11.2 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 1 (Кр. Коши р. сх. ф. посл-ти)

Посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и $f(x)$ равном на мн. X $\Leftrightarrow$
вып. усл. Коши:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon \quad (1)$$

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Тогда

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Поскольку

$\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow n+p>n\geq N$, то $\forall x\in X \hookrightarrow |f_{n+p}(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

След-но,

$\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f_{n+p}(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, т.е вып (1)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (1). След-но,

$\forall x\in X\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon$,

т.е $\forall x$ - фикс. $\in X$ вып. усл. Коши сх-ти числ. посл-ти. $\{f_n(x)\}$.

В силу кр. Коши для числ. посл. $\forall x\in X$ посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх.

Обозн. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Перепишем усл (1) в виде

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall x\in X\ \underbrace{\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon}$$

Рассм. отдельно усл

Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty}|f_n(x)-f_{n+p}(x)|=|f_n(x)-f(x)|$, то по теор. о пред. переходе в нер-вах $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$

Итак, из усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, т.е $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}f(x), n\to\infty$ ■

Теорема 2 (Кр. Коши р. сх. ф. ряда)

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх. равн. на мн. X $\Leftrightarrow$

вып. усл. Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leq\varepsilon \quad (2)$$

□ Док-во состоит в примен. кр. Коши р. сх. посл. (теор 1) к посл. част. сумм ряда ■

Следствие (НУ равн. сх. ряда)

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх равн. на X, то $u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0$ при $n\to\infty$.

□ Полагая в усл (2) $p=1$, получаем

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall x\in X \hookrightarrow |u_{n+1}(x)|\leq\varepsilon$, т.е $u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0, n\to\infty$ ■

$\boxed{11.3}$ Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (О непр-ти предельной ф-и)

Если посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непр на мн-ве X ф-й сх. к ф-и $f(x)$ <u>равном</u> на мн. X, то ф-я $f(x)$ непр на мн. X.

□ Зафикс. произвольные $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$.

Треб. доказать сущ-е числа $\delta > 0$ такого, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (1)$$

По опр. р.сх $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$

В частности,

$$\forall x \in X \hookrightarrow |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2)$$

Поскольку ф-я $f_N(x)$ непр на X, то $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

Из (2) и (3):

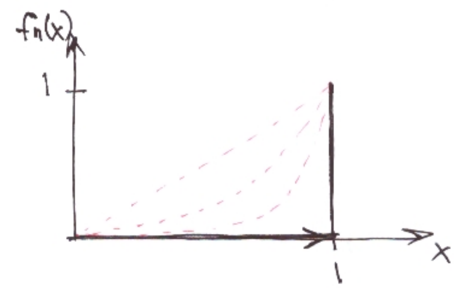
$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

След-но, справ. (1) ■

<u>Замеч</u> Из поточеч. сх. посл. непр. ф-й $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к ф-и $f(x)$ не след. непр. $f(x)$

Например, $f_n(x) = x^n$ на $[0,1]$ сх к разрывной ф-и $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (О непр-ти суммы ряда)

Если функц. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на мн X и все ф-и $u_k(x)$ непр на мн. X, то сумма ряда явл. непр. ф-ей.

□ Док-во состоит в примен. теор 1 к посл-ти част. сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ■

11.4 Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1 (об интегр-и пред. ф-и)

Пусть посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непр. на отрезке $[a,b]$ функций сх. равн. на $[a,b]$ к ф-и $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

□ Из теор 1 11.3 след, что ф-я $f(x)$ непр на $[a,b]$, а значит, интегр. по Риману на $[a,b]$.

По теор. об. интег-и нер-в:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\le(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$$

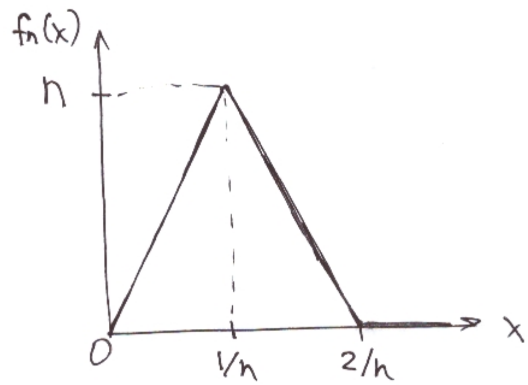
Т.к $f_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f(x)$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\to 0$, $n\to\infty$

След-но, $\int_a^b f_n(x)dx\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ ■

Замеч Из поточ. сх-ти $f_n(x)\underset{[a,b]}{\to}f(x)$ при $n\to\infty$ не след., что $\int_a^b f_n(x)dx\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

