1.1 Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пр-ве

Опр. Пространством $\mathbb{R}^n$ (точечным n-мерным евклидовым пр-вом), $n\in\mathbb{N}$, наз. множество всевозможных упорядоч. наборов из n дейст. чисел $x=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Два таких набора $x=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $y=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ наз. равными, если $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$.

Расстоянием между x и y наз. число $\rho(x,y)=\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+\dots+(\alpha_n-\beta_n)^2}$

Опр. Гов., что последовательность точек x_k из $\mathbb{R}^n$ сходится к т. $x_0\in\mathbb{R}^n$ (об. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x_0$), если $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k,x_0)=0$, т.е

$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0:\ \forall k\geq k_0 \longmapsto \rho(x_k,x_0)<\varepsilon$

Л.1 Последов-ть т. $x_k=(\alpha_1^{(k)},\dots\alpha_n^{(k)})\in\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\dots$, сход. к т. $x_0=(\alpha_1^{(0)},\dots,\alpha_n^{(0)})$ $\Longleftrightarrow$ при всех $i=1,2,\dots,n$ вып. рав-во $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}$

(сх-ть в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоор. сх-ти)

△ $\boxed{\Rightarrow}$ Т.к $\rho(x_k,x_0)=\sqrt{(\alpha_1^{(k)}-\alpha_1^{(0)})^2+\dots+(\alpha_n^{(k)}-\alpha_n^{(0)})^2}$, то

$|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|\leq\rho(x_k,x_0)\quad\forall i=1,2,\dots,n.$

Поэтому если $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0:\ \forall k\geq k_0\longmapsto\rho(x_k,x_0)<\varepsilon$, то и подавно $|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|<\varepsilon$ при $\forall i=1,2,\dots,n$.

Значит, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}\quad\forall i=1,2,\dots,n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Т.к $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}$ при $\forall i=1,2,\dots,n$, то

$\forall\varepsilon>0\ \exists k_i:\ \forall k\geq k_i\longmapsto|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Тогда при $k\geq k_0=\max(k_1,\dots,k_n)$ вып.

$\rho(x_k,x_0)<\sqrt{n\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$ ■

1.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности

Опр. ε-окрестностью т. $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>0$, наз. мн-во

$U_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \rho(x,x_0)<\varepsilon\}$

Проколотой ε-окрестностью т. $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>0$, наз. мн-во

$\mathring{U}_\varepsilon(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ 0<\rho(x,x_0)<\varepsilon\}$

При $n=1$ для т. $x,y\in\mathbb{R}$ рас-е $\rho(x,y)=|x-y|$; понятие ε-окр. совп. с прив. ранее.

При $n=2$ ($n=3$) ε-окр. т. x_0 иначе наз. открытым кругом (шаром) рад. ε с ц. в т. x_0, поэтому в общем сл. $U_\varepsilon(x_0)$ наз. открытым n-мерным шаром рад. ε с ц. в т. x_0.

Опр Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. **ограниченным**, если оно целиком принадл. нек. окр-ти т. $O=(0,0,\ldots,0)$, т.е $\exists C>0: X \subset U_C(O)$

Посл-ть x_k наз. **ограниченной**, если мн-во её знач. огранич.

$\boxed{\text{Т.1}}$ (**Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$**)

Если посл-ть т. x_k из $\mathbb{R}^n$ огр, то сущ. сход-я подпосл. x_{k_m} $(k_1<k_2<\ldots<k_m<\ldots;\ k_m \in \mathbb{N})$

△ Док-во для $\mathbb{R}^2$ (в случ. произ. n аналогично)

Пусть $x_k = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$

Т.к $\forall k=1,2,\ldots$ вып. $\sqrt{(\alpha_1^{(k)})^2+(\alpha_2^{(k)})^2} \le C$, то $|\alpha_1^{(k)}| \le C$, $|\alpha_2^{(k)}| \le C$

Посл-ть $\{\alpha_1^{(k)}\}$ огр $\underset{\text{Б-В}}{\Longrightarrow} \exists \{\alpha_1^{(k_\ell)}\}: \lim\limits_{\ell\to\infty} \alpha_1^{(k_\ell)} = \alpha_1^{(0)}$

Т.к $\{\alpha_2^{(k_\ell)}\}$ огр $\underset{\text{Б-В}}{\Longrightarrow} \exists \{\alpha_2^{(k_{\ell_m})}\}: \lim\limits_{m\to\infty} \alpha^{(k_{\ell_m})} = \alpha_2^{(0)}$

Но $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_1^{(k_{\ell_m})} = \alpha_1^{(0)}$ (предел п/п сх п)

$\underset{\text{л.1 п.}\boxed{1.1}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{m\to\infty} x_{k_{\ell_m}} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)})$; $x_{k_{\ell_m}}$ – п/п посл-ти т. x_k ▲

$\boxed{\text{Т.2}}$ (**Кр. Коши сх-ти посл-ти т $\mathbb{R}^n$**)

Послед-ть x_k т $\mathbb{R}^n$ сх-ся $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists k_0: \forall k,m \ge k_0 \mapsto \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

△ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists k_0:$ $\begin{cases} \forall k \ge k_0 \mapsto \rho(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m \ge k_0 \mapsto \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Тогда $\forall k \ge k_0$ и $\forall m \ge k_0$

$\rho(x_k, x_m) \le \rho(x_k, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $x_k = (\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$.

Тогда $\forall k,m \ge k_0$

$\rho(x_k, x_m) = \sqrt{(\alpha_1^{(k)} - \alpha_1^{(m)})^2 + \ldots + (\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(m)})^2} < \varepsilon$

При фикс. $i = 1,2,\ldots,n$ и подавно

$|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(m)}| \le \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Значит при фикс i $\{\alpha_i^{(k)}\}$ фундм $\overset{\text{кр К.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(0)}$

$\underset{\text{л.1 п.}\boxed{1.1}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 = (\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)})$ ▲

1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Опр. Точка x_0 наз. <u>внутренней точкой</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$, если она принадлежит X вместе с некоторой окрестностью.

Опр. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>предельной точкой</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$, если сущ. посл-ть точек x_k из X такая, что $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

Опр. Точка x_0 мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. <u>изолированной</u>, если найдется её проколотая окрестность, не имеющая общих т. с X.
$(\exists \varepsilon > 0 : \mathring{U}_\varepsilon(x_0) \cap X = \varnothing)$

Опр. <u>Точками прикосновения</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. все его предельные и изолированные точки.

Л.1 Если т. $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ не явл. изол., то она явл. предельной т X.

△ Если т x_0 не явл. изол:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда найдётся посл-ть т. $x_k \in X : 0 < \rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \\ x_k \neq x_0\end{array}\right\} \Rightarrow x_0 - \text{пред. т } X. \quad \blacksquare$$

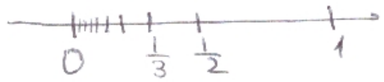
<u>Примеры:</u> 1) $X = [0,1] \cup \{2\}$

Внут: $(0,1)$
пред: $[0,1]$
изол: $\{2\}$
прикос: $[0,1] \cup \{2\}$

(для $X = (0,1) \cup \{2\}$ то же)

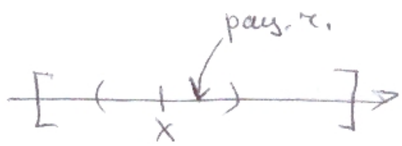
2) $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^1$.

0 — пред. т ($\notin X$)



3) $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Внут: нет
пред: $[0,1]$
изол: нет
т. прик: $[0,1]$

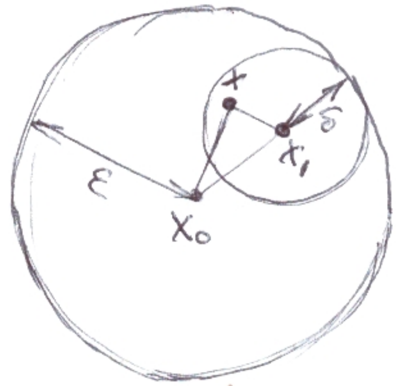


Опр (ИВ) Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>точкой прикосновения</u> мн $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Опр. <u>Дополнение</u> мн-ва X в $\mathbb{R}^n$ будем обозн. $\hat{X}$, т.е $\hat{X} = \mathbb{R}^n \setminus X$.

1.4 Открытые и замкнутые множества, их св-ва.

Опр. Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз. открытым, если все его точки внутренние, т.е.
$\forall x_0 \in G \;\; \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset G$



Л.1 $U_\varepsilon(x_0)$ — откр. мн-во ($x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$)

▲ Пусть $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$.

Обозн. $\delta = \varepsilon - \rho(x_1, x_0) > 0$

Тогда $\forall x \in U_\delta(x_1)$:

$$\rho(x, x_0) \le \underbrace{\rho(x, x_1)}_{<\delta} + \underbrace{\rho(x_1, x_0)}_{<\varepsilon-\delta} < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon$$

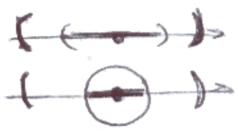
$\Rightarrow x \in U_\varepsilon(x_0)$

$\Rightarrow U_\delta(x_1) \subset U_\varepsilon(x_0)$, т.к. x_1 — произв. т $U_\varepsilon(x_0)$, то $U_\varepsilon(x_0)$ — откр. мн ■

Пример: Интервал $(a;b)$ — конечн/беск

а) в $\mathbb{R}^1$ — откр мн

б) в $\mathbb{R}^2$ — не явл откр. мн



Опр. Мн-во $F \subset \mathbb{R}^n$ наз. замкнутым, если оно содержит все свои пред. т.

Замеч: $\varnothing$ по опр. и отк., и замкн.

Т.1 1) Если G_α, $\alpha \in A$, — какой-то набор (возм, несчет) откр. мн-в, то мн-во $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ — открыто

2) Если G_i, $i = 1, \dots, k$ — откр. мн-ва, то мн-во $G = \bigcap_{i=1}^k G_i$ откр.

▲ 1) Пусть $x_0 \in G$. Тогда $\exists \alpha : x_0 \in G_\alpha$. Т.к G_α откр, то $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset G_\alpha$
$\Rightarrow U_\delta(x_0) \subset G \Rightarrow G$ — откр.

2) Пусть $x_0 \in G$. Тогда $\forall i = 1, \dots, k \mapsto \exists \delta_i > 0 : U_{\delta_i}(x_0) \subset G_i$

Рассм $\delta = \min\limits_{i=1,\dots,k} \delta_i > 0$.

Ясно, что $U_\delta(x_0) \subset U_{\delta_i}(x_0) \subset G_i \;\; \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow U_\delta(x_0) \subset G \Rightarrow G$ — откр ■

Т.2 G — откр $\Leftrightarrow \hat{G}$ — замкн; ($\hat{G}$ — откр $\Leftrightarrow G$ — замкн.)

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть x_0 — пред. т. $\hat{G}$. Если $x_0 \notin \hat{G}$, то $x_0 \in G$. Т.к G откр, то $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset G$, т.е $U_\delta(x_0) \cap \hat{G} = \varnothing$.
Значит, в $U_\delta(x_0)$ нет точек $\hat{G}$, это прот. тому, что x_0 — пред. т.
Поэтому $x_0 \in \hat{G} \Rightarrow \hat{G}$ замкн.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $x_0 \in G$. Докажем, что $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset G$. Если это не так, то $\forall \delta > 0 \;\; \exists x \in U_\delta(x_0) : x \in \hat{G}$. Возьмем $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда $\forall k \;\; \exists x_k \in U_{1/k}(x_0) : x_k \in \hat{G}$.
Но $x_k \ne x_0$, т.к $x_0 \in G$. Т.к $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$
Значит, x_0 — пред. т $\hat{G}$, и $x_0 \notin \hat{G} \Rightarrow$ прот-е замкн. $\hat{G}$
Тогда $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset G$, и G откр. ■

$\boxed{1.5}$ Внутренность, замыкание и граница множества.

Опр. Мн-во всех внутренних точек мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. внутренностью множества X и обозн. $\operatorname{int} X$.

Легко проверить, что

1) $\operatorname{int} X$ – откр.
2) $\operatorname{int} X \subset X$
3) $\operatorname{int} X = X \Leftrightarrow X$ откр.

Опр. Для мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыканием наз. мн-во $\widehat{\operatorname{int} \hat{X}}$ и обозн $\bar{X}$.

Легко проверить, что

1) $\bar{X}$ – замкн
2) $\bar{X} \supset X$
3) X – замкн $\Leftrightarrow$ $\hat{X}$ откр. $\Leftrightarrow \operatorname{int} \hat{X} = \hat{X}$.

Замыкание обычно опред-ся как мн-во точек прикосновения.
Докажем эквив-ть этих двух опред.
Для начала лемма:

$\boxed{Л.1}$ x_0 – т. прикосн. мн $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \mapsto U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Если $x_0 \in X$, то $U_\delta(x_0) \cap X$ – непустое мн-во, так как содержит тx_0

Если x_0 – пред. т. X, то $\exists \{x_k\} \subset X$: $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Тогда $\forall \delta > 0 \; \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \mapsto 0 < \rho(x_k, x_0) < \delta$

Значит, $\forall \delta > 0 \mapsto U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall \delta > 0 \mapsto U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Если $x_0 \in X$, то x_0 – т. прикосн. X.

Если $x_0 \notin X$, то $\forall \delta > 0 \mapsto \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Возьмем $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

Тогда $\forall k \; \exists x_k \neq x_0$, $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$

Т.к $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и x_0 – пред т. ■

$\boxed{Т.1}$ Для любого мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыкание $\bar{X}$ совпадает с мн. точек прикосн. X.

▲ x_0 – т. прикосн. $X \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \mapsto U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \; \exists x \in U_\delta(x_0) : x \notin \hat{X} \Leftrightarrow x_0$ не явл внут. т. $\hat{X} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_0 \notin \operatorname{int} \hat{X} \Leftrightarrow x_0 \in \bar{X}$ ■

Опр. Для мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его границей ∂X наз. мн-во $\bar{X} \setminus \operatorname{int} X$

$\boxed{1.6}$ Компакты.

Опр. Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. компактом, если из любой посл-ти $\{x_k\} \subset X$ можно выделить п/п, сход. к некот. элем. из X.

$\boxed{\text{T.1}}$ (Кр. точки прикосн)

$x_0 \in \overline{X} \iff \exists \{x_k\} \subset X : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

$\boxed{\text{T.2}}$ (Кр. компактности мн-ва)

Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ явл. компактом $\iff$ X огр. и замкн.

$\triangle$

1) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — огр, замк. мн-во.
Покажем, что X — компакт.

Пусть $\{x_k\}$ — произв. послед. элем. мн. X.

Т.к $\{x_k\}$ огр, то по т. Б-В. можно выдел. п/п $\{x_{k_j}\}$, сход. к некот. $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Поскольку $\{x_{k_j}\} \subset X$ и $x_0 = \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j}$, то по <u>теор.1</u> $x_0 \in \overline{X}$

В силу замкн. X $x_0 \in X$.

2) Пусть X — компакт.

Док-во того, что мн. X огр. и замк., проведем методом от прот.

а) Предпол, что X неогр.

Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x_k \in X : |x_k| > k$.

Поскольку для любой п/п $\{x_{k_j}\}$ п-ти $\{x_k\}$ ~~нельзя~~ вып. $\lim\limits_{j\to\infty} |x_{k_j}| = +\infty$, то из посл-ти $\{x_k\}$ нельзя выдел. п/п, сход. к нек. элем. мн X.

След-но, X не компакт.

Мы получили противоречие.

Значит, X — огр.

б) Предпол, что X незамкн.

Тогда $\exists x_0 \in \overline{X} \setminus X$

Т.к $x_0 \in \overline{X}$, то по <u>теор 1</u> $\exists \{x_k\} \subset X : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Т.к любая п/п $\{x_{k_j}\}$ сх. к $x_0 \notin X$, то из п-ти $\{x_k\}$ нельзя выдел. п/п, сх. к нек. элем. мн. X.

След-но, мн-во X не явл. компактом.

След-но, X — замкн. $\blacksquare$

2.1 Предел числовой функции нескольких переменных.

Опр. Функцией нескольких переменных наз. функция, обл. опр. кот. $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, а мн-во знач. $E(f) \subset \mathbb{R}$

Аргумент такой ф-и — т. n-мерного евклид. пр-ва $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, т.е $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

Опр (Коши) Гов., что $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \beta$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \bar{x} \in \mathring{U}_\delta(\bar{a}) \hookrightarrow f(\bar{x}) \in U_\varepsilon(\beta)$$

Опр (Гейне) Пусть ф-я f опр. в нек. прок. окр. т $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$.
Тогда гов, что $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \beta$, если

$$\forall \{\bar{x}_k\} : \lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{a} \ \text{ и } \ \bar{x}_k \neq \bar{a} \hookrightarrow \lim_{k \to \infty} f(\bar{x}_k) = \beta$$

В опр. выше β — один из 6 СПС (т.е $a, a+0, a-0, +\infty, -\infty, \infty$)

<u>Замечание</u> Несмотря на общность опред. и сохр. теорем для скаляр ф-и 1-ой перем (список теор на стр 17 (Петр)), для ф-й многих перем. исследование предела принципиально сложнее. Напр, на мн-ти понятие одностор. предела не имеет смысла

Опр. Предел функции двух переменных наз. двойным пределом и об.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

Опр (Коши) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \beta$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (x,y) : \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \hookrightarrow f(x,y) \in U_\varepsilon(\beta)$$

Опр (Гейне) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \beta$, если f опр в нек. прок. окр т (x_0, y_0) и

$$\forall \{(x_k, y_k)\} : \lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0), \text{ но } (x_k, y_k) \neq (x_0, y_0) \hookrightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = \beta$$

Попытаемся свести двойной предел к пределу ф-и одной перем.

I. Повторные пределы

Опр. Пусть зад. ф-я $f(x,y)$ и т. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Для любого фикс. y обозн. через $\varphi(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$, если он сущ.
Тогда $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) \right)$ наз. повторным пределом f в т (x_0, y_0)

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \right)$ также наз. повторным пределом.

<u>Замечание</u> Из сущ-я повт. пр. не след. сущ. двойного предела (см. след. пример)

Пример

$f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$

$\forall x\neq 0 \quad \exists \varphi(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=1$

$\forall y\neq 0 \quad \exists \psi(y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=1$

Предполож, что $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=b$

Тогда (опр. Гейне) $\forall \{(x_k,y_k)\};\ (x_k,y_k)\neq(0,0):\ \lim\limits_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(0,0) \hookrightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=b$

Пусть $x_k\neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$. Тогда

$\left.\begin{array}{l} f(x_k,x_k)=2; \\ f(x_k,-x_k)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=2\neq 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

II. Пределы по направлениям.

Опр. Пусть $\vec{e}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ — единич. вект.
Если ф-я двух перем. f опр. в нек. прокол. окр. т (x_0,y_0), то её пределом при $x\to x_0$, $y\to y_0$ по направлению $\vec{e}$ (или по напр, опр. углом φ) наз предел ф-и одной перем. ρ:

$\lim\limits_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)$

Л.1 Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\beta$, то пред. по любому напр. при $x\to x_0, y\to y_0$ равен β.

$\triangle$ Рассм. произв. $\{\rho_k\}$ полож. чисел: $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=0$

Тогда послед. точек $(x_k,y_k)=(x_0+\rho_k\cos\varphi,\ y_0+\rho_k\sin\varphi)\longrightarrow(x_0,y_0)$, причем $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$.

Значит,

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_0+\rho_k\cos\varphi,\ y_0+\rho_k\sin\varphi)=\beta$

$\Rightarrow \lim\limits_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)=\beta$ ▲

Следствие Если пред ф по двум разл. напр. не совп. в т, то двойного пред в этой т. не сущ.

Пример.

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \quad \text{в т } (0,0)$$

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=\frac{(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=(\cos\varphi+\sin\varphi)^2$$

При $\varphi=\frac{\pi}{4}$ $f=2$

При $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ $f=0$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$

Замечание Обратное неверно: если по любому напр. ф-я в т. имеет один и тот же пред β, то это ещё не гарантирует налич. двойного пред.

Пример

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad x^2+y^2>0; \quad (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}$$

Если $\sin\varphi=0$, то $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=0 \quad \forall\rho$

Если $\sin\varphi\neq0$, то всё равно $\lim\limits_{\rho\to+0} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=0$

Итак, по любому напр. пред. ф-и при $x\to0$ и $y\to0$ равен 0.

Докажем, что двойного пред не сущ.

Пусть $x_k\neq0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$

$f(x_k,0)=0$

$f(x_k,x_k^2)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$

Таким образом, понятие двойного пред. нельзя свести исключит. к пред. ф-и одной перем.

$\boxed{\text{Л.2}}$ (достат. усл. сущ-я конеч. двойного пр)

Пусть $\exists\rho_0>0: \forall\rho\in(0;\rho_0) \hookrightarrow |f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)-b|\le F(\rho)$, где $\lim\limits_{\rho\to+0}F(\rho)=0$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=b$.

(В данном случ. $F(\rho)$ есть „равномерная оценка", не зав. от φ.)

▲ Из усл. след, что

$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0: \forall\rho\in(0,\delta) \hookrightarrow F(\rho)<\varepsilon$

Для произв. точки (x,y) определим числа ρ и φ так, что

$x=x_0+\rho\cos\varphi$

$y=y_0+\rho\sin\varphi$

Тогда

$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Поэтому для $\forall(x,y)$: $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1\equiv\min(\rho_0,\delta)$, выполн.

$|f(x,y)-b|=|f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)-b|\le F(\rho)<\varepsilon$

След-но, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$ ■

<u>Пример</u>

$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$

$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2}=\rho\cos^2\varphi\sin\varphi$

$|f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)|\le\rho\to 0$, и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

2.2 Предел функции по множеству.

Опр(Коши) Пусть $\bar{a}$ – пред. т. мн-ва $X\subset\mathbb{R}^n$.
Тогда гов, что $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x})=\beta$, если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\bar{x}\in\mathring{U}_\delta(\bar{a})\cap X \mapsto f(\bar{x})\in U_\varepsilon(\beta)$

Опр(Гейне) Пусть $\bar{a}$ – пред. т. мн-ва $X\subset\mathbb{R}^n$, причем при нек $\delta>0$ ф-я f опр в $\mathring{U}_\delta(\bar{a})\cap X$.
Тогда гов, что $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x})$, если

$\forall\{\bar{x}_k\}:\ \bar{x}_k\in X,\ \bar{x}_k\ne\bar{a},\ \lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_k=\bar{a} \mapsto \lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k)=\beta$

<u>Замечание</u> Пред т. может как принадл. мн-ву, так и не принад.
Пред по мн-ву в изолир. т не определяется.

2.3 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Опр. Ф-я f наз. непрерывной в т. $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, если она опред. в нек. окр. т $\bar{a}$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=f(\bar{a})$

Опр. Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{a}\in X$ и ф-я f опр. в $U_\delta(\bar{a})\cap X$ при нек $\delta>0$. Тогда
1) если $\bar{a}$ – пред. т. мн. X, то ф-я f наз. непр. в т. $\bar{a}$ по мн-ву X, если $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x})=f(\bar{a})$
2) если $\bar{a}$ – изол. т. мн X, то ф-я f по опред. счит. непр в т $\bar{a}$ по мн X.

Опред-я непр. в т. можно сформ. на языке Коши и Гейне (без оговорки $\bar{x}_k \neq \bar{a}$ и с примен $U_\delta(\bar{a})$ вместо $\mathring{U}_\delta(\bar{a})$).

Опр. Ф-я f наз. непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, если она непр. в любой т. $\bar{a} \in X$ по множ-ву X.

2.4 **Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней.**

Опр. Замкнутое ограниченное мн-во в $\mathbb{R}^n$ наз. компактом.

Т.1 (Обобщ. т. Вей-са)

Если ф-я f непр на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то:

1) f огр на F;

2) $\exists x_1, x_2 \in F: f(x_1) = \sup\limits_F f(x)$, $f(x_2) = \inf\limits_F f(x)$

▲ Док-во аналог. одном. случаю

1) Пусть ф-я f неогр. на F

Тогда $\forall E > 0 \ \exists x \in F: |f(x)| > E$

Рассм. $E = k$, $k \in \mathbb{N}$

Тогда $\forall k \ \exists x_k \in F: |f(x_k)| > k$

Т.к F — огр. мн-во, то $\{x_k\}$ огр.

По т. Б-В (в $\mathbb{R}^n$) сущ. сх-ся п/п $\{x_{k_m}\}$; $\lim\limits_{m\to\infty} x_{k_m} = x_0$

Если при $m \geq m_0$ все $x_{k_m} = x_0$, то $x_0 \in F$;

если нет, то x_0 — пред. т F, и в силу замкн. F, всё равно $x_0 \in F$.

Т.к ф-я f непр в т x_0 по мн. F, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = f(x_0)$.

С др. стор., т.к при всех m вып.

$|f(x_{k_m})| > k_m$, то

$\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = \infty$ — прот-е.

Значит, f огр на F

2) Аналог. одном. случ. с теми же измен, что и в п. 1) ■

2.5 **Равномерная непрерывность (теорема Кантора)**

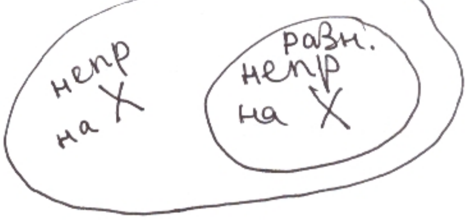
Опр. ф-я f наз равномерно непрерывной на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in X: \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (1)

Опр. Коши непр-ти ф-и f на мн-ве X:

$\forall x' \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x'' \in X: \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (2)

(т.е $\forall x' \in X \mapsto \lim\limits_{\substack{x'' \to x' \\ x'' \in X}} f(x'') = f(x')$



Замеч В (1) $\delta = \delta(\varepsilon)$, в (2) $\delta = \delta(\varepsilon, x')$

Т.к зав-ть только от ε явл. частн. случ. зав-ти от ε и от x', то р.н ф-я на мн-ве явл. непр на нём

Т.1 (Кантора)

Если ф-я непр. на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то она р.н. на нём.

