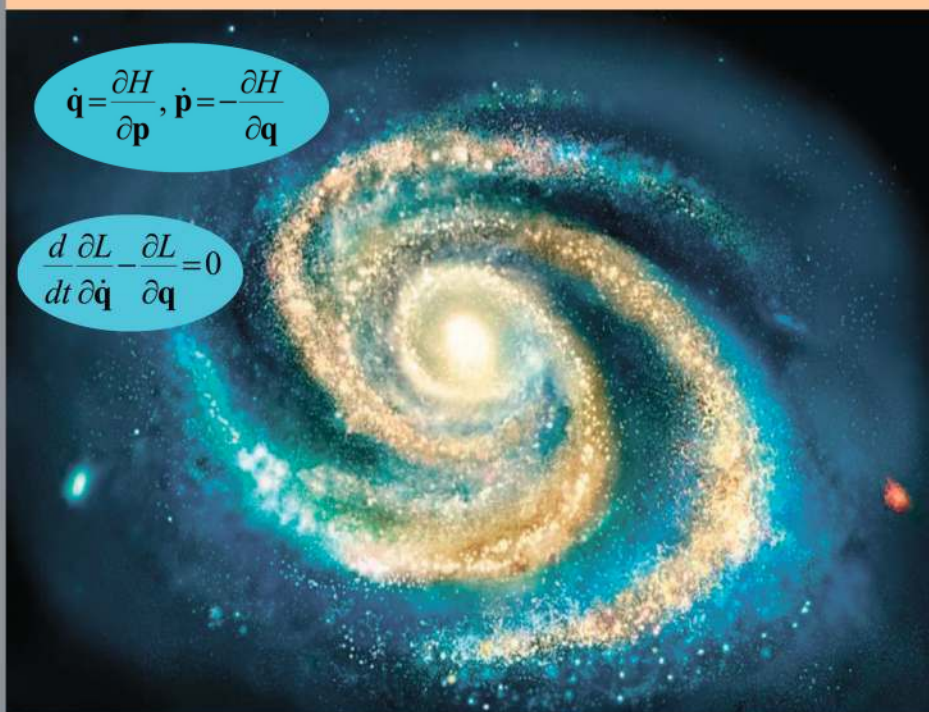


Н. И. Амелькин

КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Н. И. Амелькин

**КУРС
АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2023

УДК 531(075)
ББК 22.21я73
А61

Рецензенты:

Главный научный сотрудник ИПМ им. А.Ю. Ишлинского
академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор *В. Ф. Журавлев*

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической
механики и мехатроники механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова *О. Э. Зубелевич*

Зав. кафедрой теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор *Д. В. Трещев*

Амелькин, Николай Иванович

А61 Курс аналитической механики : учеб. пособие /
Н. И. Амелькин ; М-во науки и высшего образования Рос. Феде-
рации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ,
2023. – 298 с.
ISBN 978-5-7417-0827-9

Содержит целостное системное изложение основных задач и мето-
дов классической механики. Наряду с традиционным учебным материалом
включены такие разделы, как кватернионное описание вращательного дви-
жения твердого тела, теория конечных поворотов, устойчивость стационар-
ных движений, метод осреднения.

Предназначено для студентов и аспирантов вузов по направлению
подготовки «Прикладные математика и физика».

**УДК 531(075)
ББК 22.21я73**

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-
технического института (национального исследовательского университета)*

ISBN 978-5-7417-0827-9

© Амелькин Н. И., 2023
© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
Глава 1. Динамика материальной точки	8
1.1. Аксиомы классической механики	8
1.2. Принцип относительности Галилея	10
1.3. Динамика точки в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа.....	12
1.4. Естественный способ описания движения точки.....	17
Глава 2. Кинематика твердого тела	19
2.1. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Формулы Эйлера и Ривальса.....	19
2.2. Плоскопараллельное движение твердого тела	24
2.3. Сложное движение точки и твердого тела.....	27
2.4. Кинематика вращательного движения твердого тела в углах Эйлера	31
2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела в кватернионах	34
2.6. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела. Формулы сложения конечных поворотов.....	37
2.7. Уравнения Пуассона	42
2.8. Кинематика вращательного движения твердого тела в направляющих косинусах.....	48
Глава 3. Динамика системы. Основные теоремы	52
3.1. Основные понятия.....	52
3.2. Основные теоремы динамики в инерциальных СО	57
3.3. Основные теоремы динамики в неинерциальных СО	61
3.4. Динамика систем переменного состава	64

