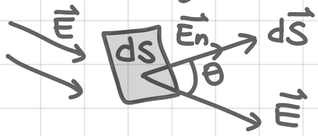
② Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей.

$d\vec{S}=\vec{n}\,dS$, где dS – площадь элементарной площадки, а $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к этой площадке



поток вектора напряжённости поля $\vec{E}$ ч/з dS равен

$$d\Phi = E\,dS\cos\theta = \vec{E}\,d\vec{S}$$

поток через замкнутую поверхность равен

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S}$$

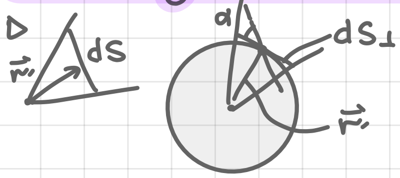
теорема Гаусса в интегральной форме

$\Phi = 4\pi q \qquad \oint \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi q$, где q – полный заряд, наход. в объёме V, ограниченном поверхностью S.

теорема Гаусса в дифференциальной форме

$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$, где ρ – объёмная плотность заряда; $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{E}$

Д



$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2}$$

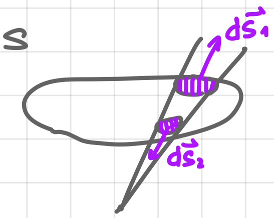
$$dS_\perp = dS\cos\alpha$$

$$dS_\perp = d\vec{S}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$d\Phi = \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{r^3}\vec{r}\,d\vec{S} = \frac{q}{r^2}\,\frac{d\vec{S}\cdot\vec{r}}{r} = q\,\frac{dS_\perp}{r^2} = q\,d\Omega$$

от точечного заряда

$$\Phi = \int d\Phi = q\int d\Omega = \begin{cases} 4\pi q, & q \text{ внутри } S \\ 0, & q \text{ снаружи} \end{cases}$$ □



$$\left[\ \oint_S \vec{a}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV\ \right]$$

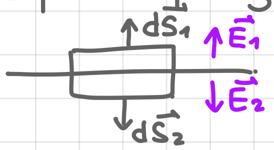
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$

$$\| $$

$$\int_V 4\pi\rho\,dV \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

Примеры применения

1. равномерно заряженная плоскость

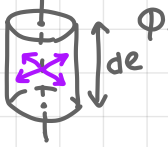


$$\Phi = \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = 2E\,dS$$

$\|$ т. Гаусса $\quad \Rightarrow E = 2\pi\sigma$

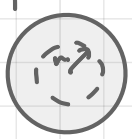
$4\pi\underbrace{\sigma\,dS}_{q}$

2. поле равномерно заряженной нити



$$\Phi = 2\pi r\,dl\,E(r) = 4\pi\chi\,dl \Rightarrow E(r) = \frac{2\chi}{r}$$

3. равномерно заряженный шар

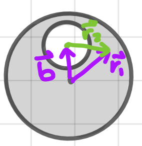


$$\Phi = E(r)\,4\pi r^2 = 4\pi q(r)$$

$r < R$: $q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow \vec{E} = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}$

$r \geq R$: $q(r) = Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{r^3}\vec{r}$, где Q – полный заряд шара

4. поле в сферической полости внутри шара



если бы полости не было:

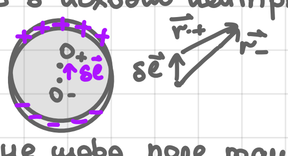
$$\vec{E}_1 = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{r}_1$$

отсутствие зарядов в полости ⇔ шар с ρ + "полость" с $-\rho$

$$\vec{E}_2 = \frac{4\pi}{3}(-\rho)\vec{r}_2$$

тогда $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{4\pi}{3}\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{4\pi}{3}\rho\vec{b}$, где $\vec{b}$ – вектор, соединяющий центры шара и полости.

∃ в исходно нейтральном шаре полож. заряды сместились отн. отрицательных на $\delta\vec{e}$

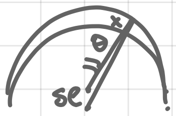


$$\vec{E}_+ = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_+ \qquad \vec{E}_- = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_-$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{4}{3}\pi\rho\,\delta\vec{e}$$

вне шара поле такой системы поверхностных зарядов совпадает с полем точечного диполя, поскольку поле от каждого из шаров совп. с полями точечных зарядов, расположенных в цент-

ре шаров. величина $\vec{\delta l}$ — плечо такого диполя.
найдём распределение заряда по поверхности шара.



$$R^2 = (R-x)^2 + 2(R-x)\,\delta l\cos\theta + (\delta l)^2$$

$$x = \delta l\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma' = \sigma'_0\cos\theta = \rho\,\delta l\cos\theta$$