Лекция 10а. (14 апреля 2020) ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО
Определение и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических величин. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

Определение 1. Вещественное линейное пространство *E* называется *евклидовым пространством,* если каждой упорядоченной паре элементов *x* и *y* из *E* поставлено в соответствие вещественное число (x, y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1°. $\forall x, y \in E, (x, y) = (y, x)$;

2°. $\forall x, y \in E, \lambda \in R,\ (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3°. $\forall x_1, x_2, y \in E, (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4°. $\forall x \in E, x \neq o,\ (x, x) > 0$.

Кроме того, геометры традиционно требуют, чтобы E было конечномерным. Но для приложений в теории функций, где функциональные пространства бесконечномерные, большинство нижеследующих результатов остается в силе.

Замечание: Аксиомы 1°- 4°. в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейная* (что следует из 2° и 3°) и *симметричная* (п. 1°) функция, которая, кроме того, порождает *положительно определенную квадратичную* (п. 4°) функцию. Любая билинейная функция, обладающая данными свойствами, может быть принята за скалярное произведение.

Пример. Пространство *n*-мерных столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ со скалярным произведением,

определяемым по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

Определение 2. Пусть *E* – евклидово пространство. Назовем

1°. *Длиной* (или *нормой*) вектора *x* число $|x| = \sqrt{(x, x)}$;

2°. *Расстоянием* между элементами *x* и *y* число $\rho(x; y) = |x - y|$.

Теорема 1. (Неравенство Коши-Буняковского) . Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|(x, y)| \le |x||y|$. Неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = |tx - y|^2\ :\ \forall t \in R, f(t) \ge 0$. Но

$f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) = t^2|x|^2 - 2t(x, y) + |y|^2$.

Этот квадратный трехчлен неотрицателен для любого *t* тогда и только тогда, когда его дискриминант меньше или равен 0, то есть

$t^2|x|^2 - 2t(x, y) + |y|^2\ \ \frac{D}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \le 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \le |x||y|$.

Пусть теперь $|(x, y)| = |x||y|$. Если x =0, то векторы линейно зависимы. Если $x \neq o$ то дискриминант квадратного трехчлена $f(t)$ равен 0, значит, он имеет единственный корень, т.е. $\exists t_0 :\ f(t_0) = |t_0 x - y|^2 = 0 \Rightarrow y = t_0 x$, в силу аксиомы 4°. Теорема доказана.

Следствие. Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство треугольника $|x + y| \le |x| + |y|$. Равенство выполняется только если x, y сонаправлены.

Доказательство. $|x+y|^2=(x+y,x+y)=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\le|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$, по неравенству Коши-Буняковского. Следовательно, $|x+y|\le|x|+|y|$. Равенство означает, что
$(x,y)=|x||y|, x=o$ *или* $y=\lambda x,(x,\lambda x)=\lambda(x,x)=|\lambda||x|^2 \Rightarrow\lambda>0$.
Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести понятие угла между ненулевыми векторами.
.

Определение 3. Скажем, что угол между *x* и *y* равен α $(\alpha\in[0;\pi])$, где $\cos\alpha=\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Определение корректно, так как $\left|\dfrac{(x,y)}{|x||y|}\right|\le 1$. Итак, $\alpha=\arccos\dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Векторы *x* и *y* называются *ортогональными*, $(x\perp y)$ если $(x,y)=0$. (Допускается, что хотя бы один из векторов равен 0).

Определение 4. Совокупность векторов $a_1,\dots,a_m$ евклидова пространства E называется ортогональной системой векторов, если $(a_i,a_j)=0, \forall i,j\,(i\ne j)$.
Утверждение 1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.
Доказательство. Допустим, что $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i=o$. Умножим это равенство скалярно на

$a_j\,(1\le j\le m):\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(a_i,a_j)=\lambda_j(a_j,a_j)=0\Rightarrow\lambda_j=0$, ч.т.д.
Отсюда следует, что если $m=n=\dim E$, *то* $a_1,\dots,a_m$ - базис в E.

Определение 5. В n-мерном евклидовом пространстве *E* базис $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ называется *ортогональным*, если $(e_i,e_j)=0,\ \forall i\ne j$, и *ортонормированным*, если $(e_i,e_j)=\delta_{ij},\ \forall i,j\ (1\le i,j\le n)$.

