Лекция 9 (7 апреля 2020) Билинейные и квадратичные функции. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Определение 1. Пусть L – линейное пространство над полем K (достаточно считать, что поле скаляров – R – действительные числа). Функция двух векторных переменных $b(x,y): L \times L \to K$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть:

(1) $b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y)$,

(2) $b(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 b(x, y_1) + \beta_2 b(x, y_2)$ для любых векторов $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$.

Скалярное произведение геометрических векторов – самый наглядный пример билинейной функции.

Прежде чем перейти к рассмотрению билинейных функций в координатах, приведем примеры функций, заданных без координат.

Пример 1. Пусть $L = R[a,b]$ - линейное пространство функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$, для любых функций $f(x), g(x) \in L$ интеграл от произведения $I(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной функцией на L.

Пример 2. На пространстве $L = M_n(R)$ действительных матриц порядка n рассмотрим две функции для любых матриц $X, Y \in M_n(R)$ а) $b_1(X,Y) = tr(XY)$ - след произведения;

б) $b_2(X,Y) = tr(X^T \cdot Y)$. Билинейность этих функций следует из линейности функции следа $trX = x_{11} + ... + x_{nn}$ и свойств действий над матрицами.

Пусть L имеет размерность n, $e = \|e_1, e_2, ..., e_n\|$ - базис в L. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)\,(1 \le i, j \le n)$.

Определение 2. Матрицу $B = (b_{ij}) = B_e$ называют *матрицей билинейной функции* $b(x,y)$ в базисе $e = \|e_1, e_2, ..., e_n\|$.

Координатная запись билинейной функции.

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i,\ y = \sum\limits_{j=1}^n y_j e_j$, тогда

$$b(x,y)=b(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_jb(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ib_{ij}y_j=X^TBY \quad (3),$$

где $B=(b_{ij})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, а $X^T=(x_1\dots x_n)$.

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (3) называют билинейной формой. (По традиции, термин «билинейная форма» используется и для билинейной функции, не записанной в координатах.)

Утверждение 1. (Изменение матрицы билинейной функции при замене базиса). Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ и $e'=(e_1',\dots,e_n')$ - два базиса пространства L, S – матрица перехода от базиса e к базису e', B, B' – матрицы билинейной формы **b** в базисах e,e' соответственно.

Тогда $B'=S^TBS$. (4)

Доказательство. Мы знаем, что $X=SX'$, $Y=SY'$ $(\det S\neq 0)$, где X',Y' - столбцы координат векторов x,y в новом базисе. Подставим эти выражения в (3):
$X^TBY=(SX')^TB(SY')=(X')^T(S^TBS)Y'$, для любых $X',Y'\in R^n$, следовательно, $B'=S^TBS$ (чтобы доказать совпадение матриц , нужно подставлять в равенство $(X')^T(S^TBS)Y'=(X')^TB'Y'$ координаты всех пар e_i',e'_j : $E_i^TBE_j=b_{ij}$), чтд.

Следствие из формулы (4): 1) ранг матрицы B и 2) знак ее определителя (если он не равен 0) не зависят от выбора базиса.

Определение 4. Билинейная форма $b(x,y)$ называется *симметрической*, если $\forall x,y\in L,\ \ b(x,y)=b(y,x)$, и кососимметрической, если $\forall x,y\in L,\ \ b(x,y)=-b(y,x)$.

Утверждение 2. Матрица *симметрической* билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. $B^T=B$, а кососимметрической билинейной формы – кососимметрической: $B^T=-B$. Это очевидно.

Утверждение 3. Любая билинейная функция $b(x,y)$ единственным образом представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической функций.

Доказательство. Будем искать разложение $b(x,y)=b_+(x,y)+b_-(x,y)$ (1), где $b_+(x,y)=b_+(y,x),\ b_-(x,y)=-b_-(y,x)$. Тогда $b(y,x)=b_+(x,y)-b_-(x,y)$ (2). Сложив равенства (1) и (2), получим $b_+(x,y)=\dfrac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$, $b_-(x,y)=\dfrac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$.

Замечание. Этому разложению соответствует разложение любой квадратной матрицы в сумму симметрической и кососимметрической: $B=\dfrac{B+B^T}{2}+\dfrac{B-B^T}{2}$.

Определение 5. Квадратичной функцией (формой), порожденной билинейной формой $b(x,y)$, называется функция $k(x)=b(x,x),\ \forall x\in L$, если $\exists x\in L: k(x)\neq 0$.

Отметим, что существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную функцию, поскольку из
$b(x,y)=b_+(x,y)+b_-(x,y)\Rightarrow b_-(x,x)\equiv 0,\ b(x,x)=b_+(x,x)$.

Утверждение 4. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная симметрическая билинейная форма $b(x,y)$ такая, что $k(x)=b(x,x),\ \forall x\in L$.

Доказательство. Имеем
$k(x)=b(x+y,x+y)=b(x,x)+b(y,y)+2b(x,y)=k(x)+k(y)+2b(x,y)\Rightarrow$
$b(x,y)=\dfrac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$, чтд.

Матрицей квадратичной формы называют матрицу породившей ее симметрической билинейной формы. Рассмотрим к*оординатную запись квадратичной формы*. Пусть $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, тогда

$$b(x,x)=b\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}x_je_j\Big)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jb(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ib_{ij}x_j=X^TBX \quad (5), \text{ где}$$

$B=(b_{ij})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, а $X^T=(x_1\ldots x_n)$.

