1) ① Ранг — кол-во ненулевых строк, кот. остались после приведения матрицы к ступенчатому виду.

$\Updownarrow$

$r = strg(A)$

② Т. о ранге матрицы.

$strg(A) = colrg(A) = rg(A)$

$\square$

1) Достаточно д-ть для ступ. матрицы (т.к. любую матрицу можно привести к ступ. виду)

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 \; a_{1j_1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 \dots 0 \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 \dots 0 & & a_{rj_r} \dots & a_{rn} \\ & & O & \end{pmatrix}$$

2) строки ЛНЗ: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r =$

$= (0, \dots, 0, \lambda_1 a_{1j_1}, \lambda_2 a_{2j_2} + \lambda_1 a_{12}, \dots) = (0, \dots 0)$

$\lambda_1 \underset{\neq 0}{a_{1j_1}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

тогда $\lambda_2 a_{2j_2} + \lambda_1 a_{1j_2} = 0 \Rightarrow \lambda_2 \underset{\neq 0}{a_{2j_2}} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

и т.д. $\Rightarrow$ $\lambda_i = 0$

3) любой столбец раскладывается на столбцы $\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_r}$ ед. образом, т.е. $\vec{a}_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_i a_{j_i}$

это сист. ур-ий относ M.

матрица системы

$$\begin{pmatrix} a_{ij_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{rj_r} \end{pmatrix}$$

главный определитель:

$\Delta = \prod_{i=1}^{r} a_{ij_i} \neq 0$

Тогда по т. Крамера ! זрещ.

$\boxtimes$

(3) Базисный минор M_k ← порядок

$M_k \neq 0 \quad M_{k+1} = 0$

т. о базисном миноре

$rg A = k$.

$\square$ с помощью эл. пр. добьёмся: $A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & \dots \\ \ddots & a_{rr} \end{matrix} & \\ \hline & \end{array}\right)$

$M_r \neq 0$

строки до r ЛНЗ => полные строки ЛНЗ

док-ем, что любая строка выражается из $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & & \\ & \ddots & a_{rr} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{rj} \end{matrix} \\ \hline a_{i1} \;\dots & a_{ij} \end{array}\right) \underset{\text{столбцу}}{\overset{\text{по добав.}}{=}} a_{1j} \cdot (-1)^{1+r} \cdot M_{1j} + \dots + (-1)^{2r+1} a_{rj} M_{rj} + (-1)^{2r+2} a_{ij} \underset{\neq 0}{M_r} = 0$$

фикс. i $1 \leq j \leq n$

$$a_{ij} = (-1)^r a_{1j} \frac{M_{1j}}{M_r} + \dots + (-1)^{2r} a_{rj} \frac{M_{rj}}{M_r}$$

Аналогично для столбцов

$\boxtimes$

2. (1) $A\cdot X = b$ — сист. лин. ур-й

Расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{rr} & b_r \\ \hline & 0 & & b_{r+1} \\ & & & \vdots \end{array}\right)$$

сист. имеет реш. : $b_{r+1} \dots = 0$

$$A\cdot X = b \quad (1)$$

$$AY = 0 \quad (2)$$ — однородная сист. ур-й

(2) Общее реш. сист. (1):

$$X = X_ч + Y_{одн}$$

частное решение; общее реш. системы (2)

$x_1, \dots, x_r$ — главные неизвестные, остальные — свободные (параметрические)

□ $\begin{cases} AX = b \\ AX_ч = b \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A(X - X_ч) = 0}_{Y \text{ — реш. сист. (2)}}$

$$\Downarrow$$

$$X = X_ч + Y$$

Y — произвольное реш. (2): $AX = AX_ч + AY = b + 0 = b$ — реш. (1) ⊠

(3) с помощью эл. пр.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{r,n} & b_r \\ \hline & & 0 & & & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + -a_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + -a_{rn}x_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}}_{X_r} + \underbrace{\sum_{j=r+1}^{n} x_j \begin{pmatrix} -a_{1j} \\ \vdots \\ -a_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{Y_{одн.}}$$

на j-том месте

фундаментальная сист. реш. однород. сист. лин. ур-й

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{rj} & \cdots & -a_{rn} \\ \hline 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ – фундаментальная матрица

④ Т. Кронекера–Капелли

Сист. лин. ур-й $A \cdot X = b$ совместна $\Leftrightarrow rg(A|b) = rgA$

$n - rgA$ – кол-во решений в фунд. сист.

кол-во неизвестных

(ед. реш. $\Leftrightarrow rgA = n$)

$\square$ ($\Rightarrow$) если сущ. реш., то $\vec{b} = \vec{a_1} x_1 + \ldots + \vec{a_r} x_r$, т.е.

$\vec{b}$ – лин. комбинация столбцов $\Rightarrow rg(A|b) = rgA$

($\Leftarrow$) если $rg(A|b) = rgA$, то $\exists a_1, \ldots, a_r$:

: $\vec{b} = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$, т.е. найдены главные неизвестные, параметрические можно положить $= 0 \Rightarrow$ сущ. реш. $\boxtimes$

⑤ т. Фредгольма

сист. лин. ур-й $AX=b$ совместна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для $\forall$ Y-решения системы $Y^TA=0$

$\longrightarrow Y^Tb=0$

□ ($\Rightarrow$) $Y^TA=0 \,/\cdot X$

$Y^T(AX)=Y^Tb=0$

($\Leftarrow$) $b^TY=0$ и $A^TY=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}Y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow rg\begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}=rg A^T \Leftrightarrow rg(A|b)=rgA$

по т. Кронекера-Капелли сущ. реш. $\boxtimes$

3. (1) Мн-во L - лин. пр-во, если на нём задан операции сложения и умножение на число и выполняются аксиомы (8):

I. Коммутативность по сложению:

1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$

2) $\alpha_1 + 0 = \alpha_1$

3) $\alpha_1 + (-\alpha_1) = 0$

4) $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$

II. Умножение на число

5) $(\lambda_1 \lambda_2)\alpha_1 = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \alpha_1)$

6) $1 \cdot \alpha_1 = \alpha_1$

III. Дистрибутивность

7) $\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2$

8) $(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha = \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha$

(2) Для векторов $a_1, \ldots, a_n$ можно определить лин. комбинацию: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, а также:

1) лин. зав-ть (ЛЗ): $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ ~~...~~ при $\exists \lambda_i \neq 0$

2) лин незав-ть (ЛНЗ): $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \iff \lambda_i = 0$

③ Вектора $e_1, \dots, e_r$ наз-ся базисными в $V \subseteq L$

если : 1) они ЛНЗ и упорядоченны,

2) $\forall v \in V \rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r : v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$

при этом $r = \dim V$ - размерность пространства V

④ Примеры лин. пр-в :

1) K^n - пр-во столбцов высоты n или строк длины n

2) $M_{m,n}(K)$ - пр-во матриц

3) многочлены вида $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

4) $C(a,b)$ - ф-ии, непрерывные на (a,b)

5) геом. векторы

4. | ① ~~...~~ Разложение по базису единств.

□ Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ и $x = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$.

тогда $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) e_i = 0$ т.к. e_i ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_i - b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$ ⊠

② Если $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, то α_i - координаты вектора x в базисе e

Можно представить в матричной форме:

$$x = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e \cdot X_e$$

Тогда $x + y = e(X_e + Y_e)$

$\lambda x = e(\lambda X_e)$

③ Пусть сущ. 2 базиса: e и e'

Пусть есть разложение: $e'_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} e_i$, $j = 1, \dots, n$

При этом коэф. S_{ij} образуют матрицу S, кот. состоит из столбцов координат e' в базисе e.

$$\boxed{e' = e \cdot S_{e \to e'}}$$

$S_{e \to e'}$ - матрица перехода от e к e'

Утв. $S_{e \to e'}^{-1} = S_{e' \to e}$

□ $e' = e \cdot S_{e \to e'} = e' \cdot S_{e' \to e} \cdot S_{e \to e'} \Rightarrow S_{e' \to e} \cdot S_{e \to e'} = E$

$e = e' \cdot S_{e' \to e} = e \cdot S_{e \to e'} \cdot S_{e' \to e} \Rightarrow S_{e \to e'} \cdot S_{e' \to e} = E$ $\Rightarrow S_{e \to e'}^{-1} = S_{e' \to e}$ ⊠

④ Пусть X_e – координаты x в e $\quad \boxed{X_e = S_{e\to e'} \cdot X_{e'}}$

$X_{e'}$ – координаты x в e'

□ $x = e \cdot \underline{X_e}$ $\quad e' = e \cdot S_{e\to e'}$

$x = e' \cdot X_{e'} = e \cdot \underline{S_{e\to e'} \cdot X_{e'}} \Rightarrow X_e = S_{e\to e'} \cdot X_{e'}$ ☒

⑤ Лин. пр-ва U и V – изоморфны, если между их элементами можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что:

1) $\left.\begin{array}{l} u_1 \leftrightarrow v_1 \\ u_2 \leftrightarrow v_2 \end{array}\right| \Rightarrow (u_1 + u_2) \leftrightarrow (v_1 + v_2)$

2) $u \leftrightarrow v \Rightarrow \lambda u \leftrightarrow \lambda v$

Т. об изоморфизме:

U и V (конечномерные) изоморфны $\Leftrightarrow$ $\underline{\dim U = \dim V}$

□ ($\Rightarrow$) Если $U \leftrightarrow V$, то базису $u_1, \dots, u_n$ пр-ва U соотв. ЛНЗ векторы $v_1, \dots, v_n$, кот. можно дополнить до базиса $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$. Аналогично $\dim V \leq \dim U$. Тогда $\dim V = \dim U$

($\Leftarrow$) Пусть $\dim V = \dim U = n$. Тогда:

$\left.\begin{array}{l} V \leftrightarrow \mathbb{R}^n \\ U \leftrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}\right| \Rightarrow V \leftrightarrow U$ $\quad$ Аналогично для $\mathbb{C}$

☒

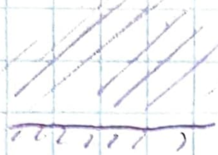
5. ① M – <u>подпр-во</u> в L, если:

1) $\forall x, y \in M \to x+y \in M$ (замкнутость относ. сложения)

2) $\forall x \in M, \forall \lambda \in K \to \lambda x \in M$ (замкнутость относ. умножения на скаляр)

<u>не</u> подпр-ва:

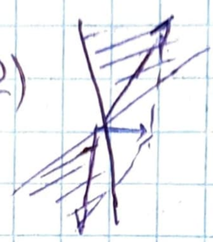
1)



полуплоскость

$a \cdot (-1) = -a \notin M$

2)



$a + b = c \notin M$

② Способы задания подпр-в:

1) через сист. однород. лин. ур-й $AX=0$

2) через лин. оболочку векторов $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$

<u>Утв.</u> 1) и 2) равносильны

□

(1 ⇒ 2) $AX = 0 \Rightarrow$ фунд. сист. реш $\Rightarrow$ лин. оболочка

(1 ⇐ 2) составим из столбцов лин. оболочки матр. A

$$A \underset{\text{строк}}{\overset{\text{эл. пр.}}{\sim}} \left(\frac{C}{E}\right) \Rightarrow \text{матрица сист. ур-й}: (E \mid -C)$$

⊠

③ <u>Пересечение</u>: $P = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ – тоже подпр-во

□ Если $x, y \in P$, то $\forall i, x, y \in P_i \to x+y \in P_i \Rightarrow \forall i \to x+y \in \bigcap_i P_i$

$\forall \lambda \in K \to \lambda x \in P_i \Rightarrow \lambda x \in \bigcap_i P_i$ ⊠

<u>Сумма</u>: $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ – <u>не</u> всегда подпр-во

Пр. 2)

Пусть $P_1 = \langle \underbrace{a_1, \dots a_n}_{\dim = n} \rangle$, $P_2 = \langle \underbrace{b_1, \dots, b_m}_{\dim = m} \rangle$

Тогда $P_1 + P_2 = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle$

и $\dim(P_1 + P_2) = rg(\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle) \le m + n$

④ Формула Грассмана:

$$\dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$$

□ Возьмём базис $P_1 \cap P_2$: $\langle c_1, \dots, c_r \rangle$

Дополним его до базисов P_1 и P_2:

$a_{r+1}, \dots, a_n$ и $b_{r+1}, \dots, b_m$ соответственно

Тогда базис $(P_1 + P_2)$: $\langle c_1, \dots, c_r, a_{r+1}, \dots, a_n, b_{r+1}, \dots, b_m \rangle$

Докажем что c_i, a_j, b_k – ЛНЗ

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=r+1}^{m} \beta_i b_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i a_i}_{\in P_1} = \underbrace{- \sum_{i=r+1}^{m} \beta_i b_i}_{\in P_2}$$

b_i – ЛНЗ (т.к. базисные в P_2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ c_i и a_i – базис в P_1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_i = 0, \alpha_i = 0$ ⊠

⑤ Прямая сумма: $L = M \oplus P$ — $\forall x \in L \to x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, $x_2 \in P$ единств. образом

V. Равносильны следующие условия:

1) сумма прямая ($L = M \oplus P$)

2) $M \cap P = \{0\}$

3) $\dim(M+P) = \dim M + \dim P$

4) базис суммы — объединение базисов слагаемых

□ 1 ⇒ 2 От противного. Пусть $\exists x \in M \cap P$, $x \neq 0$. Тогда

$\underset{M}{\overset{\Uparrow}{x}} = \underset{M}{\overset{\Uparrow}{x}} + \underset{P}{\overset{\Uparrow}{0}} = \underset{P}{\overset{\Uparrow}{0}} + \underset{M}{\overset{\Uparrow}{x}}$ — разложение не единств. противоречие

2 ⇒ 3 По ф-ле Грассмана:

$\dim(M+P) = \dim M + \dim P - \dim(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{M \cap P}}) = \dim M + \dim P$

