potrafi być naprawdę słaba.

4.3 Test 3

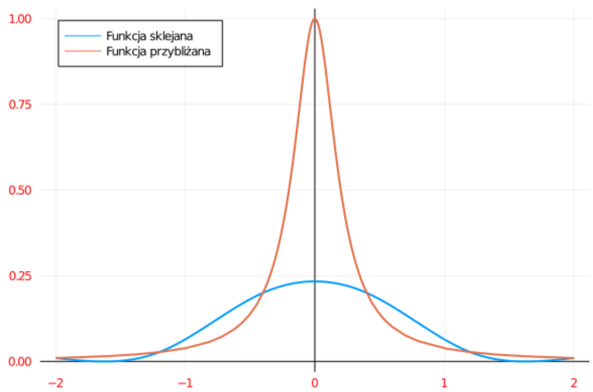
Funkcja Rungego, która znana jest z tego, że sprawia problem w klasycznej interpolacji.

$$x = 1.5$$
$$a = -2$$
$$b = 2$$
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$
$$\Phi(x) = 0.5818744937603915$$

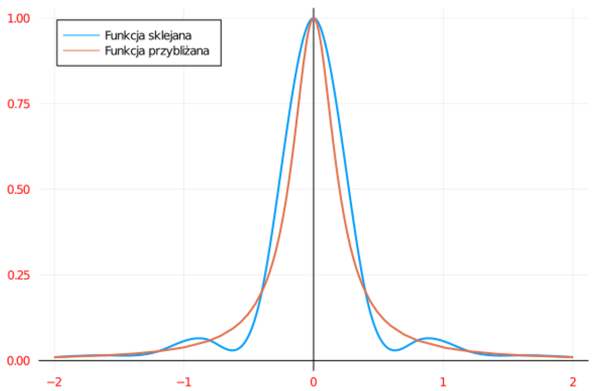
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	2.514851	1.932977
5	0.366765	0.215109
10	0.640139	0.058265
15	0.574224	0.007651
20	0.585868	0.003993
40	0.583519	0.001644
100	0.582219	0.000345
1000	0.581944	0.000070



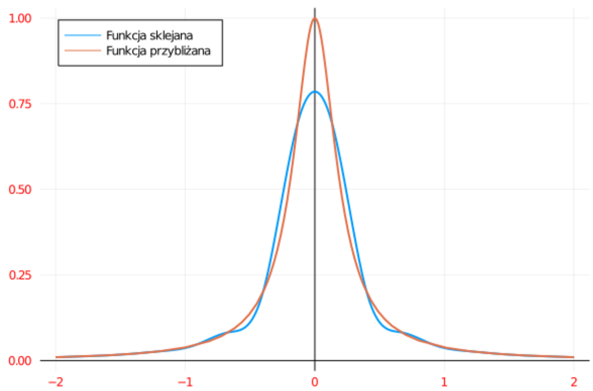
(i) $n = 2$



(j) $n = 5$



(k) $n = 10$



(l) $n = 15$

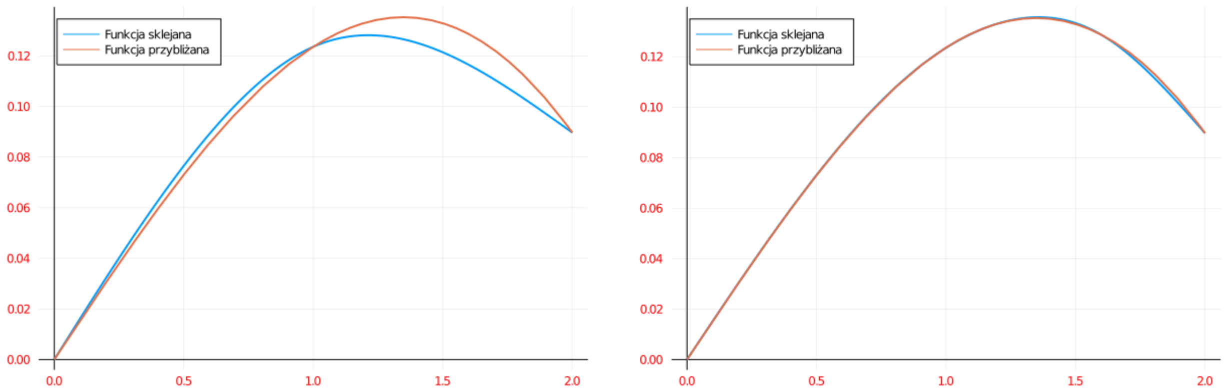
Widzimy, że metoda funkcji sklejanej dobrze radzi sobie z funkcją Rungego i już dla 10 wielomianów otrzymaliśmy 2 cyfry znaczące. Problemem jednak niestety znów jest rząd zbieżności, aby otrzymać chociaż 5 cyfr znaczących musieliśmy użyć aż 1000 wielomianów.

