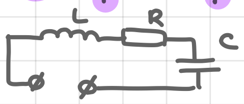
26. Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Амплитудная и фазовая характеристики.



$$\ddot q + 2\gamma\dot q + \omega_0^2 q = X_0\cos(\omega t) \qquad \left[X_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\right]$$

$q(t) = q_{oo}(t) + q_{чн}(t)$

$q_{oo}(t) = e^{-\gamma t} A\cos(\Omega t + \varphi_0) \to 0$

$q(t) \to q_{чн}(t)$ (в установившемся состоянии) $\Rightarrow q_{чн} = q_0(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))$

$$\ddot q + 2\gamma\dot q + \omega_0^2 q = X_0 e^{i\omega t} \qquad q = Ae^{i\omega t}$$

$$A(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2) = X_0$$

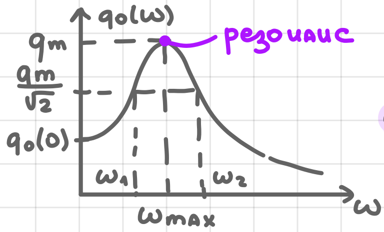
$$A = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}\, e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow Re(q(t)) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

$$q_0(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}$$ амплитудная характеристика контура

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ фазовая характеристика

Резонанс. Ширина резонансной кривой и её связь с добротностью.



$$q_0(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}$$

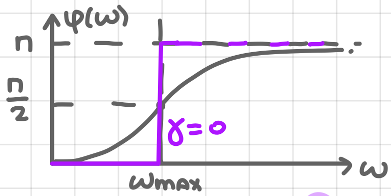
$$q_0(0) = \frac{X_0}{\omega_0^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{C}$$

$$\frac{dq_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \text{ при } \gamma \ll \omega_0 \quad \omega_{max} = \omega_0 \Rightarrow q_{max} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma}$$

$$\frac{q_{max}}{q_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{d} = Q$$

$$\frac{q_{max}}{\sqrt2}: \begin{array}{l}(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2 \\ (\omega_2^2-\omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\omega_0^2 - \omega_1^2 = 2\omega_1\gamma \\ \omega_2^2 - \omega_0^2 = 2\omega_2\gamma\end{array} \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ — ширина кривой на уровне $q_{max}/\sqrt2$



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

В установившемся режиме колебания будут происходить на частоте генератора

Процесс установления вынужденных колебаний, биения.

$$\ddot x + 2\gamma\dot x + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \qquad x(t) = x_{oo}(t) + x_{чн}(t)$$

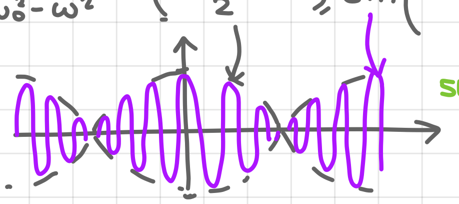
1. $\omega \neq \omega_0 \quad \gamma = 0$

$x_{oo}(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$

$x_{чн}(t) = A\cos\omega t \Rightarrow x_{чр} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$

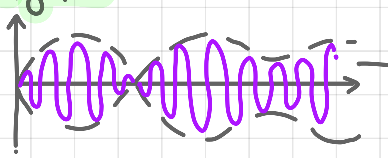
$$\begin{cases} x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t + a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \\ x(0) = 0 \\ \dot x(0) = 0\end{cases} \Rightarrow x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{-2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)$$



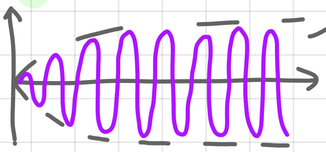
биения

2. $\gamma \neq 0$



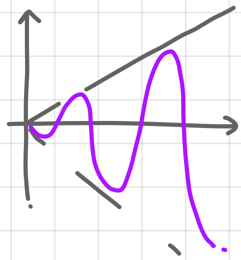
→ установившийся режим

3. γ велико.



4. $\omega = \omega_0$

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\omega^2}=\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{-t\sin\omega t}{-2\omega}=\frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t \Rightarrow x=\frac{f_0 t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$



$$\left[\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\omega^2}\to-\frac{2\cdot\frac{(\omega-\omega_0)}{2}\,t\cdot\sin\omega t}{(\omega_0-\omega)(\omega+\omega_0)}\to\frac{-t\sin\omega t}{-2\omega}\right]$$

если $\gamma\neq 0\Rightarrow$ колебания ограничены по амплитуде