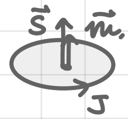
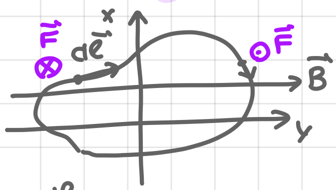
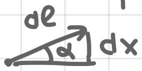
11) Магнитный момент тока. Точечный магнитный диполь. Сила и момент сил, действующие на виток с током в магнитном поле. Эквивалентность витка с током и магнитного диполя.

Элем. источник магнитного поля — замкнутый виток с током. Ему приписывают магнитный момент.



$$\vec{m} = \frac{J}{c}\vec{S}$$





$$d\vec F = \frac{J}{c}\, d\vec l \times \vec B$$

$$dF = \frac{J}{c} B\, dl \sin\alpha = \frac{J}{c} B\, dx$$

$$dM = \frac{J}{c} B\, dx\, \Delta y(x)$$ — расстояние м/у элементами

$$M = \frac{JS}{c} B \Rightarrow \vec M = \vec m \times \vec B$$

если $B_z \neq 0$, эта компонента не создаст момента, который будет менять ориентацию витка в пространстве

таким образом, магнитный момент $\vec m$ ориентируется по полю $\vec B$

найдём потенциальную W витка с током:

$$M = mB\sin\theta \qquad (\theta = (\widehat{\vec m, \vec B}))$$

$$A = \int_{\theta}^{\theta_0} M(\theta_1)\, d\theta_1 = -mB\int_{\theta}^{\theta_0}\sin\theta_1\, d\theta_1 = mB(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

т.к. θ уменьш.

$$A = U(\theta) - U(\theta_0) \Rightarrow U = -mB\cos\theta = -\vec m\vec B$$

тогда во внешнем неоднородном поле $\vec F = -\mathrm{grad}\, U = \mathrm{grad}(\vec m\vec B)$

если в среде отсутствуют токи проводимости, то $\mathrm{rot}\,\vec B = 0$

$$0 = \vec m\times \mathrm{rot}\,\vec B = \vec m\times(\nabla\times\vec B) = \nabla(\vec m\vec B) - (\vec m\nabla)\vec B \Rightarrow \nabla(\vec m\vec B) = (\vec m\nabla)\vec B$$

$$\Downarrow$$

$$\vec F = (\vec m\nabla)\vec B$$

система стационарно движущихся зарядов: $\vec B(\vec r) = \mathrm{rot}\,\vec A$ $\qquad \vec A = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i\vec v_i}{|\vec r - \vec r_i|}$ (билет 10)

] заряды движутся в ограниченной области пространства размером порядка L

при этом $r_i \ll r$

$$|\vec r - \vec r_i| = \sqrt{(\vec r-\vec r_i)^2} \approx \sqrt{r^2 - 2\vec r\vec r_i} \approx r\left(1 - \frac{\vec r\vec r_i}{r^2}\right) \qquad \left[\frac{1}{1-\frac{\vec r\vec r_i}{r^2}} \approx 1 + \frac{\vec r\vec r_i}{r^2}\right]$$

тогда

$$\vec A \approx \frac{1}{cr^3}\sum_i q_i\vec v_i(r^2 + \vec r\vec r_i) = \frac{1}{cr^3}\sum_i q_i\vec v_i(\vec r\vec r_i) + \frac{1}{cr^3}r^2\sum_i q_i\vec v_i$$

$$\left[\sum_i q_i\vec v_i = \frac{d}{dt}\sum_i q_i\vec r_i = \frac{d\vec p}{dt} = 0\right]$$

в стац. случае $\vec p$ не может зависеть от времени (опр. средним по t распределением зарядов)

$$\left[\vec v_i(\vec r\vec r_i) = \frac12[\vec v_i(\vec r\vec r_i) - \vec r_i(\vec r\vec v_i)] + \frac12[\vec v_i(\vec r\vec r_i) + \vec r_i(\vec r\vec v_i)] = \frac12\vec r\times(\vec v_i\times\vec r_i) + \frac12\underbrace{\frac{d}{dt}(\vec r_i(\vec r\vec r_i))}_{\text{не может зависеть от времени}}\right]$$

$$\vec A = \frac{1}{2cr^3}\sum_i q_i\,\vec r\times(\vec v_i\times\vec r_i) = \frac{\vec m\times\vec r}{r^3}$$

$$\left[\vec m = \frac{1}{2c}\sum_i q_i\vec r_i\times\vec v_i\right.$$ — магнитный момент системы зарядов]

$$\triangleright\ \vec m = \frac{1}{2c}\int_V \vec r\times\vec v(\vec r)\rho(\vec r)\,dV = \frac{1}{2c}\int_V\vec r\times\vec j(\vec r)\,dV$$

для витка с током:

$$\vec m = \frac{J}{2c}\oint_\Gamma \vec r\times d\vec l = \frac{J}{2c}\oint_\Gamma\vec r\times d\vec r = \frac{J}{c}\vec S$$

□

тогда $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$: $$\vec B = \frac{3(\vec m,\vec r)\vec r - \vec m r^2}{r^5}$$ — совпадает по виду с формулой для электрического поля точечного диполя

⇒ точечный магнитный момент можно рассматривать формально как точечный диполь, составленный из эффективных „магнитных зарядов" N и S (q_m)

$$\vec m = q_m\vec l$$