3 ⇒ 4 Пусть $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ - базис в M, $\dim M = n$

$\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ — базис в P, $\dim P = m$

По усл. $\dim(M+P) = n + m$

Покажем, что $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ ЛНЗ

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i b_i = 0$. Пусть $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ Тогда:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = -\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i b_i = c \neq 0$ и $M \cap P = c$

Тогда $\dim(M \cap P) > 0$ и $\dim(M+P) < \dim M + \dim P$

противоречие

4 ⇒ 1 Разложим x по базису: базис $\{a_i, b_i\}$

$x = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}_{\in P_1} + \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i b_i}_{\in P_2}$ — единств., т.к. это разложение по базису ⊠

6. ① L_1 и L_2 – лин. пр-ва

Лин. отображение $\varphi: L_1 \to L_2$:

1) $\forall x, y \in L_1 \to \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

2) $\forall x \in L_1, \forall \lambda \in K \to \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

При $L_1 = L_2 = L \Rightarrow$ лин. преобразование

② Образ L_1 = мн-во значений φ $(Im\,\varphi) = \{y \in L_2 : \exists x \in L_1 : \varphi(x) = y\}$

Ядро $(Ker\,\varphi) = \{x \in L_1 : \varphi(x) = 0_{L_2}\}$

③ В $\boxed{7.}$

④ 1) φ инъективно $\Leftrightarrow Ker\,\varphi = \{0\}$

□ $\Rightarrow$ Пусть $Ker\,\varphi \neq 0$. Тогда $\exists v \neq 0 \in Ker\,\varphi$

По опред. $\varphi(v) = 0$. Также $\varphi(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(v) = \varphi(0) \Rightarrow v = 0$ противоречие

инъекция

$\Leftarrow$ Пусть $\exists v_1 \neq v_2 : \varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker\,\varphi$. Но $v_1 - v_2 \neq 0$. Тогда $Ker\,\varphi \neq 0$

противоречие ☒

2) φ сюръективно $\Leftrightarrow Im\,\varphi = L_2$

3) в $\boxed{7.}$

⑤ в $\boxed{7.}$

⑥ в $\boxed{7.}$

7. (1) Пусть $e_1 \ldots e_n$ — базис в L_1 $(\dim L_1 = n)$

$f_1 \ldots f_m$ — базис в L_2 $(\dim L_2 = m)$

Тогда $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad j = 1, \ldots, n$

Матрица лин. отображения: $A_{\varphi, e, f}$

состоит из координатных столбцов $\varphi(e)$ в базисе f

Если φ - преобразование, то $e = f$, $A_{\varphi, e}$

Формула $\left.\begin{array}{l} x = eX_e \\ y = fY_f \end{array}\right| \Rightarrow Y_f = A_{\varphi, e, f} X_e$

(3) Утв. 1) $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rg} A_\varphi = \operatorname{rg}\varphi$

2) $\dim \ker\varphi = n - \operatorname{rg} A_\varphi$

3) $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = n$

□ 1) $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$

$\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rg}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rg} A_\varphi$

2) $\ker\varphi$: $A_\varphi X = 0 \Rightarrow \dim\ker\varphi$ - кол-во фунд. реш. ослу

$\Rightarrow \dim\ker\varphi = n - \operatorname{rg} A_\varphi$ ☒

(4) 3) $\varphi: L_1 \to L_2$ - биективно $\Leftrightarrow \dim L_1 = \dim L_2$

(L_1 и L_2 - изоморфны)

□ ($\Rightarrow$) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в L_1

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \Rightarrow$

φ - сюръективно

$\Rightarrow L_2 = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$

осталось д-ть, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ ЛНЗ.

Рассмотрим $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0$$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ (φ-инъективно)

e_i - базис $\Rightarrow \alpha_i = 0$

$\Leftarrow$ Можно выбрать базисы так,

$e : \{e_1, \dots, e_n\}$ L_1, $\dim = n$

$f : \{f_1, \dots, f_n\}$ L_2 $\dim = n$

что: $\forall x : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to$ определено $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$

Очевидно, что φ - биекция $\boxtimes$

(2) Пусть в L_1: e и e'
Пусть в L_2: f и f' $\Rightarrow \boxed{A'_\varphi = T^{-1}_{f\to f'} \cdot A_\varphi \cdot S_{e\to e'}}$

$\square$ $Y_f = A_\varphi X_e$
$Y_f = T_{f\to f'} \cdot Y_{f'}$
$X_e = S_{e\to e'} \cdot X_{e'}$

$\Rightarrow T \cdot Y_{f'} = A_\varphi \cdot S \cdot X_{e'}$

$$Y_{f'} = \underbrace{(T^{-1} A_\varphi S)}_{A'_\varphi} X_{e'}$$

$\boxtimes$

для лин. преобразований: $S = T \Rightarrow \boxed{A'_\varphi = S^{-1} \cdot A_\varphi \cdot S}$

(3) (5) $\varphi: L_1 \to L_2$

$Lin(L_1, L_2) = \{\varphi: L_1 \to L_2\}$ - мн-во лин. отображений

1) $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ - операция сложения

2) $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ - операция умножения на скаляр

Матричная форма: 1) $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$

2) $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Произведение: $L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_2 \xrightarrow{\varphi_2} L_3$

$(\varphi_2 \cdot \varphi_1)(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

$A_{\varphi_2\varphi_1} = A_{\varphi_2} \cdot A_{\varphi_1}$

(6) Если $L_1 \xrightarrow{\varphi} L_2$ и φ - биекция, то определено:

$\varphi^{-1}(y) = x \quad \forall y \in L_2$ - обратное отображение

$A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}$

8. ③ Подпр-во $V \subseteq L$ наз-ся **инвариантным**, если:

$\forall v \in V \to \varphi(v) \in V$ или $\varphi(V) \subseteq V$

$V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$ – также инвариантны

Примеры: 1) $\ker\varphi$ $(x \in \ker\varphi,\ \varphi(x) = 0 \in \ker\varphi)$

2) $\operatorname{Im}\varphi$

3) $\forall M \supseteq \operatorname{Im}\varphi$ $\left(\begin{array}{l} x \in M \Rightarrow \varphi(x) \in \operatorname{Im}\varphi \subseteq M \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(x) \in M \end{array} \right)$

4) поворот на угол α относ. прямой ℓ

инв. подпр-ва: ℓ и пл-ть $\pi \perp \ell$, проход. через нач. коорд.

5) $L_1 \oplus L_2 = L$. φ – проектирование на L_1 парал. L_2

$\forall x = x_1 + x_2 \to \varphi(x) = x_1$

инв. подпр-ва: L_1, L_2 и любые их подпр-ва

Матричный вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$

$V_1 \oplus V_2$

④ Пусть $V \subseteq L$ – инв. подпр-во.

Тогда **ограничение** φ на подпр-во V: $\underset{\varphi'_{||}}{\varphi/_V} : V \to V$

$\varphi'(\underset{\in V}{v}) \in V$, а $\varphi'(\underset{\notin V}{u})$ не определено.