$\blacktriangle$ Пусть ф. f не явл р.н на F.

Тогда

$\exists \varepsilon > 0: \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x', x'' \in F, \ \rho(x', x'') < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$

Возьмем $\delta = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots$

Тогда можно построить две посл-ти x'_k и x''_k точек F т, ч. $\rho(x'_k, x''_k) < \frac{1}{k}$, но $|f(x'_k) - f(x''_k)| \geq \varepsilon$

Т.к F – огр. мн, то по т. Б–В из $\{x'_k\}$ можно выдел. сх п/п $\{x'_{k_m}\}$; $\lim\limits_{m\to\infty} x'_{k_m} = x_0$.

Если при $m \geq m_0$ все $x'_{k_m} = x_0$, то $x_0 \in F$,
если нет, то x_0 – пред. т F и в силу замкн. F всё равно $x_0 \in F$.

Далее,

$\rho(x''_{k_m}, x_0) \leq \rho(x''_{k_m}, x'_{k_m}) + \rho(x'_{k_m}, x_0) < \frac{1}{k_m} + \rho(x'_{k_m}, x_0)$

Т.к $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$, то $k_m \geq m$, и $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{k_m} = 0$

Также $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x'_{k_m}, x_0) = 0$, т.е $\lim\limits_{m\to\infty} x''_{k_m} = x_0$

Но ф-я f непр. в т x_0 по мн. F, поэтому

$\lim\limits_{m\to\infty} f(x'_{k_m}) = \lim\limits_{m\to\infty} f(x''_{k_m}) = f(x_0)$

и

$\lim\limits_{m\to\infty} |f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| = 0$, что противоречит нер-ву

$|f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \geq \varepsilon$, вып. $\forall m = 1, 2, \dots$ $\blacksquare$

Замеч Если ф-я непр на произв. мн-ве, отсюда не след. р. неп-ть.

Пример $f(x) = \sin x^2$ на $X = (0, +\infty)$

Докажем, что $f(x)$ не явл р.н.

Положим $x_1 = \sqrt{2\pi n}$, $x_2 = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ($n \in \mathbb{N}$ выберем позже)

Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$

Предпол, что $f(x)$ р.н., и для $\varepsilon = 1$ найдем соот. $\delta > 0$ из опред.

Подберем $n \in \mathbb{N}$ т, что $|x_1 - x_2| < \delta$

(Это возможно, т.к $|x_1 - x_2| = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 + x_2} = \frac{\pi}{2(\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}})}$)

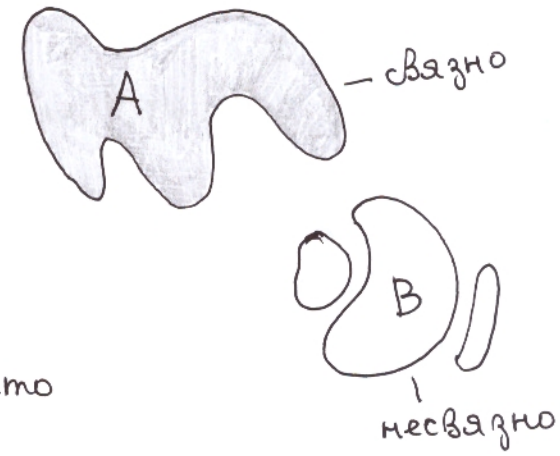
Тогда по опр. р.н. должно быть

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon = 1$

Но $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Прот-е.

$\boxed{2.6}$ Связные множества

Опр. Мн-во $E\subset\mathbb{R}^n$ наз. несвязным, если сущ. непустые открытые в E мн-ва E_1 и E_2 такие, что $E_1\cap E_2=\varnothing$ и $E_1\cup E_2=E$, т.е E представимо в виде объединения двух непустых непересек. откр. мн.
Мн-во $E\subset\mathbb{R}^n$ наз связным, если оно не является несвязным.



Замеч Мн-во S несвязно $\Leftrightarrow$ найдутся две непересекающихся откр. в $\mathbb{R}^n$ мн-ва U и V, что $S=(S\cap U)\cup(S\cap V)$ и $S\cap U\neq\varnothing$, $S\cap V\neq\varnothing$

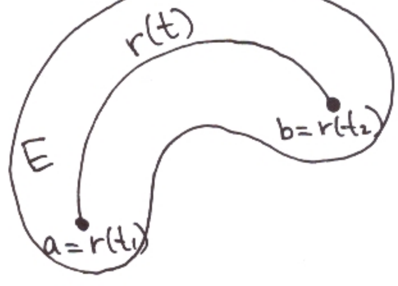
Пример $\varnothing$, $\{a\}$ — связные мн-ва.

$\boxed{\text{Т.1}}$ Мн-во $I\subset\mathbb{R}$ связно $\Leftrightarrow$ I — промежуток

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Если I не явл. промеж., то для нек. т. $x,y\in I$ $(x<y)$ отрезок $[x,y]$ не содерж. в I.
Тогда между x и y $\exists z\notin I$.
Рассм. $(-\infty,z)\cap I$ и $(z,+\infty)\cap I$.
Это непустые (содерж. x и y), откр. в I мн-ва, объедин. кот. совп. с I.
значит, I несвязно

$\boxed{\Leftarrow}$ Предпол, что I не явл. связ. мн.
Тогда найдутся непустые неперес. откр. в $\mathbb{R}$ мн-ва U и V, что
$I=(I\cap U)\cup(I\cap V)$ и $I\cap U\neq\varnothing$, $I\cap V\neq\varnothing$
Пусть $x\in I\cap U$ и $y\in I\cap V$. Без огр. общ. $x<y$.
Т.к I — промеж, то $[x,y]\subset I$.
Разделим $[x,y]$ пополам и через $[x_1,y_1]$ обозн. ту половину, левый конец кот. лежит в U, а правый в V.
Снова разделим $[x_1,y_1]$ пополам и т.д.
По индукции построим послед-ть стягив. отр. $\{[x_k,y_k]\}$ такую, что $x_k\in U$, $y_k\in V$ $\forall k\in\mathbb{N}$.
Пусть z — общая точка этих отр.
Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=z=\lim\limits_{k\to\infty}y_k$, то z явл. граничной т. как для U, так и для V, а т.к U и V откр, то $z\notin U$ и $z\notin V$, что противореч. усл. $z\in I\subset U\cup V$ ■

Опр Мн-во $E\subset\mathbb{R}^n$ наз. линейно-связным, если любые две т. a и b мн-ва E можно соед. кривой Γ, леж. в E, т.е
$\forall a,b\in E$ сущ. вект-ф-я $r(t)$, непрер. на нек. отр. $[t_1,t_2]$ и такая, что $r(t_1)=a$, $r(t_2)=b$ и $\forall t\in[a,b]\hookrightarrow r(t)\in E$



2.7 Свойства функций, непрерывных на связном множестве.

Т.1 (крит. непрер)

Ф-я $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непр на E $\Leftrightarrow$ для каждого откр. мн. V из $\mathbb{R}^m$ мн-во $f^{-1}(V)$ откр в E.

Т.2 Если ф-я $f: S \to \mathbb{R}^m$ непр. на связном мн $S \subset \mathbb{R}^n$, то мн. $f(S)$ связно в $\mathbb{R}^m$.

▲ Если мн-во $f(S)$ несвязно, то сущ. откр. в $\mathbb{R}^m$ мн. U и V, что $f(S) = (f(S) \cap U) \cup (f(S) \cap V)$ и $f(S) \cap U \neq \varnothing$, $f(S) \cap V \neq \varnothing$

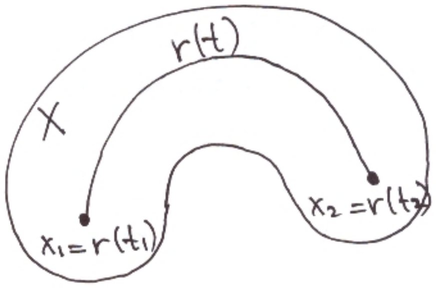
Тогда мн-ва $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ откр. в S (по Т.1), непусты и не пересек. (т.к U, V непусты и не пересек) и $S = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, что невозм, т.к S связно ■

Следствие (теор. о пром. знач)

Если ф-я $f: S \to \mathbb{R}$ непр на связ. мн $S \subset \mathbb{R}^n$, то f приним все промеж. знач. (т.е если $u, v \in f(S)$, $u < v$, то $[u, v] \subset f(S)$)

2.7' Свойства функций, непрерывных на связном множестве

Опр. Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. линейно-связным, если любые две точки x_1 и x_2 мн X можно соединить кривой Γ, лежащей в X, т.е $\forall x_1, x_2 \in X$ $\exists r(t)$ — вект-ф, непр на нек. $[t_1, t_2]$: $r(t_1) = x_1$; $r(t_2) = x_2$ и $\forall t \in [t_1, t_2] \hookrightarrow r(t) \in X$.



Т.1 (о промеж. знач.)

Пусть скалярная ф-я $f(x)$ непр на лин-связ. мн. $X \subset \mathbb{R}^n$ и принимает на X знач. y_1 и y_2. Тогда $f(x)$ принимает на X все знач, лежащие между y_1 и y_2

▲ Пусть ф-я $f(x)$ принимает знач. y_1 и y_2 в т. x_1 и $x_2 \in X$: $f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$.

В силу лин-св. мн X сущ непр на $[t_1, t_2]$ в-ф $r: [t_1, t_2] \to X$ такая, что $r(t_1) = x_1$, $r(t_2) = x_2$.

Т.к сложная ф-я $\varphi(t) = f(r(t))$ непр на $[t_1, t_2]$, то по теор. о пром. зн. для ф-и одной пер $\forall y_0$, лежащего между y_1 и y_2, сущ. $t_0 \in [t_1, t_2]$: $\varphi(t_0) = y_0$

След-но, $x_0 = r(t_0) \in X$ и $f(x_0) = y_0$ ■

$\boxed{3.1}$ Частные производные функции нескольких переменных.

Опр. Частной производной по x ф-и двух перем. $f(x,y)$ в т (x_0,y_0) наз. произв. ф. $f(x,y_0)$ одной пер. x в т x_0 (обозн. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ или $f'_x(x_0,y_0)$); при этом предполаг., что ф. $f(x,y_0)$ опред в нек. окр. т x_0 и её произв. конечна

Аналог. опред. ч.п по y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

В общем случае частная производная ф-и $f(x_1,\dots,x_n)$ по перем x_i в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ опред-ся как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^0,\dots,x_n^0)=\frac{d}{dx_i}f(x_i^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)\Big|_{x_i=x_i^0}$$

Замеч В отлич. от ф-и 1-ой пер, из сущ. в т. ч.пр. по всем перем. не след. непр-ть в т.

Пример $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 1, & x=y=0\end{cases}$

$f(x,y)$ не явл непр. в т $(0,0)$, т.к не сущ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ (см. пр из $\boxed{2.11}$)

Но $f(x,0)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}(f(x,0))\Big|_{x=0}=0$$

Аналог. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

3.2 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Опр. Ф-я n перем. f наз. дифференцируемой в т. $(x_1^0,\dots,x_n^0)$, если её прираш. в этой т. представимо в виде

$$\Delta f(x_1^0,\dots,x_n^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n^0)=$$
$$=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\times\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2},\qquad(1)$$

где $A_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, а предел ф-и n перем. $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ рав. 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$

При этом лин. часть приращения $A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ наз. дифференциалом функции f в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и об. $df(x_1^0,\dots,x_n^0)$

Иначе (1) можно запис. так:

$$\Delta f(x_1^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+o(\rho)\quad\text{при}\quad(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$

Для ф-и двух перем. (1) запис. так:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),\ \text{т.е}$$
$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+o(\rho),\ \text{при}\ (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

3.3 Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Т.1 (НУ диф-ти)

Если ф-я n перем f диф-ма в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$, то

1) f непр в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$

2) при $i=1,2,\dots,n$ сущ конечные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_n^0)$, соот. равные коэф A_i в (1)

▲ 1) Т.к.

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2},$$

где $\Delta x_i=x_i-x_i^0$, $i=1,\dots,n$,

а предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$, то предел ф-и $f(x_1,\dots,x_n)$ при $(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)$ равен $f(x_1^0,\dots,x_n^0)$, т.е ф-я непр в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

2) Провед. док-во для $i=1$ (для др. аналог.)

Положим в (1) $\Delta x_2=\dots=\Delta x_n=0$. Тогда

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)\cdot|\Delta x_1|$$

Но если предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ рав. 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$, то и $\lim\limits_{\Delta x_1\to0}\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)=0$

Тогда если $\beta(\Delta x_1)=\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)\cdot\operatorname{sign}\Delta x_1$, то $\lim\limits_{\Delta x_1\to0}\beta(\Delta x_1)=0$, и, т.к

$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\beta(\Delta x_1)\cdot\Delta x_1$, то ф-я $f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)$ как ф-я одной пер x_1 диф. в т x_1^0, и её произв. по x_1 в этой т. равна A_1, т.е сущ. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1$ ■

Таким обр, диф-ал диф-мой ф-и запис. в виде

$$df(x_1^0,\dots,x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_n^0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,\dots,x_n^0)\Delta x_n.$$

Дифференциалами независимых переменных $x_1,\dots,x_n$ наз. их прираш:

$dx_1 = \Delta x_1, \dots, dx_n = \Delta x_n$, поэтому

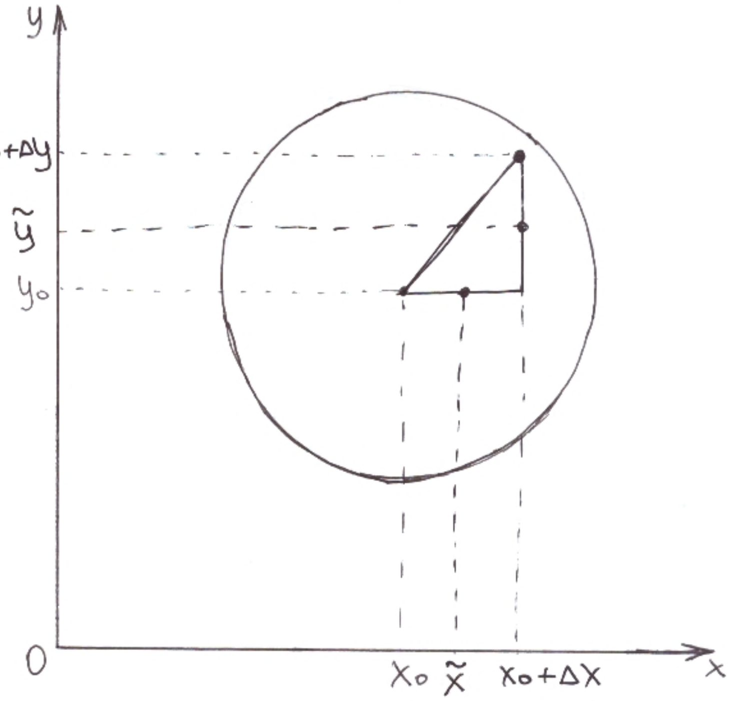
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

$\boxed{\text{Т.2}}$ (ДУ диф-ти)

Если ф-я n перем. f имеет ч. пр. по всем пер. $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, непрерыв. в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ (как ф-и n перем), то ф. f диф. в этой точке.

Провед. док-во для $n=2$ (в общем сл. аналог)

Т.к f_x' и f_y' непр. в т (x_0,y_0), то $\exists\delta>0$: f_x' и f_y' (след-но, и ф. f) опред в $U_\delta(x_0,y_0)$.



Пусть $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$; $\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$. Тогда $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$.

Рассм. прираш. ф-и в т (x_0,y_0):

$$\Delta f(x_0,y_0) \equiv f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) +$$
$$+ f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) =$$
$$= f_y'(x_0+\Delta x, \tilde y)\cdot\Delta y + f_x'(\tilde x, y_0)\Delta x$$

Здесь прим. т. Лагр. о ср. сначала к ф. одной пер $\varphi(y) = f(x_0+\Delta x, y)$

(т.к f_y' сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\varphi(y)$ диф-ма на $[y_0, y_0+\Delta y]$, $\tilde y\in(y_0, y_0+\Delta y)$),

затем к ф-и одной пер. $\psi(x) = f(x, y_0)$

(т.к f_x' сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\psi(x)$ диф-ма на $[x_0, x_0+\Delta x]$, $\tilde x\in(x_0, x_0+\Delta x)$)

Ясно, что $\tilde x = \tilde x(\Delta x,\Delta y)$, $\tilde y = \tilde y(\Delta x, \Delta y)$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \tilde x(\Delta x,\Delta y) = x_0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \tilde y(\Delta x,\Delta y) = y_0$

Если доопред. $\tilde x(0,0) = x_0$, $\tilde y(0,0) = y_0$, то ф-и $\tilde x$ и $\tilde y$ станут непр. в $(0,0)$

По следствию из теор. о суперпозиции непр. отобр. (см. стр 26-27 Пет)

ф-и $f_x'(\tilde x(\Delta x,\Delta y), y_0)$ и $f_y'(x_0+\Delta x, \tilde y(\Delta x,\Delta y))$ как ф-и от Δx и Δy непр в т $(0,0)$ и

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} f_x'(\tilde x, y_0) = f_x'(x_0,y_0) = A\ ; \quad \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} f_y'(x_0+\Delta x, \tilde y) = f_y'(x_0,y_0) = B$$

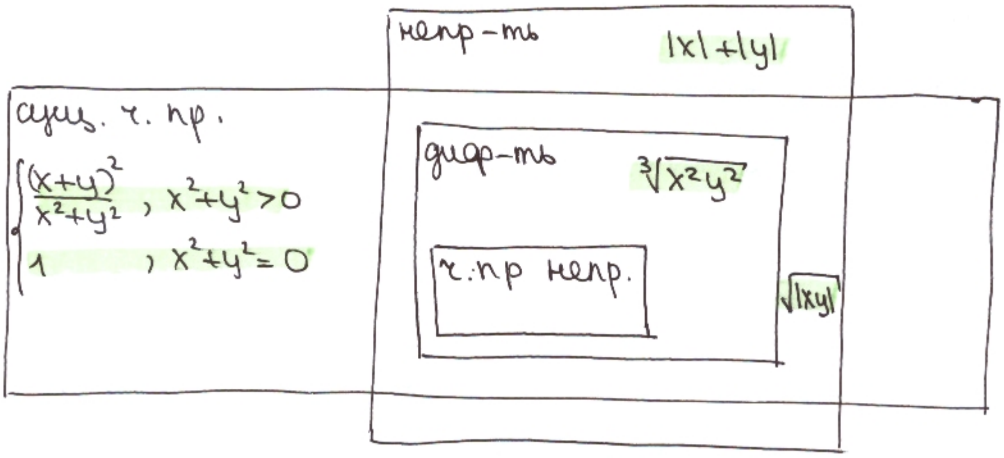
Поэтому $f_x'(\tilde x, y_0) = A + \alpha(\Delta x,\Delta y)$; $f_y'(x+\Delta x, \tilde y) = B + \beta(\Delta x,\Delta y)$, где

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\alpha(\Delta x,\Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\beta(\Delta x,\Delta y) = 0$$

Тогда $\Delta f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$

Но $|\alpha\cdot\Delta x + \beta\,\Delta y| \le (|\alpha| + |\beta|)\rho = o(\rho)$ при $\Delta x\to0, \Delta y\to0$

След-но, ф-я f диф. в т (x_0,y_0)



Все контрпримеры в Петровиче

Алгоритм исслед-я ф-и (для опр-ти 2-ух пер) на диф-ть в (x_0, y_0)
1) Если f'_x и f'_y заведомо непр. в т., то f диф. в т.
2) Выяснить, сущ. ли $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Если хотя бы одна из них не сущ, то f не диф. в т (x_0, y_0).
3) Если A и B сущ, проверить, равен ли 0 предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Если да, то f диф в т (x_0, y_0). Если нет — не диф.

3.4 Дифференцируемость сложной функции.

Т.1 Пусть ф-и k перем. $x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)$ диф-мы в т $(t_1^0, \dots, t_k^0)$ а ф-я n перем. $f(x_1, \dots, x_n)$ диф-ма в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, где $x_j^0 = x_j(t_1^0, \dots, t_k^0)$, $j = 1, \dots, n$.
Тогда сложная ф-я $f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$ диф. в т. $(t_1^0, \dots, t_k^0)$, причем её ч. пр. в этой т. вычисл. по ф-лам

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

($\frac{\partial f}{\partial x_j}$ берутся в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, а $\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$ в т. $(t_1^0, \dots, t_k^0)$)

▲ Рассм. приращение

$$\Delta f = \Delta f(x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Т.к ф. f диф. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, то

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \Delta x_j + \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \times \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}, \text{ где} \qquad (1)$$

$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $j = 1, \dots, n$, а предел ф-и $\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ при $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \to (0, \dots, 0)$ равен 0.
Можно доопред. $\alpha(0, \dots, 0) = 0$; тогда ф-я α непр. в т $(0, \dots, 0)$, и рав-во (1) сохр при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 0$
Пусть теперь

$$\Delta x_j = x_j(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) - x_j(t_1^0, \dots, t_k^0), \ j = 1, \dots, n.$$

Т.к ф-и x_j дифф., то они и непр. в т $(t_1^0,\dots,t_k^0)$, и предел ф-и Δx_j равен 0 при $\Delta t_1\to 0,\dots,\Delta t_k\to 0$, $j=1,\dots,n$.

В силу дифф-ти ф-й x_j:

$$\Delta x_j=\sum_{i=1}^{k}B_{ij}\Delta t_i+\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)\times\sqrt{(\Delta t_1)^2+\dots+(\Delta t_k)^2}\text{, где}\qquad(2)$$

$B_{ij}=\frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0,\dots,t_k^0)$, а пред. ф-й $\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)$ при $(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)\to(0,\dots,0)$ равны 0; $i=1,\dots,k$; $j=1,\dots,n$.

Можно доопред. $\alpha_j(0,\dots,0)=0$, тогда ф-и α_j непр в т $(0,\dots,0)$, и рав-во (2) сохр при $\Delta t_1=\dots=\Delta t_k=0$.

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\Delta f=\sum_{j=1}^{n}A_j\left(\sum_{i=1}^{k}B_{ij}\Delta t_i+\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)\times\sqrt{(\Delta t_1)^2+\dots+(\Delta t_k)^2}\right)+$$
$$+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}\qquad(3)$$

Обозн. $\sqrt{(\Delta t_1)^2+\dots+(\Delta t_k)^2}=\rho$.

Т.к $|\Delta t_i|\le\rho$ при $i=1,\dots,k$. и $\exists\delta>0$ т, ч. при $\sqrt{(\Delta t_1)^2+\dots+(\Delta t_k)^2}<\delta$ выполн. нер-ва

$|\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)|<1$,

то $|\Delta x_j|<M\cdot\sum_{i=1}^{k}|\Delta t_i|+\rho\le(Mk+1)\rho$ при $\rho<\delta$, $j=1,\dots,n$.

(здесь M — наиб. из $|B_{ij}|$, $1\le i\le k$, $1\le j\le n$)

Тогда $\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}<(Mk+1)\sqrt{n}\,\rho\equiv C\rho$ при $\rho<\delta$.

Из (3) имеем теперь

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}A_jB_{ij}\right)\Delta t_i+\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)\right)\rho+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}\qquad(4)$$

Т.к. $C_i=\sum_{j=1}^{n}A_jB_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0,\dots,x_n^0)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0,\dots,t_k^0)$, то для док-ва дифф-ти слож. ф-и в т $(t_1^0,\dots,t_k^0)$ с ч. пр. C_i, $i=1,\dots,k$, достат. проверить, что два из трёх слаг. в правой части (4) есть $o(\rho)$ при $\Delta t_1\to 0,\dots,\Delta t_k\to 0$.

Но $\sum_{j=1}^{n}A_j\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)$ — б/м при $\Delta t_1\to 0,\dots,\Delta t_k\to 0$ как лин. комб. б/м $\alpha_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)$; значит., второе слаг. в правой части (4) $o(\rho)$.

Далее, из (2) след, что $\Delta x_j(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k)$ — непр. ф. от $\Delta t_1,\dots,\Delta t_k$ в т $(0,\dots,0)$. ~~поэтому пред. этой ф-и при $\Delta t_1\to 0,\dots,\Delta t_k\to 0$ равен 0~~.

По след. из теор. о непр. суперпоз. непр. отобр (стр 26-27 Пет)

$\alpha(\Delta x_1(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k),\dots,\Delta x_n(\Delta t_1,\dots,\Delta t_k))$ — непр. ф-и от $\Delta t_1,\dots,\Delta t_k$ в т $(0,\dots,0)$,

поэтому предел этой ф-и при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$ равен 0.
Т.к $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} < C\rho$ при $\rho < \delta$, то третье слаг. в прав. ч. также $o(\rho)$. ■

3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

1) Если $f(x_1, \dots, x_n)$ – диф. ф-я n незав перем, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad (1)$$

, где dx_j – диф-алы незав. пер.

2) Пусть $x_1 = x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = x_n(t_1, \dots, t_k)$ – диф. ф-и k перем.
Тогда для сложной ф-и k перем. $f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$

$$df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad (2)$$

где dx_j – диф-алы ф. неск. перем.

Рав-во (1) и (2) наз. инвар-тью формы диф-ла отн. зам. перем.

