Теорема о полярном разложении

В ряде приложений оказывается полезной

Теорема 10.8.2. (О полярном разложении)

Любой линейный оператор $\hat{A}$ в E^n с $\det\|\hat{A}\| \neq 0$ может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ ортогональный, а оператор $\hat{R}$ - самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.

Доказательство:

1°. Покажем вначале, что самосопряженный оператор $\hat{A}^+\hat{A}$ (см. пример 10.7.1.) имеет только положительные собственные значения. Действительно, пусть $\hat{A}^+\hat{A}\,f = \lambda\,f$, тогда, с одной стороны, $(\hat{A}^+\hat{A}f, f) = (\hat{A}f, \hat{A}f) > 0$ при $f \neq o$, а с другой, $(\hat{A}^+\hat{A}\,f, f) = (\lambda\,f, f) = \lambda(f, f)$, то есть $(\hat{A}\,f, \hat{A}\,f) = \lambda(f, f)$. Но тогда все $\lambda > 0$ в силу определения скалярного произведения, поскольку из допущения $\hat{A}f = o$ при $f \neq o$ следует, что $\hat{A}f = 0f \quad \Leftrightarrow \quad \det\|\hat{A}\| = 0$.

2°. Пусть $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{A}^+\hat{A}$. Рассмотрим множество элементов $\hat{A}e_i$; $i = [1, n]$. Заметим, что

$(\hat{A}e_i, \hat{A}e_j) = (\hat{A}^+\hat{A}e_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = \lambda_i\delta_{ij}$; $i, j = [1, n]$. Но это означает, что

$\left\{ e_i' = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\hat{A}e_i \; ; \; i = [1, n] \right\}$ - также базис и притом ортонормированный.

3°. Примем за искомый ортогональный оператор $\hat{Q}$ - оператор, переводящий ортонормированный базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ в ортонормированный базис $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$, и убедимся, что в качестве $\hat{R}$ можно взять оператор $\hat{Q}^{-1}\hat{A}$.

Действительно, во-первых, имеет место равенство $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$. Во-вторых, из соотношений $\hat{R}e_i = \hat{Q}^{-1}\hat{A}e_i = \hat{Q}^{-1}\sqrt{\lambda_i}\,e_i' = \sqrt{\lambda_i}\,e_i$; $i = [1, n]$ следует, что базисные элементы e_i, $i = [1, n]$ есть собственные векторы оператора $\hat{R}$, отвечающие положительным собственным значениям $\sqrt{\lambda_i}$, а значит, матрица $\|\hat{R}\|_e$ в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ диагональная и потому симметрическая. Тогда, в силу леммы 10.7.1., оператор $\hat{R}$ самосопряженный.

4°. Покажем, наконец, единственность разложения. Во введенных обозначениях справедливо равенство $\hat{A}^+\hat{A}=\hat{R}^2$, поскольку из $\hat{A}=\hat{Q}\hat{R}$ и $\hat{A}^+=\hat{R}^+\hat{Q}^+$ следует, что

$$\hat{A}^+\hat{A}=\hat{R}^+\hat{Q}^+\hat{Q}\hat{R}=\hat{R}^+\hat{Q}^{-1}\hat{Q}\hat{R}=\hat{R}^+\hat{R},$$

то, в силу самосопряженности $\hat{R}$, $\hat{A}^+\hat{A}=\hat{R}^2$.

Предположим, что существуют два различных самосопряженных оператора $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ с положительными собственными значениями такие, что $\hat{A}^+\hat{A}=\hat{R}_1^2$; $\hat{A}^+\hat{A}=\hat{R}_2^2$ и $\hat{R}_1^2-\hat{R}_2^2=\hat{O}$.

Заметим, что $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ по построению (см. 2°.) имеют общую систему собственных векторов, а потому они коммутируют. Но тогда, согласно §8.2., справедливы равенства

$$\hat{R}_1^2-\hat{R}_2^2=\hat{R}_1^2-\hat{R}_1\hat{R}_2+\hat{R}_2\hat{R}_1-\hat{R}_2^2=(\hat{R}_1-\hat{R}_2)(\hat{R}_1+\hat{R}_2)=\hat{O}.$$

Из невырожденности и линейности $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ в силу теоремы 8.6.8. оператор $\hat{R}_1+\hat{R}_2$ также невырожденный и поэтому из равенства $(\hat{R}_1-\hat{R}_2)(\hat{R}_1+\hat{R}_2)=\hat{O}$ следует $\hat{R}_1-\hat{R}_2=\hat{O}$. Таким образом, $\hat{R}$ - самосопряженный оператор, определяемый по $\hat{A}$ однозначно. Но $\hat{Q}=\hat{A}\hat{R}^{-1}$ и, значит, также определяется однозначно по $\hat{A}$.