① Пусть L – лин. пр-во. $\varphi: L \to L$. Тогда вектор $x (\neq 0)$ наз-ся **собственным вектором** для φ, если $\exists \lambda \in K$:

$\varphi(x) = \lambda x$ (λ – **собств. значение** φ)

Примеры 1) L - пр-во беск. дифф. функций

$y = Ce^{\lambda x}$ $\quad y' = \lambda C e^{x}$ $\quad \varphi = \frac{d}{dx} \Rightarrow \varphi(y) = \lambda y$,

т.е. y - собств. вектор с собств. знач. λ

2) φ - ортогональное проектирование отн. пл-ти π

Тогда $\exists x \in \pi : \varphi(x) = x \quad (\lambda = 1)$

$\exists x \notin \pi : \varphi(x) - x \quad (\lambda = -1)$

(2) $\varphi : L \to L$. Пусть $x_1, \dots, x_r$ - собств. вектора с собств. значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)

Тогда $x_1, \dots, x_r$ ЛНЗ.

□ Индукция по r: для $r = 1$ по опред.

Предполож. индукции: верно для $r-1$ при $r > 1$.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \; (*)$, $\varphi(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i = 0 \; (**)$

умножим $(*)$ на λ_r и отнимем $(**)$:

$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) x_1 + \dots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) x_{r-1} = 0$

По предположению индукции: $\alpha_i \underset{\neq 0}{(\lambda_i - \lambda_r)} = 0 \Rightarrow$
$i = 1, \dots, r-1$

$\Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1} = 0$

Учитывая $(*) \Rightarrow \alpha_r \underset{\neq 0}{x_r} = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$ ☒

(5) Мн-во $\{x \in L : \varphi(x) = \lambda x\}$, где λ - собств. знач. для
λ - фикс.
собств. вектора x, наз-ся <u>собственным подпр-вом</u>, отвечающим собств. знач. λ.

9.1 ① $\varphi: L \to L$, A_φ. $x = eX$, $y = eY = \varphi(x)$

$Y = A_\varphi X$. Пусть x и λ – собств. вектор и знач. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = \lambda x \Rightarrow A_\varphi X = \lambda X \Rightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0$ – ОСЛУ для нахожд. X

$\exists X$ при $\boxed{\underbrace{\det(A_\varphi - \lambda E)}_{\text{характеристический многочлен } \chi_\varphi} = 0}$ – характеристическое ур-е

корни – характеристические

Утв. собств. знач. λ – характеристические корни.

② Т. Характеристический многочлен не изменяется при переходе к новому базису.

□ Пусть $e' = e S_{e \to e'}$. Тогда $A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$

$\det(A'_\varphi - \lambda E) = \det(S^{-1} A_\varphi S - \lambda(S^{-1}S)) =$

$= \det(S^{-1}(A_\varphi - \lambda E)S) = \underline{\det S^{-1}} \cdot \det(A_\varphi - \lambda E) \cdot \underline{\det S} =$

$= \det(A_\varphi - \lambda E)$ ⊠

Следствие. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\operatorname{tr} A_\varphi = \sum a_{ii}$ не изменяются.

③ Лемма. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A_\varphi$, $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = |A_\varphi|$

$\chi_\varphi = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n =$

$= (-\lambda)^n + \operatorname{tr} A_\varphi \lambda^{n-1} + \ldots + |A_\varphi|$

④ Пусть λ_1 – хар. корень для φ.

$\dim L_{\lambda_1}$ – геометрическая кратность

$\chi_\varphi = (\lambda_1 - \lambda)^k P(\lambda)$, $P(\lambda_1) \neq 0$; k – алгебраическая кратность

Утв. Для $\forall \lambda$ → геом. кр. $\leq$ алг. кр.

$\square$ Пусть $\lambda = \lambda_1$. $\dim L_{\lambda_1} = \ell$.

Возьмём базис в L_{λ_1}: $e_1, \dots, e_\ell$

Дополним его до L: $e_{\ell+1}, \dots, e_n$

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}^{\ell} & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right); \quad |A_\varphi - \lambda E| = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1-\lambda\end{matrix} & C \\ \hline 0 & B-\lambda E \end{array}\right) =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)^\ell \cdot |B - \lambda E| = 0$$

ℓ корней λ_1 — тоже может быть корень λ_1

$\Rightarrow k \geq \ell$ $\boxtimes$

(5) Лин. преобразование диагонализируемо, если

$\exists$ базис e' в L, в кот.: $A_{\varphi, e'} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

при этом a_{ii} - собств. знач.,

а базисные вектора - собственные

T. Критерий диагонализируемости

φ диаг. $\Leftrightarrow$ сущ. базис из собств. векторов

$\square$ ($\Rightarrow$) очевидно (от каждого подпр-ва базисный вектор)

($\Leftarrow$) пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис и $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Тогда:

$$A_{\varphi, e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Следствие. Достаточное условие диагонализируемости

Если φ имеет n разных собств. знач., то φ диагонализируемо

$\square$ Пусть a_i - собств. векторы для λ_i, $\varphi(a_i) = \lambda_i a_i$

т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $a_1, \dots, a_n$ - ЛНЗ (собств. векторы), $\dim L = n \Rightarrow$ базис из собств. векторов $\boxtimes$

T. Равносильны след. утв.:

1) A_φ диагонализируема

2) $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\dim L_{\lambda_i} = k_i$

3) $L = L_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_r}$

$\square$ (1⇒2) Из 1) следует, что $\exists$ базис из собств. векторов.

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - такой. Разобьём его: $(\underbrace{e_1, \dots, e_{m_1}}_{\text{базис в } L_{\lambda_1}}, \dots, \underbrace{e_{m_1+\dots+m_{r-1}}, \dots, e_n}_{\text{базис в } L_{\lambda_r}})$

в этом базисе: $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$ кол-во диаг. эл-в: $m_i = \dim L_{\lambda_i}$

$\chi_\varphi = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{m_r} \Rightarrow k_i = m_i$

(2⇒3) Покажем, что базис в L - объединение базисов L_{λ_i}

Выберем по базису в каждом L_{λ_i}. общее кол-во векторов: $\sum k = \sum m = n$

$\dim L = n$

Д-м, что они ЛНЗ:

$\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0$ (*) e_{ij} - базисные векторы собств. подпр-в

$a_i = \alpha_{i1} e_{i1} + \dots + \alpha_{im_i} e_{im_i}$ - собств. векторы, отвеч. разным λ_i

(*) $\Leftrightarrow a_1 + \dots + a_n = 0 \overset{\text{ЛНЗ}}{\Rightarrow} a_1 = 0, \dots, a_n = 0 \Rightarrow \underbrace{\alpha_{i1} e_{i1} + \dots + \alpha_{im_i} e_{im_i}}_{\text{базис}} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{ij} = 0$ $\boxtimes$

10. (1) Пусть $\varphi: L \to L$ - лин. преобр., $\dim L = n$.