3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

Опр. Если ф-я n перем. f имеет в т. $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ч. пр. по всем. перем, причем $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = A_i$, $i = 1, \dots, n$, то вектор с коор ст $(A_1, \dots, A_n)^T$ наз. градиентом ф. f в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и обозн. $\operatorname{grad} f(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Таким обр, $df = (\operatorname{grad} f, \overrightarrow{\Delta x})$, где $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$

Опр. Пусть f – ф. n перем, а $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ – един. вект. $(e_1^2 + \dots + e_n^2 = 1)$
Рассм. ф. $\varphi(t) = f(x_1^0 + te_1, \dots, x_n^0 + te_n)$ одной пер. t.
Если сущ. конечная $\varphi'_+(0)$, то она наз. производной по направлению век. $\vec{e}$ ф. f в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и обозн $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_1^0, \dots, x_n^0)$

Т.1 Если ф. n перем f диф. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, то для любого един. в. $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ сущ. $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$ (все ч.пр бер в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$)

▲ Применим к ф-и $\varphi(t) = f(x_1^0 + te_1, \dots, x_n^0 + te_n)$ теор. о диф. сл.ф.
По этой теор. $\varphi(t)$ диф. в т. 0 (а не только $\exists \varphi'_+(0)$),
причем $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d}{dt}(x_1^0 + te_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d}{dt}(x_n^0 + te_n) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$$

(Пр. $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ бер. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, пр. по t — в т 0) ■

4.1 Частные производные высших порядков

Опр Для ф-и двух перем $f(x,y)$ опред. частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

В т, где соот час. пр от час. пр сущ-т.

Для ф-й любого числа пер. можно определить ч. пр. любых порядков.
Напр, для ф-и 2-ух пер:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$$

3-ех пер:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right) \quad \text{и т.д.}$$

4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования

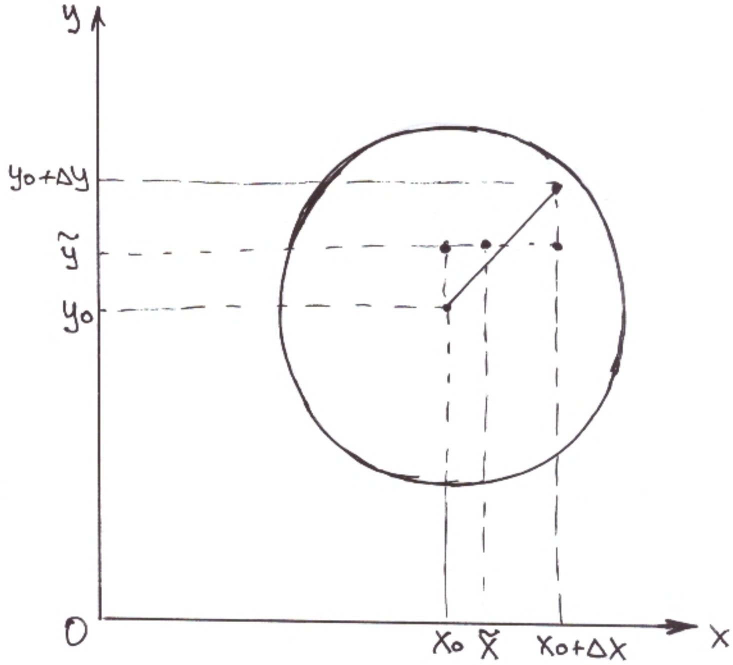
Т.1 Пусть ф. двух пер. f опр. в нек. δ-окр. т (x_0,y_0), $\delta>0$, вместе с $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем f''_{xy} и f''_{yx} непр в т (x_0,y_0).
Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

△ Пусть $(x,y) = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) \in U_\delta(x_0,y_0)$
Рассм. выраж.

$$W = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0) \equiv \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0),$$

где ф-я одной пер.

$\varphi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$ диф. на $[y_0; y_0+\Delta y]$ (т.к f'_y сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$), причем $\varphi'(y) = f'_y(x_0+\Delta x, y) - f'_y(x_0, y)$



Примен. к ф-и $\varphi(y)$ теор Лагр. о сред.

$$W = \varphi'(\tilde{y})\Delta y,$$

где $\tilde{y} \in (y_0; y_0+\Delta y)$, т.е

$$W = \left(f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y}) - f'_y(x_0, \tilde{y})\right)\Delta y$$

Рассм. теперь ф-ю одной перем $\psi(x)$:

$$\psi(x) = f'_y(x, \tilde{y})$$

Т.к в $U_\delta(x_0,y_0)$ сущ. $f''_{yx} = (f'_y)'_x$, то ф-я ψ диф. на $[x_0, x_0+\Delta x]$.
По теор. Лагр.

$$W = (\psi(x_0+\Delta x) - \psi(x_0))\Delta y = \psi'(\tilde{x})\Delta x \cdot \Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x \cdot \Delta y, \text{ где } \tilde{x} \in (x_0, x_0+\Delta x)$$

Ясно, что $\tilde{x} = \tilde{x}(\Delta x, \Delta y)$; $\tilde{y} = \tilde{y}(\Delta x, \Delta y)$;

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{x}(\Delta x, \Delta y) = x_0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{y}(\Delta x, \Delta y) = y_0$

Если доопред. $\tilde{x}(0,0) = x_0$, $\tilde{y}(0,0) = y_0$, то ф-и $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ станут непр. в т $(0,0)$.

По след-ю из теор. о суперпоз. непр. отобр. (стр 26-27 Петр) ф-я $f''_{yx}(\tilde{x}(\Delta x, \Delta y), \tilde{y}(\Delta x, \Delta y))$ как ф-я от $\Delta x, \Delta y$ непр. в т. $(0,0)$, и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Выраж. $\frac{W}{\Delta x \Delta y}$ как ф-я от Δx и Δy опред. при $\Delta x \Delta y \neq 0$, т.е на мн-ве, получ. удалением из пл-ти $\mathbb{R}^2_{\Delta x, \Delta y}$ коор. осей.

Отсюда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x \Delta y \neq 0}} \frac{W}{\Delta x \Delta y} = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Если же преобраз-е W начато с перем x (т.е $W = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)$, где $\Phi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ и т.д), то аналог. можно доказ., что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x \Delta y \neq 0}} \frac{W}{\Delta x \Delta y} = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Значит, $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ∎

Замеч Послед-но примен. Т.1, можно убедиться, что если смеш. частн. пр-ые любого пор. от ф-и любого числа перем. отлич. только поряд. диф-я и непр. в нек. точке, то они совпад. в этой т.

Например,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y}$$

4.3 Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных.

Опр. Ф-я n перем. f наз. k раз. непрерывно дифференцируемой (k=1,2,...) в области $G \subset \mathbb{R}^n$, если она имеет в любой т. этой обл. все ч.пр. пор. k, кот. непр. в G.
Мн-во таких ф-й обозн. $C^k(G)$.

Замеч. Из 4.2 след, что смеш. ч.пр таких ф-й пор $\leq k$ не зав. от пор. диф-я.

Опр Пусть ф-я n перем. $f \in C^k(G)$, где G – обл в $\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\dots$
Тогда её дифференциалом k-го порядка наз. ф-я $2n$ перем $x_1,\dots,x_n, dx_1,\dots,dx_n$

$$d^k f = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

, опред при $(x_1,\dots,x_n) \in G$, $(x_1+dx_1,\dots,x_n+dx_n) \in G$.

Из непр-ти ч. пр. следует, что для $k=2$:

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Для ф-и двух перем $f(x,y) \in C^k(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} dx^j dy^{k-j}$$

(заметим сходство с ф. бинома Ньют)

Для $f(x,y) \in C^2(G)$:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Отсут. инвар-ти формы дифр-ла пор $k \geq 2$ отн. зам. перем. разберем для случая $k=2, n=2$.

1) Пусть u, v – дважды непр. дифр. ф-и произ. числа перем; f – дважды дифр. ф-я двух перем. Тогда

$$d^2 f(u,v) = d(df(u,v)) = d(f'_u du + f'_v dv)$$

Т.к du и dv нельзя счит. пост, то

$$d^2 f(u,v) = du\, d(f'_u) + f'_u d(du) + dv\, d(f'_v) + f'_v \cdot d(dv) =$$
$$= du(f''_{uu} du + f''_{uv} dv) + f'_u d^2 u + dv(f''_{vu} du + f''_{vv} dv) + f'_v d^2 v =$$
$$= f''_{uu} du^2 + 2 f''_{uv} du dv + f''_{vv} dv^2 \underbrace{+ f'_u d^2 u + f'_v d^2 v} \qquad (1)$$

2) Для u, v – незав. пер.

$$d^2 f(u,v) = f''_{uu} du^2 + 2 f''_{uv} du dv + f''_{vv} dv^2 \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), приходим к выводу об отсут. ин-ти формы 2-го дифр-ла отн. зам. пер.

4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

Т.1 (ост. чл в ф. Лагр)

Пусть при нек $\delta>0$ ф-я n перем $f\in C^{k+1}(U_\delta(x_1^0,\dots x_n^0))$, где $k=0,1,2,\dots$ Тогда для любой точки $(x_1,\dots,x_n)\in U_\delta(x_1^0,\dots,x_n^0)$ найдется число $\xi\in(0,1)$ такое, что

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{d^jf(x_1^0,\dots,x_n^0)}{j!}+\frac{d^{k+1}f(x_1^0+\xi\Delta x_1,\dots,x_n^0+\xi\Delta x_n)}{(k+1)!}$$

где $d^jf=\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^jf$, $j=1,\dots,k+1$ — диф-ал j-го пор. ф. f в соот т;

$\Delta x_i=x_i-x_i^0$, $i=1,\dots,n$;

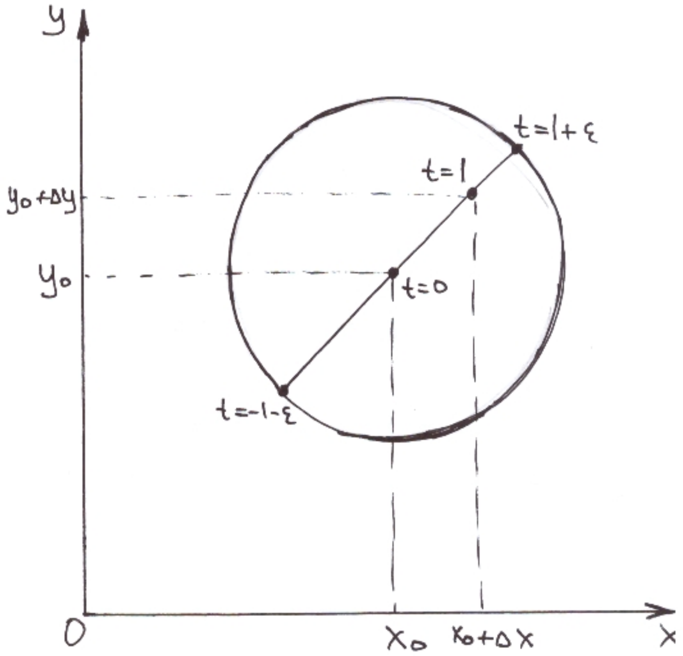
$\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}<\delta$

▲ Док-во для $n=2$ (для $n>2$ аналог).

Пусть ф-я двух перем. $f\in C^{k+1}(U_\delta(x_0,y_0))$

Рассм. ф-ю одной перем. $F(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$, где $\Delta x,\Delta y$ т, ч. $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta$;

t — т., ч. $(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\in U_\delta(x_0,y_0)$, т.е $t\in(-1-\varepsilon;1+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ (точнее, $\varepsilon=\frac{\delta}{\rho}-1$)



По теор. о диф. сл. ф-и. $\forall t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$F'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y=$$
$$=df(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$$

Покажем по инд., что при $1\le j\le k+1$ при всех $t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$F^{(j)}(t)=d^jf(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y).$$

В самом деле, при $j=1$ это верно. Если утв. верно при нек $j\le k$, то

$$F^{(j+1)}(t)=\frac{d}{dt}(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))$$

Но все ч. пр. ф. f пор. вплоть до $k+1$ непр, поэтому $d^jf(x,y)$ — непр. диф. ф-я 2-ух пер. в $U_\delta(x_0,y_0)$, и по теор. о диф. сл. ф-и $\forall t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$F^{(j+1)}(t)=(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))'_x\cdot\Delta x+(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))'_y\,\Delta y=$$
$$=d(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)).$$

Внешний диф-л подразумевает диф-е по x и y при пост Δx и Δy

$d(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))=d^{j+1}f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$. Индукция завершена.

Т.к. ф-я одной пер. F имеет $k+1$ произв. на $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, то по одномерной ф. Тейлора с ост чл в ф. Лагр при $t\in(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ сущ $\xi\in(0,t)$ т, что.

$$F(t) = F(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1}$$

При $t=1$ получим

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_0,y_0)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y)}{(k+1)!},$$

где $\xi\in(0,1)$. ■

$\boxed{\text{Т.2}}$ (ост. чл. в ф. Пеано)

Пусть при нек $\delta>0$ ф. n перем. $f\in C^k(U_\delta(x_1^0,\dots,x_n^0))$, где $k=1,2,\dots$

Тогда

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1^0,\dots,x_n^0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(x_1^0,\dots,x_n^0)}{j!} + o(\rho^k),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$; $o(\rho^k) = \alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\rho^k$, причем предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$

△ Из Т.1 след, что для ф-и f можно записать ф. Тейл с ост. чл. в ф. Лагр пор. $k-1$, т.е при всех $(x_1,\dots,x_n)\in U_\delta(x_1^0,\dots,x_n^0)$ имеет место рав-во

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1^0,\dots,x_n^0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d^j f(x_1^0,\dots,x_n^0)}{j!} + \frac{d^k f(x_1^0+\xi\Delta x_1,\dots,x_n^0+\xi\Delta x_n)}{k!}$$

$\xi\in(0,1)$

Поэтому достат. доказать, что

$$d^k f(x_1^0+\xi\Delta x_1,\dots,x_n^0+\xi\Delta x_n) = d^k f(x_1^0,\dots,x_n^0) + o(\rho^k) \quad \text{при } (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$$

Проведем док-во для $n=2$ (при $n\geq 2$ аналог)

$$d^k f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} (\Delta x)^j (\Delta y)^{k-j}.$$

Если $x = x_0+\xi\Delta x$, $y = y_0+\xi\Delta y$, где $\xi = (\Delta x, \Delta y)$, $\xi\in(0,1)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} x(\Delta x,\Delta y) = x_0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} y(\Delta x,\Delta y) = y_0$$

Т.к $x(0,0)=x_0$, $y(0,0)=y_0$, то ф. $x(\Delta x,\Delta y)$ и $y(\Delta x,\Delta y)$ непр в $(0,0)$

Т.к при фикс. j ф-я $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}$ непр. в любой т. $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$, то по след-ю из теор. о суперпоз непр. отобр (стр 26-27 Петр) ф-я $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0+\xi(\Delta x,\Delta y)\Delta x, y_0+\xi(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y)$ от двух пер. Δx и Δy непр. в $(0,0)$ и $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0,y_0) + \alpha_j(\Delta x,\Delta y)$, где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_j(\Delta x,\Delta y)=0$

Поэтому

$$|d^k f(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y)-d^k f(x_0,y_0)|=\left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j \alpha_j(\Delta x,\Delta y)\cdot(\Delta x)^j(\Delta y)^{k-j}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{k} C_k^j\,|\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|\cdot\rho^j\rho^{k-j}=\rho^k\sum_{j=0}^{k} C_k^j|\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|$$

Т.к все ф-и $|\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|$, $j=0,1,\dots,k$ – б/м при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$, то таковой же явл. и их лин. комбин., поэтому

$d^k f(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y)=d^k f(x_0,y_0)+o(\rho^k)$, $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$ ∎

5.1 Определение измеримости по Жордану множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Клеткой в $\mathbb{R}^n$ будем наз. замкнутый прямоугольный пар-д

$\Pi=\{x=(x_1,\dots,x_n): a_k \le x_k \le b_k,\ k=1,\dots,n\}$,

где числа a_k, b_k $(a_k \le b_k)$, $k=1,\dots,n$ задают клетку $\Pi \subset \mathbb{R}^n$.

Мерой $\mu(\Pi)$ клетки Π наз. число $\mu(\Pi)=(b_1-a_1)\dots(b_k-a_k)$

Опр. Мн-во $A\subset\mathbb{R}^n$ наз. клеточным множеством, если оно представимо в виде конечного набора клеток $\Pi_i\subset\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,I$, не имеющих общих внутр. точек:

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{I}\Pi_i$; $(\operatorname{int}\Pi_i)\cap(\operatorname{int}\Pi_s)=\varnothing$ при $i\neq s$.

Мерой клеточного множества A наз. сумма мер составляющих его клеток:

$\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^{I}\mu(\Pi_i)$

(Пустое мн-во по опр. счит клет; $\mu(\varnothing)=0$)

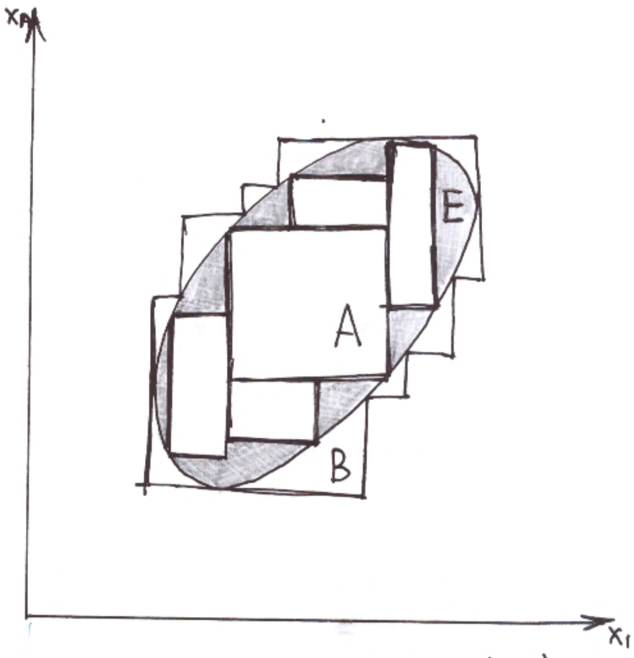
Св-во 1 Мера клет. мн-ва не зависит от способа разб. на клетки

Св-во 2 Если A, B – клет. мн, то мн. $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus(\operatorname{int}B)$ явл. клет.
(мн-во $A\setminus B$, вообще гов, незамкн, след-но, не явл. клет)

Св-во 3 (Аддит-ть)
Если A, B – клет. мн., не имеющие общих внут. т, то $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$
Если сущ. внут. т. A и B, то $\mu(A\cup B)<\mu(A)+\mu(B)$

Св-во 4 (Монот-ть)
Если A, B – клет. мн и $A\subset B$, то $\mu(A)\le\mu(B)$

Опр Нижней мерой Жордана $\mu_*(E)$ мн. $E\subset\mathbb{R}^n$ наз. точная верхняя грань мер клет. мн. A, содерж-ся в E.
Верхней мерой Жордана $\mu^*(E)$ мн. $E\subset\mathbb{R}^n$ наз. точная нижняя грань мер клет. мн. B, содержащих E:



$$\mu_*(E)=\sup_{A\text{-кл.мн}, A\subset E}\mu(A)$$

$$\mu^*(E)=\inf_{B\text{-кл.мн}, B\supset E}\mu(B)$$

Мн-во $E\subset\mathbb{R}^n$ наз. измеримым по Жордану, если $\mu_*(E)=\mu^*(E)\in\mathbb{R}$
Число $\mu(E)=\mu_*(E)=\mu^*(E)$ наз. мерой множества E

5.2 Критерий измеримости

Л.1 Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ изм. по Ж $\iff \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл. мн. A_ε и B_ε : $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть E изм., т.е $\mu_*(E) = \mu^*(E)$

По опр. точн. верхн. гр. $\mu_*(E) = \sup\limits_{A - \text{кл}, A \subset E} \mu(A)$,

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл. мн $A_\varepsilon \subset E$: $\mu_*(E) - \mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$

Аналог. по опр. inf

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл. мн $B_\varepsilon \supset E$: $\mu(B_\varepsilon) - \mu^*(E) < \frac{\varepsilon}{2}$

След-но, $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл. мн A_ε и B_ε : $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$

Поскольку $\mu_*(E) = \sup\limits_{A \text{кл}, A \subset E} \mu(A) \geq \mu(A_\varepsilon)$

$$\mu^*(E) = \inf_{B - \text{кл}, B \supset E} \mu(B) \leq \mu(B_\varepsilon) \text{ , то}$$

$$\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Т.к число $\mu^*(E) - \mu_*(E)$ не зав. от выбора $\varepsilon > 0$, то $\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq 0$, т.е $\mu^*(E) \leq \mu_*(E)$

Поскольку нер-во $\mu^*(E) \geq \mu_*(E)$ вып. всегда, то $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ ■

~~Л.2~~

Через $U_\delta(E)$ обозначим δ-окр. мн. E:

$U_\delta(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, E) < \delta\}$, где $\rho(x, E) = \inf\limits_{y \in E} |x - y|$ – р-е от x до мн. E.

Л.2 Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измер мн. Тогда

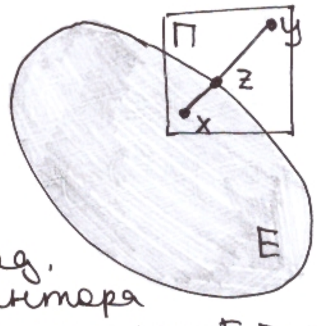
$\mu^*(U_\delta(E)) \to \mu(E)$ ~~при~~ $\delta \to 0$

Следствие

Если E – мн. меры 0 в $\mathbb{R}^n$, то

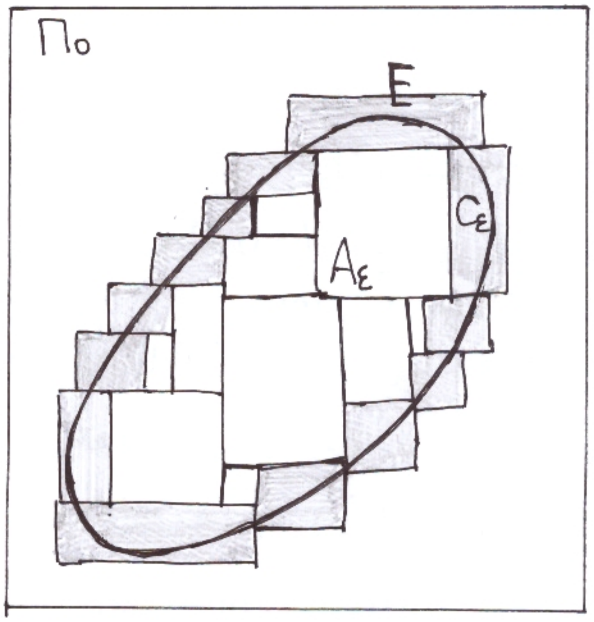
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клет. мн. $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ т., что $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$ и $E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$.

Л.3 Пусть клетка $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ содержит как т. из мн. E, так и т. не из мн. E. Тогда клетка Π имеет общую т с границей E



▲ Пусть $x \in \Pi \cap E$, $y \in \Pi \setminus E$. Тогда отрезок $[x, y] \subset \Pi$ обладает тем св-вом, что один из его концов лежит в E, др – вне E. Примен к $[x, y]$ процесс дел пополам и отбирая каждый раз ту полов, кот облад. указ. св-вом, получ. стяг. сист. отр, кот. по т Кантора имеет общ. т z. Всякая окр т z содер. т. как из E, так и не из $E \Rightarrow z \in \partial E$ ■

$\boxed{\text{Т.1}}$ (Крит. измеримости)
Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ измер $\Longleftrightarrow$ E огр и $\mu(\partial E) = 0$
$\blacktriangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть мн. E изм.
Всякое измеримое мн-во ограничено
(Иначе, в случ. неогр. мн-ва, не сущ. клеточного мн-ва B (т.е мн-ва из конечного набора клеток), т.ч. $E \subset B$)
Покажем, что $\mu(\partial E) = 0$.
В силу $\boxed{\text{Л.1}}$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл мн A_ε и B_ε: $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$
Из св-ва 2 след, что мн-во $C_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon)$ явл. клет.
Поскольку клет. мн. A_ε и C_ε не имеют общ. внут. т, то в силу св-ва 3 $\mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon)$.
След-но, $\mu(C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. (1)
Поскольку $E \subset B_\varepsilon$, то $\overline{E} \subset \overline{B}_\varepsilon = B_\varepsilon$.
Т.к $A_\varepsilon \subset E$, то $\operatorname{int} A_\varepsilon \subset \operatorname{int} E$, поэтому $\partial E = \overline{E} \setminus (\operatorname{int} E) \subset B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon) = C_\varepsilon$
Отсюда и из (1) след, что
$\mu^*(\partial E) \leq \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$
В силу произ-ти ε, $\mu^*(\partial E) = 0$
Т.к всегда $0 \leq \mu_*(\partial E) \leq \mu^*(\partial E)$ $\Rightarrow$ $\mu_*(\partial E) = \mu^*(\partial E) = 0$, т.е $\mu(\partial E) = 0$
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть E огр и $\mu(\partial E) = 0$
Покажем, что E измеримо.
Зафикс $\forall \varepsilon > 0$
В силу след. из $\boxed{\text{Л.2}}$ $\exists$ клет. мн. C_ε: $\partial E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$ и $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$
В силу огр-ти мн-в E и C_ε сущ. клетка Π_0, содерж. мн-ва E и C_ε
Из св-ва 2 след, что мн-во $D_\varepsilon = \Pi_0 \setminus \operatorname{int} C_\varepsilon$ явл. клеточным, т.е м/б представлено как объедин. клет. Π_i^ε, $i = 1, \ldots, I$, не имеющих общих внут. т.
Определим кл. мн. A_ε как объедин. всех клеток Π_i^ε, $i = 1, \ldots, I$, кот. целиком содерж. во мн-ве E: $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{\Pi_i^\varepsilon \subset E} \Pi_i^\varepsilon$



Поскольку кл. Π_i^ε не имеют общ. т с ∂E, то из $\boxed{\text{Л.3}}$ след, что либо клетка Π_i^ε целиком содер. в E, либо не имеет общ. т. с E.
Поэтому $E \subset A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$
Определим кл. мн $B_\varepsilon = A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$, получим $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$. Поскольку мн. C_ε и D_ε не им. общ. внут. т., то мн. C_ε и $A_\varepsilon \subset D_\varepsilon$ облад. тем же св-вом.
Отсюда по св-ву 3 $\mu(B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) < \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon$.
Поэтому $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Из $\boxed{\text{Л.1}}$ след, что E измеримо $\blacksquare$

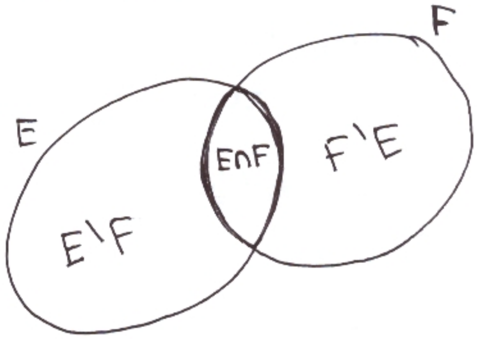
5.3 Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

Л.1 Для любых мн. $E, F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения:

а) $\partial(E\cup F)\subset \partial E\cup\partial F$

б) $\partial(E\cap F)\subset \partial E\cup\partial F$

в) $\partial(E\setminus F)\subset \partial E\cup\partial F$



▲ Докажем а) (б) и в) аналог.)

