

這種題目通過某種方法提供一個解密機，但是只會返回解密後明文的最後一比特位，既返回解密出明文的奇偶。我們可以用  $\log(N)$  的覆雜度確定  $m$ ，舉例如下：

1. 我們可以得到  $n, e, c$ ， $c$  通常是 `encflag`，要注意到  $n$  是奇數，因為他是兩個質數相乘而來。
2. 我們可以傳入  $c$ ，`server` 算出  $m = c^d \bmod n$  並返回  $m$  的奇偶性。

`server` 計算出  $m' = (c * 2^e)^d \bmod n = 2m \bmod n$ ，

1. 如果  $2m < n$ ，那麼  $m'$  會是個偶數
2. 如果  $2m \geq n$ ，那麼  $m' = 2m - n$ ，那麼  $m'$  會是個奇數。

我們現在已經可以通過一次查詢把  $m$  的範圍縮小到了  $n/2$ ，我們是否可以通過二分法確定  $m$  的準確的值？以數學歸納法的思想，我們現在已經完成了第一步的證明，現在要完成的是對之後部分的證明。

假設現在已經把  $m$  的範圍確定到了  $\frac{xn}{2^i} \leq m < \frac{(x+1)n}{2^i}$ ，那麼下面我們查詢  $c * 2^{(i+1)e} \bmod n$ ，服務器會返回給我們  $m' = 2^{(i+1)}m \bmod n = 2^{(i+1)}m - kn$ ，那麼：

$$0 \leq 2^{(i+1)}m - kn < n$$
$$\frac{kn}{2^{(i+1)}} \leq m < \frac{(k+1)n}{2^{(i+1)}}$$

並且考慮到初始條件：

$$\frac{xn}{2^i} \leq m < \frac{(x+1)n}{2^i}$$
$$\frac{(2x)n}{2^{(i+1)}} \leq m < \frac{(2x+2)n}{2^{(i+1)}}$$

因為  $x$  和  $k$  都是整數，要滿足原先的條件， $k$  只能取  $2x$  或  $(2x+1)$ 。

$2^{(i+1)}$  是偶數， $n$  是奇數。所以當  $m'$  是奇數的時候， $2^{(i+1)} - kn$  是奇數， $k$  必然是奇數；反之，如果  $2^{(i+1)} - kn$  是偶數， $k$  必然是偶數。

如果  $k$  是奇數， $k$  只能取  $(2x+1)$ ， $m$  被約束到  $\frac{(2x+1)n}{2^{(i+1)}} \leq m < \frac{(2x+2)n}{2^{(i+1)}}$ ；

如果  $k$  是偶數， $k$  只能取  $2x$ ， $m$  被約束到  $\frac{(2x)n}{2^{(i+1)}} \leq m < \frac{(2x+1)n}{2^{(i+1)}}$ 。

這樣二分下去直到上下界只差小於 1。