28 Спектральное разложение электрических сигналов. Спектр одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов.

если $f(t)$ – непрерывная и периодическая с периодом T ($f(t+T)=f(t)$), то она может быть представлена в виде ряда

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \text{ где } \omega_k=\frac{2\pi k}{T}=k\omega$$

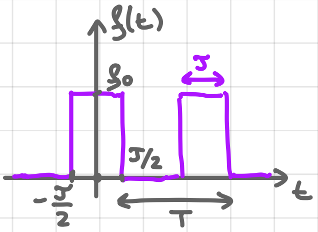
ряд Фурье $f(t)$ (точнее – его комплексная форма)

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_k t}dt$$ – коэффициенты Фурье $f(t)$

подынтегральное выражение периодично с периодом T, так что пределы интегрирования можно одновременно сдвинуть на произвольное число.

если $f(t)$ действительная, [$\omega_k=-\omega_{-k}$], то

$$c_k^*=c_{-k}$$

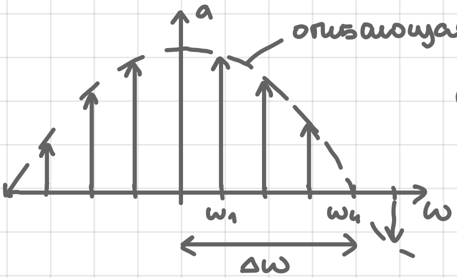


$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega_k t}dt = \frac{f_0}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-i\omega_k t}dt=$$

$$=\frac{f_0}{i\omega_k T}\left(e^{i\omega_k\tau/2}-e^{-i\omega_k\tau/2}\right)=f_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\omega_k\tau/2)}{\omega_k\tau/2}=$$

$$=\frac{f_0}{\pi k}\sin\left(\frac{\tau}{T}\pi k\right)$$

для случая $T=4\tau$



огибающая $a(\omega)=f_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2}$

гармоники с наибольшей амплитудой сосредоточены в главном лепестке: $-\pi\le\omega\tau/2\le\pi$

$$-\frac{2\pi}{\tau}\le\omega\le\frac{2\pi}{\tau}$$

$$\Delta\omega=\frac{2\pi}{\tau}$$

⇓

длительность отдельного импульса и характерная ширина спектра связаны соотношением $\tau\cdot\Delta\omega\sim 2\pi$

обобщение разложения Фурье на случай непериодических функций, определённых на бесконечном временном интервале:

Пусть $f(t)$ имеет большой период T (далее $T\to\infty$)

обозн. основную частоту как $\Delta\omega=2\pi/T$

$T=\frac{2\pi}{\Delta\omega}$. обозначим также $\omega_k=k\Delta\omega$

тогда

$$c_k=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega_k t}dt$$

введём a_k: $c_k=\frac{\Delta\omega}{2\pi}a_k$. тогда

$$a_k=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega_k t}dt$$

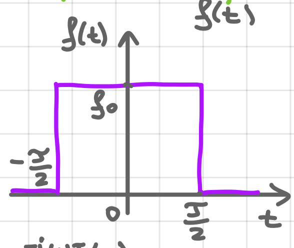
$\Downarrow T\to+\infty \Rightarrow \omega_k\to\omega$

$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{i\omega_k t}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

функция $a(\omega)$ называется Фурье-спектром $f(t)$

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-\tau/2 \text{ или } t>\frac{\tau}{2}\\ f_0, & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}\end{cases}$$



$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=$$

$$=f_0\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-i\omega t}dt=\frac{f_0}{i\omega}\left(e^{i\omega\tau/2}-e^{-i\omega\tau/2}\right)=$$

$$=f_0\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

тогда

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}a(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}=\frac{f_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega}d\omega=$$

$$=\frac{f_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega}d\omega$$

$[e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t]$

нечётная, даёт нулевой вклад в симметр. пределах

Вынужденные колебания под действием произвольной силы.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}(t)$$

$\left[A=L\frac{d^2}{dt^2}+R\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\right.$ – линейный оператор: $\forall q_1(t),q_2(t)\ \forall C_1,C_2 \hookrightarrow A(C_1q_1+C_2q_2)=C_1A(q_1)+C_2A(q_2)\Big]$

в ряде задач относительно просто найти отклик системы на внешнее гармоническое воздействие: $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0e^{i\omega t}$

тогда вследствие линейности $A(q)=\mathcal{E}(t)$ можно найти отклик и на воздействие, представимое в виде суммы

$$\mathcal{E}(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k,\quad \mathcal{E}_k=\mathcal{E}_{0k}e^{i\omega_k t}$$

$A(q_k)=\mathcal{E}_k(t)$, $q(t)=\sum_{k=1}^{n}q_k(t)$ | отклик на суммарное воздействие $\mathcal{E}(t)$ равен сумме откликов $q_k(t)$ на элементарные воздействия $\mathcal{E}_k(t)$

из th Фурье: произв. период. функция м.б. разложена в ряд Фурье: $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i\omega_k t}$

а непериодическая – в интеграл Фурье: $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$

эти рав-ва – представление $f(t)$ в виде суперпозиции гармонических функций.

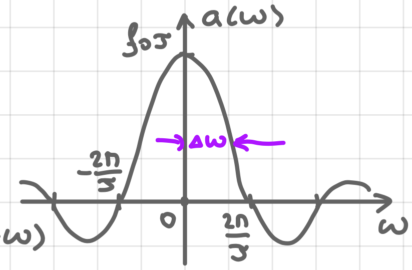
Соотношение неопределённостей

рассмотрим одиночный прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2 \\ f_0, & -\tau/2 \le t \le \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2 \end{cases}$$

график её фурье-спектра:

$$a(\omega) = f_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$



для функций в $\mathbb{R}$ ↳ $a^*(\omega) = a(-\omega)$

⇓

отрицательные частоты не вносят новых гармоник в спектр Фурье ⇒

⇒ достаточно учесть характерные масштабы области локализации фурье-спектра при $\omega > 0$:

$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\tau}$

длительность импульса $\Delta t = \tau$: **соотношение** $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$ **неопределённостей**, где Δt – длительность процесса, $\Delta\omega$ – ширина соответствующего фурье-спектра

имеет общий характер