Пусть $x\in\partial(E\cup F) = \overline{E\cup F}\setminus(\mathrm{int}(E\cup F))$

Тогда $x\in\overline{E\cup F}=\overline{E}\cup\overline{F}$.

След-но, $x\in\overline{E}$ или $x\in\overline{F}$.

Т.к $\mathrm{int}\,E\cup\mathrm{int}\,F\subset\mathrm{int}(E\cup F)$ и $x\notin\mathrm{int}(E\cup F)$, то $x\notin\mathrm{int}\,E\cup\mathrm{int}\,F$.

Поэтому $x\in\overline{E}\setminus\mathrm{int}\,E=\partial E$

или $x\in\overline{F}\setminus\mathrm{int}\,F=\partial F$

В любом случае, $x\in\partial E\cup\partial F$ ■

Следствие Если мн. E и F измеримы, то мн. $E\cup F$, $E\cap F$, $E\setminus F$ измер.

▲ След. из крит. измер-ти Т.1 из 5.2 и Л.1. ■

5.4 Свойство аддитивности меры Жордана

Т.1 Если мн-ва E_1 и E_2 измер. по Жордану и не имеют общ. внутр. точек, то

$$\mu(E_1\cup E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)$$

▲ По опр. меры Жорд.

$\forall\varepsilon>0\ \exists$ клет. мн. $A_i^\varepsilon, B_i^\varepsilon$ $(i=1,2)$ такие, что $A_i^\varepsilon\subset E_i\subset B_i^\varepsilon$ и

$$\mu(A_i^\varepsilon)\geq\mu(E_i)-\frac{\varepsilon}{2}\qquad (i=1,2)$$
$$\mu(B_i^\varepsilon)\leq\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{2}$$

След-но,

$$\mu(A_1^\varepsilon)+\mu(A_2^\varepsilon)\geq\mu(E_1)+\mu(E_2)-\varepsilon \qquad (1)$$
$$\mu(B_1^\varepsilon)+\mu(B_2^\varepsilon)\leq\mu(E_1)+\mu(E_2)+\varepsilon$$

Поскольку $A_1^\varepsilon\cup A_2^\varepsilon\subset E_1\cup E_2\subset B_1^\varepsilon\cup B_2^\varepsilon$ и кл. мн. A_1^ε и A_2^ε не имеют общ. внут. т, то

$$\mu(A_1^\varepsilon)+\mu(A_2^\varepsilon)=\mu(A_1^\varepsilon\cup A_2^\varepsilon)\leq\mu(E_1\cup E_2)\leq\mu(B_1^\varepsilon\cup B_2^\varepsilon)\leq\mu(B_1^\varepsilon)+\mu(B_2^\varepsilon)$$

Отсюда и из (1) след.

$$\mu(E_1)+\mu(E_2)-\varepsilon\leq\mu(E_1\cup E_2)\leq\mu(E_1)+\mu(E_2)+\varepsilon,$$

что в силу произв-ти $\varepsilon>0$ дает рав-во

$$\mu(E_1\cup E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)$$ ■

$\boxed{5.5}$ Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$-мерном пространстве.

$\boxed{\text{Т.1}}$ Если мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то цилиндр $G = E \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ явл. измер. мн-вом и

$\mu(G) = (b-a)\mu(E)$

▲ Т.к E измеримо, то

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$ кл.мн. $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$: $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$; $\mu(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$; $\mu(B_\varepsilon) - \mu(E) < \varepsilon$

Рассм. кл.мн-ва

$\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \times [a,b]$; $\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \times [a,b]$

Тогда $\tilde{A}_\varepsilon \subset G \subset \tilde{B}_\varepsilon$

След-но, $\mu_*(G) \geq \mu(\tilde{A}_\varepsilon) = (b-a)\mu(A_\varepsilon) > (b-a)(\mu(E) - \varepsilon)$

В силу произв-ти $\varepsilon > 0$ получаем

$\mu_*(G) \geq (b-a)\mu(E)$

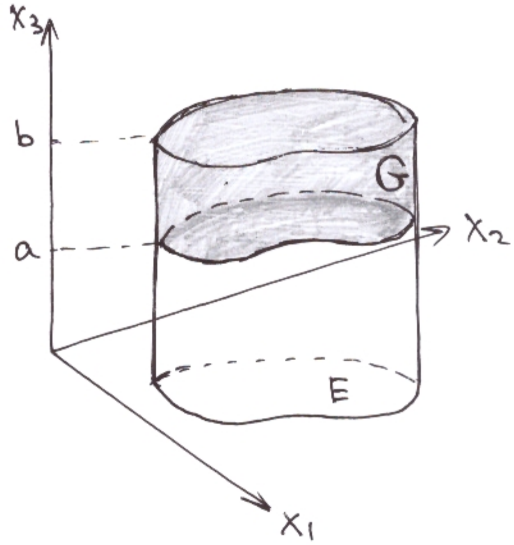
Аналогично,

$\mu^*(G) \leq \mu(\tilde{B}_\varepsilon) = (b-a)\mu(B_\varepsilon) < (b-a)(\mu(E) + \varepsilon)$

$\mu^*(G) \leq (b-a)\mu(E) \leq \mu_*(G)$

Поэтому сущ. $\mu(G) = (b-a)\mu(E)$ ■

<u>Замеч</u> В случае $\mathbb{R}^2$ цилиндр $G = E \times [a,b] \subset \mathbb{R}^3$ можно представить так:



6.2 Верхние и нижние суммы Дарбу, свойства сумм Дарбу.

Определим нек. опер. с $+\infty$ и $-\infty$:

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\pm\infty + \lambda = \pm\infty$

если $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, то $\lambda \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

если $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, то $\lambda \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

Опр. Разбиением отрезка $[a,b]$ наз. конечный набор точек $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$

Отр. $[x_{i-1}, x_i]$ наз отрезками разбиения T.

Опр. Пусть на $[a,b]$ опр. ф-я $f(x)$ и задано разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$. Определим

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$s(f,T) = \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

$$S(f,T) = \sum_{i=1,\ldots,I} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

Сумма $s(f,T)$ наз нижней суммой Дарбу, а $S(f,T)$ — Верхней суммой Дарбу для ф-и f разб T.

Лемма 1

1) Если ф. f огр снизу на $[a,b]$, то $s(f,T) \in \mathbb{R}$ $\forall$ разб T.
Если ф. f неогр снизу на $[a,b]$, то $s(f,T) = -\infty$ $\forall$ разб T.

2) Если ф. f огр сверху на $[a,b]$, то $S(f,T) \in \mathbb{R}$ $\forall$ разб T
Если ф f неогр сверху на $[a,b]$, то $S(f,T) = +\infty$ $\forall$ разб T

□ 1) Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ — разб. отр $[a,b]$

Если f огр снизу, то $\forall i \in \{1,\ldots,I\} \to m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow s(f,T) \in \mathbb{R}$.

Если f неогр снизу, то она неогр снизу на нек $[x_{j-1}, x_j]$.

$\Rightarrow m_j = -\infty \Rightarrow$

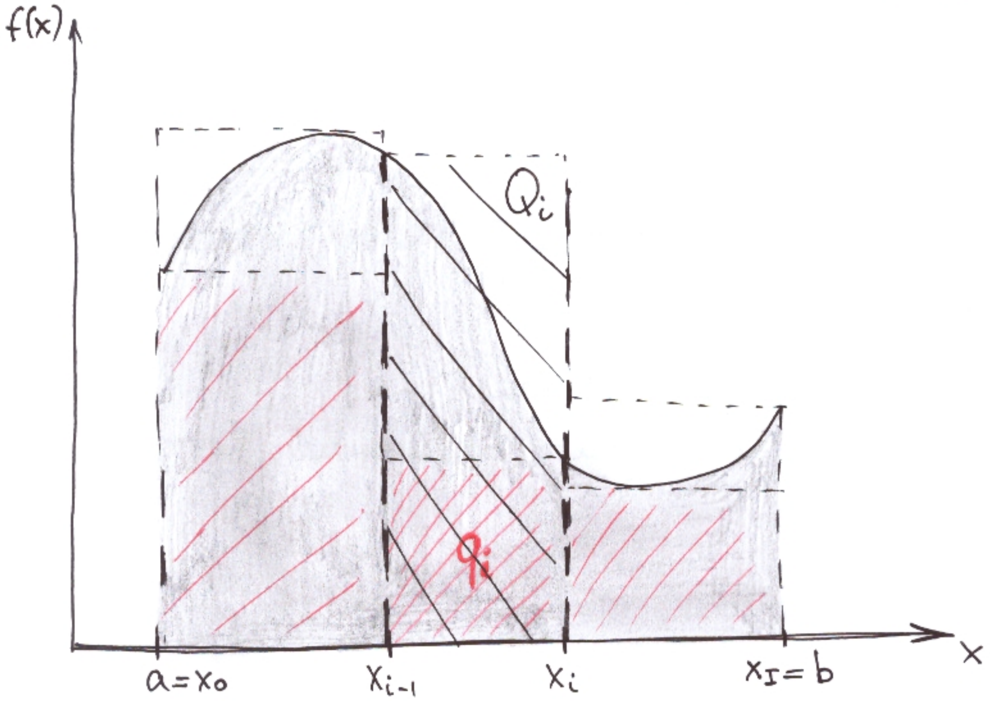
$s(f,T) = -\infty$

2) Аналогично ■

Геом. смысл сумм Дарбу.

Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф. f: $\forall x\in[a,b] \hookrightarrow f(x)\geqslant 0$

Мн-во $G=\{(x,y): a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\}$ наз. криволинейной трапецией



Для заданного разб $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ опред. прямоуг-ки:

$q_i=\{(x,y): x_{i-1}\leq x\leq x_i, 0\leq y\leq m_i\}$

$Q_i=\{(x,y): x_{i-1}\leq x\leq x_i, 0\leq y\leq M_i\}$

Мн-во $q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} q_i$ наз внутренним, а мн-во $Q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми мн-вами для криволинейной трапеции G.

Заметим, что $q(f,T)\subset G\subset Q(f,T)$

Поскольку площ. прям-ков q_i и Q_i равны соот

$\mu(q_i)=(x_i-x_{i-1})m_i$ и $\mu(Q_i)=(x_i-x_{i-1})M_i$, то площ. внут. и вн. ступ. мн-в равны соот

$\mu(q(f,T))=s(f,T)$, $\mu(Q(f,T))=S(f,T)$.

В этом состоит геом. смысл сумм Дарбу

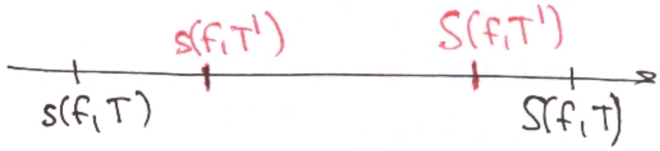
Опр. Мелкостью разбиения $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ наз число

$$\ell(T)=\max_{i=1,..,I}(x_i-x_{i-1})$$

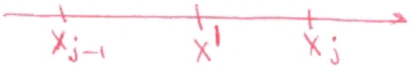
Опр. Буд. гов, что разбиение T' отр $[a,b]$ явл. измельчением разбиения T отр $[a,b]$, если разб T' содержит все точки T: $T\subset T'$.

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ Если разб. T' $[a,b]$ явл. измельч. разб T, то $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ имеют место нер-ва

$$s(f,T')\geq s(f,T) \quad и \quad S(f,T')\leq S(f,T)$$



□ Рассм. случай, когда разб T' получ. из $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ добавл. одной точки $x'\in(x_{j-1},x_j)$



Тогда:

$$s(f,T')-s(f,T)=(x_j-x')\inf_{x\in[x',x_j]}f(x)+(x'-x_{j-1})\inf_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)-(x_j-x_{j-1})\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)=$$

$$=(x_j-x')\left(\inf_{x\in[x',x_j]}f(x)-\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\right)+(x'-x_{j-1})\left(\inf_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)-\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\right)\geq 0,$$

т.к $\inf_{x\in[x',x_j]}f(x)\geq\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)$ и

$$\inf_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)\geq\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)$$

Нер-во $S(f,T')\leq S(f,T)$ док. аналог.

Если T' получ. из T добавл нескольк. точек, то, добавляя на каждом шаге по одной точке, получаем требуемое ■

$\boxed{\text{Лемма 3}}$ Для $\forall\, T_1,T_2$ — разб. $[a,b]$ и $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ справ. нер-во

$$s(f,T_1)\leq S(f,T_2)$$

□ Рассм. разб $T=T_1\cup T_2$, сост. из т. разб T_1 и т разб T_2.
Поскольку T — измельч. T_1, T — измельч. T_2, то по лемме 2

$$s(f,T_1)\leq s(f,T) \quad и \quad S(f,T)\leq S(f,T_2)$$

Поскольку для разб $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ справ. соот.

$$s(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\leq\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=S(f,T),$$

то $s(f,T_1)\leq s(f,T)\leq S(f,T)\leq S(f,T_2)$ ■

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана ф. f. Определим

$J_* = \sup\limits_T s(f,T)$, $J^* = \inf\limits_T S(f,T)$,

где супремум и инфимум берутся по всевозможным разб T отр $[a,b]$.

Величины J_* и J^* наз соот нижним и верхним интегралами Дарбу.

Лемма 4 $\forall T$ — разб $[a,b]$ и $\forall f: [a,b] \to \mathbb{R}$ справ. нер-ва

$s(f,T) \leq J_* \leq J^* \leq S(f,T)$

$\square$ Из леммы 3:

$\forall T_2: \quad J_* = \sup\limits_{T_1} s(f,T_1) \leq S(f,T_2)$

$\Rightarrow J_* \leq \inf S(f,T_2) = J^*$

Поэтому $s(f,T) \leq \sup\limits_T s(f,T) = J_* \leq J^* = \inf S(f,T) \leq S(f,T)$ $\blacksquare$

6.1 Определенный интеграл Римана

Опр. Число J наз определенным интегралом Римана ф-и f на $[a,b]$ и обозн. $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если

$\lim\limits_{l(T)\to 0} s(f,T) = \lim\limits_{l(T)\to 0} S(f,T) = J$, т.е

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T: l(T) \leq \delta \mapsto |s(f,T) - J| \leq \varepsilon$ и $|S(f,T) - J| \leq \varepsilon$

Ф-я f наз. интегрируемой по Риману на $[a,b]$, если сущ. инт. Римана ф-и f на $[a,b]$

Геом. смысл.

Для неотриц. ф. f

$\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx \iff \exists$ площадь кривол. тр. G

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Pi_G$

Лемма 1 (Необход. усл. инт-ти)

Если ф. f инт. на $[a,b]$, то f огр на $[a,b]$

$\square$ Если ф. f неогр снизу на $[a,b]$, то

в силу леммы 1 $\boxed{6.2}$ $\lim\limits_{l(T)\to 0} s(f,T) = -\infty$

$\Rightarrow \nexists$ конечн. пред. $s(f,T)$ при $l(T) \to 0$

$\Rightarrow f$ не инт на $[a,b]$

Аналогично, если f неогр сверху, то она тоже неинт. $\blacksquare$

Замеч. Обр. неверно: f огр на $[a,b]$ $\not\Rightarrow$ f инт на $[a,b]$

пример: ф. Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\forall T \mapsto s(f,T)=0$; $S(f,T)=b-a$

При $\ell(T)\to 0$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ стрем к разл. пределам $\Rightarrow f$ не инт по Р.

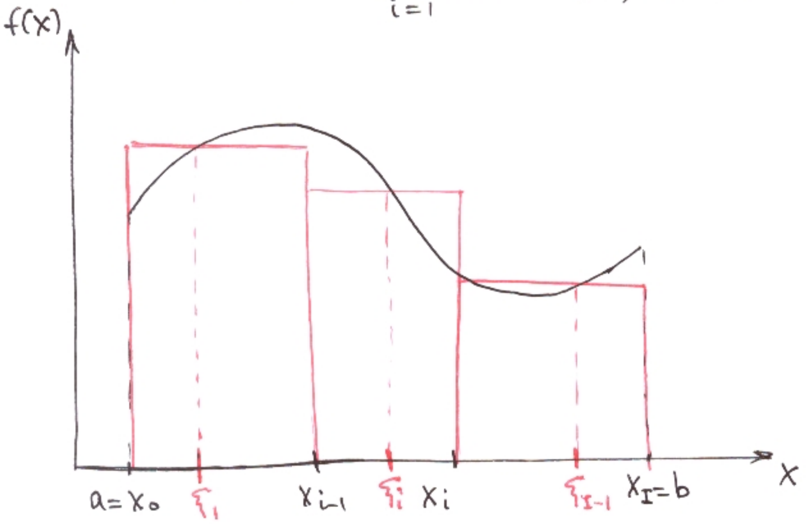
Рассмотрим определение интеграла через интегральные суммы Римана.

Опр. Пусть задано разбиение $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,b]$.

Выборкой, соотв. разб T, наз. набор точек $\xi_T=\{\xi_i\}_{i=1}^{I}$ таких, что $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Интегральной суммой (Римана) для ф-и f, разб. T и выборки ξ_T наз

$$\sigma(f,T,\xi_T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$$



Лемма 2 Пусть на $[a,b]$ опр. ф. $f(x)$ и задано разб $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$

Тогда $s(f,T)=\inf\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$ и $S(f,T)=\sup\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$, где супремум и инфимум берутся по всем выборкам ξ_T, соот. разб T.

$\square$ $s(f,T)=\sum\limits_{i=1,\dots,I}(x_i-x_{i-1})\inf\limits_{\xi_i\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi_i)=$

$$=\inf_{\xi_1\in[x_0,x_1]}\dots\inf_{\xi_I\in[x_{I-1},x_I]}\sum_{i=1,\dots,I}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)=\inf_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$$

Аналогично, $S(f,T)=\sup\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Опр инт. через инт. суммы Римана)

Число J равно $\int\limits_a^b f(x)dx$ тогда и только тогда, когда

$\lim\limits_{\ell(T)\to 0} \sigma(f,T,\xi_T) = J$, т.е

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall T : \ell(T)\leq\delta \ \ \forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f,T,\xi_T) - J| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

$\square$ Расм. отдельно условие:

$\forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f,T,\xi_T) - J| \leq \varepsilon$

это усл. можно переписать в виде

$$\forall \xi_T \hookrightarrow J-\varepsilon \leq \sigma(f,T,\xi_T) \leq J+\varepsilon \qquad (2)$$

Условие $\forall \xi_T \hookrightarrow \sigma(f,T,\xi_T) \leq J+\varepsilon$ означает, что число $J+\varepsilon$ явл. нек. верхней гранью знач. $\sigma(f,T,\xi_T)$ по выборкам ξ_T.

В силу св-в верхних граней это усл. экв-но нер-ву

$\sup\limits_{\xi_T} \sigma(f,T,\xi_T) \leq J+\varepsilon$.

Из леммы 2.: $S(f,T) \leq J+\varepsilon$

Аналогично условие $\forall \xi_T \hookrightarrow J-\varepsilon \leq \sigma(f,T,\xi_T)$ экв-но нер-ву $J-\varepsilon \leq s(f,T)$

Имеем: $S(f,T) \leq J+\varepsilon$

$s(f,T) \geq J-\varepsilon$

Поскольку всегда $s(f,T) \leq S(f,T)$, то

$$(2) \iff J-\varepsilon \leq s(f,T) \leq S(f,T) \leq J+\varepsilon \iff |s(f,T)-J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f,T)-J|\leq\varepsilon$$

След-но,

$(1) \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\delta>0 \ \forall T: \ell(T)\leq\delta \hookrightarrow |s(f,T)-J|\leq\varepsilon$ и $|S(f,T)-J|\leq\varepsilon$,

что по опр. означ.

$J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\blacksquare$

~~Замеч. Обр. неверно: f огр на $[a,b] \not\Rightarrow f$ инт на $[a,b]$~~

~~Пример: ф. Дирихле~~

~~$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin \mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$~~

~~$\forall T \hookrightarrow s(f,T)=0;\ S(f,T)=b-a$~~

~~При $l(T)\to 0$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ стрем к различным пред.~~

~~$\Rightarrow f$ неинт по Риману~~

6.3 Критерии интегрируемости

Опр. Разность верхней и нижней сумм Дарбу для ф-и f и разб T будем обозн. через $\Delta(f,T)$:

$$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)$$

Теорема 1 (Крит. инт)

ф. f инт на $[a,b] \Longleftrightarrow \lim\limits_{l(T)\to 0}\Delta(f,T)=0$, т.е

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow \Delta(f,T)\le\varepsilon$ (1)

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Если f инт на $[a,b]$, то по опр

$\exists J\in\mathbb{R}: \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow \left(|s(f,T)-J|\le\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |S(f,T)-J|\le\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Поэтому при $l(T)\le\delta$

$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)\le|S(f,T)-J|+|s(f,T)-J|\le\varepsilon$

$\Rightarrow$ усл (1) вып

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып усл (1)

Тогда из леммы 1 $\boxed{6.2}$ след, что f огр, т.к иначе либо $s(f,T)=-\infty$, либо $S(f,T)=+\infty$ и в любом случ.

$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)=+\infty \Rightarrow$ против. (1).

Поскольку f огр, то $\forall T$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ конечны.

Отсюда и из нер-ва $s(f,T)\le J_*\le J^*\le S(f,T)$ след, что J_* и J^* – конечные числа.

Из усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists T: S(f,T)-s(f,T)=\Delta(f,T)\le\varepsilon$

Отсюда и из леммы 4 $\boxed{6.2}$:

$\forall\varepsilon>0 \hookrightarrow J^*-J_*\le S(f,T)-s(f,T)\le\varepsilon$

$\Rightarrow J^*-J_*\le 0$

Т.к $J_*\le J^*$, то $J^*=J_*$

Определим $J=J_*=J^*$. Из нер-ва $s(f,T)\le J\le S(f,T)$ и усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow |s(f,T)-J|\le\varepsilon$ и $|S(f,T)-J|\le\varepsilon$

$\Rightarrow \exists\int\limits_a^b f(x)dx=J$ $\blacksquare$

6.4 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана ф-я f и определено разбиение $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$.

Колебанием функции f на отр $[x_{i-1},x_i]$ наз.

$$\omega_i(f)=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')-f(x'')|$$

Лемма 1. Для $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\forall T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ - разб отр $[a,b]$ спр. ~~нер~~-во

$$\Delta(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\,\omega_i(f)$$

□ Заметим, что

$$\omega_i(f)=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}(f(x')-f(x''))=\sup_{x'\in[x_{i-1},x_i]}f(x')+\sup_{x''\in[x_{i-1},x_i]}(-f(x''))=$$

$$=\sup_{x'\in[x_{i-1},x_i]}f(x')-\inf_{x''\in[x_{i-1},x_i]}f(x'')=M_i-m_i,$$

где $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$

след-но, $\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})(M_i-m_i)=\sum\limits_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\omega_i(f)$ ■

Теорема 1 (инт-ть непр ф-и)

Если ф-я непр на отрезке, то она инт-ма на нем.

□ Пусть ф-я f непр на $[a,b]$.

По т. Кантора она равн. непр. на $[a,b]$, т.е

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_\varepsilon>0:\ \forall x',x''\in[a,b]:|x'-x''|<\delta\ \mapsto\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (1)$$

Пусть $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ - произ. разб. $[a,b]$ такое, что $l(T)=\max\limits_{1\le i\le I}\Delta x_i<\delta$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

По т. Вей-са $\exists\xi_i',\xi_i''\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ такие, что $f(\xi_i')=m_i$, $f(\xi_i'')=M_i$,

где $m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$, $i=\overline{1,I}$

Из (1) след., что $\omega_i=M_i-m_i=f(\xi_i'')-f(\xi_i')<\frac{\varepsilon}{b-a}$, т.к

$|\xi_i''-\xi_i'|\le\Delta x_i\le l(T)<\delta$

След-но, $\sum\limits_{i=1}^{I}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{I}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_\varepsilon>0:\ \forall T: l(T)<\delta\ \mapsto\ S(f,T)-s(f,T)<\varepsilon$

По кр. инт-ти ф-я f инт на $[a,b]$ ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (инт-ть монот. ф-и)

Если ф-я монотонна на отрезке, то она инт-ма на нем.

$\square$ Пусть ф. f не убывает на $[a,b]$ и пусть задано разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,b]$.