Например,

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x & ;x\in[0,\frac{1}{n}]\\ 2n-n^2x & ;x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\\ 0 & ;x\in[\frac{2}{n},1]\end{cases}$$



Тогда $f_n(x)\underset{[0,1]}{\to}0$ при $n\to\infty$

Но $\int_0^1 f_n(x)\,dx=1\not\to 0$ при $n\to\infty$

Теорема 2 (О почленном интег-и ряда)

Если функ-й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх. равн. на $[a,b]$ и все ф-и $u_k(x)$ непр на $[a,b]$, то числ. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)$ сх к интегралу от суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, т.е справ-ва ф-ла почлен. инт. ряда:

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)$$

□ Прим. теор 1 к посл-ти част. сумм $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)\overset{\text{теор 1}}{=}$$

$$\overset{\text{теор 1}}{=}\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}S_n(x)\right)dx=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)dx \quad ■$$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (О диф-и пред ф-и)

Пусть посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непр. диф. на отр $[a,b]$ ф-й сх. хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, а посл-ть производных $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. равном. на $[a,b]$.

Тогда посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. равн на $[a,b]$ к нек. непр. диф. ф-и $f(x)$, причем

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad (1)$$

□ По усл. сущ. ф-я $\varphi(x)$: $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n\to\infty$.

Поскольку ф-и $f_n'(x)$ непр, то в силу $\underset{(11.3)}{\text{теор 1}}$ ф-я $\varphi(x)$ непр.

Из усл. теор след, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$.

Определим ф-ю $f(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$

Заметим, что $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$, след-но,

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - \varphi(t)|\,dt$$

Поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)|.$$

Поскольку $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \to 0$, $n\to\infty$.

След-но,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

т.е. $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

Из опр ф-и $f(x)$ след, что $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ ■

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (О почленном диф-и ряда)

Пусть функц-й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, все ф-и $u_k(x)$ непр. диф-мы на $[a,b]$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сх. равном. на $[a,b]$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на $[a,b]$ и справ. ф-ла почлен. диф-я ряда:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

□ Прим. теор 3 к посл. ч. сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получ, что эта посл. р. сх. на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ справ:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \quad ■$$

11.5 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 1 (Обобщенный пр. сравн)
Пусть $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |u_k(x)| \le v_k(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сх. равн на X.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн на мн. X.

□ В силу кр. Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\ge N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \le \varepsilon$$

Используя нер-во

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right|$$

$\left(\underbrace{|u_1+\ldots+u_n|}\le|u_1|+\ldots+|u_n|\le v_1+\ldots+v_n\le\underbrace{|v_1+\ldots+v_n|}\right)$, имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\ge N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \varepsilon$$

прим. кр. Коши и получаем треб. ■

Теорема 2 (Приз. Вей-са)
Если $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |u_k(x)|\le a_k$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн на мн. X.

□ Док-во сост. в прим. теор 1 для $v_k(x)=a_k$ ■

Опр. Функ. посл-ть $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно ограниченной на мн. X, если

$$\exists C\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)|\le C$$

Лемма 1 Если посл-ть $\{f_n(x)\}$ р. огр. на мн. X и $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, то $f_n(x)g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$

□ Т.к посл. $\{f_n(x)\}$ р. огр, то

$$\exists C\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)|\le C$$

Поскольку $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{x\in X}|g_n(x)| \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

След-но,

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)g_n(x)| \le C\cdot\sup_{x\in X}|g_n(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n\to\infty, \text{ т.е}$$

$$f_n(x)g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } n\to\infty$$

Теорема 3 (Приз. Дирихле)

Пусть на мн X заданы две ф. посл. $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовл. усл:

1) Посл. ч. сумм $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ р. огр, т.е

$\exists C\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \mapsto |A_n(x)|\le C$;

2) $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k\to\infty$;

3) $\forall x\in X\ \forall k\in\mathbb{N} \mapsto b_{k+1}(x)\le b_k(x)$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ р. сх. на мн X.

