Лекция 11. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство евклидова пространства. Расстояние и угол между вектором и подпространством.

Все события будут разворачиваться в евклидовом пространстве E.

Определение 1. Пусть $L \subset E$ - непустое подмножество. Ортогональным дополнением к L в E называется подмножество $L^{\perp} = \{y \in E : (x, y) = 0, \forall x \in L\}$. (1)

Так, если L –прямая в трехмерном векторном евклидовом пространстве, то ортогональным дополнением к L будет плоскость, перпендикулярная этой прямой.

Лемма 1. (а) $L^{\perp}$ – линейное подпространство в E;

(б) Если L содержит нулевой вектор ***o***, то $L \cap L^{\perp} = o$.

Доказательство. (а) Если $(x, y) = 0, \forall x \in L$, то $\forall \lambda \in R, (x, \lambda y) = \lambda(x, y) = 0, \forall x \in L \Rightarrow \lambda y \in L^{\perp}$.

Пусть также $(x, y_1) = 0, (x, y_2) = 0, \forall x \in L \Rightarrow (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in L^{\perp}$.

(б) Если вектор c принадлежит одновременно L и $L^{\perp}$, то $(c, c) = 0$. Из определения скалярного произведения следует, что $c = o$, что и утверждалось. Ч.т.д.

Выясним, как искать ортогональное дополнение к подпространству. Пусть L – подпространство в E размерности m, $L = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$.

Лемма 2. Вектор $y \in L^{\perp} \Leftrightarrow (a_i, y) = 0, \forall i = 1,...,m$. (2)

Это утверждение напоминает признак перпендикулярности прямой и плоскости из школьной стереометрии.

Доказательство. Если $y \in L^{\perp}$, то $(x, y) = 0, \forall x \in L$, в частности, $(a_i, y) = 0, \forall i = 1,...,m$.

Обратно, допустим, что $(a_i, y) = 0, \forall i = 1,...,m$, тогда для любого вектора

$x \in L,\ x = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i,\ (x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i, y) = 0$. Ч.т.д.

Условия леммы 2 дают систему уравнений (2) для нахождения ортогонального дополнения, если известны координаты векторов $a_1, \dots, a_m$ в некотором базисе $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Если базис ортонормированный, то матрицу A этой системы составляют строки координат векторов, линейной оболочкой которых является подпространство L. Таким образом, чтобы найти базис в $L^{\perp}$, нужно найти фундаментальную систему решений системы уравнений AX=0 (2).

В случае, когда L дано не как линейная оболочка, а как множество векторов, координаты которых в ортонормированном базисе удовлетворяют однородной системе уравнений $BX = 0$, причем строки матрицы B линейно независимы, то эти строки дают базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$, поскольку любое уравнение $b_{i1}x_1 + ... + b_{im}x_m = 0$ можно интерпретировать как скалярное произведение векторов $b_i = (b_{i1}, ..., b_{in})^T$ и $x = (x_1, ..., x_n)^T$, равное нулю.

Последние два абзаца дают способы решения нескольких задач из задания (и экзаменационных билетов) на ортогональные дополнения.

Следствие из леммы 2. $\dim L + \dim L^{\perp} = n = \dim E$.

В самом деле, размерность $L^{\perp}$ равна количеству базисных решений системы (2), а оно равно $n - rgA = n - \dim L$.

Прежде чем перейти к основному результату нашей темы, укажем некоторые свойства операции построения ортогонального дополнения.

Лемма 3. Для подпространств $L, L_1, L_2 \subset E$ справедливы равенства:

1) $(L^{\perp})^{\perp} = L$; 2) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$; 3) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$. (без доказательства)

%Доказательство. 1) $z \in (L^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow (z, y) = 0, \forall y \in L^{\perp}$, т.е. $(L^{\perp})^{\perp} \subseteq L$. Но $\dim(L^{\perp})^{\perp} = n - \dim L^{\perp} = n - (n - \dim L) = \dim L \Rightarrow (L^{\perp})^{\perp} = L$, ч.т.д.

2) Пусть

$$z \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}; \forall x = x_1 + x_2 \in L_1 + L_2, (x_1 + x_2, z) = (x_1, z) + (x_2, z) = 0 \Rightarrow$$

$$z \in (L_1 + L_2)^{\perp} \Rightarrow L_1^{\perp} \cap L_1^{\perp} \subseteq (L_1 + L_2)^{\perp}.$$

Но

$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2)^{\perp} &= n - \dim\,(L_1 + L_2) = n - (\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_1)) = \\ &= (n - \dim L_1) + (n - \dim L_2) - (n - \dim(L_1 \cap L_1)) = \dim L_1^{\perp} + \dim L_2^{\perp} - \dim(L_1 \cap L_1)^{\perp}\end{aligned}$$

%

Теорема. $E = L \oplus L^{\perp}$.

Любой вектор $x \in E$ ***можно единственным образом представить в виде*** $x = y + z$***, где*** $y \in L,\ z \in L^{\perp}$**.**

Вектор y называется ***ортогональной проекцией*** вектора x на подпространство L, а вектор z называется ***ортогональной составляющей*** вектора x относительно подпространства L. Также применимы обозначения $y = x_{\parallel},\ z = x_{\perp}$, так что $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 1(б), $L \cap L^{\perp} = o$, а по следствию из леммы 2, $\dim L + \dim L^{\perp} = n = \dim E$. По критерию прямой суммы, это и означает, что $E = L \oplus L^{\perp}$. Таким образом, любой вектор x из E единственным образом представляется в виде $x = y + z$, где $y \in L,\ z \in L^{\perp}$. Теорема доказана.