Тогда $\omega_i(f)=\sup\limits_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(x')| \underset{\text{т.к мон}\uparrow}{=} f(x_i)-f(x_{i-1})$

След-но,

$$\Delta(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\omega_i(f)\leq l(T)\sum_{i=1}^{I}\omega_i(f)=l(T)\sum_{i=1}^{I}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=$$

$$=l(T)(f(b)-f(a))\longrightarrow 0 \text{ при } l(T)\to 0$$

В силу кр. инт-ти ф. f инт. на $[a,b]$ $\blacksquare$

Замеч Из непр или мон-ти ф. на (a,b) не след инт-ть на $[a,b]$

Напр, ф. $f(x)=\frac{1}{x}$ непр. и убыв на $(0,1)$, но она неогран. и, след-но, неинт. на $[0,1]$

Можно доказать след. две теор:

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ Если ф-я f инт. на $[a,c]$ и инт. на $[c,b]$, $a<c<b$, то она инт. на $[a,b]$

Замеч: Т.3 распростр. на конечное число отр. по индукции

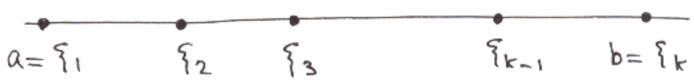
$\boxed{\text{Теорема 4}}$ Если ф-я f огр на $[a,b]$, ~~то она~~ и для любого $a'\in(a,b)$ инт на $[a',b]$, то она инт и на $[a,b]$

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (инт-ть огр. ф-и с конечным чисел. т. разр)

Если ф-я f огр на $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва, на $[a,b]$, то она инт на $[a,b]$.

$\square$ Обозн. т. разр. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ $(a\leq\xi_1<\xi_2<\dots<\xi_k\leq b)$

Отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число отр, на каждом из кот. ф. f имеет един. т. разр. в одном из концов



В силу замеч. к Т.3. достат. доказать, что f инт. на каждом из таких отр.

Пусть для опр. f огр. на $[\xi,b]$ и непр на $(\xi,b]$

Тогда для любого $\xi'\in(\xi,b)$ f непр (след, инт) на $[\xi',b]$

По Т.4 f инт на $[\xi,b]$ $\blacksquare$

$\boxed{6.5}$ Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Аддит. инт. по отр)

Пусть ф-я f инт. на $[a,b]$ и $[b,c]$. Тогда f инт на $[a,c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

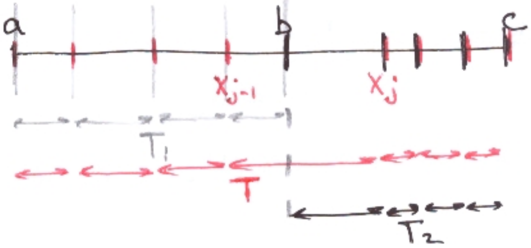
$\square$ Поскольку f инт на $[a,b]$ и $[b,c]$, то f огр на них, и, след-но, f огр на $[a,c]$, т.е

$$\exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,c] \mapsto |f(x)|\le M$$

Пусть задано разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,c]$ и пусть $b\in[x_{j-1},x_j]$

Рассм. разб. $T_1=\{x_0,x_1,\dots,x_{j-1},b\}$ отр $[a,b]$

и $T_2=\{b,x_j,\dots,x_I\}$ отр $[b,c]$



Для верхних сумм Дарбу:

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$S(f,T_1)=\sum_{i=1}^{j-1}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + (b-x_{j-1})\sup_{x\in[x_{j-1},b]} f(x),$$

$$S(f,T_2)=(x_j-b)\sup_{x\in[b,x_j]} f(x)+\sum_{i=j}^{I}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

имеют место соотн.:

$$|S(f,T)-S(f,T_1)-S(f,T_2)| = \Big|(x_j-x_{j-1})\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - (b-x_{j-1})\sup_{x\in[x_{j-1},b]} f(x) -$$

$$-(x_j-b)\sup_{x\in[b,x_j]} f(x)\Big| \le$$

$$\le 2M(x_j-x_{j-1}) \le 2M\,\ell(T) \to 0 \quad \text{при} \quad \ell(T)\to 0.$$

Поскольку $\ell(T_1)\le\ell(T)$ и $\ell(T_2)\le\ell(T)$,

$$\lim_{\ell(T_1)\to 0} S(f,T_1) = J_1 = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\lim_{\ell(T_2)\to 0} S(f,T_2) = J_2 = \int_b^c f(x)\,dx, \quad \text{то}$$

$$\lim_{\ell(T)\to 0} S(f,T) = J_1+J_2$$

Аналогично $\lim\limits_{\ell(T)\to 0} s(f,T) = J_1+J_2$

По опр инт. получаем требуемое $\blacksquare$

Теорема 2 (Линейность опр. инт)

Если ф-и f и g инт на $[a,b]$, а α и β – нек числа, то ф-я $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ инт на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

□ Заметим, что инт. суммы Римана обладают св-вом линейности:

$$\forall T = \{x_i\}_{i=0}^{I} \quad \forall \xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^{I} \hookrightarrow \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi_T) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) =$$
$$= \alpha \sigma(f, T, \xi_T) + \beta \sigma(f, T, \xi_T)$$

В силу опр инт через инт. суммы (Т.1 $\boxed{6.1}$) сущ. пределы

$$\lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi_T) = \int_a^b f(x)\, dx, \quad \lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(g, T, \xi_T) = \int_a^b g(x)\, dx$$

След-но, сущ. предел

$$\lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi_T) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

В силу Т.1 $\boxed{6.1}$ получаем требуемое ■

Теорема 3 (Инт-ть произведения инт. ф)

Если ф-и $f(x)$ и $g(x)$ инт на $[a,b]$, то их произв. $f(x)g(x)$ явл. инт на $[a,b]$ ф-ей.

□ Поскольку ф-и f и g инт на $[a,b]$, то они огр, т.е

$$M_f = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}, \quad M_g = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \in \mathbb{R}$$

След-но,

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| \le$$
$$\le |f(x)g(x) - f(x')g(x)| + |f(x')g(x) - f(x')g(x')| \le$$
$$\le M_g |f(x) - f(x')| + M_f |g(x) - g(x')|$$

Пусть задано разб $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$. Тогда

$$\omega_i(fg) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \le M_g \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(x')| + M_f \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x) - g(x')| =$$
$$= M_g \omega_i(f) + M_f \omega_i(g)$$

Поэтому разность сумм Дарбу для $f(x)g(x)$

$$\Delta(fg, T) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(fg) \le M_g \Delta(f, T) + M_f \Delta(g, T)$$

В силу кр. инт. из инт-ти ф. g и f след, что $\Delta(f,T) \to 0$ и $\Delta(g,T) \to 0$ при $\ell(T) \to 0$.

След-но, $\Delta(fg, T) \to 0$ при $\ell(T) \to 0 \Rightarrow f(x)g(x)$ инт на $[a,b]$ ■

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (инт-ть модуля)

Если ф-я $f(x)$ инт. ~~на~~ $[a,b]$, то ф-я $|f(x)|$ также инт. на $[a,b]$ и справ. нер-во:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (1)$$

$\square$ В силу нер-ва треугольника имеет место нер-во

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \leq |f(x')-f(x'')|$$

Поэтому для разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$ колеб. ф-й f и $|f|$ связаны нер-вом

$$\omega_i(|f|) = \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \big||f(x')|-|f(x'')|\big| \leq \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x')-f(x'')| = \omega_i(f)$$

Отсюда, исп. кр. инт., получаем

$$0 \leq \Delta(|f|,T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\,\omega_i(|f|) \leq \sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\,\omega_i(f) = \Delta(f,T) \xrightarrow[\text{при } \ell(T)\to 0]{} 0$$

След-но, $\Delta(|f|,T)\to 0$ при $\ell(T)\to 0$

$\xRightarrow{\text{кр.инт}}$ $|f|$ инт на $[a,b]$

Поскольку для инт. сумм имеет место нер-во

$$\sigma(f,T,\xi_T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})|f(\xi_i)| = \sigma(|f|,T,\xi_T),$$ то,

переходя к пределу ~~в нер~~ при $\ell(T)\to 0$, получаем (1) ∎

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (инт-е неравенств)

Если ф-и f и g инт на $[a,b]$ и $\forall x\in[a,b] \mapsto f(x)\leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$\square$ Поскольку для инт. сумм имеет место нер-во

$\sigma(f,T,\xi_T) \leq \sigma(g,T,\xi_T)$ $\forall T$, $\forall \xi_T$, то, переходя к пред при $\ell(T)\to 0$,

по опр инт. через инт. суммы (Т.1 $\boxed{6.1}$) получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\ell(T)\to 0}\sigma(f,T,\xi_T) \leq \lim_{\ell(T)\to 0}\sigma(g,T,\xi_T) = \int_a^b g(x)dx \quad ∎$$

Теорема 6 (О среднем)
Если ф-и f и g инт на $[a,b]$, причем $g(x)$ сохр. знак (т.е. $g(x)\geq 0$ на $[a,b]$ или $g(x)\leq 0$ на $[a,b]$), то:

1) $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$, где $\mu\in[m,M]$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$;

2) если при этом ф. f непр на $[a,b]$, то
$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx$, где $\xi\in[a,b]$

$\square$ 1) Пусть без огр. общности $g(x)\geq 0$ на $[a,b]$
Т.к для $\forall x\in[a,b] \hookrightarrow m\leq f(x)\leq M$, то $m\,g(x)\leq f(x)\,g(x)\leq M g(x)$
Прим. Т.5, получаем

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int\limits_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx=0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$. Нужное нер-во верно $\forall\mu$.
Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx\neq 0$, то разделим (1) на $\int\limits_a^b g(x)\,dx$

$$m\leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}\leq M, \text{ т.е } \mu=\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}\in[m,M]$$

2) Если f непр на $[a,b]$, то для $\mu\in[m,M]$ сущ. т. $\xi\in[a,b]$ такая, что $f(\xi)=\mu$ (теор. о пром. знач. непр ф-и) $\blacksquare$

<u>Замеч</u> Если g меняет знак, то т. о среднем теряет силу.
пример: $f(x)=g(x)=x$ на $[-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx > 0 \\ \int\limits_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = 0\end{array}\right. \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \neq \mu\int\limits_{-1}^{1} g(x)\,dx \quad \forall\mu$$

6.6 Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость

Теорема 1 (Непр инт. как ф-и верхнего пред)
Пусть на $[a,b]$ задана инт. по Риману ф. $f(x)$.
Тогда ф-я $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ непр на $[a,b]$.

$\square$ Т.к $f(x)$ инт на $[a,b]$, то $f(x)$ огр на $[a,b]$, т.е
$\exists C\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\leq C$.
Пусть $x_1,x_2\in[a,b]$. В силу адд-ти инт относ. отр. инт-я
$F(x_2)-F(x_1)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$

По т. о инт нер-в

$|F(x_2)-F(x_1)| \le \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} C\,dt \right| = C|x_2-x_1|$

След-но,

$\forall x_0 \in [a,b]\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0|<\delta \mapsto |F(x)-F(x_0)|<\varepsilon,$

т.е ф. $F(x)$ непр на $[a,b]$ ■

Опр. Ф-я $F(x)$ наз. первообразной ф-и $f(x)$ на $[a,b]$, если $\forall x \in (a,b) \mapsto F'(x)=f(x)$, а на концах $[a,b]$ знач. ф. f равны одн. пр. F:

$f(a)=F'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$; $f(b)=F'_-(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}$

Теорема 2

Если ф-я f непр на $[a,b]$, то ф-я $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ явл. первообр. $f(x)$ на $[a,b]$

□ Пусть $x, x_0 \in [a,b]$, $x \ne x_0$.

Тогда $F(x)-F(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x-x_0)f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt$

След-но,

$$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt \right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\int\limits_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

В силу непр f на $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t \in [a,b] : |t-x_0| \le \delta \mapsto |f(t)-f(x_0)| \le \varepsilon$

Поэтому

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0| \le \delta \mapsto \int\limits_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt \le |x-x_0|\varepsilon$

След-но,

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0| \le \delta \mapsto \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \varepsilon,$

т.е $\forall x_0 \in [a,b] \mapsto \lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, где при $x_0=a$ и $x_0=b$ им. в виду од. пр.

Это означает, что

$F'_+(a)=f(a)$

$F'_-(b)=f(b)$

$\forall x_0 \in (a,b) \mapsto F'(x_0)=f(x_0)$

$\Rightarrow F$ - перв. ф f на $[a,b]$ ■

6.7 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 1 Если ф-я f непр на $[a,b]$, то ф. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ явл первообр. ф $f(x)$ на $[a,b]$

□ Док-во см в 6.6 ■

Следствие 1 Любая первообр. непр на $[a,b]$ ф-и f имеет вид

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + C, \text{ где } C\in\mathbb{R} \text{ – произв. константа}$$

□ След. из. теор. о стр. мн. первообр ■

Следствие 2 (Форм. Ньютона – Лейбница)

Если F – перв. непр на $[a,b]$ ф-и f, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{опр}}{=\!=} F(b)-F(a)$$

□ Восп. сл. 1 и заметим, что

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt + C = C$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad ■$$

6.8 Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 1 (Замена перем)

Пусть ф-я $x=\varphi(t)$ имеет непр. произв. на отр $[a,b]$, а ф-я f непр на отр. $\varphi([a,b])$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

□ Поскольку ф-я f непр на $\varphi([a,b])$, то по т. 2 6.6 сущ. первообр. F для ф-и f: $\forall x\in\varphi([a,b]) \hookrightarrow F'(x)=f(x)$

По ф. Н–Л: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b))-F(\varphi(a))$.

Поскольку $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, то ф-я $F(\varphi(t))$ явл первооб. ф-и $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. След-но, по ф. Н–Л:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b dF(\varphi(t)) = F(\varphi(b))-F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad □$$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (инт-е по частям)

Если ф-и $u(x)$ и $v(x)$ непр. диф. на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

□ Применим лин-ть инт. и ф. Н-Л:

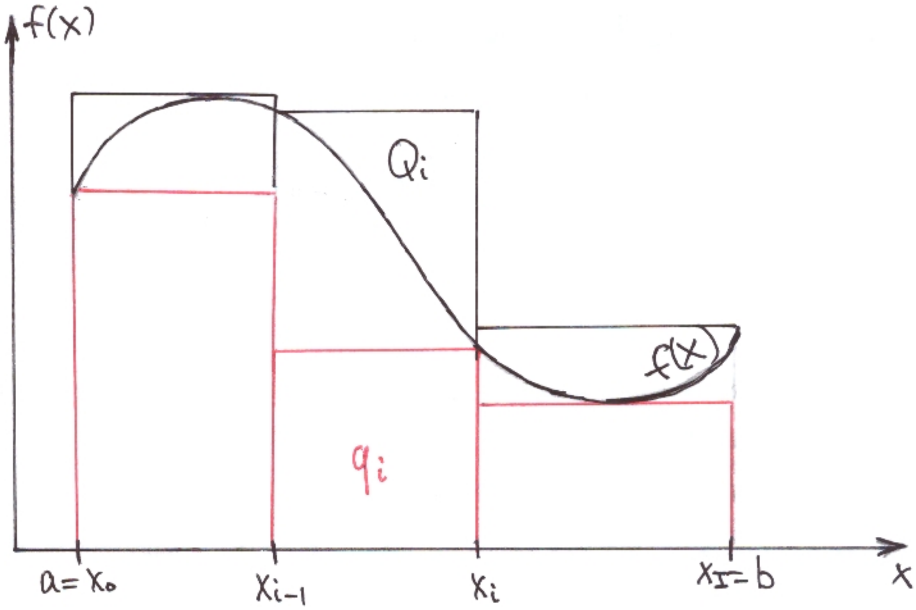
$$\int_a^b u(x)\,dv(x) + \int_a^b v(x)\,du(x) = \int_a^b \left(u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\right)dx = \int_a^b \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

■

$\boxed{7.1}$ **Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, + $\boxed{7.2}$ площадь поверхности вращения (без док-ва)**

1) Площадь криволин. трапеции

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф-я f: $\forall x\in[a,b] \mapsto f(x)\geq 0$. Мн-во $G=\{(x,y): a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ наз. криволинейной трапецией.



Для задан. разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ определим прямоуг-ки:

$q_i=\{(x,y): x_{i-1}\leq x\leq x_i,\ 0\leq y\leq m_i\}$,

$Q_i=\{(x,y): x_{i-1}\leq x\leq x_i,\ 0\leq y\leq M_i\}$.

Мн-во $q(f,T)=\bigcup_{i=1}^{I} q_i$ наз внутренним, а мн-во $Q(f,T)=\bigcup_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми мн-вами для криволин. трап. G. Заметим, что $q(f,T)\subset G\subset Q(f,T)$

Поскольку площ. q_i и Q_i равны соот. $\mu(q_i)=(x_i-x_{i-1})m_i$ и $\mu(Q_i)=(x_i-x_{i-1})M_i$, то площ. внут. и внеш. ст. мн-в равны соот нижней и верхней суммам Дарбу:

$\mu(q(f,T))=s(f,T)$ и $\mu(Q(f,T))=S(f,T)$

Если при измельчении разб. площ. внут. и внеш. ступ. мн-в стрем. к одному и тому же пределу $J\in\mathbb{R}$, то число J будем называть площадью криволинейной трапеции (а также интегралом ф-и f на $[a,b]$)

2) Объем тела вращения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана неотриц. ф-я $f(x)$.

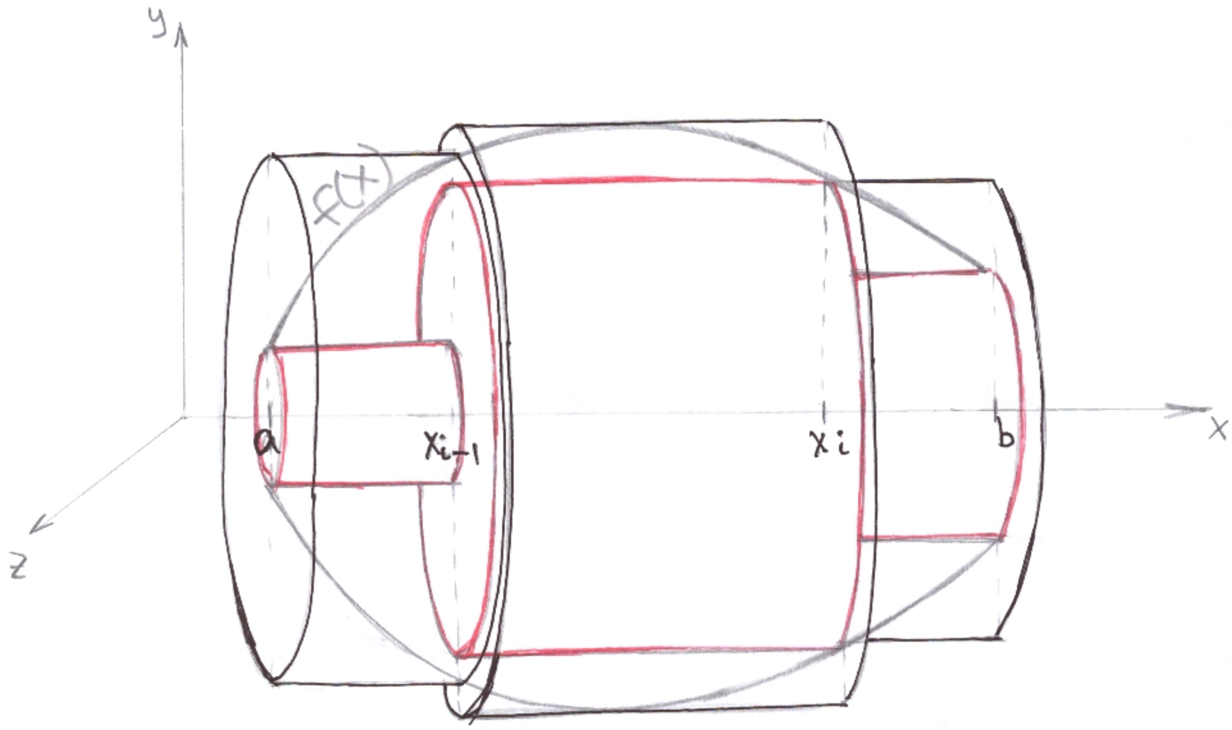
Мн-во $G = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[a,b], \sqrt{y^2+z^2}\le f(x)\}$ наз. телом вращения вокруг оси Ox.

Пусть задано разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$.

Обозн. $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Определим цилиндры: $q_i = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[x_{i-1},x_i], \sqrt{y^2+z^2}\le m_i\}$

$Q_i = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[x_{i-1},x_i], \sqrt{y^2+z^2}\le M_i\}$



Мн-во $q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} q_i$ наз. внутренним, а мн-во $Q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми ~~цилиндрами~~ телами для тела вращения G.

Заметим, что $\forall T \quad q(f,T)\subset G\subset Q(f,T)$

Поскольку объемы цилиндров q_i и Q_i равны $V(q_i)=(x_i-x_{i-1})\pi m_i^2$

$V(Q_i)=(x_i-x_{i-1})\pi M_i^2$,

то объемы внутр. и внеш. ступ. тел равны

$$V(q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})m_i^2,$$

$$V(Q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(Q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})M_i^2.$$

Опр. число V наз. объемом тела вращения G, если

$$V=\lim_{l(T)\to 0} V(q(f,T)) = \lim_{l(T)\to 0} V(Q(f,T))$$

Теорема 1. Если ф-я $f(x)$ непр. и неотриц. на $[a,b]$, то объем тела вращ. G сущ. и равен $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

□ Поскольку ф-я $\varphi(x)=\pi f^2(x)$ непр, то она инт. на $[a,b]$.
Это означает, что пределы верх. и ниж. сумм Дарбу сущ. и равны:
$$\lim_{l(T)\to0} s(\varphi,T)=\lim_{l(T)\to0} S(\varphi,T)=\int_a^b \varphi(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$
Заметим, что объемы внут. и внеш. ступ. тел равны соот. нижней и верх. суммам Дарбу для ф-и $\varphi(x)$:
$$V(q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\Big(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\varphi(x)=s(f,T)$$
Аналогично, $V(Q(f,T))=S(\varphi,t)$.
След-но,
$$\lim_{l(T)\to0} V(q(f,T))=\lim_{l(T)\to0} V(Q(f,T))=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \blacksquare$$

3) Длина кривой

Пусть кривая Γ зад. непр. в-ф. $\bar r(t)$: $\Gamma=\{\bar r(t): t\in[a,b]\}$.
Вспомним, что ломаной P_T, вписанной в кривую Γ и соот. разб. $T=\{t_i\}_{i=0}^{I}$ наз упоряд. набор отр $P_T=\{[\bar r(t_0),\bar r(t_1)],\dots,[\bar r(t_{I-1}),\bar r(t_I)]\}$
Длина ломаной P_T равна $|P_T|=\sum_{i=1}^{I}|\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})|$, а длиной кр Γ наз $|\Gamma|=\sup_T|P_T|$ – супремум длин лом. по всем разб T отр $[a,b]$.

Теорема 2. Если кр. $\Gamma=\{\bar r(t): t\in[a,b]\}$ зад. непр. диф. в-ф $\bar r(t)$, (т.е произв. $\bar r'(t)$ непр на $[a,b]$), то $|\Gamma|=\int_a^b|\bar r'(t)|\,dt$.

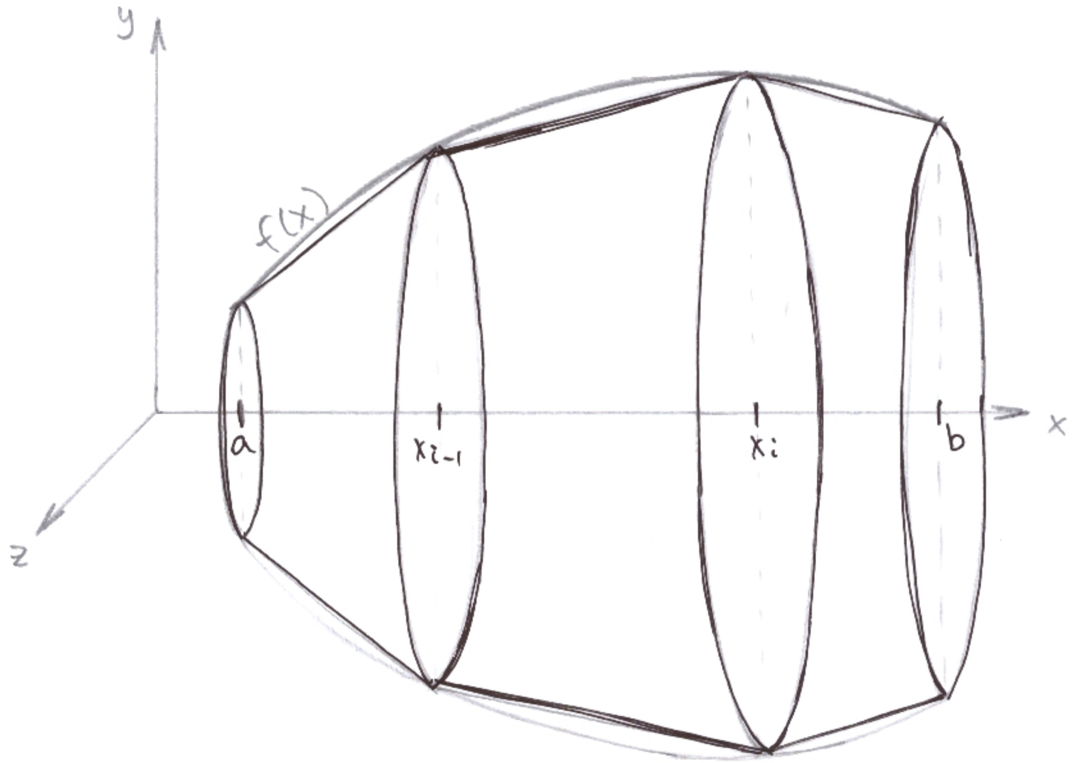
□ Рассм. перем. длину дуги $s(t)=|\Gamma_t|$, где $|\Gamma_t|=\{\bar r(\xi): \xi\in[a,t]\}$.
Вспомним, что $s'(t)=|\bar r'(t)|$ $\forall t\in[a,b]$.
По ф Н-Л:
$$|\Gamma|=s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)\,dt=\int_a^b|\bar r'(t)|\,dt \quad \blacksquare$$

4) Площадь поверхности вращения.

Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф-я $f(x)$. Мн-во

$Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[a,b], \sqrt{y^2+z^2}=f(x)\}$

наз поверхностью вращения графика ф-и f вокруг оси Ox.