□ Выполним преоб-е Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(A_k(x)-A_{k-1}(x)\right)b_k(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)b_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)b_{k+1}(x) =$$

$$\underset{A_0(x)=0}{=} A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\left(b_k(x)-b_{k+1}(x)\right) \qquad (1)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n}(b_k(x)-b_{k+1}(x)) = b_1(x)-b_{n+1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} b_1(x)$ при $n\to\infty$,

т.е ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k(x)-b_{k+1}(x))$ р. сх, след-но, р. сх и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C(b_k(x)-b_{k+1}(x))$

Поскольку $|A_k(x)|\le C$, $b_k(x)-b_{k+1}(x)\ge 0$, то

$|A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))| \le C(b_k(x)-b_{k+1}(x))$, и в силу теор 1 получаем

р. сх ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))$, т.е сущ. ф-я $S(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\left(b_k(x)-b_{k+1}(x)\right) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \text{ при } n\to\infty \qquad (2)$$

В силу леммы 1 из р. сх п-ти $\{b_n(x)\}$ к 0 и р. огр. п. $\{A_n(x)\}$

след, что $A_n(x)b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$.

Отсюда и из (1) и (2) след, что $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, $n\to\infty$,

т.е ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ р. сх на X ■

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (Приз. Абеля)

Пусть на мн. X заданы две ф. посл-ти $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовл. усл:

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ р. сх на X;

2) посл-ть $\{b_k(x)\}$ р. огр, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \; \forall x \in X \longmapsto |b_k(x)| \leq C \qquad (3)$$

3) $\forall x \in X \;\; \forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ р. сх на мн. X

$\square$ При $\forall$ фикс $x \in X$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сх. в силу пр. Абеля для числ. ряда

Согласно кр. р. сх ряда (теор 2 $\boxed{\text{II.1}}$) достаточно док-ть, что

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty \qquad (4)$$

Для любых $n \in \mathbb{N}, x \in X$ определим $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$.

Т.к $R_{n-1}(x) - R_n(x) = a_n(x)$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (R_{k-1}(x) - R_k(x)) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} R_{k-1}(x) b_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} R_k(x) b_{k+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) b_k(x) =$$

$$= R_n(x) b_{n+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \qquad (5)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ обознач. $M_n = \sup\limits_{k \geq n} \sup\limits_{x \in X} |R_k(x)|$.

Т.к ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ р. сх. на мн X, то $\sup\limits_{x \in X} |R_k(x)| \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$

След-но, $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\forall p \in \mathbb{N}$ справ. соот:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| \leq M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) =$$

$$= M_n (b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)) \overset{(3)}{\leq} 2CM_n,$$

то $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X$ имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = \lim_{p \to \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| \leq 2CM_n$$

Поэтому, используя (3) и (5), получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \leq 3CM_n \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty$$, что доказывает (4) $\blacksquare$

12.1 Степенные ряды с комплексными членами

Напомним, что модулем комплексного числа $z = x + iy$ (где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$) наз. вещ. число $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Опр. Комплексное число S наз. пределом последовательности комплексных чисел $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$), если $\lim\limits_{n\to\infty} |S - S_n| = 0$

Заметим, что

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \iff \left(\operatorname{Re} S = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} S_n \text{ и } \operatorname{Im} S = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} S_n\right) \qquad (1)$$

Опр. Пусть задана посл-ть компл. чисел $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ наз сходящимся, если сущ. конечный предел посл-ти частичных сумм этого ряда

Компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ наз. абсолютно сходящимся, если сх. вещ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |C_k|$.

Из усл (1) след, что сх-ть компл. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ эквив. сх-ти двух вещ. рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} C_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} C_k$.

Лемма 1 Если компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ сх абс, то он сх.

□ Обозн. $a_k = \operatorname{Re} C_k$; $b_k = \operatorname{Im} C_k$.

Т.к $|a_k| \le \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |C_k|$, то в силу пр. срав. из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |C_k|$ след. абс. сх-ть вещ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, т.е его сх-ть.

Аналогично получаем сх-ть вещ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$

След-но, компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + i b_k)$ сх ■

Опр Пусть на нек. мн-ве компл. чисел $Z \subset \mathbb{C}$ задана посл-ть комплексозначных ф-й $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$.

Буд. гов, что посл-ть компл. ф-й $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к ф-и $S(z)$ равномерно на мн-ве Z, если посл-ть вещ. ф-й $\{|S_n(z) - S(z)|\}_{n=1}^{\infty}$ сх. к 0 равномерно на мн-ве Z.

Опр. Буд. гов., что комплексный функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на мн. Z, если посл-ть част. сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$ этого ряда сх-ся равном к сумме $S(z)$ этого ряда,

т.е $|S_n(z) - S(z)| \underset{Z}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1 (Пр. Вей-са р. сх. компл. ряда)

Пусть на мн. $Z \subset \mathbb{C}$ задан компл. функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$.

Пусть $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall z \in Z \hookrightarrow |u_k(z)| \le a_k$ и пусть вещ. числ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сх.

Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сх. равн. на мн. Z.

□ В силу пр. сравн. вещ. числ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_k(z)|$ сх. $\forall z \in Z$

Отсюда в силу леммы 1 получ. поточеч. сх. ф. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ на мн. Z,

т.е $\forall z \in Z\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z) \in \mathbb{C}$, где $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$

Заметим, что

$$|S_n(z)-S(z)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

след-но, $\sup\limits_{z\in Z}|S_n(z)-S(z)|\to 0$ при $n\to\infty$, т.е $|S_n(z)-S(z)| \underset{Z}{\rightrightarrows} 0, n\to\infty$ ∎

Опр. Пусть задана посл-ть компл. чисел $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ и компл. число ω_0. Комплексный функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k(\omega-\omega_0)^k$ с компл. переменной ω наз. <u>степенным рядом</u>.

Введение компл. перем. $z=\omega-\omega_0$ сводит ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k(\omega-\omega_0)^k$ к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k z^k$

поэтому будем рассм. степ. ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k z^k$.

12.3 Круг и радиус сходимости

Опр. <u>Радиусом сходимости</u> степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k z^k$ наз. $R_{cx}\in[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, определяемое по <u>формуле Коши–Адамара</u>:

$$\frac{1}{R_{cx}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}$$

(при этом будем полагать, что $\frac{1}{0}=+\infty, \frac{1}{+\infty}=0$)

Напомним, что

Опр. <u>Верхним пределом</u> числовой посл-ти $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз. точная верхняя грань мн-ва всех (конечных или беск) частичных пределов посл-ти $\{x_k\}$:

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_k=\sup\{A\in\overline{\mathbb{R}}: \exists$ п/п $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}: A=\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}\}$

Опр. Круг на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом R_{cx} наз. <u>кругом сходимости</u> степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k z^k$.

Если $R_{cx}=+\infty$, то кругом сх-ти считается вся компл. пл-ть $\mathbb{C}$.

12.4 Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости

Теорема 1 (Обобщенный признак Коши сх-ти числ. ряда)

Пусть все члены числ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ неотриц. и пусть $q=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}$.

Тогда а) если $q<1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ сх;

б) если $q>1$, то $a_k\not\to 0$ при $k\to\infty$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ расх;

в) если $q=1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ может сх, а может расх.

□ … ∎

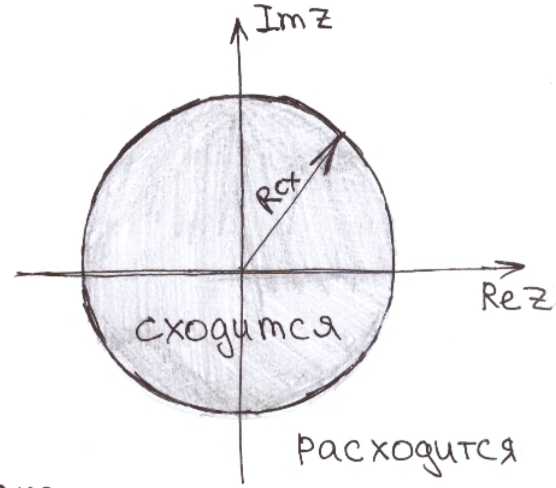
<u>Замеч</u> Теорема 1 явл. обобщением следствия из признака Коши (см. 10.4)

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$ может не сущ, но $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}$ сущ. всегда.

⟶

Теорема 2 (О круге сх-ти степ. ряда)

Степ. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$



1) абс. сх. внутри круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z\in\mathbb{C} : |z| < R_{сх}\}$)
2) расх. вне круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z\in\mathbb{C} : |z| > R_{сх}\}$)
3) на границе круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z\in\mathbb{C} : |z| = R_{сх}\}$) может сх, а может и расх

(здесь $R_{сх}$ – рад. сх. степ. ряда)

□ Зафиксируем произв. компл. число $z\neq 0$ и исслед. сх-ть ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью обобщ. пр. Коши (теор. 1)

Определим

$$q=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k z^k|}=|z|\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}=\frac{|z|}{R_{сх}}$$

(где при $R_{сх}=0$, $|z|>0$ след. положить $q=+\infty$)

1) При $z=0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ состоит из нулей, а значит, сх.

Если $0<|z|<R_{сх}$, то $q<1$ и в силу теор 1 ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ сх, т.е ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. абс.

2) Если $|z|>R_{сх}$, то $q>1$ и в силу теор 1 члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ не стрем. к нулю, след-но, не стрем к нулю и члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а значит, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расх.

