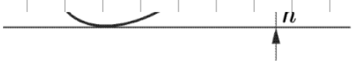


К задаче 3.35

да, если нет проскальзывания.

3.36. В каждый момент времени t известны скорость $\mathbf{v}(t)$ движущейся в плоскости точки и радиус кривизны ее траектории $\rho(t)$. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

ДЗ / 3.4, 3.20, 3.24, 3.36, 3.42

$\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}] = \bar{\omega}(\bar{\omega},\bar{\rho}) - \omega^2\bar{\rho}$

$\bar{w}_A = \bar{w}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}]$

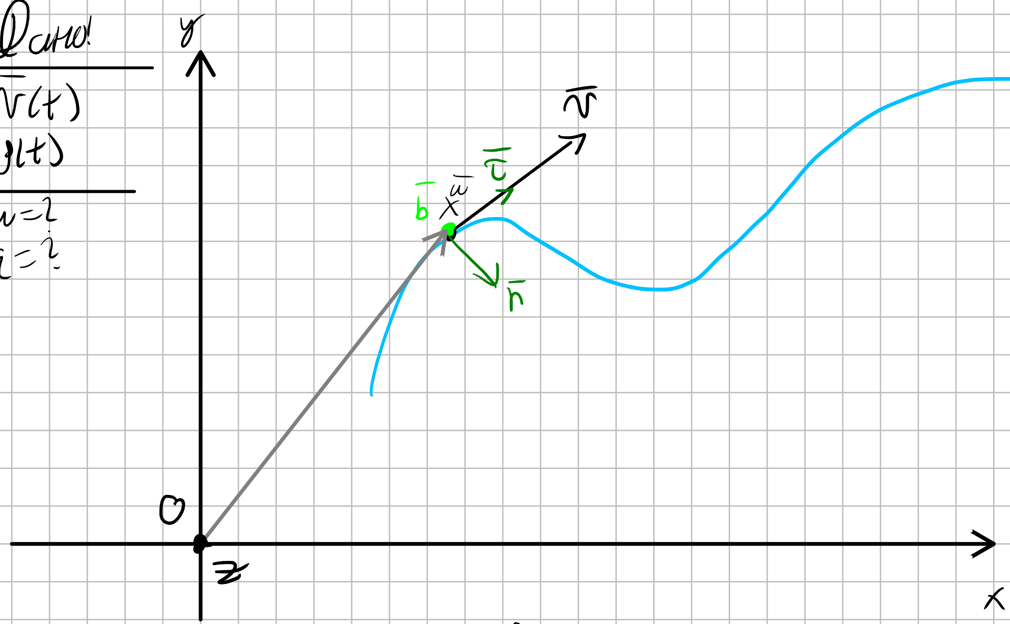
Дано:

$\bar{v}(t)$

$\rho(t)$

$\omega = ?$

$\varepsilon = ?$



$\bar{\tau} = \dfrac{\bar{v}}{v} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$ $\qquad \dot{\bar{\tau}} = \bar{\omega}\times\bar{\tau}$

$\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \dfrac{\bar{n}}{\rho} = \dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$

перпендикулярны

$\dot{\bar{\tau}} = \dfrac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\bar{n}}{\rho}\cdot v = \bar{\omega}\times\bar{\tau}$

$\dot{\bar{n}} = \bar{\omega}\times\bar{n}$

$\omega = \dfrac{v}{\rho}$ $\qquad \underline{\bar{\omega} = \bar{b}\,\dfrac{v}{\rho}}$

$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \underline{\underline{\dot{\bar{b}}\,\dfrac{v}{\rho}}}_{=0} + \bar{b}\,\dfrac{\dot{v}\rho - v\dot{\rho}}{\rho^2}$ *

$\bar{b} = \bar{\tau}\times\bar{n}$

$\dot{\bar{b}} = \dot{\bar{\tau}}\times\bar{n} + \bar{\tau}\times\dot{\bar{n}} = \underbrace{v\dfrac{\bar{n}}{\rho}\times\bar{n}}_{=0} + \bar{\tau}\times(\bar{\omega}\times\bar{n}) =$