$\chi_\varphi(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$

Можно рассмотреть: $\chi_\varphi(\varphi) = p_0\varphi^n + p_1\varphi^{n-1} + \ldots + p_n$

Т. Гамильтона - Кэли. $\chi_\varphi(\varphi) = 0$: φ явл-ся корнем своего хар. многочлена.

□ $A(\lambda) = (p_{ij}(\lambda))$, p_{ij} - многочлен

многочленная матрица

$A(\lambda) = D_0\lambda^m + D_1\lambda^{m-1} + \ldots + D_m$

числовые матрицы

Рассмотрим матрицу $A - \lambda E$ и $\widehat{A - \lambda E}$ - присоед. матрица к $A - \lambda E$, состоит из алг. доп. матрицы $A^{+} - \lambda E$

$(\widehat{A - \lambda E}) \cdot (A - \lambda E) = \det(A - \lambda E) \cdot E$

Элементы матрицы $\widehat{A - \lambda E}$ - многочлены, степени $\leq n-1$:

$\widehat{A - \lambda E} = D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots + D_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\widehat{A - \lambda E}) \cdot (A - \lambda E) = (D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots + D_{n-1}) \cdot (A - \lambda E) =$

$= -D_0\lambda^n + (D_0A - D_1)\lambda^{n-1} + \ldots + (D_{i-1}A_1 - D_i)\lambda^{n-i} + \ldots + AD_{n-1} =$

$= \chi(\lambda)E = p_0\lambda^{n-1} \cdot E + \ldots + p_nE$

Получим равенство многочленных матриц $\Rightarrow$ равны коэф. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_0 = -P_0 E \\ D_0 A - D_1 = P_1 E \\ \vdots \\ D_{i-1} A - D_i = P_i E \\ D_{n-1} A = P_n E \end{cases} \Rightarrow \chi(A)\cdot E = 0 \Rightarrow \chi(A) = 0$$

$\boxtimes$

② Т. Пусть $\varphi: L \to L$ – лин. преобр. пр-ва L над $\mathbb{R}$. Тогда в L $\exists$ двумерное инвариантное подпр-во для φ $V \subset L$, отвечающее комплексному корню хар. многочлена.

$\square$ $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1}) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = p(\lambda)$$

$V = \ker p(\varphi)$. $p(\varphi) = \varphi^2 - 2\alpha\varphi + (\alpha^2 + \beta^2)E$

$\forall a \in V, a \neq 0$, $V = \langle a, \varphi(a)\rangle$ – двумерное инв. подпр-во

Докажем это:

1) $\forall x \in \langle a, \varphi(a)\rangle$: $x = x_1 a + x_2 \varphi(a)$, $\varphi(x) = x_1\varphi(a) + x_2\varphi^2(a)$

Но $\varphi^2(a) - 2\alpha\varphi(a) + (\alpha^2+\beta^2)a = 0$. Тогда:

$$\varphi(x) = x_1\varphi(a) + x_2\left(2\alpha\varphi(a) - (\alpha^2+\beta^2)a\right) = (x_1 + 2\alpha)\varphi(a) - (\alpha^2+\beta^2)x_2 a$$

$\Rightarrow \varphi(x) \in \langle a, \varphi(a)\rangle \Rightarrow$ инвариантное

2) Докажем ЛНЗ. Пусть $\varphi(a) = ka$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, $\varphi^2(a) = k^2 a$

$k^2 a - 2\alpha k a + (\alpha^2+\beta^2)a = 0$, т.е. k – корень $p(\lambda) = 0$, но тогда $k \notin \mathbb{R}$ – противоречие

$\Rightarrow \dim V = 2$

$\boxtimes$

11. (1) Пусть L - лин. пр-во над полем K.

$f: L \to K$ - лин. ф-ция, если: 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Это частный случай лин. отобр.: 2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in K$

$L_2 = K$, $\dim L_2 = 1$

(2) Мн-во всех лин. ф-ий L^* - пр-во сопряжённое к L

Если $(e_1, \dots, e_n)$ - базис в L, то: $\boxed{\dim L = \dim L^*}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \; ; \; f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{f(e_i)}_{\substack{a_i \\ \text{(число)}}} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$ - координатная строка f

При этом $a' = T^{-1} a S$, но $T = 1$, тогда: $\boxed{a' = aS}$

(3) Обозначим $e^i(x) = x_i$, $\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i}$

$$e^* = \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$ - биортогональный базис к e

(4) Было L. Построим L^* - тоже лин. пр-во.

Тогда рассмотрим L^{**} - пр-во, сопряжённое L^*,

т.е. второе сопряжённое для L.

$\dim L = \dim L^{**}$

(5) Утв. L и L^{**} изоморфны.

12. (1) $b: L \times L \to K$ – билинейная ф-ция. $b(x, y)$

1) $b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$

2) $b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$

3) $b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$

b симм.: $b(x, y) = b(y, x)$

b кососимм.: $b(x, y) = -b(y, x)$

Утв. $b(x, y) = \underset{\text{симм.}}{b_+(x, y)} + \underset{\text{кососимм.}}{b_-(x, y)}$ единств. образом. (1)

□ Заменим в (1) x и y:

(1') $b(y, x) = b_+(y, x) + b_-(y, x) = b_+(x, y) - b_-(x, y)$

(1) + (1'): $b_+(x, y) = \dfrac{b(x, y) + b(y, x)}{2}$

(1) − (1'): $b_-(x, y) = \dfrac{b(x, y) - b(y, x)}{2}$ $\boxtimes$

$k(x) = b(x, x)$ – квадратичная функция

Утв. Для данной $k(x)$ $\exists!$ симм. $b(x, y)$: $k(x) = b(x, x)$

□ $k(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) =$
$= k(x) + 2b(x, y) + k(y)$

$b(x, y) = \dfrac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$ $\boxtimes$

(2) Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$

Тогда: $b(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i e_i, y_j e_j) =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$

билинейная форма

Обозначим $b(e_i, e_j) = b_{ij}$. Тогда $b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$

$\| b_{ij} \| = B = B_e$ – матрица билин. ф-мы в базисе e

$\boxed{b(x,y) = X^T B Y}$

$k(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$ – квадратичная форма

её матрица B – симм., т.е. $B = B^T$

(3) Изменение матрицы B при замене базиса

$$\boxed{B' = S^T B S}$$

□ Пусть $e' = eS$ – новый базис

$x = Sx'$ $\quad y = Sy'$

$b(x,y) = X^T B Y$ (1) $\qquad b(x,y) = X'^T B' Y'$

в (1) подставим выражение для x и y.

$b(x,y) = (SX')^T B \cdot (SY') = X'^T \underbrace{S^T B S}_{B'} Y'$

☒

13. (1) $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i)^2$ – диагональный вид

если $\alpha_i = 0, \pm 1$, то это каноническая квадр. форма

$$k(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x_i)^2}_{\substack{\alpha_i > 0 \\ p \text{ штук}}} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i (x_i)^2}_{\substack{\alpha_i < 0 \\ q \text{ штук}}} \qquad p+q = \mathrm{rg}\, B$$

p – положительный индекс инерции

q – отрицательный индекс инерции

(3) Закон инерции. В любом базисе, в кот. квадр. форма имеет диаг. (канон.) вид, p и q одинаковы.