(Заметим, что из расх-ти ряда $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ не след. расх. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, и поэтому важно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ не только расх, но и его члены не стрем к нулю)

3) Рассм, напр, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k+1}$

По ф. Коши-Адамара

$$\frac{1}{R_{сх}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}=\lim_{k\to\infty}e^{-\ln(k+1)/k}=e^0=1$$

$R_{сх}=1$

При $z=1$ иск. ряд имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ и расх.

При $z=-1$ иск ряд имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ — сх по пр. Лейбница ■

12.5 Формула Коши-Адамара

См. опр. радиуса сх-ти в **12.3**

$\boxed{12.2}$ Первая теорема Абеля

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Первая Абеля)

Пусть степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх в т $z=z_0$.

Тогда в любой точке $z=z_1$ такой, что $|z_1|<|z_0|$, этот ряд сх. абс.

$\square$ Т.к степ. ряд сх в т. $z=z_0$, то в силу теор 2 $\boxed{12.4}$ рад. сх. этого ряда удовл. нер-ву $R_{cx} \geq |z_0|$.

След-но, $|z_1|<|z_0| \leq R_{cx}$, и, согл. теор 2 $\boxed{12.4}$, в т. $z=z_1$ степ ряд сх абс $\blacksquare$

$\boxed{12.6}$ Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании. ряда.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Радиусы сх-ти степ. рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, полученных формальным почленным диф-ем и инт-ем степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, совпадают с рад. сх. исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

$\square$ Покажем сначала, что рад. сх R_1 ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k z^k$ равен рад. сх. R исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

В силу ф. Коши-Адамара имеем

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|\cdot k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \cdot \underline{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}$$

(Т.к

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{\ln k}{k}} = e^0 = 1\ )$$

След-но, $R_1 = R$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k z^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ сх или расх одновреме.

При $z=0$ эти ряды, очевидно, сх.

Пусть $z \neq 0$.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k k z^k$; $\tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k k z^{k-1}$

Если сущ. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то сущ. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{z} = \frac{S}{z} \in \mathbb{C}$.

Обратно, если сущ. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{C}$, то сущ. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = z\tilde{S}$

След-но, рад. сх. R_1 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$ равен рад. сх. R_2 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$.

Итак, $R_2 = R_1 = R$, т.е при почл. диф-и степ ряда его рад. сх не измен

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ получ. при почлен. диф-и ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, то рад. сх. этих рядов также совп. $\blacksquare$

12.7 Вторая теорема Абеля

Теорема (Вторая Абеля)

Если степ. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ с рад. сх. $R\in(0,+\infty]$ сх. в т. $z_1\neq z_0$, лежащей внутри или на границе круга сх, то он сх. равномерно на отр $[z_0,z_1]$ соед. т. z_0 и z_1 на компл. пл-ти

□ Пусть $z_1\neq z_0$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сходится.

Т.к отр. $[z_0,z_1]$ может быть параметризован как $z=z_0+t(z_1-z_0)$, $0\leq t\leq 1$, то

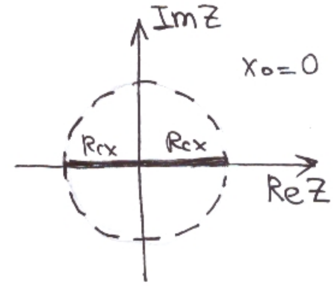
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n\cdot\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n t^n$$

числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сх. и члены его не зав. от $t\in[0,1]$, т.е его можно считать равн. сх. рядом с компл. чл. на мн-ве $t\in[0,1]$.

Послед-ть $b_n(t)=t^n$ убывает $\forall t\in[0,1]$ (постоянна при $t=0$ и $t=1$), причем $|b_n(t)|\leq 1$ $\forall t\in[0,1]$, $n=0,1,2,\ldots$

По пр. Абеля р. сх. рядов (см 11.5) данный ряд р. сх. по $t\in[0,1]$, т.е по $z\in[z_0;z_1]$ ■

$\boxed{13.1}$ Степенные ряды с действительными членами

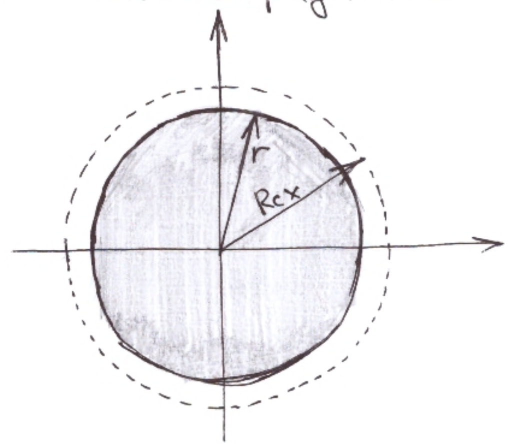


Будем рассм. веществ. степ. ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, где $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$

Поскольку вещ. ст. ряд можно рассм как компл. степ ряд, то рад. сх R_{cx} ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ можно определять из ф. Коши-Адамара, в кот. след. положить $c_k = a_k$

Интервал $(x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ наз. интервалом сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

$\boxed{13.2}$ Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.