Следствие. Верна «теорема Пифагора»: если $x = y + z$, $y \in L,\ z \in L^{\perp}$, то $|x|^2 = |y|^2 + |z|^2$.

Действительно, $|x|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + 2(y, z) + (z, z) = |y|^2 + |z|^2$, так как $(y, z) = 0$.

Укажем способы разложения вектора в сумму ортогональной проекции и ортогональной составляющей.

1 способ. Пусть L – линейная оболочка базисных векторов $a_1, \ldots, a_m$: $L = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$. (1)Дополнить $a_1, \ldots, a_m$ до базиса в E векторами $a_{m+1}, \ldots, a_n$; (2) Ортогонализовать и нормировать базис $a_1, \ldots, a_n$, получить ортонормированный базис $b_1, \ldots, b_n$, при этом $b_1, \ldots, b_m$ - онб в L, а $b_{m+1}, \ldots, b_n$ - онб в $L^{\perp}$.

Теперь $y = \sum_{i=1}^{m} (x, b_i) b_i, z = \sum_{j=m+1}^{n} (x, b_j) b_j = x - y$.

2 способ – без ортогонализации и поиска базиса в $L^{\perp}$. Разложение искать в виде

$$x = y + z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + z,\ (x, a_j) = (y, a_j) + (z, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) + 0,$$

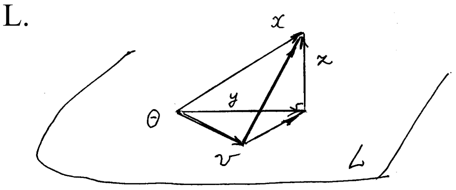
Система уравнений $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) = (x, a_j), j = 1, ..., m$ для нахождения α_i имеет единственное решение, так как ее основная матрица $G_a = (a_i, a_j)$ есть матрица Грама базиса a и потому невырожденна. Теперь $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ z = x - y$.

Определение 2. Углом между вектором x и подпространством L называется наибольший среди углов между векторами x и $v \in L$.

Определение 3. Расстоянием от вектора x до подпространства L называется наименьшая из длин разностей $x - v,\ v \in L$. Стандартное обозначение : $\rho(x, L)$.

Утверждение 4. 1. Угол между вектором x и подпространством L равен углу между x и его ортогональной проекцией на L.

2. Расстояние от вектора x до подпространства L равно длине его ортогональной составляющей z относительно L .
Доказательство.
Покажем, что для данного вектора $x \in E$, среди векторов $x - v, v \in L$, наименьшую длину имеет $z = x - y$ – ортогональная составляющая вектора x относительно L.



Запишем $x - v = (x - y) + (y - v) = z + (y - v), y, v \in L$ (см.чертеж) .
По следствию, $|x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2$, причем минимальное значение $|z|^2$ достигается, если $|y - v|^2 = 0 \Rightarrow v = y, z \in L^{\perp}$. Поэтому $\cos \measuredangle(x; v) = \dfrac{|(x, v)|}{|x||v|} \geq \dfrac{|y|}{|x|} = \cos \measuredangle(x; y)$.

Пример. В евклидовом пространстве R^4 (со стандартным скалярным произведением) дано подпространство $L = \langle a_1 = (1,1,1,1)^T, a_2 = (1,2,2,-1)^T \rangle$. Разложить вектор $x = (4,-1,-3,4)^T$ на сумму ортогональной проекции на L и ортогональной составляющей. Найти расстояние от вектора x до L и угол φ между x и L.
Решение. (2-й способ). Разложение x будем искать в виде $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + z,\ (a_1, z) = (a_2, z) = 0$.
Умножим желаемое равенство скалярно сначала на a_1, потом на a_2:
$(x, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) + (z, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1)$,
$(x, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + (z, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2)$. Для нахождения α_1, α_2 получим систему уравнений $\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) = (x, a_1) \\ \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) = (x, a_2) \end{cases}$. В нашей задаче

$(a_1, a_1) = 4, (a_1, a_2) = (a_2, a_1) = 4, (a_2, a_2) = 10, (x, a_1) = 4, (x, a_2) = -8$, так что $\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 4 \\ 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$,
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2$, $y = 3a_1 - 2a_2 = (3,3,3,3)^T - (2,4,4,-2)^T = (1,-1,-1,5)^T$,
$z = x - y = (4,-1,-3,4)^T - (1,-1,-1,5)^T = (3,0,-2,-1)^T$. Значит, $\rho(x, L) = \sqrt{9 + 4 + 1^2} = \sqrt{13}$,
$\cos \measuredangle(x, L) = \dfrac{|y|}{|x|} = \dfrac{\sqrt{1+1+1+25}}{\sqrt{16+1+9+16}} = \dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}},$. Итак, $\varphi = arc\cos(\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

Если подпространство задано не как линейная оболочка, а системой однородных линейных уравнений, надо сначала найти в нем базис, а затем решать, как выше.