Глава 4. Движение в центральном поле.....	68
4.1. Динамика точки в поле неподвижного центра.....	68
4.2. Центральнo-симметричное поле. Уравнение Бине	69
4.3. Ньтоновское поле. Законы Кеплера	70
4.4. Рассеяние частиц в кулоновом поле.....	75
4.5. Задача двух тел	77
4.6. Вектор Лапласа.....	78
4.7. О возмущениях кеплеровских орбит спутников	82
Глава 5. Динамика твердого тела.....	87
5.1. Геометрия масс твердого тела. Тензор инерции и эллипсоид инерции	87
5.2. Формулы для кинетического момента и кинетической энергии твердого тела	94
5.3. Динамические уравнения вращательного движения твердого тела	95
5.4. Уравнения движения динамически симметричного тела.....	97
5.5. Случай Эйлера.....	99
5.6. Случай Лагранжа.....	105
5.7. «Быстрый» волчок.....	111
5.8. Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного тела	113
5.9. Динамический винт твердого тела	115
Глава 6. Лагранжева механика.....	117
6.1. Механические связи и их классификация.....	117
6.2. Идеальные связи. Общее уравнение динамики.....	123
6.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода	127
6.4. Свойства уравнений Лагранжа	133
6.5. Первые интегралы уравнений Лагранжа. Теоремы об изменении обобщенной и полной энергии	139

6.6. Принцип Гамильтона	142
6.7. Формула преобразования лагранжиана при замене координат и времени.....	148
6.8. Теорема Эмми Нетер	149
Глава 7. Равновесия, устойчивость, колебания	155
7.1. Положения равновесия голономных систем. Принцип виртуальных перемещений	155
7.2. Устойчивость. Прямой (второй) метод Ляпунова.....	162
7.3. Первый метод Ляпунова исследования устойчивости	171
7.4. Устойчивость положений равновесия консервативных систем	176
7.5. О гироскопической стабилизации	178
7.6. Колебания механических систем.....	181
7.7. Вынужденные колебания линейных систем. Резонансы....	185
7.8. О бифуркациях в механических системах	192
Глава 8. Гамильтонова механика	196
8.1. Гамильтоновы системы	196
8.2. Скобки Пуассона.....	201
8.3. Первые интегралы гамильтоновых систем.....	203
8.4. Использование первых интегралов в задачах интегрирования уравнений движения.....	208
8.5. Уравнения Уиттекера.....	211
8.6. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах.....	213
Глава 9. Канонические преобразования в гамильтоновых системах	218
9.1. Критерии каноничности преобразований	218
9.2. Примеры канонических преобразований. Теорема о фазовом потоке гамильтоновой системы.....	226
9.3. Свободные канонические преобразования	229

9.4. Уравнение Гамильтона–Якоби	232
9.5. Теорема Лиувилля об условиях интегрируемости гамильтоновой системы методом Якоби	238
Глава 10. Интегральные инварианты гамильтоновых систем	242
10.1. Инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана	242
10.2. Теорема Ли Хуа-чжуна	247
10.3. Инвариантность фазового объема	250
Глава 11. Стационарные движения	252
11.1. Уравнения Рауса.....	252
11.2. Стационарные движения систем с циклическими координатами	255
11.3. Устойчивость стационарных движений.....	256
11.4. Теоремы об устойчивости стационарных движений систем с первыми интегралами	261
Глава 12. Метод осреднения. Теоремы Боголюбова	274
Приложение 1. Элементы матричного анализа	283
Приложение 2. Алгебра кватернионов	289
Список литературы.....	296

Светлой памяти академика Б. В. Раушенбаха посвящается

Предисловие

В предлагаемой заинтересованным читателям книге излагаются основные задачи и методы *классической* механики, которая базируется на аксиомах Ньютона. Перечень рассматриваемых здесь вопросов и объем учебного материала соответствуют программе двухсеместрового курса аналитической механики МФТИ.

Основные методические отличия данного учебного пособия от других состоят в следующем.

В целях компактного изложения материала используется матричный математический аппарат. Для удобства читателя необходимые сведения из матричного анализа приведены в Приложении 1.

В главе 2, где излагается кинематика твердого тела, основной акцент сделан на использовании математического аппарата кватернионов, как наиболее удобного с методической точки зрения, так и наиболее востребованного для приложений.

Подробно изложены методы Ляпунова исследования устойчивости как положений равновесия, так и стационарных движений механических систем.

Большое внимание уделено вопросу об интегрируемости гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля доказана в двух вариантах. В первом варианте за основу брались уравнения Гамильтона, во втором – уравнение Гамильтона–Якоби. Критерии каноничности преобразований (локальный и в терминах производящих функций) выводятся непосредственно из определения без использования теории интегральных инвариантов.

В последней главе учебного пособия кратко изложены основы метода осреднения, используемого для приближенного аналитического исследования движений нелинейных систем с малым параметром.

Автор выражает благодарность академику В. Ф. Журавлеву и коллегам по кафедре теоретической механики МФТИ за обстоятельное обсуждение рукописи пособия и замечания по его форме и содержанию.

Динамика материальной точки

1.1. Аксиомы классической механики

В классической механике трехмерное пространство, в котором изучается движение материальных систем, считается евклидовым. Поэтому аксиомы классической механики включают все аксиомы евклидовой геометрии. Остальная группа аксиом – это законы Ньютона, сформулированные для материальной точки.

Материальной точкой называется геометрическая точка, которой ставится в соответствие неизменный скалярный параметр m , называемый *массой*.

Для описания движения каких-либо объектов необходимо указать систему отсчета, в которой изучается это движение.

Системой отсчета (СО) называются *базис* в трехмерном евклидовом пространстве и *часы*. Базис определяется началом O и правой ортонормированной тройкой векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, а с помощью часов задается способ отсчета *времени* t . Зависимость положения точки в выбранном базисе от времени и называется *движением*.

