Вариант 31

Эта задача для всех потоков, кроме ФПМИ (ФИВТ), ВШПИ.

1. а) ③ $\dfrac{x^2+2}{(x+1)(x^2-2x+3)} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{x+1}{2(x^2-2x+3)}$;

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-2x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2-2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Эта задача для всех потоков, кроме ЛФИ, ФПМИ (ФИВТ), ВШПИ.

1. б) ② Замена $t=\sqrt{e^x-1}$ и интегрирование по частям:

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int 2\ln(t^2+1)\,dt = 2t\ln(t^2+1) - 4\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt = 2t\ln(t^2+1) - 4t + 4\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C.$$

Эта задача для потоков ФПМИ (ФИВТ), ВШПИ.

1. ② Нет. Пусть $E=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\cap\mathbb{Q}\right)$, тогда $F\supset\bar{E}=[0,1]$ и, значит, $\mu(F)\geqslant 1$.

Эта задача для всех потоков, кроме ФПМИ (ФУПМ).

2. ④ $df(M)=2\,dx$; $\quad d^2f(M)=4\,dx^2+\pi\,dy^2$.

$$f(x,y) = 1 + 2(x-\tfrac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\left(4(x-\tfrac{\pi}{4})^2 + \pi y^2\right) + o\left((x-\tfrac{\pi}{4})^2 + y^2\right).$$

Эта задача для потока ФПМИ (ФУПМ).

2. ④ Функция Лагранжа: $L(x,\,y)=3x-2y-\lambda(5x^2-5y^2-1)$.

При $\lambda=-\frac{1}{2}$ в точке $(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$ имеется локальный условный максимум, так как на касательном пространстве $-6dx+4dy=0$ квадратичная форма $d^2L=5dx^2-5dy^2$ определена отрицательно.

При $\lambda=\frac{1}{2}$ в точке $(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$ имеется локальный условный минимум, так как на касательном пространстве $6dx-4dy=0$ квадратичная форма $d^2L=-5dx^2+5dy^2$ определена положительно.

---

3. ② $L=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{3}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt=3.$

---

4. ⑤ $f'_x(0,\,0)=0$, $\quad f'_y(0,\,0)=\left(y^2\sin\frac{1}{3}\right)'_{y=0}=0$; $\quad 3x^2-4xy+3y^2\geqslant x^2+y^2$;

$$\left|\frac{f(x,\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{\left|y^3(x+y)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}(3x^2-4xy+3y^2)} \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; f(x,y)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\ \begin{pmatrix} x\to 0\\ y\to 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: f дифференцируема в точке $(0,\,0)$.

---

5. ④ $f(x)>0$ при $x>0$; $I=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^{\infty}f(x)\,dx=I_1+I_2$;

I_1: при $x\to 0$ выполняется $f(x)\sim\dfrac{C_1}{x^{2-3\alpha}\ln^2 x}$; поэтому I_1 сходится при $\alpha\geqslant\frac{1}{3}$.

I_2: при $x\to+\infty$ выполняется $f(x)\sim\dfrac{C_2}{x^{3-2\alpha}}$; поэтому I_2 сходится при $\alpha<1$.

Ответ: интеграл сходится при $\alpha\in\left[\frac{1}{3};\ 1\right)$.

---

6. ③ Если a_n — общий член ряда, то $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{7n(2n+2)(2n+1)}\sim\dfrac{27}{28}<1.$

Ответ: ряд сходится по признаку Даламбера.

---

7. а) ④ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x,\ x \in E_1 \cup E_2$;

$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n}{x}\left|\sin\dfrac{x^2}{n} - \dfrac{x^2}{n}\right|$;

<u>На E_1</u>: по формуле Тейлора $\sin t = t - \dfrac{t^2\sin\xi}{2}$ при $0 < \xi < t$, откуда $|\sin t - t| \leqslant \dfrac{t^2}{2}$ при $t > 0$. Следовательно, $g_n(x) \leqslant \dfrac{x^3}{2n} < \dfrac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$. На E_1 есть равномерная сходимость.

<u>На E_2</u>: пусть $x_n = \sqrt{n} \in E_2$ при $n > 1$. Тогда $g_n(x_n) = \sqrt{n}|\sin 1 - 1| \geqslant |\sin 1 - 1| = \varepsilon > 0$. На E_2 нет равномерной сходимости.

---

7. б) ④ Пусть $f_n(x)$ — общий член ряда.

$f_n(x_0) \sim \dfrac{1}{(nx_0)^{\frac{3}{2}}}$ при $n \to \infty$ и $x_0 > 0$ $\Rightarrow$ ряд сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$ (признак сравнения в предельной форме).

<u>На E_1</u>: пусть $x_n = \dfrac{1}{n} \in E_1$ при $n > 1$. Тогда $|f_n(x_n)| = n\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{n}{n^3+1}} \to 1$ при $n \to \infty$, т.е. $\exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1\ |f_n(x_n)| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0 > 0$. Следовательно, $\forall N\ \exists n = \max\{N_1,\, N\}\ \exists x = x_n\colon\ |f_n(x)| > \varepsilon_0$. На E_1 ряд не сходится равномерно (отрицание необходимого условия равномерной сходимости ряда).

<u>На E_2</u>: $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E_2$ (оценка $|\operatorname{arctg} t| \leqslant |t|$). На E_2 ряд сходится равномерно (признак Вейерштрасса).

---

8. ③ $f(x) = x^2 \cdot g(x), \quad g'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} C^n_{-\frac{1}{2}}}{4^{n+1}} x^{2n}$;

$f(x) = \dfrac{\pi}{4}x^2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} C^n_{-\frac{1}{2}}}{4^{n+1}(2n+1)} x^{2n+3}, \quad R = 2.$

Эта задача для потоков ЛФИ, ФПМИ (ФИВТ), ВШПИ.

9. ② Заметим, что $g_n(x) \to 2$ для п.в. x и $|g_n| \leqslant 2$ на $[0,1]$. Тогда по теореме Лебега $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 2\, dx = 2.$