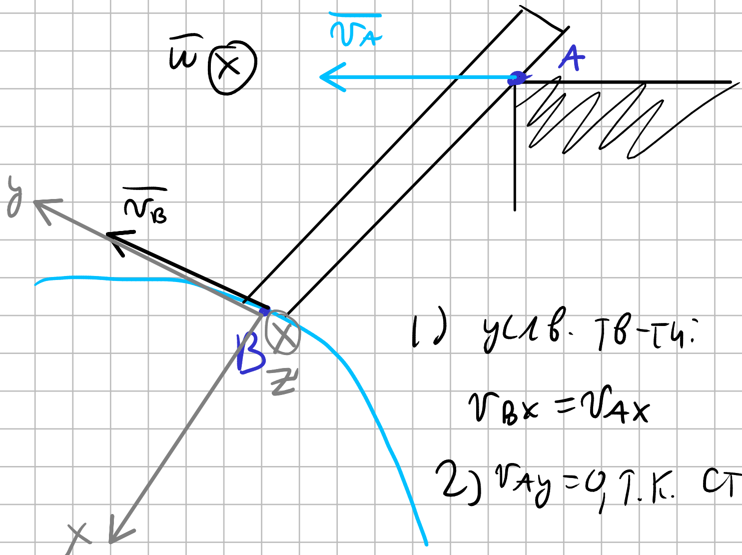
$= \bar{\tau}\times(\bar{\omega}\times\bar{n}) = \bar{\omega}(\bar{\tau},\bar{n}) - \bar{n}(\bar{\tau},\bar{\omega}) = \underline{\underline{0}}$

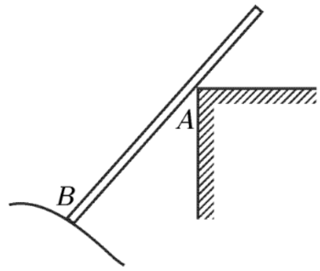
* $\bar{\varepsilon} = \bar{b}\cdot\left[\dfrac{\dot{v}}{\rho} - \dfrac{v\dot{\rho}}{\rho^2}\right]$

Ответ: $\bar{\omega} = \bar{b}\,\dfrac{v}{\rho}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{b}\cdot\left[\dfrac{\dot{v}}{\rho} - \dfrac{v\dot{\rho}}{\rho^2}\right]$

3.42. Стержень (см. рисунок) движется в плоскости, опираясь одной из своих точек на вершину угла A. Конец B стержня скользит по некоторой кривой. Показать, что скорость точки касания стержня направлена вдоль стержня.

$\overline{v_A}$





К задаче 3.42

1) усл. тв-ти:

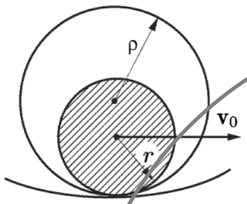
$v_{Bx} = v_{Ax}$

2) $v_{Ay} = 0$, т.к. стержень не отрывается

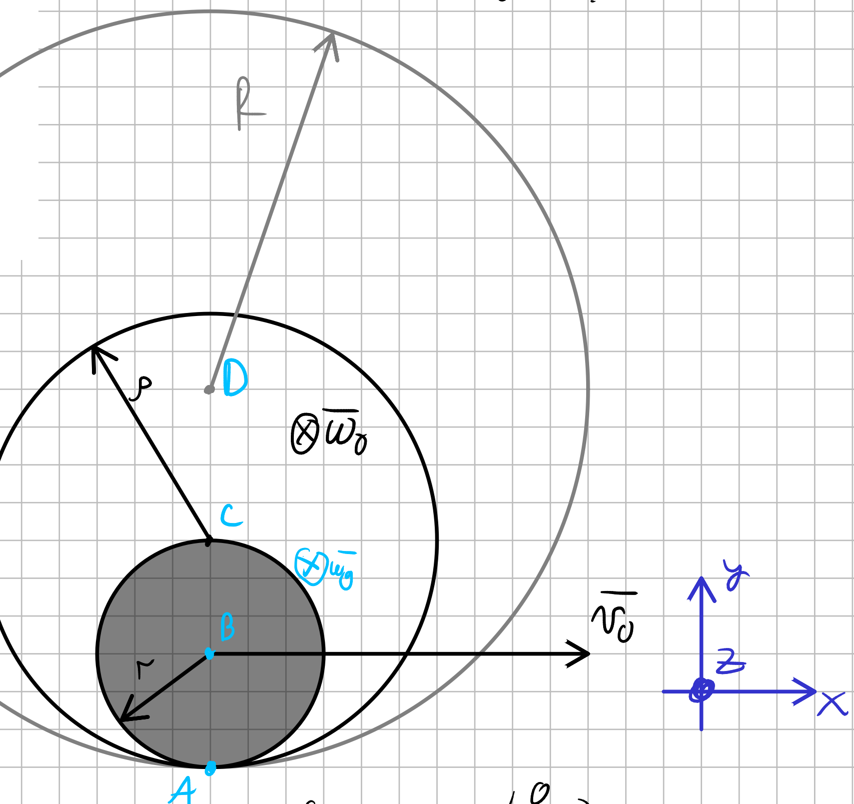
$\Rightarrow \overline{v_A} = v_{Ax} \cdot \overline{i_1} \parallel \overline{AB}$

3.4. Диск радиуса r (см. рисунок) катится внутри цилиндрической полости радиуса R, прижимая тонкий обруч радиуса ρ ($r < \rho < R$), как показано на рисунке. Проскальзывание при движении отсутствует. Найти угловую скорость обруча, если линейная скорость центра диска равна v_0.

$\overline{\omega_0} = ?$ — угл. ск. обруча



К задаче 3.4



$\overline{v_A} = 0$

$\overline{v_B} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{v_1} = \overline{0}$ $\overline{\omega_g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_g \end{pmatrix}$ $\overline{\omega_K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_K \end{pmatrix}$

1) $\overline{v_A} = \overline{v_B} + \overline{\omega_g} \times \overline{BA} = 0 \quad \overline{\omega_g} \times \overline{BA} = -\overline{v_B} \Rightarrow \omega_g = \frac{v_0}{r}$

2) аналогично $\overline{v_A} = \overline{v_C} + \overline{\omega_0} \times \overline{CA} \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_C}{\rho}$

$\overline{v_C} = \overline{v_B}$

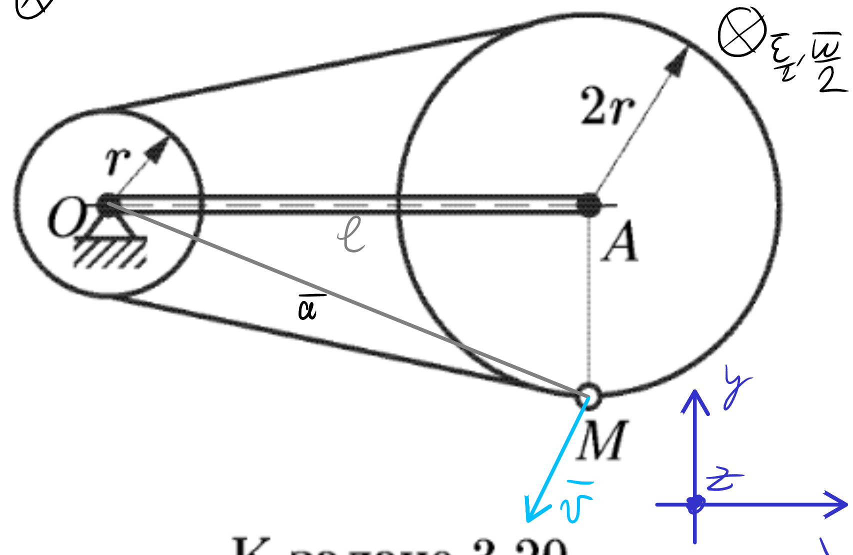
3) $\overline{\Omega}$ – угл. ск. и диска, и обруча

$$\begin{cases} v_C = \Omega \cdot (R-\rho) \\ v_0 = \Omega (R-r) \end{cases} \quad v_C = v_0 \frac{R-\rho}{R-r} \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{\rho} \frac{R-\rho}{R-r}$$