□ Рассмотрим базисы $(e_1, \dots, e_{p+q})$ и $(f_1, \dots, f_{s+t})$

$$k(x) = \sum_{i=1}^{p} (y_i)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} (y_i)^2 \quad \text{и} \quad k(x) = \sum_{i=1}^{s} (z_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} (z_i)^2$$

Нужно д-ть, что $p = s$ и $q = t$.

Заметим, что $p+q = t+s = \mathrm{rg}$

От противного: пусть $p > s$, тогда $t < s$

Рассмотрим подпр-ва $L_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ и $L_2 = \langle f_{s+1}, \dots, f_n \rangle$

$\dim L_1 = p \qquad \dim L_2 = n - s$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = p + n - s = n + \overbrace{(p-s)}^{>0} > n$$

Тогда $\underset{\leq n}{\dim(L_1 + L_2)} = \underbrace{\dim L_1 + \dim L_2}_{>n} - \dim(L_1 \cap L_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$

то в L_1 $k(x) > 0$, а в L_2 $k(x) \leq 0$ противоречие

Аналогично не может быть $p<s$. Тогда $p=s \Rightarrow t=q$ $\boxtimes$

② **Т.** Любую квадратичную форму можно привести к диагональному виду.

1) <u>Метод Лагранжа</u>

а) если $b_{ii}\neq 0$, то это просто выделение полных квадратов

б) если $b_{ii}=0$, то сначала нужно сделать замену:

$$\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \tilde{x}_j \\ x_j = \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \end{cases}$$

Далее переходим к случаю а)

2) <u>Элементарные преобразования</u>

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

1) из каждой i-ой строки вычтем 1-ую $\cdot \dfrac{b_{1i}}{b_{11}}$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

2) из каждого i-ого столбца вычтем 1-ый $\cdot \dfrac{b_{1i}}{b_{11}}$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\begin{matrix} C_{n-1} - \\ \text{симм.} \end{matrix}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

3) Повторяем шаги 1) и 2) для C_{n-1}

Получим: $B' = \underbrace{S_n^T \cdot \ldots \cdot S_1^T}_{S^T} B \underbrace{S_1 \cdot \ldots \cdot S_n}_{S}$

④ $k(x)>0$ (полож. опред) $\leftarrow$ $\forall x \in L, x\neq 0$

$k(x)<0$ (отриц. опред)

$k(x) \lessgtr 0$ (полуопред.), если $\exists x\in L: k(x)>0$ и $\exists y \in L: k(x)<0$

$k(x) \geq 0$ (неотриц.) $\leftarrow \forall x \in L$

$k(x) \leq 0$ (неполож.)

Для p и q: 1) $k(x) > 0 \Rightarrow p = n, q = 0$

2) $k(x) < 0 \Rightarrow p = 0, q = n$

3) $k(x) \gtrless 0 \Rightarrow p > 0, q > 0$

4) $k(x) \geq 0 \Rightarrow p > 0, q = 0$

5) $k(x) \leq 0 \Rightarrow p = 0, q > 0$

(5) Критерий Сильвестра. $k > 0 \Leftrightarrow \Delta_i > 0, \; i = 1, \dots, n$

$k < 0 \Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0, \; i = 1, \dots, n$

$\square$ ($\Leftarrow$) Индукция по n: пусть верно для $n-1$.

Т.к. $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0$, то $k_{n-1}(x) > 0$, т.е. она приводится к сумме квадратов. Тогда:

$$k_n(x) = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \left(b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in}^2\right) x_n^2$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & b_{nn} - \sum b_{in}^2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sgn}(B') = \operatorname{sgn}(B) = \Delta_n > 0$

k привелась к диаг. виду со всеми коэф. $> 0 \Rightarrow k > 0$

($\Rightarrow$) Индукция по n: пусть верно для $n-1$, т.е. $\Delta_i > 0$ для $i = 1, \dots, n-1$. Т.к. $k(x) > 0$, то она приводится к канон. виду с матрицей: $B' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{sgn}(B') = \operatorname{sgn}(\Delta_n) > 0 \Rightarrow \Delta_n > 0$

$\boxtimes$

14. ① **Евклидово пр-во** – это конечномерное пр-во над $\mathbb{R}$, в кот. определено скалярное произведение: (x,y) – симм. билинейная ф-ция.

1) $(x,y)=(y,x)$
2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$
3) $(\alpha x, y)=\alpha(x,y)$
4) $(x,x)>0$

② **Нер-во Коши – Буняковского**: $|(x,y)| \le |x|\cdot|y|$

Более того, $|(x,y)|=|x|\cdot|y|$, то $\exists \lambda\in\mathbb{R} : y=\lambda x$

□ Рассмотрим ф-цию $f(x,y)=|tx-y|^2=(tx-y,tx-y)=$ $t\in\mathbb{R}$

$=t^2(x,x)-2t(x,y)+(y,y)\ge 0$. Тогда:

$\frac{D}{4}=t^2(x,y)^2-t^2(x,x)(y,y)=t^2((x,y)^2-|x|^2|y|^2)\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x,y)|\le|x||y|$

При $|(x,y)|=|x||y| \Rightarrow D=0 \Rightarrow f(x,y)=(x,x)(t-\lambda)^2 \Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (tx-y, tx-y)=(tx-\lambda x, tx-\lambda x)\Rightarrow y=\lambda x$ $\boxtimes$

③ **Неравенство Δ**: $|x+y|\le|x|+|y|$

□ $(|x+y|)^2\le(|x|+|y|)^2$

$(|x+y|)^2=(|x+y|,|x+y|)=(x,x)+(y,y)+2|(x,y)|\le|x|^2+|y|^2+2|x||y|=$

$=(|x|+|y|)^2$ $\boxtimes$

④ В некот. базисе e: $(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i, \sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(e_i,e_j)$

$\|(e_i,e_j)\|$ – **матрица Грама** $\quad (x,y)=X^TGY$

1) Из симм. билин. ф-ции $\Rightarrow$ $G_{e'}=S^TG_eS$: Также $G=G^T$

2) данная симм. матрица G – матрица Грама $\Leftrightarrow \Delta_i>0, i=1,\dots,n$

3) Также $\det G>0$

(5) Базис в $\mathcal{E}$ ортогональный, если $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$

(ортонорм.) ОНБ – так же $|e_i| = 1$.

В ОНБ $G = E$.

(6) В n-мерном $\mathcal{E}$ $\exists$ ОНБ. Его можно получить из ЛНЗ $a_1, \dots, a_n$ с помощью процесса ортогонализ.