Теорема доказана.

(Теорема, использованная в доказательстве единственности)

Теорема 10.7.2.

Два самосопряженных оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов в E^n тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть $\hat{A}a=\lambda a$ и $\hat{B}a=\mu a$, тогда $\hat{B}\hat{A}a=\lambda\hat{B}a=\lambda\mu a$; $\hat{A}\hat{B}a=\mu\hat{A}a=\lambda\mu a$ и, вычитая почленно, получим, что $(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})a=o$. Поскольку a произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента в E^n, так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=\hat{O}$.

Докажем достаточность.

Пусть самосопряженные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют и пусть, кроме того, $\hat{A}a = \lambda a$. Рассмотрим здесь лишь случай, когда все собственные значения оператора $\hat{A}$ различны.

Покажем, что элемент евклидова пространства $b = \hat{B}a$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$. Действительно, в силу $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, имеем $\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b$.

Поскольку все собственные значения $\hat{A}$ кратности единица, то λ есть его собственное значение, отвечающее a и b одновременно. Поэтому $b = \kappa a$ и, поскольку $b = \hat{B}a$, также $\hat{B}a = \kappa a$. Значит, a - собственный вектор оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Замечания: 1°. Теорема о полярном разложении является обобщением теоремы 5.5.2. о возможности представления аффинного преобразования плоскости в виде произведения двух операторов, первый из которых ортогональный, а второй - сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям, матрица которого диагональная.

2°. В случае вырожденного оператора $\hat{A}$ разложение, аналогичное указанному в теореме 10.8.2., с неотрицательными собственными значениями самосопряженного оператора $\hat{R}$ существует, но не единственно.

Задача 10.8.1.

В некотором ортонормированном базисе в E^2 линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\|\hat{A}\| = \left\|\begin{matrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}\right\|$. Найти его полярное разложение.

Решение:

1°. Выполним искомое разложение по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.8.2. Матрица оператора $\hat{A}^+\hat{A}$ в исходном ортонормированном базисе равна

$$\|\hat{A}^+\hat{A}\| = \|\hat{A}^+\|\|\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\| = \left\|\begin{matrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{matrix}\right\|.$$

Собственные значения и собственные векторы этого оператора равны соответственно

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 4; \quad \|f_1\| = \left\|\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{matrix}\right\|; \quad \|f_2\| = \left\|\begin{matrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{matrix}\right\|,$$

поэтому (сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы 10.8.2.) получим для элементов, образующих ортонормированные базисы $\{e_1, e_2\}$

$$\| e_1 \| = \frac{\| f_1 \|}{| f_1 |} = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} \quad ; \qquad \| e_2 \| = \frac{\| f_2 \|}{| f_2 |} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix}$$

и $\{e_1', e_2'\}$

$$\| e_1' \| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \hat{A} e_1 \right\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix} \quad ; \quad \| e_2' \| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \hat{A} e_2 \right\| = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}.$$

2°. Обозначив через $\| G \| = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{matrix} \right\|$ и $\| F \| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right\|$ соответственно матрицы перехода от исходного базиса к базисам $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1', e_2'\}$, и рассуждая так же, как при решении задачи 7.5.2., получим для матрицы ортогонального оператора $\hat{Q}$ выражение $\| \hat{Q} \| = \| G \|^{-1} \| F \|$.

Учитывая, что матрица $\| G \|$ ортогональная (как матрица перехода, связывающая два ортонормированных базиса), находим матрицу

$$\| \hat{Q} \| = \| G \|^{-1} \| F \| = \| G \|^{\mathrm{T}} \| F \| = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{matrix} \right\|,$$

которая в исходном ортонормированном базисе ортогональная.

3°. Поскольку $\hat{R} = \hat{Q}^{-1} \hat{A}$, то

$$\| \hat{R} \| = \| \hat{Q}^{-1} \| \| \hat{A} \| = \| \hat{Q} \|^{-1} \| \hat{A} \| = \| \hat{Q} \|^{\mathrm{T}} \| \hat{A} \| = \left\| \begin{matrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{matrix} \right\| ,$$

и, следовательно, искомое полярное разложение имеет вид

$$\| \hat{A} \| = \| \hat{Q} \| \| \hat{R} \| = \left\| \begin{matrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{matrix} \right\|.$$