$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (О равномерной сх-ти степ. ряда)

Пусть $R_{cx} > 0$ – рад. сх. степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Тогда для любого числа $r \in (0, R_{cx})$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равн. в круге $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$.

☐ Заметим, что $\forall z \in Z \ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow$

$|c_k z^k| \le |c_k| \cdot r^k$.

Поскольку $|r| = r < R_{cx}$, то в силу теор 2 $\boxed{12.4}$ числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k r^k|$ сх.

Отсюда и из. пр. Вей-са р. сх компл. ряда (теор 1 $\boxed{12.1}$) след. р. сх. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ на мн. Z ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ Пусть вещ. ст. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$ имеет рад. сх. $R_{cx} > 0$

Тогда в интервале сх-ти $(x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ ф-я $f(x)$ имеет произв. любого порядка, получ. почленным диф-ем ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((x-x_0)^k\right)^{(n)} \quad \forall x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx}) \qquad (1)$$

☐ Покажем, что $\forall x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ сущ. конеч. произв. $f'(x)$, причем $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}$.

Зафикс. произв. $x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ и опред. число $r \in (0, R_{cx})$ из усл. $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

В силу теор. 1 $\boxed{12.6}$ р. сх. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (t-x_0)^{k-1}$, получ. почл. диф-ем ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$, равен R_{cx}.

След-но, в силу нер-ва $r < R_{cx}$ и теор о р.сх. степ. ряда (теор 1) этот ряд сх. равн. на отр $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Поэтому согл. теор. о почлен. диф-ти функ. ряда (теор 4 $\boxed{11.4}$) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$ можно диф-ть почл. на отр $[x_0 - r, x_0 + r]$

В частности, сущ. $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}$.

След-но, при $n=1$ справ. ф-ия (1)
Проведя те же рассужд. для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k(x-x_0)^{k-1} = f'(x)$, получ. ф. (1) при $n=2$ и т.д.

По инд. формула (1) справ. $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

13.3 Единственность представления функции степенным рядом.

Теорема 1 Коэф. степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$ однозначно опред. по ф-и $f(x)$ с помощью формулы $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

□ Заметим, что

$$((x-x_0)^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n} & , k \geq n \\ 0 & , k < n. \end{cases}$$

След-но,

$$((x-x_0)^k)^{(n)}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} n! & , k=n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

Отсюда и из ф-лы (1) из 13.2 след, что $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$ ■

13.5 Ряд Тейлора

Опр. Ф-я $f(x)$ наз. бесконечно дифференцируемой в т x_0, если в этой точке сущ. производные любого порядка ф-и $f(x)$.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ беск. диф в т x_0.
Тогда ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
наз. рядом Тейлора ф-и $f(x)$ в т x_0.

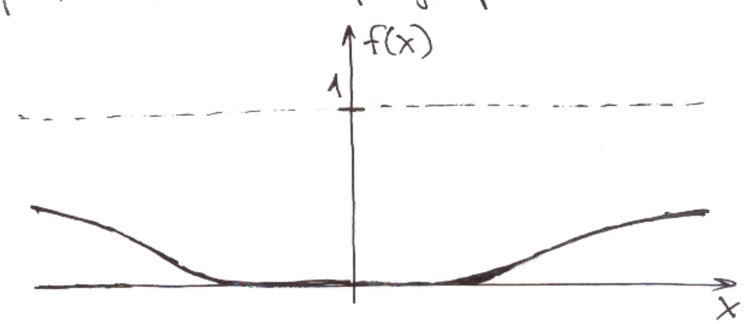
Опр. Ф-я $f(x)$ наз. регулярной в т x_0, если она беск. диф. в этой т. и ряд Тейлора ф-и $f(x)$ в т x_0 сходится к ф-и $f(x)$ в нек окр-ти т x_0:
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Опр. Ряд Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0 = 0$ наз. рядом Маклорена этой ф-и

13.7 Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд.