Положение материальной точки в базисе $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ в момент времени t определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{i}_1 + x_2(t)\mathbf{i}_2 + x_3(t)\mathbf{i}_3, \quad (1.1)$$

где $x_k(t)$ – декартовы координаты точки.

Скоростью материальной точки в выбранной системе отсчета называется производная от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_1(t)\mathbf{i}_1 + \dot{x}_2(t)\mathbf{i}_2 + \dot{x}_3(t)\mathbf{i}_3. \quad (1.2)$$

По традиции, идущей от Ньютона, производные по времени обозначаются точками над символом.

Ускорением материальной точки называется производная по времени от вектора скорости:

$$\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t) = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_1(t)\mathbf{i}_1 + \ddot{x}_2(t)\mathbf{i}_2 + \ddot{x}_3(t)\mathbf{i}_3. \quad (1.3)$$

Традиционно в курсах теоретической механики в качестве аксиом классической механики приводятся все три закона Ньютона, где первый закон служит определением инерциальных систем отсчета. Но, как показано академиком В. Ф. Журавлевым [2], во избежание противоречий достаточно ограничиться только вторым и третьим законами в нижеследующей формулировке.

Третий закон Ньютона. а) Взаимодействие между материальными точками (m_i, \mathbf{r}_i) и (m_j, \mathbf{r}_j) осуществляется посредством сил \mathbf{F}_{ij} и \mathbf{F}_{ji} , которые удовлетворяют условию

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{F}_{ij} – сила, действующая на i -ю точку со стороны j -й точки (рис. 1.1).

б) Равнодействующая всех действующих на i -ю материальную точку сил есть векторная сумма этих сил, т.е. $\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij}$.

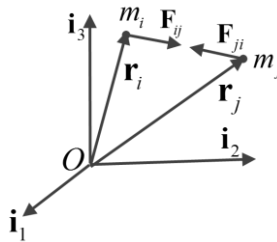


Рис. 1.1

Второй закон Ньютона. Существуют **инерциальные системы отсчета** (можно выбрать такой базис в евклидовом пространстве и такой способ отсчета времени), в которых движение **любой** материальной точки описывается уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (1.5)$$

В покоординатной форме уравнение (1.5) записывается в виде

$$m\ddot{x}_k = F_k; \quad k=1,2,3. \quad (1.5^*)$$

Здесь F_k – проекции действующей на точку силы \mathbf{F} на оси декартовой системы координат.

Из уравнения (1.5) следует, что при $\mathbf{F}(t) \equiv 0$ (при отсутствии взаимодействия материальной точки с другими объектами) материальная точка будет двигаться равномерно и прямолинейно. Таким образом, второй закон Ньютона содержит в себе и определение инерциальных СО (первый закон Ньютона) и закон движения материальных точек в инерциальных СО под действием сил.

В классической (ньютоновской) механике силы \mathbf{F} , действующие на материальную точку, могут зависеть от положения точки \mathbf{r} , от ее скорости $\dot{\mathbf{r}}$ и от времени t , а динамика точки согласно (1.5) описывается дифференциальными уравнениями второго порядка.

Следует отметить, что сформулированные выше аксиомы Ньютона не относятся к категории законов физики. К законам физики относятся установленные из наблюдений (экспериментов) зависимости действующих на материальную систему сил от состояния этой системы и ее параметров (от расстояний, скоростей, времени, масс, зарядов и т.п.).

В своем фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» Ньютон так сформулировал методологию научного исследования в области физики:

«Вся трудность физики состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления». Именно таким способом, основываясь на установленных из наблюдений законах Кеплера для движения планет, Ньютон «распознал» Закон Всемирного тяготения.

К процитированному выше тезису Ньютона можно добавить, что трудность физики заключается еще и в том, что физические процессы описываются дифференциальными уравнениями, аналитически проинтегрировать которые (построить общее решение, содержащее в явном виде всю информацию о свойствах рассматриваемой системы) удастся далеко не всегда.

1.2. Принцип относительности Галилея

Ключевой в аксиомах классической механики является гипотеза о существовании инерциальных систем отсчета, подтвержденная научной практикой. Все инерциальные системы отсчета связаны друг с другом *преобразованиями Галилея*, в которых переход от одной инерциальной СО \mathbf{I} с базисом $A_i \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ и временем t к другой

инерциальной СО \mathbf{I}' с базисом $A'\mathbf{i}'_1\mathbf{i}'_2\mathbf{i}'_3$ и временем t' описывается формулами

$$t' = t + \tau, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (1.6)$$

Здесь $\tau = \text{const}$ – смещение начала отсчета времени, $\mathbf{S} = \text{const}$ – ортогональная матрица, задающая взаимную ориентацию базисов, $\mathbf{V}_0 = \text{const}$ – относительная скорость базисов, $\mathbf{r}_0 = \text{const}$ – вектор, соединяющий начала базисов в момент $t=0$. В преобразованиях (1.6) базисы $A'\mathbf{i}'_1\mathbf{i}'_2\mathbf{i}'_3$ и $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ движутся относительно друг друга поступательно (не вращаются) с постоянной по величине и направлению скоростью \mathbf{V}_0 .