Ответ: $\overline{\omega_0} = \frac{v_0}{\rho} \frac{R-\rho}{R-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.20. Кривошип OA (см. рисунок) длины l вращается с угловым ускорением ε вокруг оси O неподвижной шестеренки радиуса r и несет на конце A ось другой шестеренки радиуса $R = 2r$. Шестеренки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти скорость и ускорение точки M подвижной шестеренки в момент, когда $AM \perp OA$, если угловая скорость кривошипа в этот момент равна ω.

$\overline{\varepsilon}, \overline{\omega}$ ⊗



К задаче 3.20

1) цепь $\Rightarrow \omega r = \omega_M \cdot 2r$

$\omega_M = \frac{\omega}{2} \quad \overline{\omega_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \quad \overline{\varepsilon_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$

2) $\overline{v_A} = \overline{\omega} \cdot \overline{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega\ell \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\overline{v_M} = \overline{v_A} + \overline{\omega_M} \times \overline{AM} = \overline{v_A} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega\ell \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega r \\ -\omega\ell \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_M = \omega\sqrt{\ell^2 + r^2}$

4) $\overline{w_A} = \overline{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \overline{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega^2 \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \ell \\ -\varepsilon\ell \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\overline{w_M} = \overline{w_A} + \overline{\varepsilon_M} \times \overline{AM} - \omega_M^2 \overline{OA} =$

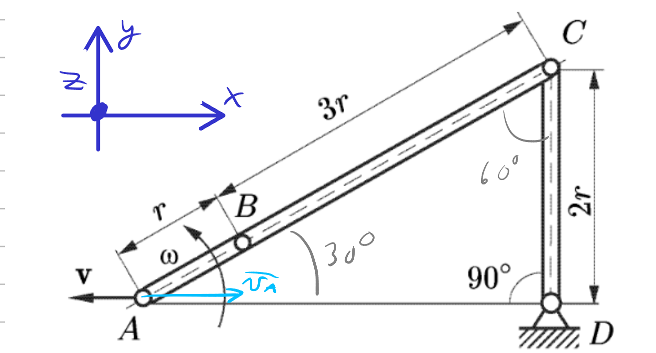
$$= \begin{pmatrix} -\omega^2 l \\ -\varepsilon l \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 l \\ -\varepsilon l \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 r/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega^2 l + \varepsilon r \\ \omega^2 \frac{r}{2} - \varepsilon l \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_M = \sqrt{(\varepsilon r - \omega^2 l)^2 + (\omega^2 \tfrac{r}{2} - \varepsilon l)^2}$$

Отв.: $v_M = \omega\sqrt{r^2 + l^2}$ $\quad w_M = \sqrt{(\varepsilon r - \omega^2 l)^2 + (\omega^2 \tfrac{r}{2} + \varepsilon l)^2}$

3.24. Стержни AB, BC и CD (см. рисунок) соединены шарнирами, причем стержень CD может поворачиваться вокруг неподвижной точки D, а стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки A, движущейся по прямой AD с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Найти скорость и ускорение точки C в момент, когда угол между стержнями AB и BC равен нулю, а угол ADC составляет 90°.