Ряд Тейлора в т x_0 беск. диф. ф-и $f(x)$ может сходиться не к ф-и $f(x)$, а к нек. другой ф-и, не совп. с $f(x)$ в сколь угодно малой окрес-ти т. x_0. В этом случае ф-я $f(x)$ не явл. регулярной в т x_0.

Пример
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{k/2} e^{-t} = 0$$

Отсюда следует, что

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

По индукции

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$, где $P_{3n}(t)$ – многочлен ст $3n$ от t.

След-но, все коэф. ряда Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0=0$ равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0=0$ равна нулю и не совп. с ф-ей $f(x)$ в сколь угодно малой окр т. x_0.

Т.е $f(x)$ не явл регул, но явл беск. диф. в т $x_0=0$.

$\boxed{13.4}$ Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

Напомним, что остаточным членом формулы Тейлора n раз диф ф-и $f(x)$ в т x_0 наз

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Замеч Ост. член. ф-лы Тейлора не всегда совп. с остатком ряда Тейлора.

Например, для

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases} \qquad (*)$$

$S_n(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{N}$ (см. $\boxed{13.3}$), поэтому остаток ряда Тейлора тождественно равен 0.

А остат. чл $r_n(x)=f(x)\neq 0 \quad \forall x\neq 0$.

Непосредственно из опр. следует, что ф-я $f(x)$ явл. регулярной в т x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(x_0)\longmapsto \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad (1)$$

На прим. ф-и (*) видно, что для док-ва регулярности ф-и недостаточно показать, что радиус сх-ти ряда Тейлора этой ф-и $R_{cx}>0$.

Нужно проверить усл (1)

Теорема (ДУ регулярности)

Пусть сущ. число $\delta>0$ такое, что ф-я $f(x)$ беск. диф в $U_\delta(x_0)$ и $\exists M>0: \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)|\le M$.

Тогда ф-я f регулярна в т x_0 и

$$\forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2)$$

□ В силу ф-лы Тейл с ост чл. в ф. Лагранжа $\forall x\in U_\delta(x_0)\ \exists\xi\in\mathbb{R}$, леж. между x и x_0 (а значит, $\xi\in U_\delta(x_0)$), такое, что

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

След-но,

$$\forall x\in U_\delta(x_0)\hookrightarrow |r_n(x)|\le M\cdot\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (3)$$

Покажем, что $\forall a>0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

Определим $n_0\in\mathbb{N}$ из усл. $n_0>2a$, тогда при $n>n_0$ имеем

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{a^{n-n_0}}{n(n-1)\dots(n_0+1)}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a^{n-n_0}}{n_0^{n-n_0}}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Отсюда и из (3) получаем

$$\forall x\in U_\delta(x_0)\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

Поэтому ф-я f регулярна в т x_0 и вып. ~~усл.~~ соот. (2) ■

13.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема (ф-ла Тейлора с ост чл в инт. форме)

Если ф-я $f(x)$ на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имеет непрер. произв. до $(n+1)$-го пор. вкл, то для остат. чл ф. Тейл.

$r_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ справ. представл. в интегр. форме:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

□ Поскольку $r_0(x)=f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=\frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\,dt$, то при $n=0$ теор справ.

Предположим, что теор спр. для $n=s-1$, т.е

$$r_{s-1}(x)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{s-1}f^{(s)}(t)\,dt$$

Интегрируя по частям, получаем

$$r_{s-1}(x)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(s)}(t)\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)d\left((x-t)^s\right)=-\frac{1}{s!}f^{(s)}(t)(x-t)^s\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{s!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{s!}f^{(s)}(x_0)(x-x_0)^s+\frac{1}{s!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt.$$

Отсюда получаем формулу для ост. чл. пор s:

$$r_s(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=r_{s-1}(x)-\frac{1}{s!}f^{(s)}(x_0)(x-x_0)^s=\frac{1}{s!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt$$

След-но, теор. справ. при $n=s$.

По инд. получаем справ. теор. $\forall n\in\mathbb{N}$ ■

13.8 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x; $\cos x$; $\sin x$; $\ln(1+x)$; $(1+x)^\alpha$

Теорема 1 Ряды Маклорена ф-й e^x, $\sin x$, $\cos x$ сходятся к этим ф-ям на всей числовой прямой: для любого $x\in\mathbb{R}$ справ р-ва

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!};\quad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k};\quad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