Из формул преобразования (1.6) следует, что уравнения (1.5) в системе отсчета \mathbf{I}' записываются в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = m \mathbf{S} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{S} \mathbf{F} = \mathbf{F}' \Rightarrow m \ddot{x}'_k = F'_k; \quad k=1,2,3, \quad (1.7)$$

где \ddot{x}'_k – проекции ускорения материальной точки, а F'_k – проекции силы \mathbf{F} на оси базиса $A'\mathbf{i}'_1\mathbf{i}'_2\mathbf{i}'_3$. Полученные уравнения, очевидно, имеют форму второго закона Ньютона (1.5). Этим и подтверждается, что все системы отсчета, получаемые из инерциальных с помощью преобразований Галилея (1.6), являются также инерциальными.

Отметим, что если при преобразованиях переменных сохраняется форма уравнений, то это свойство называется *ковариантностью* уравнений по отношению к таким преобразованиям переменных. Из совпадения форм уравнений (1.5) и (1.7) следует, что уравнения Ньютона (1.5) *ковариантны* по отношению к преобразованиям Галилея (1.6), и это свойство называется *принципом относительности Галилея*.

Следует отметить, что определенное выше свойство ковариантности отличается от свойства инвариантности. Под *инвариантностью* уравнений по отношению к преобразованиям переменных понимается сохранение не только формы, но и *структуры* уравнений, т.е. когда в результате преобразования получаются точно такие же уравнения, как при тождественном преобразовании. Если учесть, что в общем случае сила, действующая на материальную точку, мо-

жет зависеть от ее положения, скорости и времени, то можно увидеть, что инвариантность – это существенно более редкое свойство, чем ковариантность. Например, инвариантными по отношению ко всем преобразованиям (1.6) являются только уравнения (1.5) для материальной точки, движущейся по инерции (при $\mathbf{F}(t) \equiv 0$). Если же $\mathbf{F} = \mathbf{const} \neq 0$, то уравнения (1.5) будут инвариантными только по отношению к тем из преобразований (1.6), для которых $\mathbf{S} = \mathbf{E}$ (единичная матрица).

1.3. Динамика точки в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа

Движение материальной точки может быть описано не только декартовыми координатами. Имеется много примеров конкретных задач, где использование переменных, отличных от декартовых координат, позволяет получить более простые для анализа уравнения движения, чем в декартовых координатах.

Определение. Произвольный набор из трех независимых переменных $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, с помощью которых однозначными формулами

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}) \Leftrightarrow x_k = x_k(q_1, q_2, q_3); \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.8)$$

определяется положение точки в трехмерном пространстве, называется *обобщенными (криволинейными) координатами* точки. Предполагается, что между декартовыми координатами \mathbf{r} и обобщенными координатами \mathbf{q} имеется взаимно однозначное соответствие, т.е. преобразование (1.8) обратимо.

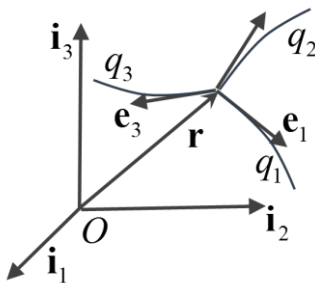


Рис. 1.2

Кривые, получаемые из формул (1.8) изменением одной из координат q_k при фиксированных остальных, называются *координатными линиями* (рис. 1.2). Частные производные вектор-функций (1.8) по переменным q_k записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = H_k \mathbf{e}_k; \quad H_k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right|; \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Здесь \mathbf{e}_k – единичные векторы *локального базиса* криволинейных координат, направленные по касательным к координатным линиям, а множители H_k называются *коэффициентами Ламе*.

Скорость точки в координатах \mathbf{q} выражается формулой

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^3 H_k \dot{q}_k \mathbf{e}_k. \quad (1.10)$$

Обратим внимание, что векторы \mathbf{e}_k необязательно взаимно ортогональны. Поэтому в общем случае выражения $H_k \dot{q}_k$ есть *компоненты* вектора скорости точки в осях локального базиса, и они отличаются от проекций $V_k = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_k$ вектора скорости на эти оси.

Из формул (1.10) вытекают следующие тождества:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_k}. \quad (1.11)$$

Второе из тождеств (1.11) означает перестановочность операций вычисления полной производной по времени и частной производной по координате.

Отметим, что по смыслу частных производных при вычислении выражений $\partial f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial q_k$ и $\partial f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{q}_k$ обобщенные координаты q_k и обобщенные скорости \dot{q}_k рассматриваются как независимые переменные.

