№ 1

$x \neq y \wedge (y < x \to 2z > x) \wedge (x < y \to x > 2z) = 1$

$z = 7,\ y = 16$

$x \neq 16 \wedge (16 < x \to x < 14) \wedge (x < 16 \to 14 < x) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 16 & = 1 \\ 16 < x \to x < 14 & = 1 \quad (1) \\ x < 16 \to 14 < x & = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16 < x = 1 \\ x < 14 = 1 \end{cases} \text{невозможно} \\ \begin{cases} 16 < x = 0 \\ x < 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 16 = 1 \\ x \geq 14 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 14 \leq x \leq 16 = 1 \\ \begin{cases} 16 < x = 0 \\ x < 14 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 16 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow x < 14 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x \leq 16 = 1$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 16 = 1 \\ 14 < x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 14 < x < 16 = 1 \\ \begin{cases} x < 16 = 0 \\ 14 < x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 = 1 \\ x \leq 14 = 1 \end{cases} \text{невозможно} \\ \begin{cases} x < 16 = 0 \\ 14 < x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 = 1 \\ x > 14 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 16 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 14 = 1$

В итоге: $\begin{cases} x \neq 16 \\ x \leq 16 \\ x > 14 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 15}$ Ответ: 15

№ 2

$F(x,y,z) = \overline{x \wedge \bar{y} \wedge z} = \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

№3

$F_1 = x \wedge (y \to z)$

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

как видим, таблицы разные $\Rightarrow F_1 \neq F_2$

$F_2 = (x \wedge y) \to (x \wedge z)$

x	y	z	F_2
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

№4

а)

$x \wedge (y \to z) = x \wedge (\bar{y} \vee z) = x \wedge \bar{y} \vee x \wedge z$

$x \wedge y \to x \wedge z = \overline{x \wedge y} \vee x \wedge z$

очевидно, что $x \wedge \bar{y} \neq \overline{x \wedge y}$,

а значит

$x \wedge (y \to z) \neq x \wedge y \to x \wedge z$

$A \equiv B = (A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B)$

$A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$

$\overline{A \equiv B} = A \oplus B$

б) $\underbrace{(x \oplus y)}_{F_1(x,y,z)=} \equiv (x \oplus z)$

x	y	z	F_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$F_2(x,y,z) = x \oplus (y \equiv z)$

x	y	z	F_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

как видим из таблиц, $F_1 \neq F_2$ ■

№5

$\to$

а) $a \to b \overset{?}{=} b \to a$

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

a	b	$b \to a$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Видно, что $a \to b \neq b \to a \Rightarrow$ комм. не выполняется

X

б) $(x \to y) \to z \stackrel{?}{=} x \to (y \to z)$

x	y	z	$(x\to y)\to z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$x\to(y\to z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

как мы видим, не выполняется ✗

№6

а) $F(x_1, x_2, x_3) = 00111100$

	x_1	x_2	x_3	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

x_1: $f(0,0,0) = 0$, $f(1,0,0) = 1$ $\Rightarrow$ x_1 – сущ.

x_2: $f(0,0,0) = 0$, $f(0,1,0) = 1$ $\Rightarrow$ x_2 – сущ.

x_3: рассматривая 1 и 2 строки, 3 и 4 и т.д. мы видим, что x_3 меняется с 0 на 1, а F не меняется $\Rightarrow$ x_3 – фикт.

б) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3 =$

$= (\overline{x_1} \vee x_1 \vee x_2) \to x_3 = 1 \to x_3 = x_3 \Rightarrow$

x_1 – фикт
x_2

№7

$F(x_1, \ldots x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \wedge (\overline{x_1} \vee f(1, x_2, \ldots, x_n))$

1) $x_1 = 0$: $f(0, x_2, \ldots, x_n) = (0 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n)) =$

$= f(0, x_2, \ldots, x_n)$ ✓

2) $x_1 = 1$: $F(1, x_2, \ldots, x_n) = (1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \wedge (0 \vee F(1, x_2, \ldots, x_n)) =$

$= f(1, x_2, \ldots, x_n)$ ✓ ∎

№8

$x^1 = x$, $x^0 = \overline{x}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ – набор 0 и 1

$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots x_n^{\alpha_n}$

если $\alpha_i = 0$, то $\alpha_i^{\alpha_i} = 0^0 = \overline{0} = 1$

если $\alpha_i = 1$, то $\alpha_i^{\alpha_i} = 1^1 = 1$

т.е. если $x_1, \dots x_n = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, то $\boxed{f_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \alpha_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\alpha_n} = 1}$

если некоторый $x_i \neq \alpha_i$, т.е.

либо

$\alpha_i = 0, x_i = 1$, тогда $x_i^{\alpha_i} = 1^0 = 0$

либо

$\alpha_i = 1, x_i = 0$, тогда $x_i^{\alpha_i} = 0^1 = 0$

, то во всей конъюнкции будет ноль, который всё занулит,

т.е. будет $f_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \underbrace{x_i^{\alpha_i}}_{0} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} = 0$

значит $f_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \dots x_n) = \alpha$ ▨

№9

$\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n})$

$(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}) = x_1 \wedge \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \wedge x_3 \vee \dots$

$x_i \oplus x_j = x_i \wedge \overline{x_j} \vee \overline{x_i} \wedge x_j$ по дистрибутивному закону, если мы продолжим по всем $i, j \leq n$, и выберем $x_i \wedge \overline{x_j} \vee \overline{x_j} \wedge x_i = x_i \oplus x_j$, мы полностью раскроем скобки и получим $\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j)$ ▨

№10

$\exists f(x) = \overline{x}$, попробуем представить $f(x)$ в виде функции с $\wedge, \vee$:

однако, $x \wedge x = x \vee x = x$, т.е. $\forall$ операция над x в данном контексте никак ничего не изменяет и остаётся x

$\Rightarrow$ нельзя в таком виде представить $f(x) = \overline{x}$

$\Rightarrow$ не $\forall$ функцию можно представить только с помощью $\wedge, \vee$. ▨