$$\overline{\omega_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \overline{v_A} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{\omega_B} \times \overline{AB} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\sqrt{3}/2 \\ r/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v - \omega r/2 \\ \omega r\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{\omega_{BC}} \times \overline{BC} = \overline{v_B} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3r\sqrt{3}/2 \\ 3r/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v - \omega r/2 - 3r/2\, \omega_{BC} \\ \omega r\sqrt{3}/2 + 3r\sqrt{3}/2\, \omega_{BC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v_C} = \begin{pmatrix} v - \omega r/2 + \omega r/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_C \parallel x \Rightarrow v_{Cy} = 0 \quad \omega \cancel{r\frac{\sqrt{3}}{2}} + 3\cancel{r\frac{\sqrt{3}}{2}}\, \omega_{BC} = 0 \Rightarrow \omega_{BC} = -\frac{\omega}{3} \quad \overline{\omega_{BC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{3} \end{pmatrix}$

3) $$\overline{w_B} = \underbrace{\overline{w_A}}_{=0} + \underbrace{\varepsilon}_{=0} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB} = -\omega^2 \overline{AB} = -\omega^2 \begin{pmatrix} r\sqrt{3}/2 \\ r/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) $$\overline{w_C} = \overline{w_B} + \varepsilon_{BC} \times \overline{BC} - \omega_{BC}^2\, \overline{BC} =$$

$$= \overline{w_B} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3r\sqrt{3}/2 \\ 3r/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2}{9} \begin{pmatrix} 3r\sqrt{3}/2 \\ 3r/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega^2 r\sqrt{3}/2 - \varepsilon_{BC}\, 3r/2 - \omega^2 r\sqrt{3}/6 \\ -\omega^2 r/2 + \varepsilon_{BC}\, 3r\sqrt{3}/2 - \omega^2 r/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\omega^2 r\sqrt{3} - \varepsilon_{BC} \frac{3r}{2} \\ -\frac{2}{3}\omega^2 r + \varepsilon_{BC}\, 3r\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad *$$

5) $\overline{W_c} = \overline{W_p} + \overline{\varepsilon_{PC}} \times \overline{PC} - \omega_{PC}^2 \overline{PC} =$

$\overline{V_A} = \overline{V_c} = \overline{\omega_{PC}} \times \overline{PC}$

$\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{PC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r\omega_{PC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega_{PC} = -\frac{v}{2r}$

$= \overline{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{PC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} - \omega_q^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r\varepsilon_{PC} \\ -2\omega_{PC}^2 r \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W_{Cy} = -2\frac{v^2}{4r^2} r = -\frac{v^2}{2r}$

$*\; W_{Cy} = -\frac{2}{3}\omega^2 r + \varepsilon_{BC}\, 3r\sqrt{3}/2 = -\frac{v^2}{2r}$

$\varepsilon_{BC} = \dfrac{\frac{2}{3}\omega^2 r - \frac{v^2}{2r^2}}{3r\sqrt{3}/2} = \dfrac{\frac{4}{3}\omega^2 - \frac{v^2}{r^2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\omega^2}{9\sqrt{3}} - \dfrac{v^2}{3\sqrt{3}r^2}$

$W_{Cx} = -\frac{2}{3}\omega^2 r\sqrt{3} - \left(\frac{4\omega^2}{9\sqrt{3}} - \frac{v^2}{\cancel{3}\sqrt{3}r^2}\right) \cdot \frac{\cancel{3}r}{2} = -\frac{2}{3}\omega^2 r\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}\omega^2 r}{9} + \frac{v^2}{2\sqrt{3}r} =$

$= \frac{v^2}{2\sqrt{3}r} - \sqrt{3}\omega^2 r\left(\frac{6}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{v^2}{2\sqrt{3}r} - \frac{8}{9}\sqrt{3}\omega^2 r$

$W_c = \sqrt{\left(\frac{v^2}{2\sqrt{3}r} - \frac{8}{9}\sqrt{3}\omega^2 r\right)^2 + \frac{v^4}{4r^2}}$

Ответ: $\overline{v_c} = \overline{v_A} \quad \overline{W} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{2\sqrt{3}} r - \frac{8}{9}\sqrt{3}\omega^2 r \\ -v^2/2r \\ 0 \end{pmatrix}$