Обозначим через W_k проекции вектора ускорения точки на оси \mathbf{e}_k локального базиса. Учитывая формулы (1.9) и используя правило дифференцирования произведения, получим

$$W_k = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{H_k} \left(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) = \frac{1}{H_k} \left(\frac{d}{dt} \left(\mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right). \quad (1.12)$$

Тождества (1.11) позволяют переписать формулы (1.12) в виде

$$W_k = \frac{1}{H_k} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (V^2/2)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (V^2/2)}{\partial q_k} \right); \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

На основании формул (1.13) и (1.9), проецируя второй закон Ньютона (1.5) на оси локального базиса криволинейных координат, получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k; \quad Q_k = H_k \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.14)$$

Здесь $T = mV^2/2$ – кинетическая энергия материальной точки, выраженная через ее обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Уравнения (1.14) носят название *уравнений Лагранжа 2-го рода*. Левая часть этих уравнений представляет собой *оператор Эйлера* от кинетической энергии материальной точки. Правые части уравнений Q_k называются *обобщенными силами*.

Уравнения (1.14) так же, как и уравнения Ньютона (1.5), являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

В векторной форме уравнения (1.14) записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}; \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F}. \quad (1.15)$$

Здесь \mathbf{q} – вектор обобщенных координат, $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей, а \mathbf{Q} – вектор обобщенных сил.

Определение. *Элементарной работой* силы \mathbf{F} называется скалярное произведение $\delta A(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^T \mathbf{F}$, где $d\mathbf{r}$ – элементарное (бесконечно малое) *перемещение материальной точки*, к которой приложена сила.

Обратим внимание, что первичным понятием является именно элементарная работа, а работа на конечном перемещении выражается интегралом от элементарной работы на траектории точки.

Через вектор обобщенной силы \mathbf{Q} и вариацию $d\mathbf{q}$ вектора обобщенных координат элементарная работа силы выражается формулой

$$\delta A = d\mathbf{r}^T \mathbf{F} = d\mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F} = d\mathbf{q}^T \mathbf{Q}. \quad (1.16)$$

Определение. Обобщенная сила $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ называется *потенциальной*, если существует скалярная функция $\Pi(\mathbf{q}, t)$, называемая *потенциальной энергией*, такая, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \Leftrightarrow Q_k(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Критерий потенциальности силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ определяется условием (см. Приложение 1):

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \mathbf{Q}^T(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (1.18)$$

а потенциальная энергия с точностью до аддитивной функции времени выражается формулой

$$\Pi(\mathbf{q}, t) = -\int_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{Q}(\lambda \mathbf{q}, t) d\lambda. \quad (1.19)$$

Заметим, что во многих задачах для установления факта потенциальности силы и определения функции $\Pi(\mathbf{q}, t)$ необязательно использовать формулы (1.18) и (1.19). Из приведенного выше определения следует, что сила потенциальна тогда и только тогда, когда элементарная работа этой силы есть *изохронный* дифференциал некоторой скалярной функции $U = -\Pi(\mathbf{q}, t)$. Поэтому если по выражению для элементарной работы силы удастся «увидеть» эту функцию, то задача решена.

Отметим также, что свойство потенциальности сил не зависит от выбора обобщенных координат. Если потенциальна «декартова» сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, то потенциальна и соответствующая ей обобщенная сила $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$. Действительно, из определений (1.14) и (1.17) имеем

$$Q_k = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия в обобщенных координатах \mathbf{q} получается из потенциальной энергии $\Pi(\mathbf{r}, t)$ подстановкой в выражение для $\Pi(\mathbf{r}, t)$ формул преобразования (1.8) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$.

В рассматриваемом случае трехмерного координатного пространства условие потенциальности (1.18) может быть записано также в виде (см. Приложение 1):

$$\mathbf{rot} \mathbf{Q} = \nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) = 0; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.20)$$

В случае потенциальности сил $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ уравнения Лагранжа (1.15) записываются с помощью одной функции $L = T - \Pi$, называемой *функцией Лагранжа*, в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (1.21)$$

Определение. Потенциальные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$, не зависящие явно от времени, называются *консервативными*.

Определение. Сила $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ называется *обобщенно потенциальной*, если существует скалярная функция $U(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, называемая *обобщенным потенциалом*, такая, что

$$\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.22)$$

В случае обобщенно потенциальных сил уравнения Лагранжа также записываются в форме (1.21), а функция Лагранжа определяется формулой $L = T - U$.

В электродинамике, помимо скалярного потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$, используется *векторный потенциал* $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Через эти потенциалы векторы напряженностей магнитного и электрического полей выражаются формулами

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.23)$$

а сила, действующая на заряд e , определяется формулой

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}). \quad (1.24)$$

Покажем, что эта сила является обобщенно потенциальной и ей соответствует скалярный обобщенный потенциал

$$U = e[\Phi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.25)$$

Действительно, согласно определению (1.22) для силы, задаваемой обобщенным потенциалом (1.25), получим следующее выражение:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -e \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}^T} - \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right]. \quad (1.26)$$

В этом выражении матрица в круглых скобках является кососимметрической размера 3×3 , и поэтому матричное произведение выражается через векторное произведение формулой

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}^T} - \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{r}} = (\nabla \times \mathbf{A}) \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.27)$$

После учета формул (1.23) и (1.27) выражение (1.26) приводится к виду (1.24):

$$\mathbf{F} = -e \left[(\nabla \times \mathbf{A}) \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right] = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}).$$

1.4. Естественный способ описания движения точки

Естественный способ описания движения точки отличается от координатного тем, что здесь заранее задается траектория движения точки Γ в системе отсчета. На этой траектории выбирается начало отсчета O , а положение точки на траектории задается длиной дуги s (рис. 1.3). В итоге положение точки в системе отсчета определяется вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ одной скалярной переменной s .