С учетом симметричности коэффициентов квадратичной формы, ее можно записать в виде

$$k(x)=b_{11}x_1^2+\ldots+b_{nn}x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j.$$

Далее будем рассматривать только вещественные квадратичные формы (до этого только нужно было, чтобы характеристика поля K не равнялась 2, чтобы можно было делить на 2).

Определение 6. Квадратичная форма вида $k(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^2$ называется *диагональной*.

Она называется *канонической*, если $\alpha_i\in\{1,-1,0\}$. Более детально,

$k(x)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}x_i^2$. Числа p и q называются *положительным* и *отрицательным* индексами инерции квадратичной формы.

Лемма. Общее число ненулевых коэффициентов диагональной (или канонической) квадратичной формы равно рангу её матрицы.

В самом деле, матрица диагональной квадратичной формы $k(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i^2\ (r\le n)$ равна

$$B=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha_r & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix}\ (\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_r\ne 0)\Rightarrow rgB=r\ .$$

Теорема 1. (О приведении квадратичной формы к каноническому виду) Для любой квадратичной формы $k(x)=b_{11}x_1^2+...+b_{nn}x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j$ существует такая невырожденная замена переменных $X=SY\ (\det S\ne 0)$, что в новых переменных она принимает канонический вид $k=\sum_{i=1}^{p}y_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}y_i^2$.

Теорема 2 (о единственности – **закон инерции**). Если $X=TZ\ (\det T\ne 0)$ - другая замена переменных, приводящая квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду $k=\sum_{i=1}^{s}z_j^2-\sum_{i=s+1}^{s+t}z_j^2$, то $p=s, q=t$, причем $p+q=rgB$.

Заметим, что равенство $p+q=rgB$ следует из сохранения ранга матрицы В при замене базиса.

Доказательство теоремы 1 – ***алгоритм Лагранжа выделения полных квадратов.***

1) Допустим, что $\exists i:\ b_{ii}\ne 0$, при необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что $b_{11}\ne 0$. Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата:

$$k(x)=b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}b_{1j}x_1x_j+(\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j)\ =$$

$$=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+(\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j-(\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2)=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+k_1(x_2,...,x_n)$$

Тогда сделаем замену $z_1=(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j),\ z_2=x_2,...,z_n=x_n$.

Квадратичная форма $k_1(x_2,...,x_n)$ не зависит от x_1, и к ней можно применить тот же метод, в результате получится квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i z_i^2\quad(\alpha_1=b_{11},\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\ne 0, r=rgB)\ .$$

Остается сделать замену $y_i=\sqrt{|\alpha_i|}z_i, i=1,...,r;\ \ y_k=z_k, k=r+1,...,n$

2) Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если $a_{ii}=0,\ \forall i=1,...,n$. Так как

$k(x) \neq 0,\ \text{то}\ \exists i, j : b_{ij} \neq 0$. Перенумеровав при необходимости переменные, можем добиться, чтобы $b_{12} \neq 0$. Тогда сделаем подготовительную замену

$x_1 = x'_1 - x'_2,\ x_2 = x'_1 + x'_2,\ x_j = x'_j\,(j \geq 3).$ и $k(x') = 2b_{12}(x'^2_1 - x'^2_2) + k'(x'),$ где в $k'(x')$ нет x'^2_1. Далее можно продолжать, как в п. 1). □

(Замечание. Вместо параметров p и q, введенных выше, нередко рассматривают величины r=p+q – ранг B и $\sigma = p - q$ - сигнатуру.)

Примечание. Вместо дополнения до квадратов, можно упрощать матрицу квадратичной формы, имитируя алгоритм Гаусса, только обязательно делать согласованные преобразования столбцов и строк, в соответствии с формулой $B' = S^T BS$.

Доказательство теоремы 2. Пусть в базисе $e_1,...,e_p;e_{p+1},...,e_{p+q},...,e_n$ квадратичная форма имеет вид $k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$, а в базисе $f_1,...,f_s;f_{s+1},...,f_{s+t},...,f_n$ она имеет вид $k = \sum_{i=1}^{s} z_j^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} z_j^2$. Во-первых, $p + q = s + t = rgB$, так как ранг матрицы квадратичной формы не изменяется при замене базиса.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и, скажем, t>q, тогда s < p. Рассмотрим подпространства

$L_1 = \langle e_1,...,e_p\rangle, L_2 = \langle f_{s+1},...,f_n\rangle$: ясно, что $k\Big|_{L_1} > 0, k\Big|_{L_2} \leq 0$ (последние записи обозначают ограничения функции k на L_1, L_2 соответственно). При этом

$n \geq \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$ и

$\dim(L_1) + \dim(L_2) = p + (n - s) = n + (p - s) > n$, следовательно,

$n \geq \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) > n - \dim(L_1 \cap L_2) \Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq 0 \Rightarrow$

$\exists a \in L_1 \cap L_2, a \neq 0,\ k(a) > 0\ , k(a) \leq 0$ -

противоречие.

Теперь предположим, что s > p, тогда, как и выше, $\langle e_{p+1},...,e_n\rangle \cap \langle f_1,...,f_s\rangle \neq 0$ - снова противоречие. Таким образом, s = p и, значит, t = q, чтд.