Ортогонализация Грама-Шмидта

1) $b_1 = a_1$

2) $b_2 = a_2 - пр_{b_1} a_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$

3) $b_3 = a_3 - пр_{b_1} a_3 - пр_{b_2} a_3 = a_3 - \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2$

4) и т.д. Получим: $\boxed{b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i}$

ОНБ: $c_i = \dfrac{b_i}{|b_i|}$

(8) Ортогональная матрица: $A^{-1} = A^T$

(9) Переход между ОНБ

Пусть есть e и e' – базисы в $\mathcal{E}$. $e' = eS$

1) если e и e' – ОНБ, то S – ортогональна

2) если e – ОНБ и S – ортогональна, то e' – ОНБ

□ 1) Столбцы матрицы S – координатные столбцы e' в базисе e,

т.е. $S = (e_1'^{\uparrow}, \dots, e_n'^{\uparrow})$

$$S^T \cdot S = \begin{pmatrix} e_1'^{\uparrow} \\ \vdots \\ e_n'^{\uparrow} \end{pmatrix} \cdot (e_1'^{\uparrow} \dots e_n'^{\uparrow}). \text{ Но } (e_i', e_j') = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^T \cdot S = E$$

2) Если e – ОНБ, столбцы S образуют ортонорм. сист. столбцов $\Rightarrow e'$ – ОНБ ☒

15. ① Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пр-во, $\dim \mathcal{E} = n$.

L - подпр-во, $\dim L = m$.

Тогда $L^{\perp} = \{ y \in \mathcal{E} : (x, y) = 0,\ x \in L \}$ - ортогональное дополнение к L

Если $L = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то $y \in L^{\perp} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_i, y) = 0$ - сист. ур-й опред. $L^{\perp}$

Т. 1) $\dim L^{\perp} = n - \dim L = n - m$

2) $\mathcal{E} = L \oplus L^{\perp}$

3) $(L^{\perp})^{\perp} = L$

4) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

□ 1) $L^{\perp}$ опред. сист. ур-й $(a_i, y) = 0$, a_i - базис в L.

Матрица этой системы - строки координат a в ОНБ,

т.е. $\mathrm{rg} A = \dim L = m$. Тогда кол-во ЛНЗ реш.: $\dim L^{\perp} = n - \mathrm{rg} A = n - m$

2) $\dim (L + L^{\perp}) = \dim L + \dim L^{\perp} - \dim (L \cap L^{\perp}) = \cancel{m} + n - \cancel{m} - \dim (L \cap L^{\perp}) = n$

Пусть $x_0 \in L \cap L^{\perp} \Rightarrow (x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow L \cap L^{\perp} = \{0\}$

3) $\dim (L^{\perp})^{\perp} = n - \dim L^{\perp} = n - (n - m) = m$

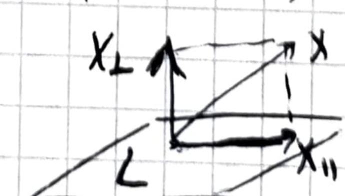
Если $x \in L$, то $(x, y) = 0 \ \forall y \in L^{\perp} \Rightarrow x \in (L^{\perp})^{\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow L \subseteq (L^{\perp})^{\perp}$. Т.к. $\dim (L^{\perp})^{\perp} = \dim L$, то $(L^{\perp})^{\perp} = L$ ⊠

② $\forall x = x_{\parallel} + x_{\perp}$

$x_{\parallel}$ - ортогон. проекция x на L

$x_{\perp}$ - ортогон. составляющая



16. ① Преобразование $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

② $\varphi^*: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ такое, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$, наз-ся сопряжённым

③ $(x, y) = X^T G Y$, $\varphi(x) = A_\varphi X$, $\varphi^*(y) = A_{\varphi^*} Y \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_\varphi X)^T \cdot G Y = X G A_{\varphi^*} Y$

$X \cdot (A_\varphi^T G) Y = X (G A_{\varphi^*}) Y \Rightarrow \boxed{A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi^T G}$

Для ОНБ: $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

④ Св-ва сопряжённых преобразований:

1) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$ 2) $(\lambda \varphi)^* = \lambda \varphi^*$

3) $(\varphi \psi)^* = \psi^* \varphi^*$ 4) $(\varphi^*)^* = \varphi$

Док-ся для ОНБ через матрицы

5) $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

□ Пусть $x \in \mathcal{E}$, $\varphi(x) = y$. Пусть $z \in \operatorname{Ker} \varphi^*$,

$(y, z) = (x, \underset{\shortparallel \atop 0}{\varphi^*(z)}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi^* \subseteq (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

Проверим равенство размерностей:

$\dim \operatorname{Ker} \varphi^* = n - \dim \operatorname{Im} \varphi^* \underset{A_{\varphi^*} = A_\varphi^T}{=} n - \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim (\operatorname{Im} \varphi)^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$ ☒

17. (1) $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ – самосопряжённое, если оно сопряжённое самому себе, т.е. $\varphi = \varphi^*$ и $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

Тогда $\boxed{A_\varphi = G^{-1} A_\varphi^T G}$. Для ОНБ: $A_\varphi = A_\varphi^T$.

(2) Если φ – самосопряжённое, то:

1) $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $\varphi(x) = \lambda_1 x$, $\varphi(y) = \lambda_2 y$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (x, y) = 0$

□ 1) Пусть $\exists \lambda \notin \mathbb{R}$. Была т., что $\exists V \in \mathcal{E}$, $\varphi(V) = V$: $\dim V = 2$. $\exists$ ОНБ в $\mathcal{E}$, в V: (e_1, e_2). В этом базисе $A_\varphi = A_\varphi^T$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}; \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

$\Rightarrow$ корни $\in \mathbb{R}$. противоречие

2) Рассмотрим $(\varphi(x), y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y)$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{array}{c} (\varphi(x), y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y) \\ \shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel \\ (x, \varphi(y)) = (x, \lambda_2 y) = \lambda_2 (x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Downarrow \\ (x, y) = 0 \end{array} \; \boxtimes$$

(3) φ – самосопряжённое $\Leftrightarrow$ $\exists$ ОНБ из собств. векторов

($\Rightarrow$) Индукция по n. $n = 1$; $\mathcal{E} = \langle e_1 \rangle$ $\varphi(e_1) = \lambda e_1$

Пусть верно для $n - 1$. $L = \langle e_1 \rangle$ – инв. пр-во.

Докажем, что $L^\perp$ – тоже инвариантное

$x \in L$, $\varphi(x) \in L$. $y \in L^\perp$

$$(x, \varphi(y)) = (\underset{L}{\varphi(x)}, \underset{L^\perp}{y}) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \in L^\perp$$

Тогда $\varphi|_{L^\perp}$ - тоже инвариантное и самосопр.

$\dim L^\perp = n-1$

В каком-либо ОНБ: $A_\varphi : \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, где B матрица $\varphi|_{L^\perp}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = B^T$

По предположению инд. для $\varphi|_{L^\perp}$ сущ. ОНБ из собств. вект. $e_2, \ldots, e_n$

Тогда $e_1, \ldots, e_n$ - ОНБ из собств. вект. для φ.

