

25) Свободные колебания в линейных системах. Консервативный RLC-контур. Коэффициент затухания, логарифмический декремент, и добротность. Энергетический цикл добротности



$$q(0) = q_0$$

$$I(0) = 0$$

замкнуты ключи:  $-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \left[ \frac{R}{L} = 2\gamma \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \right]$$

коэффициент затухания  $\gamma = \frac{R}{2L}$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$[q = Ae^{\lambda t} \quad \dot{q} = A\lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{q} = A\lambda^2 e^{\lambda t}]$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

1.  $\omega_0^2 > \gamma^2$  слабое затухание

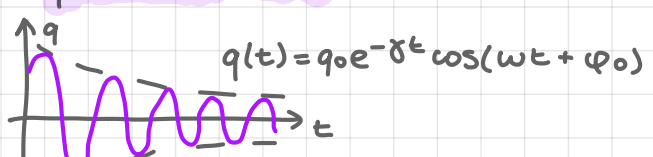
$$q(t) = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

2.  $\omega_0^2 < \gamma^2$  сильное затухание апериодический режим

$$q(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}]$$

3.  $\omega_0^2 = \gamma^2$  критический режим

$$q(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$



$$\begin{aligned} q_n &= q_0 e^{-\gamma t_n} \\ q_{n+1} &= q_0 e^{-\gamma t_{n+1}} \\ t_{n+1} &= t_n + T \end{aligned} \Rightarrow \frac{q_{n+1}}{q_n} = e^{-\gamma T} \quad [\gamma T = d] \quad \ln \frac{q_{n+1}}{q_n} = -d \quad \text{логарифмический декремент затухания}$$

$\gamma T = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\gamma}$  - время, за которое амплитуда уменьшается в е раз

N-кратное колебаний, за которое амплитуда уменьшается в е раз

$$T = NT \quad d = \gamma T = \frac{T}{N} = \frac{1}{N}$$

добротность

$$Q = \frac{n}{d} = nN = \frac{n}{\delta T} = \frac{\omega}{2\gamma}$$

для LCR-контур со слабым затуханием:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = -R\dot{q} \quad | \cdot \dot{q}$$

$$L\dot{q} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -R\dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -R\dot{q}^2$$

$$\frac{dW}{dt} = -R\dot{q}^2$$

энергетический цикл добротности

за T амплитуда тока уменьшается в  $e^{\gamma T}$  раз. тогда W уменьшается в  $e^{2\gamma T}$  раз.

$$W(t+T) = e^{-2\gamma T} W(t)$$

$$\Delta W = W(t) - W(t+T) = (1 - e^{-2\gamma T}) W(t)$$

если затухание слабое:  $2\gamma T \ll 1$ , получаем

$$\Delta W = 2\gamma T W(t) \quad \text{— потери энергии за период}$$

$$\text{запасенная в контуре энергия} \rightarrow \frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2n} \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2n} Q$$

$$Q = 2n \frac{W}{\Delta W}$$