4.4 Test 4

Zwykły wielomian 5 stopnia.

$$x = 1.3$$
$$a = 0$$
$$b = 2$$
$$f(x) = \frac{x^5}{1000} - \frac{x^3}{32} + \frac{2x}{13}$$
$$\Phi(x) = 0.10849118691666668$$

n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	0.188130	0.079639
3	0.113336	0.004845
5	0.148603	0.040112
10	0.122012	0.013521
50	0.111194	0.002703
100	0.111194	0.002703
1000	0.108761	0.000270
10000	0.108518	0.000027



(m) $n = 2$ (n) $n = 5$

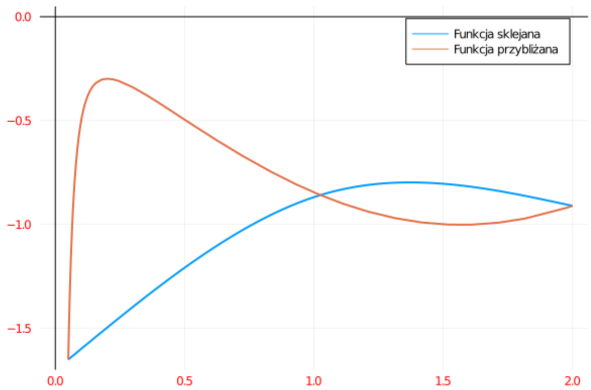
Funkcja sklejana dobrze przybliża wielomian już w niewielkiej liczbie sklejonych wielomianów. Pomimo tego, że już przy 2 wielomianach dostaliśmy 2 cyfry znaczące, to żeby dostać ich 5 potrzebowaliśmy aż 10000 wielomianów. Zaskakujące jest, że nasza metoda tak słabo wypada nawet dla wielomianów podobnego stopnia co funkcja sklejana. Nie jest to dobra własność, jeżeli chcemy móc liczyć wartości całek z każdej funkcji.

4.5 Test 5

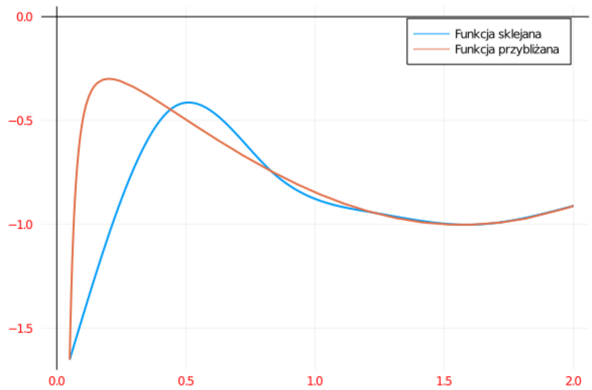
Funkcja, której granica w zerze wynosi minus nieskończoność.

$$x = 1.7$$
$$a = 0.05$$
$$b = 2$$
$$f(x) = -(sin(x) + \frac{1}{250x^2})$$
$$\Phi(x) = -1.2052418135140226$$