□ Т.к $\forall\delta>0$ при $x\in U_\delta(0)=(-\delta,\delta)$ справ-вы соотношения $|(e^x)^{(n)}|=e^x<e^\delta$, то вып. ДУ регулярности ф-и $f(x)=e^x$ в т $x_0=0$, и ф-я e^x представляется своим рядом Маклорена:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Аналогично для ф-й $\cos x$ и $\sin x$, используя огранич-ть на любом интервале $(-\delta,\delta)$ и прим. ДУ рег-ти (теор 1 13.4), получаем

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k};\quad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\ ■$$

Теорема 2 Ряд Маклорена степенной ф-и $f(x)=(1+x)^\alpha$ сх. к этой ф-и при $x\in(-1,1)$:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k\quad\forall x\in(-1,1),$$

где $C_\alpha^0=1$; $C_\alpha^k=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

□ Зафикс. $x\in(-1,1)$

Записывая ост. чл. ф-лы Маклорена ф-и $f(x)=(1+x)^\alpha$ в интег. ф-ме и учит, что $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, получаем

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt\ \underline{\underline{t=\tau x}}$$

$$\underline{\underline{t=\tau x}}\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^1 x^n(1-\tau)^n(1+\tau x)^{\alpha-n-1}x\,d\tau=\lambda_n\int_0^1\left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n(1+\tau x)^{\alpha-1}d\tau,$$

где введено обознач.

$$\lambda_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \qquad (1)$$

Поскольку $\forall x \in (-1,1)$ $\forall \tau \in [0,1] \hookrightarrow 1+\tau x \geq 1-\tau$, то $\left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n \leq 1$

След-но,

$$|r_n(x)| \leq |\lambda_n| \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau = |\lambda_n| C, \qquad (2)$$

где величина $C = \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau$ не зав. от n.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \qquad (3)$

Если $x=0$, то согласно рав-ву (1) имеем $\lambda_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Если $\alpha = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из (1) след. $\lambda_n = 0$ при $n > m$

Поэтому в случаях $x=0$ и $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ соот. (3) справедл.

Пусть $x \neq 0$ и $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)x^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)x^{n+1}} = \frac{\alpha-n-1}{n+1} x \xrightarrow{n\to\infty} -x \in (-1,1)$$

Выберем число $q \in (|x|, 1)$.

Тогда по опр. предела сущ номер n_0 такой, что $\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} < q$ $\forall n \geq n_0$.

Поэтому при $n \geq n_0$ имеем $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n_0}| q^{n-n_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Отсюда вытекает соотнош (3), кот. вместе с (2) дает

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ $\forall x \in (-1,1)$ ∎

<u>Замечание</u> При $\alpha = n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall k \geq n+1$ имеет место $C_\alpha^k = 0$, и, след-но, ряд Маклорена ф-и $(1+x)^\alpha$ совпадает с конечной суммой:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

В случае $\alpha \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$, используя ф-лу $R_{cx} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$, вычисл. рад. сх-ти ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$:

$$R_{cx} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k+1}{\alpha-k}\right| = 1$$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in (-1,1)$

□ Т. к

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ $\forall x \in (-1,1)$, то из теор. о почлен. инт. степ ряда ($\boxed{12.6}$) при $|x|<1$ получаем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{n=k+1}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1,1) \quad ∎$$

13.9 Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Напомним, что $\forall z \in \mathbb{C}$ $(z = x+iy;\ x,y \in \mathbb{R})$ определяется

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Основное св-во экспоненты $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ сохр для комплексных показ.

Теорема 1 $\forall z \in \mathbb{C}$ имеет место рав-во

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\square$ По теор 1 13.8 соотв. разлож. верно $\forall z = x \in \mathbb{R}$

Значит, рад. сх. ст ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, и он абс. сх $\forall z \in \mathbb{C}$.

Пусть $z = x+iy;\ x,y \in \mathbb{R}$

Тогда $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

(Здесь использ то, что ряды абс сх, и суммир. их можно в любом пор)

Если мы докажем, что при $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ вып рав-во

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\ , \text{ то}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ , \text{ т.е}$$

то, что нужно доказать.

Произв. двух абс. сх. рядов — абс. сх. ряд, кот. можно суммир. в любом порядке (см 10.8)

Применим суммирование „по пачкам" (см. рис)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

$$\begin{array}{ccccc}
u_0 v_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & \dots & u_0 v_n \ \dots \\
u_1 v_0 & u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \ \dots \\
u_2 v_0 & u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \ \dots \\
u_3 v_0 & u_3 v_1 & u_3 v_2 & \dots & u_3 v_n \ \dots \\
\dots & & & & \\
u_n v_0 & u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \ \dots \\
\dots & & & &
\end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, z_1^k \, z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} .$$

Т.е разложение ф-и e^z обосновано ∎