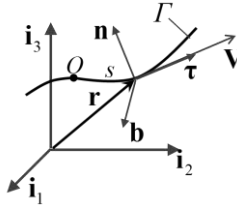


Рис. 1.3

В предположении, что траектория является гладкой кривой, вектор скорости точки выражается формулой

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} = \boldsymbol{\tau} V, \quad (1.28)$$

где $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$ – *единичный* вектор, направленный по *касательной* к траектории, а $V = \dot{s}$ – *величина* скорости точки.

Вектор ускорения точки записывается в виде

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{k} V^2 + \boldsymbol{\tau} \dot{V} = \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n} + \dot{V} \boldsymbol{\tau}; \quad \mathbf{k} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}. \quad (1.29)$$

Здесь вектор \mathbf{k} называется *вектором кривизны* траектории в рассматриваемой точке, \mathbf{n} – *единичный вектор главной нормали* к траектории, ρ – *радиус кривизны* траектории.

Единичный вектор $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ называется *вектором бинормали* к траектории, а базис, образуемый правой тройкой взаимно ортогональных векторов $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и $\boldsymbol{\beta}$, называется *естественным*, или *сопро-вождающим трехгранником Френе*. В проекциях на оси этого базиса скорость точки выражается формулой (1.28), а ускорение точки – формулой (1.29).

Проекция ускорения точки на касательное направление $W_{\boldsymbol{\tau}} = \dot{V}$ называется *касательным* или *тангенциальным* ускорением точки, а проекция ускорения на нормаль $W_n = V^2/\rho$ – *нормальным* ускорением точки.

Кинематика твердого тела

2.1. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Формулы Эйлера и Ривальса

Обычно в курсах теоретической механики дается следующее определение твердого тела:

Твердым телом называется такая система материальных точек, для которой при любом движении *расстояние между любой парой точек не меняется с течением времени*.

В данном определении условие неизменности расстояний между точками тела эквивалентно неизменности скалярного произведения векторов, соединяющих произвольные пары точек тела (рис. 2.1):

$$(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C) = \text{const} \quad \forall O, B, C. \quad (2.1)$$

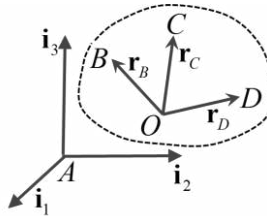


Рис. 2.1

Следует отметить, что приведенное выше определение твердого тела не является полным. Зеркальные отражения в трехмерном пространстве также удовлетворяют условию (2.1), но они не включаются в математическую модель твердого тела. Полное определение твердого тела описывается условием (2.1), дополненным условием неизменности смешанного произведения векторов, соединяющих произвольные пары точек в теле:

$$((\mathbf{r}_B \times \mathbf{r}_C) \cdot \mathbf{r}_D) = \text{const}. \quad (2.2)$$

Из условия (2.1) следует, что если в какой-то момент времени с некоторыми точками тела связать ортонормированный базис, то этот базис будет оставаться ортонормированным в любой последу-

ющий момент. Условие (2.2) означает неизменность взаимной ориентации базисных векторов в том смысле, что правая тройка векторов остается правой, а левая – левой.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела относительно системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, задаваемой правым ортонормированным базисом с началом в точке A (рис. 2.2). Выберем в теле жестко связанный с ним правый ортонормированный базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с началом в точке O . В этом базисе радиус-вектор \mathbf{r}_{OM} произвольной точки M тела имеет неизменные компоненты $r_k = (\mathbf{r}_{OM} \cdot \mathbf{e}_k)$; $k=1,2,3$, а положение этой точки в системе отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ определяется формулой

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_{OM} = \mathbf{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \mathbf{e}_k. \quad (2.3)$$

Связь между скоростями двух произвольных точек твердого тела находится дифференцированием равенства (2.3) по времени и выражается формулой

$$\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{r}}_{OM} = \sum_{k=1}^3 r_k \dot{\mathbf{e}}_k. \quad (2.4)$$

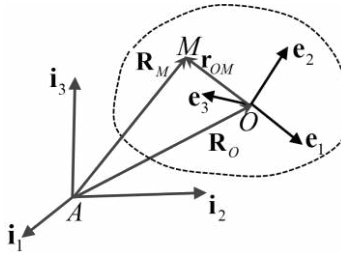


Рис. 2.2

Теорема 2.1. При любом движении твердого тела существует единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$ (угловая скорость твердого тела), с помощью которого связь между скоростями двух произвольных точек тела O и M выражается **формулой Эйлера**:

$$\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{r}}_{OM} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}. \quad (2.5)$$

Доказательство существования. Покажем, что для любого вектора \mathbf{r}_{OM} , соединяющего точки в теле, формуле Эйлера (2.5) удовлетворяет следующий вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \times \dot{\mathbf{e}}_k. \quad (2.6)$$