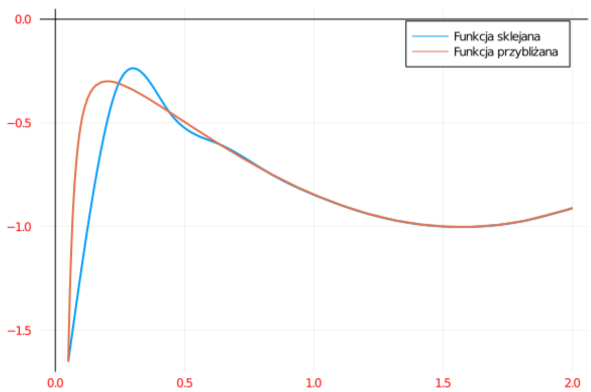
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	-1.982424	0.777182
5	-1.672953	0.467711
10	-1.377668	0.172426
20	-1.234317	0.029076
50	-1.235133	0.029891
150	-1.235133	0.029891
1000	-1.206881	0.001639
10000	-1.205331	0.000089



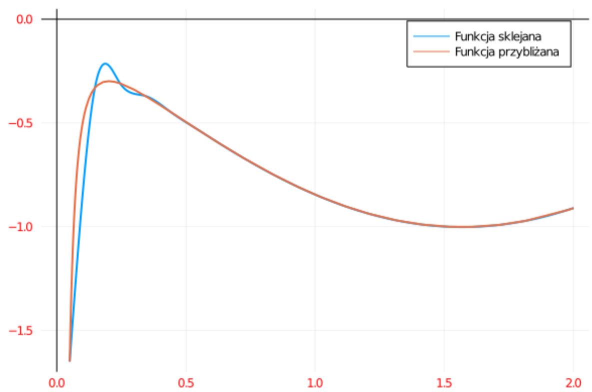
(o) $n = 2$



(p) $n = 5$



(q) $n = 10$



(r) $n = 20$

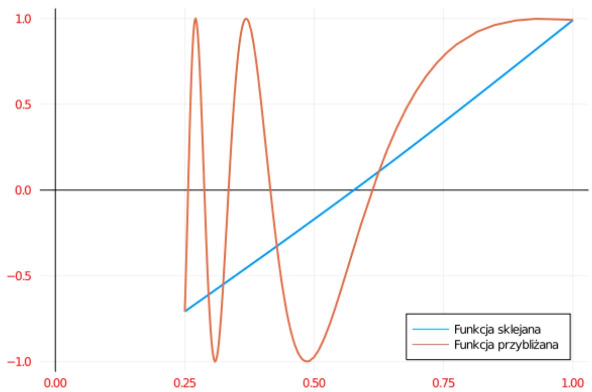
Znów, nawet dla niezbyt skomplikowanej funkcji szybko otrzymaliśmy 2 cyfry znaczące, ale żeby otrzymać dokładność do 5 cyfr znaczących musieliśmy wyznaczyć aż 10000 wielomianów.

4.6 Test 6

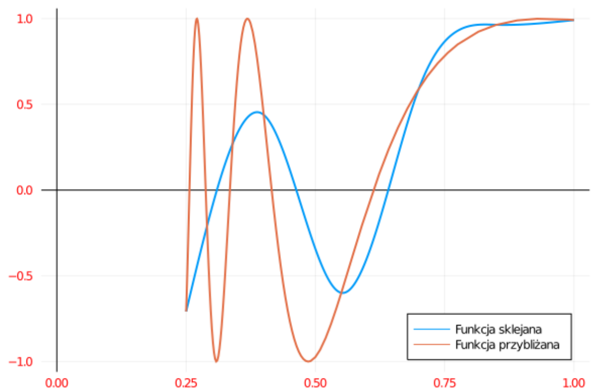
Funkcja bardzo szybko zmieniająca swoje wartości w krótkim przedziale.

$$x = 0.9$$
$$a = 0.25$$
$$b = 1$$
$$f(x) = sin(\frac{1}{1+x^2})$$
$$\Phi(x) = 0.11994153632149726$$