Обозн. через Γ крив., совпад. с гр. ф-и f: $\Gamma=\{F(x): x\in[a,b]\}$, где $\bar{r}(x)=(x,0,f(x))$

Пусть P_T – ломаная, впис. в Γ и соот. разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ $[a,b]$.

Через Q_T об. поверх., получ. вращ. лом P_T вокруг оси Ox.

Поверх Q_T состоит из I бок. поверх. усечен. конусов $q_i=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[x_{i-1},x_i], \sqrt{y^2+z^2}=f_i(x)\}$,

где ф-я $f_i(x)$ зад i-й отр. лом P_T.

Как изв., площ. бок. пов-ти усеч. конуса q_i равна $S(q_i)=\dfrac{b_i(l_{i-1}+l_i)}{2}$,

где b_i – длина i-го звена лом P_T, явл. образующей усеч. кон. q_i.

Поскольку $l_i=2\pi f(x_i)$, $b_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$, то

площ. пов-ти усеч кон. q_i равна

$$S(q_i)=\pi\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\,(f(x_{i-1})+f(x_i))$$

След, площ. пов-ти Q_T, получ. вращ. лом P_T вокруг оси Ox, равна

$$S(Q_T)=\sum_{i=1}^{I}S(q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\,(f(x_{i-1})+f(x_i))$$

Опр. число S наз. площадью поверхности вращения Q, если $S = \lim\limits_{\ell(T) \to 0} S(Q_T)$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ Пусть на $[a, b]$ зад. неотриц., непр. дифф. ф. $f(x)$
Тогда площ. пов. вр. Q сущ и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

8.1 Криволинейный интеграл первого рода.

Определения с 1-го семестра

Опр. Вектор-функцией в $\mathbb{R}^3$ наз. ф-я f такая, что $D(f)\subset\mathbb{R}$, $E(f)\subset\mathbb{R}^3$.
Если аргум. в-ф. обозн. через t, то в-ф можно записать как $\vec{r}=\vec{r}(t)$

Опр Пусть x, y, z — ф-и перем $t\in I$ (I—некот. промеж.)
Тогда мн-во точек пр-ва
$\Gamma=\{(x,y,z): x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in I\}$
наз. кривой в пр-ве
Кривая наз. непр (диф, непр. диф, т.д), если таковой же явл. в-ф $\vec{r}$ с коор. ст $(x(t), y(t), z(t))^T$ на I.

Опр. Кривая $\Gamma: \{\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I\}$ наз. гладкой, если она непр. диф на I и $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$ $\forall t\in I$ (в концах I рассм. одност. пр-ые)

Опр. Пусть одна и та же кривая параметризуется двумя способами:
$x=x_1(t), y=y_1(t), z=z_1(t)$ (т.е $\vec{r}=\vec{r}_1(t)$), $t\in I_1$
и
$x=x_2(u), y=y_2(u), z=z_2(u)$ (т.е $\vec{r}=\vec{r}_2(t)$), $u\in I_2$
причем ф-я $u=u(t)$ отображ. I_1 на I_2
Если ф-я $u(t)$ непр. диф. на I_1 и $u'(t)\neq 0$ $\forall t\in I_1$, то ф-я $u(t)$ наз. допустимой заменой параметра (ДЗП)

Опр. Пусть $\Gamma=\{\vec{r}: \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))^T, t\in[a,b], a<b\}$ — гладкая крив; ф-я f непр на мн-ве точек кривой Γ.
Тогда криволинейным интегралом первого рода
$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ наз опред. инт. Римана:
$\int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\cdot|\vec{r}\,'(t)|\,dt$

Теорема 1 Значение $\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ не измен. при ДЗП на крив. Γ

□ Пусть $u=u(t)$ — непр. диф. ф-я; $u'(t)\neq 0$; отображ. промеж. I_1 на I_2.
(т.е допуст. зам. пар-ра ДЗП)
ф-я $u'(t)$ непр и отлична от 0 на I_1
По теор. Больцано-Коши или $u'(t)>0$ $\forall t\in I_1$, или $u'(t)<0$ $\forall t\in I_1$ (иначе сущ. бы точка, в кот $u'(t_0)=0$). Т.е ф-я $u(t)$ моном.
Из этого отобр. I_1 на I_2 вз-од.

Тогда при первой парам-и ($t\in[\alpha,\beta]$):
$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta f(x_1(t), y_1(t), z_1(t))\,|\vec{r}_1\,'(t)|\,dt \qquad (1)$$
при второй ($u\in[a;b]$)
$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int\limits_a^b f(x_2(u), y_2(u), z_2(u))\,|\vec{r}_2\,'(u)|\,du \qquad (2)$$
Сделаем в (2) замену $u=u(t)$

$\vec{F}'(t)=\vec{F}'(u)\,u'(t)$

Получим

$$\pm\int_\alpha^\beta f(x_2(u(t)), y_2(u(t)), z_2(u(t)))\cdot|\vec{r}_2'(u(t))|\cdot u'(t)\,dt$$

Знак „+" при $u'(t)>0$ (возраст. ф-и)

$u(\alpha)=a$; $u(\beta)=b$.

Знак „−" при $u'(t)<0$ (убыв. ф-и)

$u(\alpha)=b$; $u(\beta)=a$

Т.к $\pm u'(t)=|u'(t)|$, то интеграл преобр. к виду

$\int_\alpha^\beta f(x_1(t),y_1(t),z_1(t))\cdot|\vec{r}_2'(u(t))\cdot u'(t)|\,dt$, т.е совп. с (1). ∎

Из св-в опред. инт. Римана:

Св-ва крив. инт:

1) Линейность ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; Г-глад.кр)

$$\int_\Gamma(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z))\,ds=\alpha\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds+\beta\int_\Gamma g(x,y,z)\,ds$$

2) Аддитивность от-но кривой интегр-я:

если $\Gamma=\{\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,b]\}$,

$\Gamma_1=\{\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,c]\}$,

$\Gamma_2=\{\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[c,b]\}$; $a<c<b$, Г-глад.кр., то

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,ds+\int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,ds$$

8.2 Криволинейный интеграл второго рода

Опр. Пусть $\Gamma=\{\vec{r}: \vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,b], a<b\}$ — ориентир. гладкая кривая;

$\vec{\tau}$ — единич. век. касат. к Г, соот. выбр. ориент.

Пусть $\vec{a}=(P,Q,R)^T$ — непр. в-ф от перем x,y,z на мн-ве точек Г.

Тогда криволинейным интегралом второго рода $\int_\Gamma(\vec{a},d\vec{r})$ наз. крив. инт. первого рода $\int_\Gamma(\vec{a},\vec{\tau})\,ds$

Символ $\int_\Gamma(\vec{a},d\vec{r})$ м/б записан в коорд. виде:

$$\int_\Gamma(P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz)$$

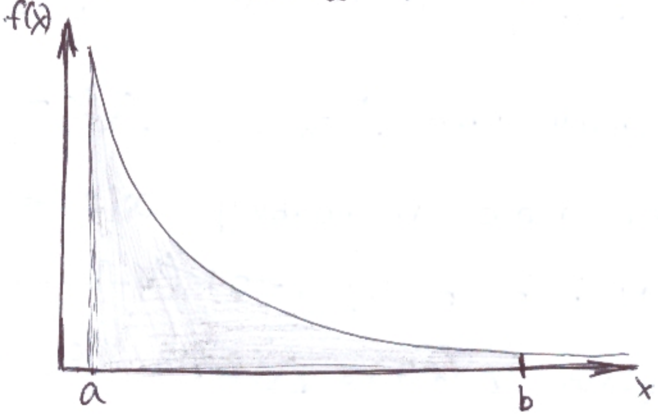
Замеч Интеграл первого рода опред. без учета ориент. кривой; при смене ориент. вект $\vec{\tau}$ замен. на $(-\vec{\tau})$, поэтому при смене ориен. кр. значение инт. второго рода изменится на противопол.

При ДЗП знач. инт 1-го р. не изм. Вектор $\vec{\tau}$ для ориент. кр. фиксир. Поэтому знач. инт 2-го р. не зав. от ДЗП.

9.1 Несобственный интеграл.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр. на луче $[a,+\infty)$ и для любого числа $b>a$ ф-я f инт на отр $[a,b]$.

Несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ наз. $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$



Если сущ. конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$,

то говорят, что несоб. инт. $\int\limits^{\infty} f(x)dx$ сходится, иначе расходится.

налогично для $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$)

нтег. Римана буд. наз. собственным нтегралом.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр. на полуинтервале $[a,b)$ и инт. в собств. смысле на любом отр $[a,b']\subset[a,b)$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ наз $\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)dx$

налогично опр. $\int\limits_a^b f(x)dx$: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^b f(x)dx$)

емма 1. Если сущ. собст. инт. $\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобст. инт. $\lim\limits_{\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)dx$ и $\lim\limits_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^b f(x)dx$ сущ. и равны собст. инт.

] Поскольку ф-я f инт. в соб. см. на $[a,b]$, то она огр, т.е $M\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\le M$.

оэтому $\left|\int\limits_{b'}^b f(x)dx\right| \le M|b-b'| \to 0$ при $b'\to b-0$.

ед-но, $\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \underbrace{\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_{b'}^b f(x)dx}_{=0} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

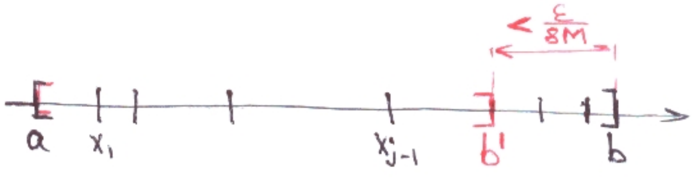
налогично, $\lim\limits_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ ■

еорема 1. Пусть ф-я $f(x)$ опр. и огранич. на $[a,b]$, а на любом $[a,b']\subset[a,b)$ ф-я $f(x)$ инт-ма. Тогда сущ. собств. инт. $\int\limits_a f(x)dx$.

] Поскольку ф-я огр. на $[a,b]$, то $M\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\le M$

афикс. произ. $\varepsilon>0$ и определим $b'\in[a,b)$ так, чтобы $b-b'<\frac{\varepsilon}{8M}$

юбому разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$ сопоставим разб. T' отр $[a,b']$, остав. из точек разб T, попавших на тр. $[a,b']$ и т. b': $T'=\{x_0,x_1,\dots,x_{j-1},b'\}$, е j опр. из усл. $x_{j-1}<b'\le x_j$.



Разобьем разность сумм Дарбу $\Delta(f,T)$ на два слагаемых:

$$\Delta(f,T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f) = \Delta_{[a,x_{j-1}]} + \Delta_{[x_{j-1},b]}, \text{ где}$$

$$\Delta_{[a,x_{j-1}]} = \sum_{i=1}^{j-1}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f) \quad ; \quad \Delta_{[x_{j-1},b]} = \sum_{i=j}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f).$$

Заметим, что $\Delta_{[a,x_{j-1}]} \leq \Delta(f,T')$

Кроме того, поскольку $\omega_i(f) \leq 2M$, то $\Delta_{[x_{j-1},b]} \leq 2M(b - x_{j-1}) =$
$= 2M(b - b' + b' - x_{j-1}) \leq 2M(b - b' + \ell(T)) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + \ell(T)\right) = \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T).$

След-но, $\Delta(f,T) \leq \Delta(f,T') + \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T).$

Поскольку ф-я f инт. на $[a,b']$, то в силу крит. инт.

$\exists \delta_0 > 0: \forall T': \ell(T') \leq \delta_0 \mapsto \Delta(f,T') \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Определив $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{8M}\}$, получ., что для любого разб. T отр $[a,b]$ такого, что $\ell(T) \leq \delta$, вып. $\ell(T') \leq \ell(T) \leq \delta \leq \delta_0$, след-но, $\Delta(f,T') \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Поэтому

$$\Delta(f,T) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\cdot\frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T: \ell(T) \leq \delta \mapsto \Delta(f,T) \leq \varepsilon.$

Отсюда по кр. инт. получаем сущ-е $\int_a^b f(x)\,dx$ в собст. смысл. ■

<u>Замечание</u> Аналог. можно док., что если огран. ф. на $(a,b]$ инт. на любом $[a',b] \subset (a,b]$, то эта ф-я инт на $[a,b]$.

Опр. Точка a наз. <u>особой точкой</u> несоб. инт. $\int_b^c f(x)\,dx$, если $b \leq a \leq c$ и ф-я f неогр. в любой окрес. т. a. Для несобств. инт. $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ символы $\pm\infty$ всегда счит. особ. т.

<u>Следствие</u> из леммы 1 и теоремы 1 след, что несобств. инт. $\int_a^b f(x)\,dx$ без особых т. всегда сход. В этом случ. сущ. собст. инт $\int_a^b f(x)\,dx$, равный несобств.

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ (Принцип локализации)

Пусть заданы $a, a_1 \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < a_1 < b$.

Пусть на $[a,b)$ опр. ф. $f(x)$, интег. в собст. смысле на $\forall [a,b'] \subset [a,b)$.

Тогда несобств. инт. $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{a_1}^b f(x)dx$ сход. или расх. одновремен.,

а в случае их сход-ти: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^b f(x)dx$. (1)

□ Поскольку при $b' \in [a,b)$ имеет место

$\int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b'} f(x)dx$, то конеч. пред $\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx$

и $\int_{a_1}^b f(x)dx = \lim_{b'\to b-0} \int_{a_1}^{b'} f(x)dx$ сущ. или не сущ. одновремен., и в случае

их сущ. справедл. (1). ■

<u>Замечание</u> Принцип локализации состоит в том, что сход. несоб. инт. определяется поведением подынтегр. ф-и лишь в окрес-ти особой т.

Опр. Пусть на конечном или беск. промеж. (a,b) задана ф. $f(x)$, за исключ. т. x_i $(i=0,\dots,I)$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_I = b$.

Пусть ф-я f инт. в собст. смысле на любом отр $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, не содерж. т. x_i.

Выберем произвольным образом т $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i=1,\dots,I)$.

Будем гов, что несоб. инт $\int_a^b f(x)dx$ сходится, если все несоб. инт с одной особ.

$\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx$ и $\int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx$ сход. В прот. случае $\int_a^b f(x)dx$ расход.

Если $\int_a^b f(x)dx$ сход, то опред. его знач. как сумму нес. инт с одной особ:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx \right).$$

<u>Св-ва несоб. инт.</u>

1) Линейность несобст. инт.

Если ф-и f и g инт. в собств. смысле на любом отр. из $[a,b)$ и несобс. инт. $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сход, то $\forall$ чисел α, β несоб. инт.

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ сход. и равен $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

2) Замена переменной.
Пусть непр. дифф., строго возр. ф-я $x(t)$ переводит промеж. $[t_0, \beta)$ в промеж. $[x_0, b)$. Пусть ф-я $f(x)$ непр на $[x_0, b)$. Тогда $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx = \int\limits_{t_0}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt$, означ., что если хотя бы один из указан. интегралов сход, то другой сход. и их знач. равны.

9.2 Критерий Коши сходимости интеграла.

Теорема 1. (Крит. Коши)

Пусть ф-я f инт. в собст. смысле на любом отр. из пром $[a, b)$. Несобств. инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сх $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \xi \in (a, b): \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \mapsto \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

$\square$ Определим ф-ю $F(t) = \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$.

По опр. несоб. инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сход, если $\exists$ конеч. предел $\lim\limits_{t \to b-0} F(t)$.

Из кр. Коши сущ. предела ф-и следует, что сущ. кон. $\lim\limits_{t \to b-0} F(t)$ экв-но тому, что для любого $\varepsilon > 0$ сущ. левая полуокр. (ξ, b) т. b такая, что $\forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \mapsto |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$.

Использ. ф. Ньютона-Лейбница и получаем требуемое ■

9.3 Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения.

Теорема 1 (Крит. сход-ти несоб. инт. от неотр. ф-и)

Пусть ф-я f инт. в собст. см. на любом отр. из $[a, b)$ и $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b)$. Тогда сх-ть инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ экв-на условию $\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx < +\infty$

$\square$ Поскольку $f(x) \geq 0$, то ф-я $F(b') = \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx$ нестр. возр на $[a, b)$.

По теор. об одностор. пред. мон. ф-и. сущ. конеч. или бескон. пред. $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b') = \sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b')$

Нес. инт. ~~сх.~~ $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сх $\iff \exists$ конеч. $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b')$, т.е когда

$\sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b') < +\infty$ ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Первый признак сравн)

Пусть ф-и f и g инт. в соб. см. на любом отр. из $[a,b)$ и $\forall x\in[a,b) \longmapsto 0\le f(x)\le g(x)$. Тогда

а) Нес. инт $\int_a^b g(x)dx$ сх $\Rightarrow$ нес. инт. $\int_a^b f(x)dx$ сх.

б) Нес. инт $\int_a^b f(x)dx$ расх $\Rightarrow$ нес инт $\int_a^b g(x)dx$ расх.

$\square$ Из $f(x)\le g(x)$ след, что $\sup\limits_{b'\in[a,b)}\int_a^{b'} f(x)dx \le \sup\limits_{b'\in[a,b)}\int_a^{b'} g(x)dx$.

Если $\int_a^b g(x)dx$ сх, то $\sup\limits_{b'\in[a,b)}\int_a^{b'} g(x)dx < +\infty$.

След-но, $\sup\limits_{b'\in[a,b)}\int_a^{b'} f(x)dx < +\infty$

По теор. 1 $\int_a^b f(x)dx$ сх. Пункт а) доказан.

Док-во б) след из док-ва а). $\blacksquare$

Опр. Буд. говорить, что неотр. ф-и $f(x)$ и $g(x)$ экв-ны в смысле сх-ти инт. при $x\to b-0$ и писать $f(x)\overset{cx}{\sim} g(x)$ при $x\to b-0$, если сущ. числа $m>0$, $M>0$, $b_1<b$ такие, что для любого $x\in[b_1,b)$ вып.

$m g(x)\le f(x)\le M g(x)$.

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (Второй признак сравнения)

Пусть неотр. ф-и f и g инт в соб. см. на любом отр из $[a,b)$ и экв-ны в смысле сх-ти инт. при $x\to b-0$. Тогда несоб. инт $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сх или расх. одновр.

$\square$ Поскольку $f(x)\overset{cx}{\sim} g(x)$ при $x\to b-0$, то $\exists m,M>0,\ \exists b_1\in[a,b): \forall x\in[b_1,b)\longmapsto m g(x)\le f(x)\le M g(x)$.

В силу принц. локализ (лемма 2 $\boxed{9.1}$) сход. или расх. интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ не изм, если промеж. инт. $[a,b)$ зам. на $[b_1,b)$.

Пусть инт. $\int_a^b g(x)dx$ сх, тогда сх. и $\int_{b_1}^b g(x)dx$, и, след-но, сх. $\int_{b_1}^b Mg(x)dx$.

Из теор. 2 след, что $\int_{b_1}^b f(x)dx$ сх., а значит, и $\int_a^b f(x)dx$ сх.

Аналог., из сх-ти $\int_a^b f(x)dx$ след. сх. инт $\int_a^b g(x)dx$ $\blacksquare$

9.4 Интегралы от знакопеременных функций, сходимость и абсолютная сходимость.

Опр. Гов., что несоб. инт. $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если скод. несоб. инт $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 1 Пусть ф-я f инт в собс. см. на любом отр из $[a,b)$. Если нес. инт $\int_a^b f(x)dx$ ск. абс., то этот несоб. инт сход.

□ Т.к $\int_a^b |f(x)|dx$ ск, то вып усл. Коши его сх-ти:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \xi\in(a,b):\ \forall b_1,b_2\in(\xi,b) \hookrightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

Поскольку $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right|$ (см. теор. „интег. модуля"), то вып. усл. Коши сх-ти $\int_a^b f(x)dx$, след-но, он сход ■

Замечание.
Для собств. инт. из инт. модуля ф-и не след. инт. самой ф-и. Например, ф-я Дирихле.

Опр. Если несобственный интеграл сход, но не явл. абсол. сход., то говорят, что этот несоб. инт. сходится условно.

9.5 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема 1 (Признак Дирихле)
Пусть ф-я $f(x)$ непр., а ф-я $g(x)$ непр. дифф. на $[a,b)$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Пусть вып. усл:
1) первообразная ф. $f(x)$ ограничена на $[a,b)$
2) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$
3) ф-я $g(x)$ нестрого убывает на $[a,b)$, т.е $g'(x)\le 0$ $\forall x\in[a,b)$.

Тогда несоб. инт $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сход.

□ По усл. пер-я $F(x)$ ф-и $f(x)$ огр, т.е $\exists C\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b) \hookrightarrow |F(x)|\le C$. (1)
Для произ. $b'\in(a,b)$ воспольз. форм. интег. по частям:

$$\int_a^{b'} f(x)g(x)dx = \int_a^{b'} g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x)g'(x)dx. \qquad (2)$$

Заметим, что в силу ф. Н-Л. $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} g'(x)dx = \overbrace{\lim\limits_{b'\to b-0} g(b')}^{=0} - g(a) = -g(a)$.
$\Rightarrow$ нес. инт $\int_a^b g'(x)\,dx$ сход.

Отсюда ~~след.~~ и из рав-ва $|g'(x)| = -g'(x)$ след. сх-ть $\int\limits_a^b |g'(x)|\,dx$, а значит, и инт. $\int\limits_a^b C|g'(x)|\,dx$.

Учит. усл (1), в силу призн. срав. получ. сх-ть $\int\limits_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$.

Отсюда по теор. 1 $\boxed{9.4}$ получ. сх-ть $\int\limits_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$.

Иными словами,

$$\exists \lim_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} F(x)g'(x)\,dx \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Поскольку ф-я $F(x)$ огр и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)F(x) = 0$,

поэтому сущ. конеч. предел $\lim\limits_{b'\to b-0} g(x)\,F(x)\Big|_a^{b'} = -g(a)F(a)$.

Отсюда и из условий (2) и (3) получ. сущ-е конечн.: $\lim\limits_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,g(x)\,dx$, т.е сх-ть $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Признак Абеля)

Пусть ф-я $f(x)$ непр., а ф-я $g(x)$ непр. диф. на $[a,b)$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Пусть вып. усл:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сход.

2) ф-я g огр. на $[a,b)$

3) ф-я g нестрого убыв. на $[a,b)$, т.е $g'(x)\leq 0$ $\forall x\in[a,b)$.

Тогда несобст. инт $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сход.

□ Т.к ф-я g нестр. уб. и огр. на $[a,b)$, то $\exists \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = g_0 \in\mathbb{R}$

заметим, что ф-я $\tilde{g}(x) = g(x) - g_0$ нестр. уб на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0}\tilde{g}(x) = 0$

Поэтому в силу пр. Дирихле $\int\limits_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,dx$ сх.

Поскольку $f(x)g(x) = f(x)\,\tilde{g}(x) + f(x)\,g_0$, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сх. по усл.,

то по св-ву линейности $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ сход. ■

10.1 Числовые ряды

Опр. Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ наз. n-ой частичной суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.
Элементы посл-ти $\{a_k\}$ наз. членами этого ряда.
Суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. предел част. сумм:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. сходящимся, если сущ. конечный предел час. сумм
в противном случае ряд наз. расходящимся.

Теорема 1 (Необх. усл. сх. ряда)
Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

□ Поскольку ряд сх, то сущ. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
След-но, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{=a_n} = S - S = 0$$
След-но, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

Лемма 1 (Принцип локализации)
$\forall k_0 \in \mathbb{N}$ ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх. или расх. одновременно.

□ $\forall n \in \mathbb{N} : n > k_0$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$
Переходя к пределу при $n\to\infty$, получ. треб ■

Лемма 2 (Св-во линейности)
Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ сх

□ $$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$
Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то предел правой части при $n\to\infty$ конечен
Переходя к пределу, получ. треб. ■

Следствие
$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сх} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расх} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \text{ расх.}$$

10.2 Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 1 (Кр. Коши)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх $\iff$ вып. усл. Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \varepsilon$

□ По опр. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, если сх. посл-ть част. сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

В силу кр. Коши для посл-тей сх-ть $\{S_n\}$ эквив. её фунд-ти:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \to |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$

Т.к $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$, то теор. доказана ■

10.3 Верхний и нижний пределы последовательности

Для посл-ти $\{a_n\}$ определим

$$M_n = \sup_{k \geq n} a_k := \sup\{a_k : k \geq n\}$$

$$m_n = \inf_{k \geq n} a_k := \inf\{a_k : k \geq n\}$$

Поскольку $\{a_k : k \geq n\} \supset \{a_k : k \geq n+1\}$, то $m_n \leq m_{n+1} \leq M_{n+1} \leq M_n$

Т.е послед $\{m_n\}$ нестрого $\uparrow$, а $\{M_n\}$ нестрого $\downarrow$

Так что эти послед-ти всегда имеют пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ и след опр. корректны

Опр. Пусть $\{a_n\}$ – посл-ть.

Тогда

$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} M_n$ – верхний предел $\{a_n\}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} m_n$ – нижний предел $\{a_n\}$

Теорема 1 Верхний пр (нижний пр) посл-ти — наибольший (соот, наим) из её частичных пределов в $\overline{\mathbb{R}}$.

□ Пусть $\{a_n\}$ – послед-ть.

Нужно показать, что верх. пр M и нижн. пр. m явл. част. пр. и все част пр лежат между m и M.

Случай 1 $M = \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$

M_n нестрого $\downarrow$, т.е все $M_n = +\infty$

Поскольку $M_1 = +\infty$, то $\exists n_1 : a_{n_1} \geq 1$

Из усл. $M_{n_1+1} = +\infty$ вытекает сущ-е $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ т, что $a_{n_2} \geq 2$ и т.д.

По инд. $\exists n_k : a_{n_k} \geq k$ и $\{n_k\}$ стр. $\uparrow$.