При доказательстве будем учитывать, что из условия $r_k = \text{const}$ следует $(\dot{\mathbf{r}}_{OM} \cdot \mathbf{e}_k) = -(\mathbf{r}_{OM} \cdot \dot{\mathbf{e}}_k)$, а вектор $\dot{\mathbf{r}}_{OM}$ помимо формулы (2.4) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_{OM} = \sum_{k=1}^3 (\dot{\mathbf{r}}_{OM} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k = - \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_{OM} \cdot \dot{\mathbf{e}}_k) \mathbf{e}_k. \quad (2.7)$$

Используя правило вычисления двойного векторного произведения и учитывая формулы (2.4) и (2.7), получим

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM} = -\frac{1}{2} \mathbf{r}_{OM} \times \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \times \dot{\mathbf{e}}_k = -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_{OM} \cdot \dot{\mathbf{e}}_k) \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} r_k \dot{\mathbf{e}}_k = \dot{\mathbf{r}}_{OM}.$$

Доказательство единственности. Предположим, что существует два вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, удовлетворяющих формуле (2.5). Тогда для любого вектора \mathbf{r}_{OM} из трехмерного пространства должно выполняться равенство $(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{OM} = 0$, что возможно только в случае $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$. Теорема доказана.

Теорему 2.1 можно принять за *неявное определение угловой скорости твердого тела* (ниже будет дано и явное определение). Согласно этой теореме угловая скорость является характеристикой движения твердого тела как целого и не зависит от выбора базиса и точек в теле. Поэтому лишены смысла формулировки типа «угловая скорость точки» или «угловая скорость тела относительно точки». Угловая скорость твердого тела всегда определяется по отношению к некоторой конкретной системе отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

Поскольку в формуле Эйлера (2.5) \mathbf{r}_{OM} – любой вектор, неподвижный в теле, то производные по времени от векторов \mathbf{e}_k связанного с телом базиса, вычисленные в системе отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, выражаются через угловую скорость тела аналогичными (2.5) формулами

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k; \quad k=1,2,3. \quad (2.8)$$

Скалярно умножив обе части формулы Эйлера (2.5) на \mathbf{r}_{OM} и на $\boldsymbol{\omega}$, получим следующие соотношения, называемые *кинематическими инвариантами твердого тела*:

$$\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{r}_{OM} = \mathbf{V}_O \cdot \mathbf{r}_{OM}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}_O \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.10)$$

Равенство (2.9) означает, что равны друг другу проекции скоростей двух точек тела на направление, соединяющее эти точки, а равенство (2.10) означает, что для всех точек твердого тела проекции скоростей на направление угловой скорости тела одинаковы.

Движение твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = 0$ называется *поступательным* движением. При таком движении скорости всех точек тела одинаковы.

Формула Эйлера (2.5) $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}$ описывает распределение скоростей точек в твердом теле. Из этой формулы следует, что произвольное движение твердого тела в каждый момент времени представимо в виде комбинации *поступательного движения* со скоростью \mathbf{V}_O выбранного в теле полюса O и *вращения* вокруг оси, проходящей через точку O , с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Выбирая в качестве полюса разные точки тела, получим разные представления движения тела.

Кинематическим винтом называется такое представление движения твердого тела, в котором вектор скорости \mathbf{V}_C полюса C параллелен вектору угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 2.3), т. е.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_C = 0. \quad (2.11)$$

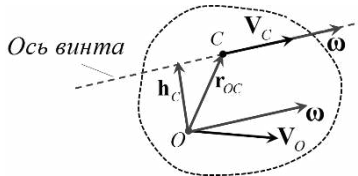


Рис. 2.3

Пусть известны скорость \mathbf{V}_O некоторой точки O твердого тела и угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$. Согласно формуле Эйлера для точек C , удовлетворяющих условию (2.11), должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OC}) = 0, \quad (2.12)$$

где \mathbf{r}_{OC} – радиус-вектор искомой точки C . Разложим этот вектор на две составляющие

$$\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{h}_C + \mathbf{f}_C, \text{ где } \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_C = 0, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}_C = 0.$$

Тогда из уравнения (2.12) получим, что составляющая \mathbf{h}_C , ортогональная вектору $\boldsymbol{\omega}$, однозначно определится формулой

$$\mathbf{h}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O / \omega^2; \quad \omega \neq 0, \quad (2.13)$$

а составляющая \mathbf{f}_C , параллельная вектору $\boldsymbol{\omega}$, может принимать любое значение. Отсюда следует, что точки тела, удовлетворяющие условию (2.11), образуют прямую, называемую *осью кинематического винта*. Эта прямая параллельна вектору угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ – *главному вектору винта*. Скорости всех точек тела, принадлежащих оси винта, одинаковы по величине и по направлению. Величина V_C скорости этих точек называется *главным моментом винта*. Ее можно определить по известной скорости точки O и угловой скорости тела, используя инвариантность скалярного произведения (2.10): $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_O$. Записывая вектор \mathbf{V}_C в виде $\mathbf{V}_C = V_C \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|$, получим $V_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_O / |\boldsymbol{\omega}|$.