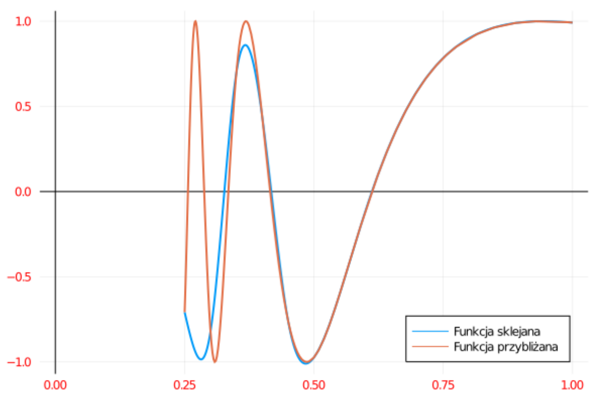
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	0.090881	0.029060
5	0.253998	0.134057
15	0.124974	0.005032
30	0.144286	0.024344
50	0.130445	0.010504
100	0.122524	0.002582
1000	0.120190	0.000248
10000	0.119966	0.000025



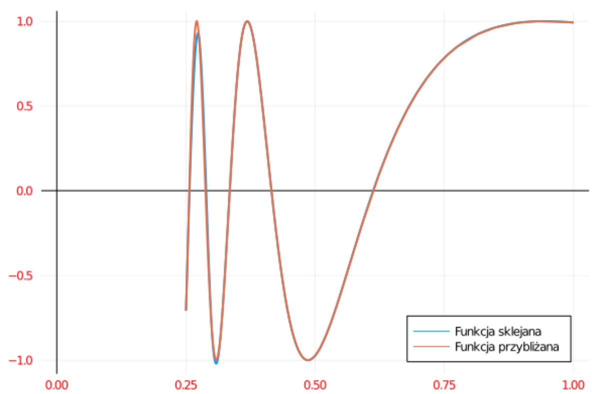
(s) $n = 2$



(t) $n = 5$



(u) $n = 15$



(v) $n = 30$

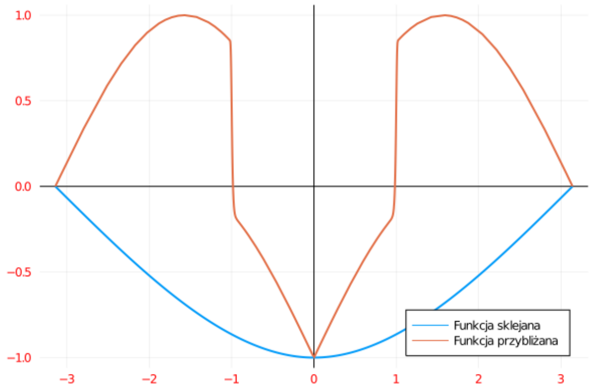
Ponownie otrzymaliśmy bardzo szybko 2 cyfry znaczące, ale żeby uzyskać ich więcej musimy wykonać bardzo dużo obliczeń. Jeszcze raz 10000 wielomianów okazało się wystarczające, żeby obliczyć 5 cyfrę znaczącą. Można by podejrzewać, że jest to własność tej metody.

4.7 Test 7

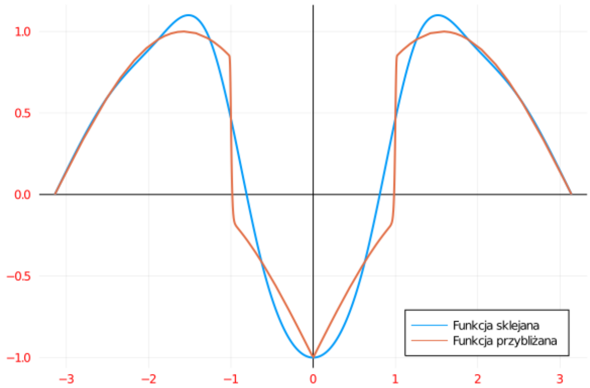
Funkcja nie będąca różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

$$x = 0$$
$$a = -\pi$$
$$b = \pi$$
$$f(x) = |sin(x)| - exp(\frac{1}{x^{100}})$$
$$\Phi(x) = 1.0056741488084917$$