То есть мы построили п/п $a_{n_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Случай 2 $M = -\infty$

По опр $M_n \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $M_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

Случай 3 $-\infty < M < +\infty$

По опр. sup. $\exists n_1 : M_1 - 1 < a_{n_1} \leq M_1$

Далее, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ т, что $M_{n_1+1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq M_{n_1+1}$ и т.д

Так что индуктивно опред. п/п $\{a_{n_k}\}$ с усл.

$M_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Т.к $M_{n_{k-1}+1} \to M$, $k \to \infty$, то по теор. о зажат. посл-ти $a_{n_k} \to M$.

Док-во того, что m явл ч.п аналогично.

Пусть $\{a_{n_k}\}$ – п/п $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a$

Т.к $n_k \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$, то $a_{n_k} \in \{a_m : m \geq k\}$ и, значит, выполн нер-во

$m_k \leq a_{n_k} \leq M_k$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получ. $m \leq a \leq M$ ∎

<u>Следствие</u> $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$

10.4 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

Теорема 1 (Кр. сход-ти ряда с неотриц. чл)

Если $a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, то сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эквив. огранич-ти его част.с:

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$

□ Поскольку посл. ч.сумм нестрого ↑, то ∃ кон. или беск. предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх $\iff$ этот предел конечен, т.е $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ ∎

Теорема 2 (Первый пр. сравн)

Если $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$, то

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расх.

□ а) $a_k \leq b_k \Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k < +\infty$, поэтому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k < +\infty$

и по теор.1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) Аналогично ∎

~~Теорема 3~~

<u>Опр.</u> Буд. гов, что посл-ти с неотр. чл. $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ эквиваленты в смысле сходимости рядов и писать $a_k \overset{cx}{\sim} b_k$, если ∃ числа $m>0, M>0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$m b_k \leq a_k \leq M b_k \quad \forall k \geq k_0.$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (Второй пр. сравн)

Пусть $\exists k_0 : \forall k \ge k_0 \hookrightarrow a_k \ge 0, b_k \ge 0$ и $a_k \overset{cx}{\sim} b_k$.

Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх или расх. одновр.

□ Док-во состоит в примен. 1-го пр. сравн. и принципа локализации (аналог., как у несобств. инт) ∎

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (Интегральный признак)

Пусть на луче $[1;+\infty)$ задана монот. ф. $f(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх или расх одновреем.

□ Из монот. $f(x)$ след. сущ-е предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1) $A \neq 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ расх в силу НУ сх-ти ряда (теор 1 $\boxed{10.1}$);

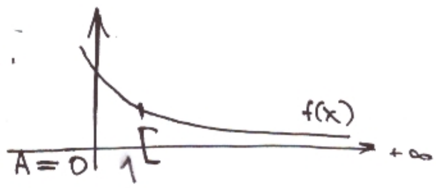
а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расх в силу 2-го пр. срав. (теор 3 $\boxed{9.3}$)

В случае $A \neq 0$ теор. справ.

2) $A = 0$

Пусть для опр-ти f нестрого $\downarrow$.

Тогда $f(x) \ge 0 \quad \forall x \ge 1$



Проинтег. нер-ва $f(k+1) \le f(x) \le f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$ по отр $[k, k+1]$, получим:

$$f(k+1) \le \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

Просуммируем получ. нер-ва по k от 1 до n:

$$S_{n+1} - f(1) \le F(n+1) \le S_n, \text{ где} \qquad (1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k); \quad F(t) = \int\limits_1^{t} f(x)dx$$

Поскольку $f(x) \ge 0$, то ф-я $F(t)$ нестр $\uparrow$ (2)

След-но, $F(n) \le F(x) \le F(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1]$

Из (1) и (2):

$$S_n - f(1) \le F(n) \le F(x) \le F(n+1) \le S_n \quad \forall x \in [n, n+1]$$

След-но, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n - f(1) \le \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$, т.е $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty \sim \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$

В силу кр. сх. ряда с неотр. чл. (теор. 1 $\boxed{10.4}$) усл. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ экзив. сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, а в силу кр. сх. инт. от зн/пост ф (теор 1 $\boxed{9.3}$) усл $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$ экзив. сх. инт $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интег. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх. или расх. одновр. ∎

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (Признак Даламбера)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

а) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ такие, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ $\forall k \geq k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх;

б) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх.

$\square$

а) По инд. $a_k \leq a_{k_0} q^{k-k_0}$ $\forall k \geq k_0$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сх. при $q \in (0,1)$, то ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0} q^{k-k_0}$ также сх.

и по пр. сравн. сх. ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

В силу пр. локализ. сх и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

б) Если $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ при $k \geq k_0$, то $a_k \geq a_{k_0}$, $k \geq k_0$

След-но, $a_k \not\to 0$ $(k \to \infty)$, т.е не вып НУ сх. ряда, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх ∎

$\boxed{\text{Следствие}}$ (пр. Даламбера в пред. форме)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. Тогда

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх

в) при $q = 1$ ряд может сх, а может расх.

$\square$

а) Определим $q' = \frac{q+1}{2}$

Поскольку $q < 1$, то $q < q' < 1$.

По опр. предела $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q' < 1$

Из теор 5(а) след, что ряд $\sum a_k$ сх.

б) По опр. предела

$\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$.

Из теор 5(б) след, что ряд $\sum a_k$ расх.

в) Пусть $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$

Тогда

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Однако при $\alpha \leq 1$ ряд $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ расх

при $\alpha > 1$ ряд $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ сх ∎

$\boxed{\text{Теорема 6}}$ (Признак Коши)
Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Тогда
а) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ т, что $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ $\forall k \geq k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх.
б) если сущ $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0 \mapsto \sqrt[k]{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх.

□
а) Если $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ $\forall k \geq k_0$, то $a_k < q^k$ $\forall k \geq k_0$
В силу приз. срав. и прин. локал. из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ след. сх. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$
б) Если $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ при $k \geq k_0$, то $a_k \geq 1$ при $k \geq k_0$.
Т.е не вып НУ сх. ряда и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх ■

$\boxed{\text{Следствие}}$ (пр. Коши в пред. ф)
Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$. Тогда
а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх
б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх
в) при $q = 1$ ряд мож. сх, а мож. расх
□ Аналог. след. из пр. Даламбера ■

10.5 Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

Опр. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. условно сходящимся, если этот ряд сходится, но не явл. абсол. сход-ся.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Ряд абс. сх $\Rightarrow$ ряд сх.
□ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх. абс.
Тогда вып. усл. Коши сх. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$:
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| \leq \varepsilon$

След-но,
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon$,

т.е вып. усл. Коши сх. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, и он сх ■

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ абс. сх, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абс. сх.
□ В силу св-ва лин-ти из сх-ти рядов $\sum |a_k|$, $\sum |b_k|$ след. сх-ть ряда $\sum (|\alpha| \cdot |a_k| + |\beta| \cdot |b_k|)$
Поскольку $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha||a_k| + |\beta||b_k|$, то $\sum |\alpha a_k + \beta b_k|$ сх в силу пр. срав ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Признак Дирихле)

Пусть послед-ть част. сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена:

$$\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le C;$$

а послед-ть $\{b_k\}$ монот. стремится к нулю.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх.

□ Для опр-ти пусть $\{b_k\}$ нестр. уб.: $b_{k+1} \le b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}), \; A_0 = 0$$

Выполним преоб-я Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \overset{\text{т.к}}{\underset{A_0=0}{=}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

След-но,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad (1)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} b_1,$$ т.е ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ сх,

след-но, сх. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C(b_k - b_{k+1})$

Поскольку $b_k - b_{k+1} \ge 0$ и $|A_k| \le C$, то

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \le C |b_k - b_{k+1}| = C(b_k - b_{k+1})$$

Из пр. сравн. получ. абс. сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$

В силу теор 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ сх.

Поскольку $\{A_n\}$ – огр. посл., а $\{b_n\}$ – б/м посл, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_n = 0$

Отсюда из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ и из ф-лы (1) след.

сущ-е конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{\lim_{n\to\infty} A_n b_n}_{=0} + \lim \sum_{k=1} A_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

т.е сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ■

Теорема 3 (Признак Лейбница)
Если посл-ть $\{b_k\}$ монот. стрем. к нулю, то ряд Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сх.

□ Заметим, что посл-ть част. сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ огран:
$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k = 0$; $\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k = -1$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

След-но, $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

В силу пр. Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сх ■

Теорема 4 (Признак Абеля)
Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, послед. $\{b_k\}$ монот и огр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх.

□ Т.к посл-ть $\{b_k\}$ монот и огр, то сущ $\lim_{k\to\infty} b_k = b_0 \in \mathbb{R}$
Поэтому посл-ть $\{b_k - b_0\}$ монот. стрем к нулю.
Из сх-ти ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ след. огран. послед. част. сумм. этого ряда
Поэтому согл. пр. Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b_0)$ сх.

Отсюда и из сх-ти $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ вытекает сх-ть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ■

10.6 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Коммутативность сложения $(a+b = b+a)$ формулируется для 2-х слаг и по индукции распространяется на сумму конечного числа слаг. Если же число слаг. бесконечно, то такая „счетная ~~адд~~ коммут-ть" имеет место лишь для абсолютно сх-ся рядов.

Лемма 1 Если ряд с действ. <u>неотриц.</u> членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сх, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, составленный из тех же чисел u_n, но в другом порядке, сх-ся к той же сумме.

□ Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Тогда $\forall m \hookrightarrow \sum_{k=1}^{m} v_k \leq S$

Т.к сх-ть ряда с неотр. чл. эквив. огр-ти его част. сумм (т.1 10.4), то $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сх и его сумма $S' \leq S$

Т.к ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ равноправны, то аналог. $S \leq S'$. $\Rightarrow S' = S$ ■

Введем след. обознач:
$u^+ = \frac{u+|u|}{2}$; $u^- = \frac{|u|-u}{2}$, $u \in \mathbb{R}$ (полож. и отриц. часть числа u). Ясно, что
$u^+ = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$; $u^- = \begin{cases} 0, & u > 0 \\ -u, & u \leq 0 \end{cases}$

$u = u^+ - u^-$; $|u| = u^+ + u^-$
$u^+ \geq 0$, $u^- \geq 0$ $\forall u$

Лемма 2 Если ряд с действ. чл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. абс., то сход-ся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расх.

□ Ясно, что $0 \le u_n^+ \le |u_n|$

$0 \le u_n^- \le |u_n|$

Поэтому из сх-ти ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ след. сх-ть рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл.

Т.к $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ не могут одновремен. сх-ся

Но если один из них сх, другой расх, то из рав-ва $u_n = u^+ - u^-$ след расх-ть ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Значит, оба расх. ■

Теорема 1 (Незав-ть суммы абс. сх. ряда от пор. слаг)

Если ряд с действ. чл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абс. сх, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, состав. из тех же чисел u_n, но в др. пор, также сх. абс, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

□ Т.к ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сх., то по лемме 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$ также сх-ся, т.е ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сх. абс.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$$

Оба эти ряда с неотриц. чл. сх. по лемме 2.

Т.к v_n^+ и v_n^- — это те же u_n^+ и u_n^-, но в др. пор, то по лемме 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} v_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n^+ - v_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad ■$$

10.7 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда (без доказательства)

Теорема 1 Если ряд с действ. членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл, то $\forall$ числа $S \in \mathbb{R}$ найдется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, составленный из тех же чисел u_n, но в др. пор, такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S$

□ :Р ■

+ см. комм-й к теор. (Петрович с 209-210)

$\boxed{10.8}$ Произведение абсолютно сходящихся рядов.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Пусть ряды с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абс. сх.

Тогда ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$, составленный из всевозможных попарных произведений $u_i v_j$, также сх. абс.

При этом $S = S_1 \cdot S_2$, где $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

□ По теор 1 $\boxed{10.6}$ сх-ть ряда $\sum u_i v_j$ и значение $S = \sum u_i v_j$ не зав от пор. слаг. Поэтому достат. доказать абс. сх-ть ряда при некот. фиксир. порядке суммирования, напр, „по квадратам" (см. рис)

$$
\begin{array}{ccccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots & u_1v_n & \dots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots & u_2v_n & \dots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots & u_3v_n & \dots \\
\dots & & & & & \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \dots & u_nv_n & \dots \\
\dots & & & & &
\end{array}
$$

При таком порядке для част. сумм ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$:

$$S^*_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} |u_i v_j| = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |v_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |v_j| \equiv A$$

т.к посл-ть S^*_n возр. и её п/п $S^*_{n^2}$ огр., то и посл. S^*_n огр, значит, сх-ся.

Поэтому ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$ сх при суммир-и „по квадр", а значит, и любым другим способом.

Итак, ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ сх. абс., и его сумма S не зав. от пор. ~~сумм-я~~ слагаемых.

Тогда для частичных сумм этого ряда при сум-и „по квадр"

$$S_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \sum_{j=1}^{n} v_j \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n^2} = S_1 S_2$$

Но посл-ть S_n сх к пределу $S = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$, тогда $S = S_1 S_2$ ■

П.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Опр. Пусть на мн-ве X заданы функции $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$
Будем говорить, что функциональная послед-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к ф-и $f(x)$ на мн-ве X и писать $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$ при $n\to\infty$, если
$\forall x\in X \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т.е

$$\forall x\in X \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \qquad (1)$$

Опр. Будем говорить, что функ-я послед-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к ф-и $f(x)$ на мн-ве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N \ \ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \qquad (2)$$

Замеч 1 Отличие условий (1) и (2) в том, что в усл.(1) число N свое для каждого x (т.е $N=N(x,\varepsilon)$); а в усл (2) число N не зав. от x (т.е $N=N(\varepsilon)$)
Поэтому из р.сх. след. поточ. сх.

Замеч 2 Если $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$ при $n\to\infty$, но $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$, то посл-ть $\{f_n(x)\}$ не мож. сх. равн к другой ф-и $g(x)$
(т.к $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$, $n\to\infty$ $\Rightarrow$ $f_n(x) \xrightarrow[X]{} g(x)$, $n\to\infty$)
В этом случае гов, что послед-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и $f(x)$ неравномерно на мн-ве X.

Теорема 1 (Крит. р.сх ф-й посл-ти)

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \text{ при } n\to\infty \iff \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

□ Поскольку условие $\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ эквив-но усл
$\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, то усл (2) эквив. усл :
$\forall\varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N \hookrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$,
т.е $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$ ■

Следствие 1
Посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и равном на мн X $\iff$
$\exists$ числовая посл. $\{a_n\}$:

$$\forall x\in X \ \forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq a_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (3)$$

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$
Определим $a_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. Из теор 1 получ. усл (3)
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (3). Тогда
$\forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow 0\leq \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq a_n$

Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ по теор о зажат. посл-ти получ.
$\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$

По теор 1 это равносильно тому, что $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ ∎

Следствие 2

$f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ $\iff$ $\exists \{x_n\} \subset X$: $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$ при $n\to\infty$ (4)

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим $M_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

По опр. sup: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n \in X$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| > \begin{cases} M_n - \frac{1}{n}, & M_n \in \mathbb{R} \\ 1, & M_n = +\infty \end{cases} \qquad (5)$$

Предпол, что $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ при $n\to\infty$.
Тогда $\exists N\in\mathbb{N}: \forall n \geq N \mapsto |f_n(x_n) - f(x_n)| < 1$.
След-но, согл. (5), получ. $M_n \in \mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Отсюда и из (5) получ, что $M_n \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} \to 0, n\to\infty$

Последнее соотношение в силу теор 1 противоречит усл. $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x), n\to\infty$.
Поэтому предположение $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0, n\to\infty$ неверно.
Значит, вып. усл. (4)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (4).
Тогда $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0, n\to\infty$.
След-но, $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$ и по теор 1 $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ ∎

Опр. Пусть на мн-ве X задана функ-я посл-ть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.
Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ наз. равномерно сходящимся на мн-ве X, если посл-ть его част. сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сх. равн. на мн. X к сумме $S(x)$ этого ряда.
Аналогично опред. поточечная сходимость ряда.

Опр. Остатком поточечно сх-ся ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ наз
$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$

Теорема 2 (Крит. р.сх ф. ряда)
Поточ. сх. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на $X \iff r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$,
т.е $\sup\limits_{x\in X} |r_n(x)| \to 0, n\to\infty$

□ След. из опр. и теор 1 ∎

11.2 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 1 (Кр. Коши р. сх. ф. посл-ти)

Посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и $f(x)$ равном на мн. X $\Leftrightarrow$ вып. усл. Коши:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon \qquad (1)$$

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Тогда

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Поскольку

$\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow n+p>n\geq N$, то $\forall x\in X \hookrightarrow |f_{n+p}(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

След-но,

$\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f_{n+p}(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, т.е вып (1)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (1). След-но,

$\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon$,

т.е $\forall x$ - фикс. $\in X$ вып. усл. Коши сх-ти числ. посл-ти. $\{f_n(x)\}$.

В силу кр. Коши для числ. посл. $\forall x\in X$ посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх.

Обозн. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

Перепишем усл (1) в виде

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall x\in X\ \underbrace{\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leq\varepsilon}$$

Рассм. отдельно усл

Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty}|f_n(x)-f_{n+p}(x)|=|f_n(x)-f(x)|$, то по теор. о пред. переходе в нер-вах $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$

Итак, из усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, т.е $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}f(x), n\to\infty$ ■

Теорема 2 (Кр. Коши р. сх. ф. ряда)

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх. равн. на мн. X $\Leftrightarrow$

Вып. усл. Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leq\varepsilon \qquad (2)$$

□ Док-во состоит в примен. кр. Коши р. сх. посл. (теор 1) к посл. част. сумм ряда ■

Следствие (НУ равн. сх. ряда)

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх равн. на X, то $u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0$ при $n\to\infty$.

□ Полагая в усл (2) $p=1$, получаем

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N\ \forall x\in X \hookrightarrow |u_{n+1}(x)|\leq\varepsilon$, т.е $u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0, n\to\infty$ ■

11.3 Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций.

Теорема 1 (О непр-ти предельной ф-и)

Если посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, непр на мн-ве X ф-й сх. к ф-и $f(x)$ <u>равном</u> на мн. X, то ф-я $f(x)$ непр на мн. X.

$\square$ Зафикс. произвольные $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$.

Треб. доказать сущ-е числа $\delta > 0$ такого, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (1)$$

По опр. р.сх $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$

В частности,

$$\forall x \in X \hookrightarrow |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2)$$

Поскольку ф-я $f_N(x)$ непр на X, то $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

Из (2) и (3):

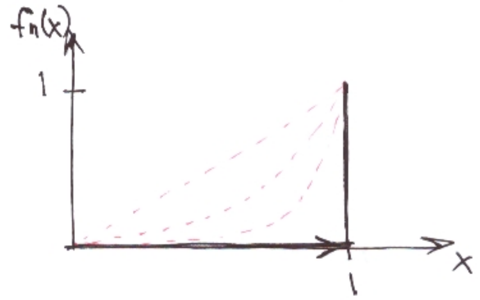
$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

След-но, справ. (1) $\blacksquare$

<u>Замеч</u> Из поточеч. сх. посл. непр. ф-й $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к ф-и $f(x)$ не след. непр. $f(x)$

Например, $f_n(x) = x^n$ на $[0,1]$ сх к разрывной ф-и $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



Теорема 2 (О непр-ти суммы ряда)

Если функ. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на мн X и все ф-и $u_k(x)$ непр на мн. X, то сумма ряда явл. непр. ф-ей.

$\square$ Док-во состоит в примен. теор 1 к посл-ти част. сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ $\blacksquare$

$\boxed{11.4}$ Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (об интегр-и пред. ф-и)

Пусть посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непр. на отрезке $[a,b]$ функций сх. равн. на $[a,b]$ к ф-и $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

$\square$ Из теор 1 $\boxed{11.3}$ след, что ф-я $f(x)$ непр на $[a,b]$, а значит, интегр. по Риману на $[a,b]$.

По теор. об. интег-и нер-в:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\le(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$$

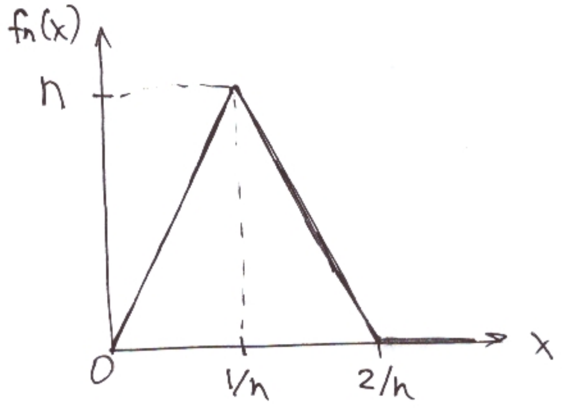
Т.к $f_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f(x)$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\longrightarrow 0$, $n\to\infty$

След-но, $\int_a^b f_n(x)dx\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ ■

Замеч Из поточ. сх-ти $f_n(x)\underset{[a,b]}{\longrightarrow}f(x)$ при $n\to\infty$ не след., что $\int_a^b f_n(x)dx\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

Например,

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x & ;x\in[0,\frac{1}{n}]\\ 2n-n^2x & ;x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\\ 0 & ;x\in[\frac{2}{n},1]\end{cases}$$



Тогда $f_n(x)\underset{[0,1]}{\longrightarrow}0$ при $n\to\infty$

Но $\int_0^1 f_n(x)\,dx=1\not\to 0$ при $n\to\infty$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (О почленном интег-и ряда)

Если функ-й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сх. равн. на $[a,b]$ и все ф-и $u_k(x)$ непр на $[a,b]$, то числ. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)$ сх к интегралу от суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, т.е справ-ва ф-ла почлен. инт. ряда:

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)$$

$\square$ Прим. теор 1 к посл-ти част. сумм $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b u_k(x)dx\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)\overset{\text{теор 1}}{=}$$

$$\overset{\text{теор 1}}{=}\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}S_n(x)\right)dx=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)dx$$ ■

Теорема 3 (О дифф-и пред ф-и)

Пусть посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непр. дифф. на отр $[a,b]$ ф-й сх. хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, а посл-ть производных $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. равном. на $[a,b]$.

Тогда посл-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. равн на $[a,b]$ к нек. непр. дифф. ф-и $f(x)$, причем

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad (1)$$

□ По усл. сущ. ф-я $\varphi(x)$: $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n\to\infty$.

Поскольку ф-и $f_n'(x)$ непр, то в силу теор$\underset{(\boxed{11.3})}{!}$ ф-я $\varphi(x)$ непр.

Из усл. теор след, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$.

Определим ф-ю $f(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$

Заметим, что $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$, след-но,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - A| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - \varphi(t)|\,dt$$

Поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - A| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)|.$$

Поскольку $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \to 0$, $n\to\infty$.

След-но,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - A| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

т.е $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

Из опр ф-и $f(x)$ след, что $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ ■

Теорема 4 (О почленном дифф-и ряда)

Пусть функц-й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, все ф-и $u_k(x)$ непр. дифф-мы на $[a,b]$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сх. равном. на $[a,b]$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на $[a,b]$ и справ. ф-ла почлен. дифф-я ряда:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

□ Прим. теор 3 к посл. ч. сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получ, что эта посл. р. сх. на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ справ:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \quad ■$$

11.5 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 1 (Обобщенный пр. сравн)
Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X \hookrightarrow |u_k(x)| \le v_k(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сх. равн на X.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн на мн. X.

□ В силу кр. Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \le \varepsilon$$

Используя нер-во

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right|$$

$\left(\underbrace{|u_1+\ldots+u_n|}\le |u_1|+\ldots+|u_n| \le v_1+\ldots+v_n \le \underbrace{|v_1+\ldots+v_n|}\right)$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \varepsilon$$

Прим. кр. Коши и получаем треб. ■

Теорема 2 (Приз. Вей-са)
Если $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X \hookrightarrow |u_k(x)| \le a_k$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн на мн. X.

□ Док-во сост. в прим. теор 1 для $v_k(x) = a_k$ ■

Опр. Функ. посл-ть $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно ограниченной на мн. X, если
$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x)| \le C$

Лемма 1 Если посл-ть $\{f_n(x)\}$ р. огр. на мн. X и $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $f_n(x) g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$

□ Т.к посл. $\{f_n(x)\}$ р. огр, то

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x)| \le C$$

Поскольку $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{x \in X} |g_n(x)| \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

След-но,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) g_n(x)| \le C \cdot \sup_{x \in X} |g_n(x)| \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ т.е}$$

$$f_n(x) g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } n \to \infty$$

Теорема 3 (Приз. Дирихле)

Пусть на мн X заданы две ф. посл. $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовл. усл:

1) Посл. ч. сумм $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)$ р. огр, т.е $\exists C\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X \hookrightarrow |A_n(x)|\leq C$;

2) $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k\to\infty$;

3) $\forall x\in X\ \forall k\in\mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x)\leq b_k(x)$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ р.сх. на мн X.

□ Выполним преоб-е Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(x)=\sum_{k=1}^{n}(A_k(x)-A_{k-1}(x))b_k(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)b_k(x)-\sum_{k=0}^{n-1}A_k(x)b_{k+1}(x)=$$

$$\overset{A_0(x)=0}{=\!=} A_n(x)b_n(x)+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x)) \qquad (1)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n}(b_k(x)-b_{k+1}(x))=b_1(x)-b_{n+1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} b_1(x)$ при $n\to\infty$, т.е ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k(x)-b_{k+1}(x))$ р.сх, след-но, р.сх и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}C(b_k(x)-b_{k+1}(x))$

Поскольку $|A_k(x)|\leq C$, $b_k(x)-b_{k+1}(x)\geq 0$, то $|A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))|\leq C(b_k(x)-b_{k+1}(x))$, и в силу теор 1 получаем р.сх ряда $\sum_{k=1}^{\infty}A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))$, т.е сущ. ф-я $S(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}A_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x)) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \text{ при } n\to\infty \qquad (2)$$

В силу леммы 1 из р.сх п-ти $\{b_n(x)\}$ к 0 и р. огр. п. $\{A_n(x)\}$ след, что $A_n(x)b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$.