Разложение любого вектора по ортонормированному базису имеет вид $x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$.

Теорема 2. Во евклидовом пространстве *E* существует ортонормированный базис.
Доказательство. Пусть $\dim E=n$ и $a_1,\dots,a_n$ некоторый базис в E. Построим из них ортогональный базис $b_1,\dots,b_n$.

Последовательное построение этих векторов называется алгоритмом, или *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.* Этот процесс подчиняется, помимо ортогональности, требованию, чтобы $\forall k=1,...,n,\ \langle a_1,\dots,a_k\rangle=\langle b_1,\dots,b_k\rangle$

1) Выберем $b_1=a_1$. Вектор b_2 будем искать в виде $b_2=a_2-\alpha b_1$, где α - некоторый коэффициент. По требованию ортогональности,
$(b_1,b_2)=0,(b_1,a_2-\alpha b_1)=(b_1,a_2)-\alpha(b_1,b_1)=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)},b_2=a_2-\dfrac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)}b_1$. (Из вектора a_2 вычитается его ортогональная проекция на b_1!).
Заметим, что $b_2\ne o$, т.к. в противном случае оказалось бы, что $a_2-\alpha a_1=0$, т.е. базисные векторы линейно зависимы.
2) Шаг алгоритма. Пусть k > 1 и допустим, что попарно ортогональные векторы $b_1,\dots,b_{k-1}$ уже построены. Будем искать b_k в виде
$$b_k=a_k-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(k)}b_i\perp b_1,...,b_{k-1}\Rightarrow(b_k,b_j)=(a_k,b_j)-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^{(k)}(b_i,b_j)=(a_k,b_j)-\alpha_j^{(k)}(b_j,b_j)=0,$$

$\alpha_j^{(k)} = \dfrac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)}$. Итак, $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k, b_j)}{(b_j, b_j)} b_i$. Как и выше, $b_k \neq o$, так как противное означало бы, что равна нулю нетривиальная линейная комбинация $a_1, \ldots, a_k$ (поскольку $b_1, \ldots, b_{k-1}$ - линейные комбинации векторов $a_1, \ldots, a_{k-1}$), вопреки условию.

Процесс ортогонализации продолжается до k=n.

3) Чтобы получить искомый ортонормированный базис, надо нормировать векторы $b_1, \ldots, b_n$, т.е. взять $c_k = \dfrac{b_k}{|b_k|}$, $k = 1, ..., n$. Ч.т.д.

Координатная запись скалярного произведения.

Пусть в E дан базис $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, в нем $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, тогда (как и для любой билинейной функции)

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i g_{ij} y_j = X^T G Y \quad \text{, где } G = G_e = (g_{ij}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ а } X^T = (x_1 \ldots x_n).$$

Определение 6. Матрица $G_e = \|(e_i, e_j)\|$ называется матрицей Грама базиса e.

Особенно просто записывается скалярное произведение в ортонормированном базисе: тогда $G_e = E, (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Выясним, какой может быть матрица перехода между ортонормированными базисами.

Утверждение 2. Пусть S – матрица перехода от базиса $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$.

1) Если оба базиса ортонормированные, то матрица S ортогональная, т.е. $S^{-1} = S^T$.
2) Если $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормированный базис и матрица S ортогональная, то $e' = eS$ - ортонормированный базис.

Доказательство. 1) Вычислим произведение

$S^T S := C, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s^T{}_{ik} s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = (e_i', e_j')$, по определению матрицы перехода и поскольку базис $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормированный. Но так как базис $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ тоже ортонормированный, то $(e_i', e_j') = \delta_{ij} \Rightarrow S^T S = E \Rightarrow S^T = S^{-1}$.

2) Так как матрица S ортогональная, то $S^T S = E$. Но, как было замечено при доказательстве п. 1), в ортонормированном базисе e произведение i-й и j-й строк матрицы S равно скалярному произведению (e_i', e_j') $\Rightarrow (e_i', e_j') = \delta_{ij}$, т.е. базис $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ортонормированный. Ч.т.д.

Замечание. Из доказанного следует, что матрица, обратная к ортогональной, также ортогональна, т.к. она является матрицей обратного перехода между ортонормированными базисами.