15. 정답 ④

ㄱ. (ⅰ) $\sin\frac{x^2}{2} - x^2\sin\frac{x^2}{2} = (1-x^2)\sin\frac{x^2}{2}$ 이므로

$0 < x < 1$일 때, $1 - x^2 > 0$, $\sin\frac{x^2}{2} > 0$

$\therefore\ \sin\frac{x^2}{2} - x^2\sin\frac{x^2}{2} > 0$

(ⅱ) $\cos\frac{x^2}{2} - \sin\frac{x^2}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$0 < x < 1$일 때, $\frac{\pi}{4} < \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$0 < \cos\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \cos\frac{x^2}{2} - \sin\frac{x^2}{2} > 0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $x^2\sin\frac{x^2}{2} < f(x) < \cos\frac{x^2}{2}$ [참]

다른풀이

$0 < x < 1$에서 $0 < x^2 < 1$이므로 양변에 $\sin\frac{x^2}{2}$ 을 곱하면

$x^2\sin\frac{x^2}{2} < \sin\frac{x^2}{2}$ ...... ㉠

$0 < x < 1$일 때, $0 < \frac{x^2}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\sin\frac{x^2}{2} < \cos\frac{x^2}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2\sin\frac{x^2}{2} < \sin\frac{x^2}{2} < \cos\frac{x^2}{2}$

ㄴ. $f(x) = \sin\frac{x^2}{2}$ 에서 $f'(x) = x\cos\frac{x^2}{2}$

$f''(x) = \cos\frac{x^2}{2} + x\left(-\sin\frac{x^2}{2} \times x\right) = \cos\frac{x^2}{2} - x^2\sin\frac{x^2}{2}$

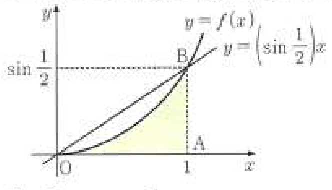
ㄱ에서 $x^2\sin\frac{x^2}{2} < \cos\frac{x^2}{2}$ 이므로

$f''(x) = \cos\frac{x^2}{2} - x^2\sin\frac{x^2}{2} > 0$

즉, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x) > 0$이므로

곡선 $y = f(x)$아래로 볼록하다. [거짓]

ㄷ. $0 < x < 1$에서 아래로 볼록인 그림은 다음과 같다.



$\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin\frac{1}{2}$ 은 삼각형 OAB의 넓이이고

곡선 $y = f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하므로

$\int_0^1 f(x)\,dx$는 색칠한 부분의 넓이이다.

즉 $\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \left(\sin\frac{1}{2}\right)x\,dx$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.