Numerical Linear Algebra
Programming Assignment #06

2015-17231
박우정

Exercise 2.31.
다음 미분방정식을 해결하고자 한다.

$$-\triangle u(x,y) = f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y), x \in (0,1)^2$$

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \partial(0,1)^2$$

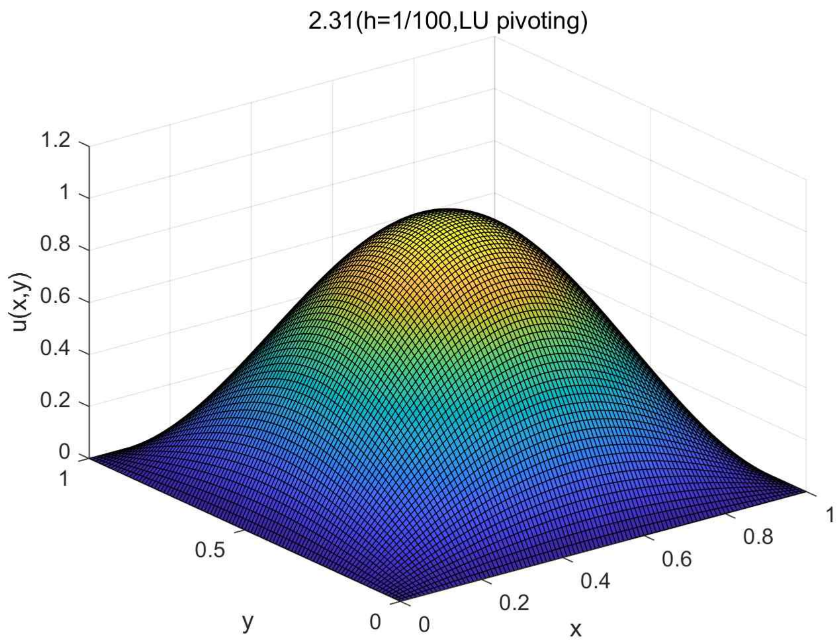
LU decomposition of banded matrix with partial pivoting을 이용해 풀고자 하는데, 이를 위한 MATLAB 프로그래밍 코드는 다음과 같다.

```
n=input('What is the dimension n? ');
h=1/n;n=n-1;nn=n^2;
A=zeros(nn,nn);L=eye(nn,nn);b=zeros(nn,1);u=zeros(nn,1);
for i=1:nn
   A(i,i)=4;
end
for i=0:n-1
   for j=1:n-1
      A(n*i+j,n*i+j+1)=-1;
      A(n*i+j+1,n*i+j)=-1;
   end
end
for i=1:nn-n
   A(i,i+n)=-1;
   A(i+n,i)=-1;
end
for i=1:n
   for j=1:n
      b(n*(i-1)+j)=2*pi^2*sin(pi*j/(n+1))*sin(pi*i/(n+1));
   end
end
saveA=A;saveb=b;
for j=1:nn-1
   [x,jsave]=max(abs(A(j:min(j+n,nn),j)));
   js=jsave+j-1;
   A([j,js],j:min(j+2*n,nn))=A([js,j],j:min(j+2*n,nn));
   b([j,js])=b([js,j]);
   for k=j+1:min(j+n,nn)
      m=A(k,j)/A(j,j);
      A(k,j:min(j+2*n,nn))=A(k,j:min(j+2*n,nn))-m*A(j,j:min(j+2*n,nn));
      b(k)=b(k)-m*b(j);
   end
end
```

```
x=zeros(nn,1);%back substitution Ux=b' (b' : partial pivoting 이후의 b가 overwriting되어 있다.)
x(nn)=b(nn)/A(nn,nn);
for j=(nn-1):-1:1
   k=min(j+n,nn);
   x(j)=(b(j)-dot(A(j,j+1:k),x(j+1:k,1)))/A(j,j);
end

for j=1:nn %check the solution is correct;
   if(abs(saveb(j)-dot(saveA(j,:),x(:)))>5*10^-10)
   fprintf('The computed solution seems to be wrong at %f \n',j);
   end
end
n=n+2; %When we divide with meshes n, we get n+1 points. Don't forget that we started this program
with n=n-1.
u=zeros(n);
u(1,:)=0;u(n,:)=0;u(:,1)=0;u(:,n)=0; %boundary condition
for i=2:n-1
   for j=2:n-1
     u(i,j)=x((n-2)*(i-2)+j-1); %rearrange the solution from vector x to matrix u(i,j)
   end
end
%Let's check plot!
[X,Y]=meshgrid(0:h:1);
surf(X,Y,u);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x,y)');
title('2.31(h=1/100,LU pivoting)');
```

방정식의 해를 구하는 데에 오차를 $5 \cdot 10^{-10}$으로 주었고, 이를 실행하면 다음과 같은 그래프를 얻는다.