Отсюда и из (1) и (2) след, что $\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, $n\to\infty$, т.е ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ р.сх на X ■

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (Приз. Абеля)

Пусть на мн. X заданы две ф. посл-ти $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовл. усл:

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ р. сх на X;

2) посл-ть $\{b_k(x)\}$ р. огр, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \longrightarrow |b_k(x)| \le C \qquad (3)$$

3) $\forall x \in X\ \ \forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow b_{k+1}(x) \le b_k(x)$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ р. сх на мн. X

$\square$ При $\forall$ фикс $x \in X$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сх. в силу пр. Абеля для числ. ряда

Согласно кр. р. сх ряда (теор 2 $\boxed{1.1}$) достаточно док-ть, что

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty \qquad (4)$$

Для любых $n \in \mathbb{N}, x \in X$ определим $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$.

Т.к $R_{n-1}(x) - R_n(x) = a_n(x)$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (R_{k-1}(x) - R_k(x)) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} R_{k-1}(x) b_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} R_k(x) b_{k+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) b_k(x) =$$

$$= R_n(x) b_{n+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \qquad (5)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ обознач. $M_n = \sup\limits_{k \ge n} \sup\limits_{x \in X} |R_k(x)|$.

Т.к ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ р. сх. на мн X, то $\sup\limits_{x \in X} |R_k(x)| \to 0$ при $k \to \infty$

След-но, $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\forall p \in \mathbb{N}$ справ. соот:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| \le M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) =$$

$$= M_n (b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)) \overset{(3)}{\le} 2CM_n,$$

то $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X$ имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = \lim_{p \to \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| \le 2CM_n$$

Поэтому, используя (3) и (5), получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \le 3CM_n \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty$$, что доказывает (4) $\blacksquare$

12.1 Степенные ряды с комплексными членами

Напомним, что модулем комплексного числа $z=x+iy$ (где $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$) наз. вещ. число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Опр. Комплексное число S наз. пределом последовательности комплексных чисел $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty}|S-S_n|=0$

Заметим, что

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n \iff \left(\operatorname{Re} S=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re} S_n \text{ и } \operatorname{Im} S=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im} S_n\right) \qquad (1)$$

Опр. Пусть задана посл-ть компл. чисел $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$.
Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ наз. сходящимся, если сущ. конечный предел посл-ти частичных сумм этого ряда.
Компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ наз. абсолютно сходящимся, если сх. вещ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|C_k|$.

Из усл (1) след, что сх-ть компл. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ эквив. сх-ти двух вещ. рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\operatorname{Re} C_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\operatorname{Im} C_k$.

Лемма 1 Если компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k$ сх абс, то он сх.

□ Обозн. $a_k=\operatorname{Re} C_k$; $b_k=\operatorname{Im} C_k$.
Т.к $|a_k|\le\sqrt{a_k^2+b_k^2}=|C_k|$, то в силу пр. срав. из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|C_k|$ след. абс. сх-ть вещ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, т.е его сх-ть.
Аналогично получаем сх-ть вещ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$
След-но, компл. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+ib_k)$ сх ■

Опр Пусть на нек. мн-ве компл. чисел $Z\subset\mathbb{C}$ задана посл-ть комплексозначных ф-й $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$.
Буд. гов, что посл-ть компл. ф-й $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к ф-и $S(z)$ равномерно на мн-ве Z, если посл-ть вещ. ф-й $\{|S_n(z)-S(z)|\}_{n=1}^{\infty}$ сх. к 0 равномерно на мн-ве Z.

Опр. Буд. гов., что комплексный функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на мн. Z, если посл-ть част. сумм $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$ этого ряда сх-ся равном к сумме $S(z)$ этого ряда,
т.е $|S_n(z)-S(z)|\underset{Z}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 1 (Пр. Вей-са р. сх. компл. ряда)
Пусть на мн. $Z\subset\mathbb{C}$ задан компл. функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$.
Пусть $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall z\in Z \hookrightarrow |u_k(z)|\le a_k$ и пусть вещ. числ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сх.
Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сх. равн. на мн. Z.

□ В силу пр. сравн. вещ. числ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(z)|$ сх. $\forall z\in Z$
Отсюда в силу леммы 1 получ. поточеч. сх. ф. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ на мн. Z,
т.е $\forall z\in Z\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)=S(z)\in\mathbb{C}$, где $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(z)$

Заметим, что

$$|S_n(z)-S(z)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

след-но, $\sup\limits_{z\in Z}|S_n(z)-S(z)|\to 0$ при $n\to\infty$, т.е $|S_n(z)-S(z)| \underset{Z}{\rightrightarrows} 0, n\to\infty$ ▤

Опр. Пусть задана посл-ть компл. чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ и компл. число w_0. Комплексный функ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(w-w_0)^k$ с компл. переменной w наз. степенным рядом.

Введение компл. перем. $z=w-w_0$ сводит ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(w-w_0)^k$ к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

Поэтому будем рассм. степ. ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$.

12.3 Круг и радиус сходимости

Опр. Радиусом сходимости степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ наз. $R_{cx}\in[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, определяемое по формуле Коши–Адамара:

$$\frac{1}{R_{cx}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}$$

(при этом будем полагать, что $\frac{1}{0}=+\infty, \frac{1}{+\infty}=0$)

Напомним, что

Опр. Верхним пределом числовой посл-ти $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз. точная верхняя грань мн-ва всех (конечных или беск) частичных пределов посл-ти $\{x_k\}$:

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_k=\sup\{A\in\overline{\mathbb{R}}: \exists\, п/п\ \{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}: A=\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}\}$

Опр. Круг на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом R_{cx} наз. кругом сходимости степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$.

Если $R_{cx}=+\infty$, то кругом сх-ти считается вся компл. пл-ть $\mathbb{C}$.

12.4 Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости

Теорема 1 (Обобщенный признак Коши сх-ти числ. ряда)

Пусть все члены числ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ неотриц. и пусть $q=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}$.

Тогда а) если $q<1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ сх;

б) если $q>1$, то $a_k\not\to 0$ при $k\to\infty$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ расх;

в) если $q=1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ может сх, а может расх.

□ ... ▤

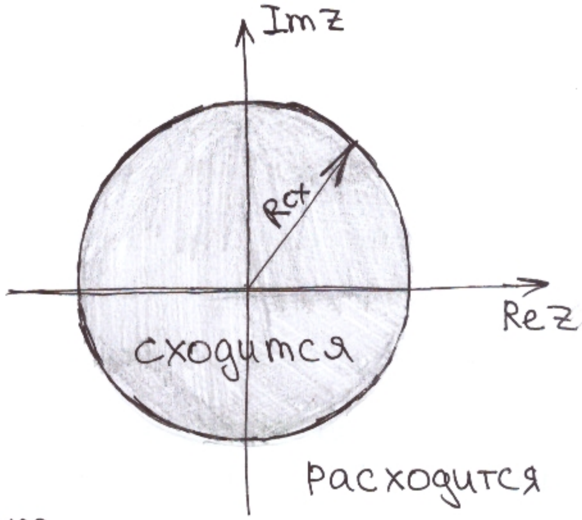
Замеч Теорема 1 явл. обобщением следствия из признака Коши (см. 10.4)

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$ может не сущ, но $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}$ сущ. всегда.

→

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (О круге сх-ти степ. ряда)

Степ. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$



1) абс. сх. внутри круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{сх}\}$)
2) расх. вне круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_{сх}\}$)
3) на границе круга сх-ти (т.е на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R_{сх}\}$) может сх, а может и расх

(Здесь $R_{сх}$ – рад. сх. степ. ряда)

□ Зафиксируем произв. компл. число $z \neq 0$ и исслед. сх-ть ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью обобщ. пр. Коши (теор. 1)

Определим

$$q = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|z|}{R_{сх}}$$

(где при $R_{сх} = 0$, $|z| > 0$ след. положим $q = +\infty$)

1) При $z = 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ состоит из нулей, а значит, сх.

Если $0 < |z| < R_{сх}$, то $q < 1$ и в силу теор 1 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сх, т.е ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. абс.

2) Если $|z| > R_{сх}$, то $q > 1$ и в силу теор 1 члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не стрем. к нулю, след-но, не стрем к нулю и члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расх.

(Заметим, что из расх-ти ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не след. расх. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, и поэтому важно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не только расх, но и его члены не стрем к нулю)

3) Рассм, напр, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$

По ф. Коши-Адамара

$$\frac{1}{R_{сх}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim_{k\to\infty} e^{-\ln(k+1)/k} = e^0 = 1$$

$R_{сх} = 1$

При $z = 1$ исх. ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и расх.

При $z = -1$ исх ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ — сх по пр. Лейбница ■

$\boxed{12.5}$ Формула Коши-Адамара

См. опр. радиуса сх-ти в $\boxed{12.3}$

12.2 Первая теорема Абеля

Теорема 1 (Первая Абеля)

Пусть степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх в т $z=z_0$.

Тогда в любой точке $z=z_1$ такой, что $|z_1|<|z_0|$, этот ряд сх. абс.

□ Т.к степ. ряд сх в т. $z=z_0$, то в силу теор 2 12.4 рад. сх. этого ряда удовл. нер-ву $R_{cx} \geq |z_0|$.

След-но, $|z_1|<|z_0| \leq R_{cx}$, и, согл. теор 2 12.4, в т. $z=z_1$ степ ряд сх абс ■

12.6 Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда.

Теорема 1 Радиусы сх-ти степ. рядов $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, полученных формальным почленным диф-ем и инт-ем степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, совпадают с рад. сх. исходного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

□ Покажем сначала, что рад. сх R_1 ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^k$ равен рад. сх. R исходного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

В силу ф. Коши-Адамара имеем

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|\cdot k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}$$

(Т.к

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{\ln k}{k}} = e^0 = 1)$$

След-но, $R_1 = R$

Покажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ сх или расх одноврем.

При $z=0$ эти ряды, очевидно, сх.

Пусть $z \neq 0$.

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k k z^k$; $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} c_k k z^{k-1}$

Если сущ. $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то сущ. $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{z} = \frac{S}{z} \in \mathbb{C}$.

Обратно, если сущ. $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{C}$, то сущ. $\lim_{n\to\infty} S_n = z\tilde{S}$

След-но, рад. сх. R_1 ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$ равен рад. сх. R_2 ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$.

Итак, $R_2 = R_1 = R$, т.е при почл. диф-и степ ряда его рад. сх не измен

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ получ. при почлен. диф-и ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, то рад. сх. этих рядов также совп. ■

12.7 Вторая теорема Абеля

Теорема 11 (Вторая Абеля)

Если степ. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ с рад. сх. $R\in(0,+\infty]$ сх. в т $z_1\neq z_0$, лежащей внутри или на границе круга сх, то он сх. равномерно на отр $[z_0,z_1]$, соед. т. z_0 и z_1 на компл. пл-ти

□ Пусть $z_1\neq z_0$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сходится.

Т.к отр. $[z_0,z_1]$ может быть параметризован как $z=z_0+t(z_1-z_0)$, $0\leq t\leq 1$, то

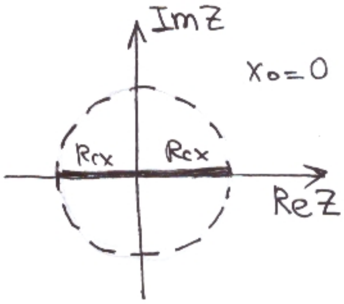
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n\cdot\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n t^n$$

числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ сх. и члены его не зав. от $t\in[0,1]$, т.е его можно считать равн. сх. рядом с компл. чл. на мн-ве $t\in[0,1]$.

Послед-ть $b_n(t)=t^n$ убывает $\forall t\in[0,1]$ (постоянна при $t=0$ и $t=1$), причем $|b_n(t)|\leq 1$ $\forall t\in[0,1]$, $n=0,1,2,\dots$

По пр. Абеля р. сх. рядов (см 11.5) данный ряд р. сх. по $t\in[0,1]$, т.е по $z\in[z_0;z_1]$ ■

13.1 Степенные ряды с действительными членами

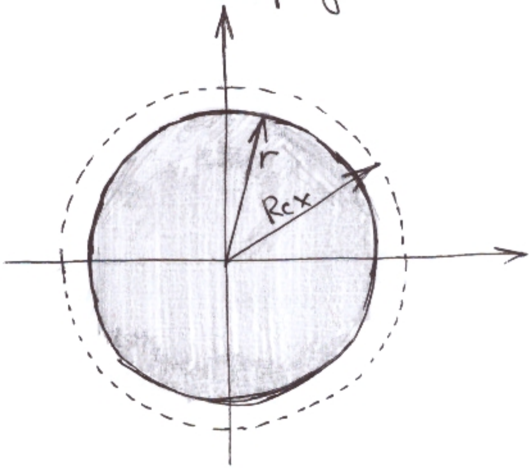


Будем рассм. веществ. степ. ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, где $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$

Поскольку вещ. ст. ряд можно рассм как компл. степ ряд, то рад. сх R_{cx} ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ можно определять из ф. Коши-Адамара, в кот. след. положить $c_k = a_k$

Интервал $(x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ наз. интервалом сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

13.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости.



Теорема 1 (О равномерной сх-ти степ. ряда)

Пусть $R_{cx} > 0$ – рад. сх. степ. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Тогда для любого числа $r \in (0, R_{cx})$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равн. в круге $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

□ Заметим, что $\forall z \in Z \ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow$

$|c_k z^k| \leq |c_k| \cdot r^k$

Поскольку $|r| = r < R_{cx}$, то в силу теор 2 12.4 числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k r^k|$ сх.

Отсюда и из пр. Вей-са р. сх компл. ряда (теор 1 12.1) след. р. сх. ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ на мн. Z ■

Теорема 2 Пусть вещ. ст. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f(x)$ имеет рад. сх. $R_{cx} > 0$

Тогда в интервале сх-ти $(x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ ф-я $f(x)$ имеет произв. любого порядка, получ. почленным диф-ем ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((x-x_0)^k\right)^{(n)} \quad \forall x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx}) \qquad (1)$$

□ Покажем, что $\forall x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ сущ. конеч. произв. $f'(x)$, причем $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}$.

Зафикс. произв. $x \in (x_0 - R_{cx}, x_0 + R_{cx})$ и опред. число $r \in (0, R_{cx})$ из усл. $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

В силу теор. 1 12.6 р. сх. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k (t-x_0)^{k-1}$, получ. почл. диф-ем ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$, равен R_{cx}.

След-но, в силу нер-ва $r < R_{cx}$ и теор о р. сх. степ. ряда (теор 1) этот ряд сх. равн. на отр $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Поэтому согл. теор. о почлен. диф-ти функ. ряда (теор 4 11.4) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$ можно диф-ть почл. на отр $[x_0 - r, x_0 + r]$

В частности, сущ. $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}$.

След-но, при $n=1$ справ. ф-ия (1)
Проведя те же рассужд. для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1} = f'(x)$, получ. ф. (1) при $n=2$ и т.д.

По инд. формула (1) справ. $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

13.3 Единственность представления функции степенным рядом.

Теорема 1 Коэф. степ. ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$ однозначно опред. по ф-и $f(x)$ с помощью формулы $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

□ Заметим, что

$$((x-x_0)^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n} & , k \geq n \\ 0 & , k < n. \end{cases}$$

след-но,

$$((x-x_0)^k)^{(n)}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} n! & , k=n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

Отсюда и из ф-лы (1) из 13.2 след, что $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$ ■

13.5 Ряд Тейлора

Опр. Ф-я $f(x)$ наз. бесконечно дифференцируемой в т x_0, если в этой точке сущ. производные любого порядка ф-и $f(x)$.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ беск. диф в т x_0.
Тогда ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
наз. рядом Тейлора ф-и $f(x)$ в т x_0.

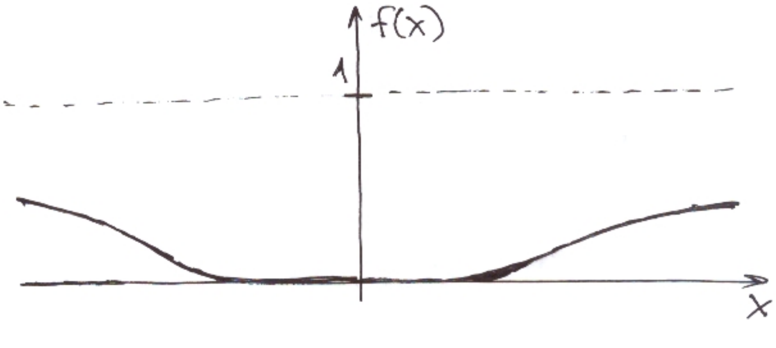
Опр. Ф-я $f(x)$ наз. регулярной в т x_0, если она беск. диф. в этой т. и ряд Тейлора ф-и $f(x)$ в т x_0 сходится к ф-и $f(x)$ в нек окр-ти т x_0:
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Опр. Ряд Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0=0$ наз. рядом Маклорена этой ф-и

13.7 Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд.

Ряд Тейлора в т x_0 беск. диф. ф-и $f(x)$ может сходиться не к ф-и $f(x)$, а к нек. другой ф-и, не совп. с $f(x)$ в сколь угодно малой окрес-ти т. x_0. В этом случае ф-я $f(x)$ не явл. регулярной в т x_0.

Пример
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$



Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{k/2} e^{-t} = 0$$

Отсюда следует, что

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

По индукции

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$, где $P_{3n}(t)$ – многочлен ст $3n$ от t.

След-но, все коэф. ряда Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0=0$ равны нулю
Поэтому сумма ряда Тейлора ф-и $f(x)$ в т $x_0=0$ равна нулю и не совп. с ф-ей $f(x)$ в сколь угодно малой окр т. x_0.

Т.е $f(x)$ не явл регул, но явл беск. диф. в т $x_0=0$.

$\boxed{13.4}$ Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.

Напомним, что <u>остаточным членом</u> формулы Тейлора <u>n раз диф</u> ф-и $f(x)$ в т x_0 наз

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

<u>Замеч</u> Ост. член. <u>ф-лы</u> Тейлора не всегда совп. с остатком <u>ряда</u> Тейлора.

Например, для

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases} \qquad (*)$$

$S_n(x)=0\quad \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$ (см. $\boxed{13.7}$), поэтому остаток ряда Тейлора тождественно равен 0.

А остат. чл $r_n(x)=f(x)\neq 0\quad \forall x\neq 0$.

Непосредственно из опр. следует, что ф-я $f(x)$ явл. регулярной в т x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(x_0)\longrightarrow \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0 \qquad (1)$$

На прим. ф-и (*) видно, что для док-ва регулярности ф-и недостаточно показать, что радиус сх-ти ряда Тейлора этой ф-и $R_{cx}>0$.
Нужно проверить усл (1)

$\boxed{\text{Теорема}}$ (ДУ регулярности)

Пусть сущ. число $\delta>0$ такое, что ф-я $f(x)$ беск. диф в $U_\delta(x_0)$ и $\exists M>0: \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)|\le M$.

Тогда ф-я f регулярна в т x_0 и

$$\forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2)$$

□ В силу ф-лы Тейл с ост чл. в ф. Лагранжа $\forall x\in U_\delta(x_0)\ \exists\xi\in\mathbb{R}$, леж. между x и x_0 (а значит, $\xi\in U_\delta(x_0)$), такое, что

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

След-но,

$$\forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |r_n(x)|\le M\cdot\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (3)$$

Покажем, что $\forall a>0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

Определим $n_0\in\mathbb{N}$ из усл. $n_0>2a$, тогда при $n>n_0$ имеем

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{a^{n-n_0}}{n(n-1)\dots(n_0+1)}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a^{n-n_0}}{n_0^{n-n_0}}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Отсюда и из (3) получаем

$$\forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

Поэтому ф-я f регулярна в т x_0 и вып. ~~усл.~~ соот. (2) ■

13.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

$\boxed{\text{Теорема}}$ (ф-ла Тейлора с ост чл в инт. форме)

Если ф-я $f(x)$ на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имеет непрер. произв. до $(n+1)$-го пор. вкл, то для остат. чл ф. Тейл.

$r_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ справ. представл. в интегр. форме:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

□ Поскольку $r_0(x)=f(x)-f(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=\frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\,dt$, то при $n=0$ теор справ.

Предположим, что теор спр. для $n=s-1$, т.е

$$r_{s-1}(x)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{s-1}f^{(s)}(t)\,dt$$

Интегрируя по частям, получаем

$$r_{s-1}(x)=\frac{1}{(s-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(s)}(t)\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)d\left((x-t)^s\right)=-\frac{1}{s!}f^{(s)}(t)(x-t)^s\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{s!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{s!}f^{(s)}(x_0)(x-x_0)^s+\frac{1}{s!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt.$$

Отсюда получаем формулу для ост. чл. пор s:

$$r_s(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=r_{s-1}(x)-\frac{1}{s!}f^{(s)}(x_0)(x-x_0)^s=\frac{1}{s!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^s f^{(s+1)}(t)\,dt$$

След-но, теор. справ. при $n=s$.
По инд. получаем справ. теор. $\forall n\in\mathbb{N}$ ∎

$\boxed{13.8}$ Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x; $\cos x$; $\sin x$; $\ln(1+x)$; $(1+x)^\alpha$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Ряды Маклорена ф-й e^x, $\sin x$, $\cos x$ сходятся к этим ф-ям на всей числовой прямой: для любого $x\in\mathbb{R}$ справ р-ва

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!};\quad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k};\quad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

□ Т.к $\forall\delta>0$ при $x\in U_\delta(0)=(-\delta,\delta)$ справ-вы соотношения $|(e^x)^{(n)}|=e^x<e^\delta$, то вып. ДУ регулярности ф-и $f(x)=e^x$ в т $x_0=0$, и ф-я e^x представляется своим рядом Маклорена:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Аналогично для ф-й $\cos x$ и $\sin x$, используя огранич-ть на любом интервале $(-\delta,\delta)$ и прим. ДУ рег-ти (теор 1 $\boxed{13.4}$), получаем

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k};\quad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$ ∎

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ Ряд Маклорена степенной ф-и $f(x)=(1+x)^\alpha$ сх. к этой ф-и при $x\in(-1,1)$:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k\quad\forall x\in(-1,1),$$

где $C_\alpha^0=1$; $C_\alpha^k=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

□ Зафикс. $x\in(-1,1)$
Записывая ост. чл. ф-лы Маклорена ф-и $f(x)=(1+x)^\alpha$ в интег. ф-ме и учит, что
$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, получаем

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt\ \underline{\underline{t=\tau x}}$$

$$\underline{\underline{t=\tau x}}\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^1 x^n(1-\tau)^n(1+\tau x)^{\alpha-n-1}x\,d\tau=\lambda_n\int\limits_0^1\left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n(1+\tau x)^{\alpha-1}d\tau,$$

где введено обознач.

$$\lambda_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1} \qquad (1)$$

Поскольку $\forall x\in(-1,1)$ $\forall \tau\in[0,1] \hookrightarrow 1+\tau x \geq 1-\tau$, то $\left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n \leq 1$

След-но,

$$|r_n(x)| \leq |\lambda_n| \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1}d\tau = |\lambda_n| C, \qquad (2)$$

где величина $C = \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1}d\tau$ не зав. от n.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ (3)

Если $x=0$, то согласно рав-ву (1) имеем $\lambda_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Если $\alpha = m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, то из (1) след. $\lambda_n = 0$ при $n>m$

Поэтому в случаях $x=0$ и $\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ соот. (3) справедл.

Пусть $x\neq 0$ и $\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)x^{n+2}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)x^{n+1}} = \frac{\alpha-n-1}{n+1}x \xrightarrow{n\to\infty} -x\in(-1,1)$$

Выберем число $q\in(|x|,1)$.

Тогда по опр. предела сущ номер n_0 такой, что $\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} < q$ $\forall n\geq n_0$.

Поэтому при $n\geq n_0$ имеем $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n_0}| q^{n-n_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Отсюда вытекает соотнош (3), кот. вместе с (2) дает

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ $\forall x\in(-1,1)$ ∎

<u>Замечание</u> При $\alpha = n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall k\geq n+1$ имеет место $C_\alpha^k = 0$, и, след-но, ряд Маклорена ф-и $(1+x)^\alpha$ совпадает с конечной суммой:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

В случае $\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$, используя ф-лу $R_{cx} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, вычисл. рад. сх-ти ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$:

$$R_{cx} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k+1}{\alpha-k}\right| = 1$$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ $\boxed{\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$ $\forall x\in(-1,1)$

□ Т. к

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ $\forall x\in(-1,1)$, то из теор. о почлен. инт. степ ряда $\boxed{12.6}$) при $|x|<1$ получаем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \overset{n=k+1}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad \forall x\in(-1,1) \quad ∎$$

$\boxed{13.9}$ Разложение в степенной ряд комплексозначной функции e^z.

Напомним, что $\forall z \in \mathbb{C}$ $(z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R})$ определяется

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Основное св-во экспоненты $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ сохр для комплексных показ.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ имеет место рав-во

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\square$ По теор 1 $\boxed{13.8}$ соотв. разлож. верно $\forall z = x \in \mathbb{R}$

значит, рад. сх. ст ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, и он абс. сх $\forall z \in \mathbb{C}$.

Пусть $z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$

Тогда $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

(Здесь использ то, что ряды абс сх, и суммир. их можно в любом пор)

Если мы докажем, что при $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ вып рав-во

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}, \text{ то}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ т.е}$$

то, что нужно доказать.

Произв. двух абс. сх. рядов — абс. сх. ряд, кот. можно суммир. в любом порядке (см $\boxed{10.8}$)

Применим суммирование „по пачкам" (см. рис)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

$$\begin{array}{cccccc}
u_0 v_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & \dots & u_0 v_n & \dots \\
u_1 v_0 & u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n & \dots \\
u_2 v_0 & u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n & \dots \\
u_3 v_0 & u_3 v_1 & u_3 v_2 & \dots & u_3 v_n & \dots \\
\dots & & & & & \\
u_n v_0 & u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n & \dots \\
\dots & & & & &
\end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\, z_1^k\, z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Т.е разложение ф-и e^z обосновано ∎