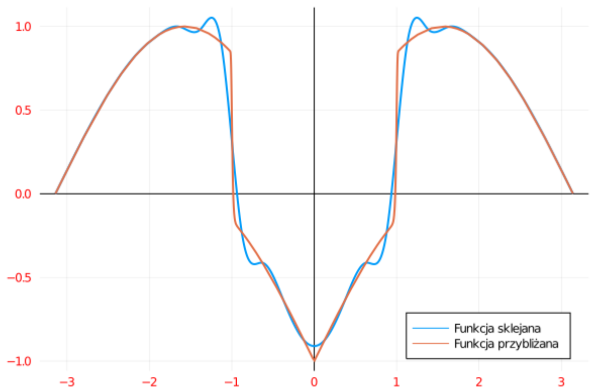
n	$\Phi'(x)$	Błąd bezwzględny
2	-3.926991	4.932665
10	0.515500	0.490174
25	0.884451	0.121223
100	1.014446	0.008772
200	1.006806	0.001132
400	1.005646	0.000028
10000	1.005046	0.000628



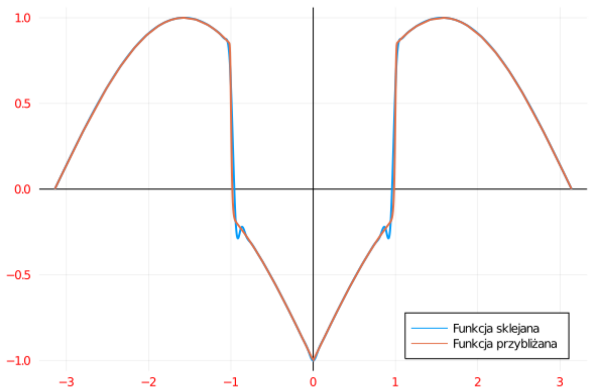
(w) $n = 2$



(x) $n = 10$



(y) $n = 25$



(z) $n = 100$

Metoda bardzo dobrze poradziła sobie z odtworzeniem własności funkcji oraz z przybliżeniem jej w danym przedziale. Niestety zbieżnośc wartości całki znów pozostawia wiele do życzenia. Pożądaną zbieżnośc 5 cyfr znaczących otrzymaliśmy dopiero przy użyciu 400 wielomianów. Co ciekawe zwiększenie tej liczby do 10000 zwiększyło nasz błąd bezwzględny. Może być to spowodowane błędnami numerycznymi.

5 Podsumowanie

Wykonane przeze mnie testy pokazują skuteczność metody przybliżania wartości całki za pomocą funkcji sklejanych III stopnia. Funkcje te bardzo dobrze i szybko zbiegają do funkcji interpolowanej. Możemy dzięki nim poznać kształt oraz ogólne własności funkcji o której chcemy się czegoś dowiedzieć. Niestety, jeśli przychodzi nam wyliczać za jej pomocą wartość całki to metoda ta nie sprawdza się. Pomimo tego że pierwsze cyfry znaczące otrzymujemy prawie natychmiastowo to uzyskanie każdej kolejnej cyfry znaczącej wymaga dużego nakładu obliczeniowego, co oznacza, że metoda nie jest efektywnym sposobem wyznaczania wartości całek jeśli zależy nam na dużej dokładności. Jeśli jednak chcemy uzyskać jedynie rząd, albo pozwalamy na to, aby błąd bezwzględny był zauważalnie duży, to metoda ta może nam bardzo dobrze służyć.

Podsumowując więc, metoda ta stanowi raczej ciekawostkę, aniżeli pełnoprawną i użyteczną metodę wyznaczania wartości całki w przedziale.

References

[1] David Kincaid, Ward Cheney. Analiza numeryczna, Warszawa, 2006..