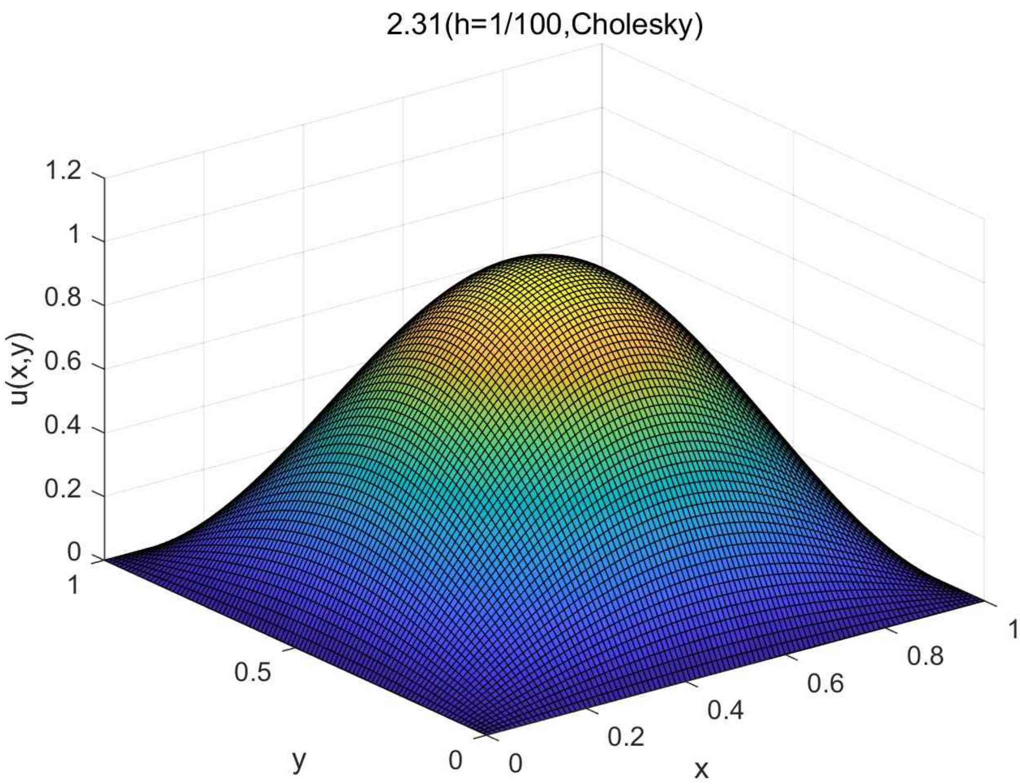
Solution check 문에서 아무런 메시지를 출력하지 않았으므로 알맞게 프로그래밍되었다고 볼 수 있다.

다음은 Cholesky method of banded matrix를 이용하여 문제를 해결해보자. 주어진 행렬이 symmetric & positive definite이므로 cholesky decomposition이 가능하고, 따라서 다음 방법을 적용할 수 있다. 필요한 MATLAB 프로그래밍 코드는 아래와 같다.

```
n=input('What is the dimension n? ');
h=1/n;n=n-1;nn=n^2;
A=zeros(nn,nn);L=eye(nn,nn);
b=zeros(nn,1);u=zeros(nn,1); %v=u-1, then the initial values corresponds to 1.
for i=1:nn
    A(i,i)=4;
end
for i=0:n-1
    for j=1:n-1
        A(n*i+j,n*i+j+1)=-1;
        A(n*i+j+1,n*i+j)=-1;
    end
end
for i=1:nn-n
    A(i,i+n)=-1;
    A(i+n,i)=-1;
end
for i=1:n
    for j=1:n
        b(n*(i-1)+j)=2*pi^2*sin(pi*j/(n+1))*sin(pi*i/(n+1));
    end
end
saveA=A;
saveb=b;
G=zeros(nn);
for j=1:nn %Cholesky decomposition
    mj=max(j-n,1);
    G(j,j)=sqrt(A(j,j)-dot(G(j,mj:j-1),G(j,mj:j-1)));
   for k=j+1:min(nn,j+n)
     mk=max(k-n,1);
     G(k,j)=(A(k,j)-dot(G(k,mk:j-1),G(j,mk:j-1)))/G(j,j);
   end
end
y=zeros(nn,1);%forward elimination for solving Gy=b
y(1)=b(1)/G(1,1);
for j=2:nn
    k=max(1,j-n);
    y(j)=(b(j)-dot(G(j,k:j-1),y(k:j-1,1)))/G(j,j);
end
x=zeros(nn,1);%back substitution G'x=y
H=G';
x(nn)=y(nn)/H(nn,nn);
for j=(nn-1):-1:1
    k=min(j+n,nn);
    x(j)=(y(j)-dot(H(j,j+1:k),x(j+1:k,1)))/H(j,j);
end
```

```
for j=1:nn %check the solution is correct;
if(abs(saveb(j)-dot(saveA(j,:),x(:)))>5*10^-10)
    fprintf('The computed solution seems to be wrong at %f \n',j);
end
end
n=n+2; %When we divide with meshes n, we get n+1 points. Don't forget that we started this program with n=n-1.
u=zeros(n);
u(1,:)=0;u(n,:)=0;u(:,1)=0;u(:,n)=0; %boundary condition
for i=2:n-1
    for j=2:n-1
        u(i,j)=x((n-2)*(i-2)+j-1); %rearrange the solution from vector x to matrix u(i,j)
    end
end
%Let's check plot!
[X,Y]=meshgrid(0:h:1);
surf(X,Y,u);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x,y)');
title('2.31(h=1/100,Cholesky)');
```

이번에도 방정식의 해를 구하는 데에 오차를 $5 \bullet 10^{-10}$으로 주었고, 이를 실행하면 다음과 같은 그래프를 얻는다.



이번에도 Solution check 문에서 아무런 메시지를 출력하지 않았고, 앞과 동일한 그래프를 얻었으므로 알맞게 프로그래밍되었다고 볼 수 있다.

실제로 우리가 해결하고자 하는 방정식

$$-\triangle u(x,y)=f(x,y)=2\pi^2\sin(\pi x)\cos(\pi y), x\in(0,1)^2$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial(0,1)^2$$

은 다음과 같은 식

$$u(x)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

를 Analytic solution으로 가진다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 이를 Geogra 3d-graph기능을 이용하여 그리면 다음과 같은 결과를 얻고, 알맞게 수치해를 구했음을 확인할 수 있다.