$\Leftarrow$ Если $\exists$ ОНБ из собств. вект., то:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A_\varphi^T \Rightarrow \varphi \text{ - самосопряжённое}$$

$\boxtimes$

18. ① φ - ортогональное, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

$(x,y) = X^T G Y \qquad \varphi(x) = A_\varphi X \qquad \varphi(y) = A_\varphi Y$

$$X^T G Y = (A_\varphi X)^T G (A_\varphi Y)$$

$$X^T G Y = X^T A_\varphi^T G A_\varphi Y \Rightarrow \boxed{G = A_\varphi^T G A_\varphi}$$

В ОНБ: $A_\varphi^T \cdot A_\varphi = E \Rightarrow A_\varphi$ - ортогон. матрица

$(\varphi^* = \varphi^{-1})$

② Свойства ортогональных φ:

1) Если $\varphi(x) = \lambda_1 x$, $\varphi(y) = \lambda_2 y$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (x,y) = 0$

2) Если L - инв. подпр-во для φ, то и $L^\perp$ тоже инв.

3) В $\mathcal{E}$ сущ. ОНБ, в кот.:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} c_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c_k & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} \qquad C_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

□ 1) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) = \lambda_1\lambda_2 (x,y) = (x,y) \Rightarrow (x,y) = 0$

$\lambda_1 \lambda_2 = -1$ (т.к. $|\lambda| = 1$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$) ⊠

③ Если λ - хар. корень для φ, то $|\lambda| = 1$

□ Рассмотрим φ как преобр. пр-ва $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением: $(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j$

Если z - собств. вектор для φ, то $\varphi(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$(\varphi(z), \varphi(z)) = (\lambda z, \bar{\lambda} z) = \lambda\bar{\lambda} (z,z) = (z,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\bar{\lambda} = 1 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\lambda| = 1$ ⊠

19. ① Пусть $\varphi: E \to E$ – линейное, невырожденное.

Тогда φ можно представить в виде: $\varphi = \theta \cdot \psi$

θ – ортог. пр.; ψ – самосопр. пр. с полож. с. зн.

В матричном виде:

$\boxed{A = QV}$ – полярное разложение

Q – ортог. матрица; V – симм. матрица

$Q^T = Q^{-1}$ $\quad V = V^T$

$\square$ $A = QV$

1) Д-м, что V – симм. с полож. собств. знач.

$A^T = V^T Q^T = VQ^{-1}$

$A^T \cdot A = VQ^{-1} QV = V^2$

Приведём $A^T \cdot A = V^2$ к диаг. виду: $S^T \cdot (A^T A) \cdot S = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

$\mu > 0$, т.к. $(A^T A) \cdot X = \mu X \Rightarrow \mu = \frac{(AX, AX)}{(X, X)} > 0$. Обозначим $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$

2) Д-м, что Q – ортогональное

$Q = A \cdot V^{-1}$

$Q^T = (V^{-1})^T \cdot A^T$

$Q^T \cdot Q = (V^{-1})^T \cdot A^T \cdot A \cdot V^{-1} = (V^{-1})^T \cdot V^2 \cdot V^{-1} = (V^{-1})^T \cdot \underset{V^T}{V} \cdot E = E$ $\boxtimes$

② $\boxed{A = Q_1 D Q_2}$ – сингулярное разложение

Q_1, Q_2 – ортог.; D – диаг.

$\square$ $A = QV$ – полярное

V – симм $\Rightarrow \psi$ – самосопр. $\Rightarrow \exists$ ОНБ из с. в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow V \to D$: $D = S^{-1} V S \Rightarrow V = SDS^{-1}$

т.к. ОНБ, то S и S^{-1} ортог. Получим:

$A = \underbrace{Q \cdot S}_{\text{ортог.}} D S^{-1} = Q_1 D Q_2$

$\boxtimes$

20. (1) В пр-ве $\mathcal{E}$ $\exists$ ОНБ, в кот. $\underset{c\,B}{\underline{K(x)}}$ имеет диагональный вид. $B = B^T$

☐ Рассмотрим матрицу B как A_φ – матрица самосопряжённого пр. φ, тогда $\exists$ ОНБ, в кот. A_φ диаг:

$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S \qquad S^{-1} = S^T$ – ортогональная

$B' = S^T B S = S^{-1} B S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ☒

(2) $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ – присоединённое преобр. к $f(x,y)$, если:

$f(x,y) = (x, \varphi(y))$

В матричном виде: $X^T B Y = X^T G \cdot (A_\varphi Y) = X^T (G A_\varphi) Y$

$B = G A_\varphi \Rightarrow \boxed{A_\varphi = G^{-1} B}$

Заметим, что φ – самосопряжённое, т.к.:

$b(x,y) = (x, \varphi(y)) \quad \Rightarrow \quad (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

$\quad\|$

$b(y,x) = (y, \varphi(x)) = (\varphi(x), y)$

I. В пр-ве $\mathcal{E}$ $\exists$ ОНБ, в кот. $f(x)$ и $g(x) > 0$ имеют диагональный вид. $F = F^T$

☐ Пусть f и g имеют матрицы F и G в некот. базисе e.

Для φ, присоед. к $f(x,y)$ $\exists$ ОНБ из собств. векторов:

$A'_\varphi = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = F'$

$G' = E$ – как матрица Грама ОНБ ☒

Уточнение: $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ – корни ур-я $|A_\varphi - \lambda E| = 0$

$A_\varphi = G^{-1}F$, т.е. $|G^{-1}F - \lambda E| = 0 \;/\cdot G \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|F - \lambda G| = 0}$$

21. (1) L - лин. пр-во над $\mathbb{C}$

$f(x,y): L\times L \to \mathbb{C}$ - полуторалинейная, если:

1) $f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

$f(x, y_1+y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

2) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$

$f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x,y)$

т.е. она линейна по x и полулинейна по y

Матрица: $f(x,y) = X^T F \bar{Y}$

(2) Полуторалинейная $f(x,y)$ наз-ся эрмитовой ф-цией, если 3) $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$

Соотв. квадр. ф-ия: $k(x) = f(x,x)$. полож опред. при $k>0$ $\forall x \neq 0$

(3) Определим скалярное произведение:

это эрмитова форма (x,y) такая, что $(x,x) > 0$, $\forall x \neq 0$

По опред. $(x,x) = \overline{(x,x)}$, т.е. $(x,x) \in \mathbb{R}$

В коорд.: $(x,y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (e_i, e_j)$ $\quad \|(e_i,e_j)\| = G;\ G^T = \bar{G}$

$\boxed{(x,y) = X^T G \bar{Y}}$

Унитарное (эрмитово) пр-во - пр-во L над $\mathbb{C}$, на кот. задано эрмитово скалярное произведение.

(4) Лин. преобр. в унитарном пр-ве: $\varphi: L \to L$.

Самосопряжённое: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

$A_\varphi^T = \overline{A_\varphi}$, A_φ – эрмитова

$\Rightarrow$ собств. знач. $\lambda \in \mathbb{R}$

Унитарное: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

$\overline{A_\varphi}^T = A_\varphi^{-1}$