Таким образом, кинематический винт твердого тела характеризуется *тремя параметрами*: *осью винта, вектором угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ и величиной скорости V_C точек оси винта*.

Отметим, что ось кинематического винта является осью минимальных скоростей точек твердого тела. В частном случае, когда $V_C = 0$, движение тела представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси. Для мгновенно поступательного движения тела ($\boldsymbol{\omega} = 0$) кинематический винт однозначно не определен.

Вычисление угловой скорости твердого тела по скоростям его точек. Из формулы Эйлера следует, что в общем случае скоростей

двух точек твердого тела недостаточно для однозначного определения угловой скорости тела. Из уравнения $\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}$ однозначно определяется только составляющая $\boldsymbol{\omega}_\perp$ вектора $\boldsymbol{\omega}$, ортогональная вектору \mathbf{r}_{OM} , формулой

$$\boldsymbol{\omega}_\perp = \mathbf{r}_{OM} \times (\mathbf{V}_M - \mathbf{V}_O) / r_{OM}^2.$$

Угловая скорость твердого тела однозначно определяется по скоростям $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ трех его точек O_1, O_2, O_3 , не лежащих на одной прямой. В этом случае векторы $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_3 O_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{O_3 O_2}$ и $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ образуют базис, а угловая скорость тела выражается формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2} \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2} \mathbf{r}_2 + \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3) \cdot \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

Дифференцируя формулу Эйлера (2.5) по времени, получаем следующую формулу распределения ускорений точек в твердом теле, называемую *формулой Ривальса*:

$$\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OM} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}). \quad (2.14)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ – *угловое ускорение* твердого тела.

Первое слагаемое в формуле (2.14) называется *ускорением полюса*, второе слагаемое – *вращательным ускорением точки M*, а третье – *осеостремительным ускорением точки M*.

Обозначив через \mathbf{h}_{OM} составляющую вектора \mathbf{r}_{OM} , ортогональную вектору $\boldsymbol{\omega}$, получим для осеостремительного ускорения точки следующую формулу:

$$\mathbf{W}_M^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}) = -\omega^2 \mathbf{h}_{OM}. \quad (2.15)$$

2.2. Плоскопараллельное движение твердого тела

Движение твердого тела относительно системы отсчета $Ai_1i_2i_3$ называется *плоскопараллельным (плоским)*, если каждая точка тела перемещается в неподвижной плоскости, параллельной некоторой плоскости Π . Иными словами, любое сечение тела неподвижной

плоскостью, параллельной Π , остается в этой плоскости при плоском движении тела. При этом все точки тела, лежащие на оси, перпендикулярной к плоскости Π , имеют одинаковые скорости и ускорения, вследствие чего изучение плоского движения тела сводится к изучению движения только одного из его сечений, т. е. к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

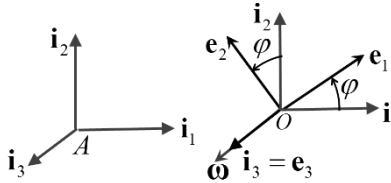


Рис. 2.4

Рассмотрим движение плоского тела в плоскости. Будем считать, что плоскость Π совпадает с плоскостью базисных векторов \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Выберем связанный с телом базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ таким образом, чтобы орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 лежали в плоскости фигуры (рис. 2.4). Положение фигуры в плоскости Π можно задать тремя параметрами – двумерным радиусом-вектором \mathbf{R}_O точки O и углом φ между ортами \mathbf{e}_1 и \mathbf{i}_1 .

Из определения плоского движения следует, что вектор \mathbf{e}_3 связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в любой момент времени ортогонален к плоскости движения фигуры и совпадает по направлению с вектором \mathbf{i}_3 системы отсчета. Поэтому на основании формулы Эйлера (2.8) получаем

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{i}_3. \quad (2.16)$$

Таким образом, при плоском движении вектор угловой скорости твердого тела ортогонален к плоскости движения и определяется одной скалярной величиной ω .

Значение величины угловой скорости тела при плоском движении может быть выражено через производную от угла φ следующим образом. С одной стороны, производная по времени от вектора \mathbf{e}_1 в

системе отсчета $Ai_1i_2i_3$ выражается формулой $\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\phi}\mathbf{e}_2$, а с другой стороны, в силу формул (2.8) и (2.16) имеем $\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \omega \mathbf{e}_2$. Отсюда получаем $\omega = \dot{\phi}$.

При плоском движении плоской фигуры вектор угловой скорости однозначно определяется по скоростям двух точек этой фигуры. Действительно, в силу формулы Эйлера (2.5) скорости двух точек фигуры O и B связаны равенством $\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OB}$. Умножив обе части этого равенства векторно на вектор \mathbf{r}_{OB} слева, получим с учетом взаимной ортогональности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_{OB} следующее выражение:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_{OB} \times (\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_O) / |\mathbf{r}_{OB}|^2. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17), в частности, следует, что если при плоском движении скорости двух точек тела одинаковы, то угловая скорость тела равна нулю.

Одним из важных свойств плоского движения тела является существование в каждый момент времени *мгновенного центра скоростей* (неподвижной точки тела). Наличие этой точки доказывается следующим образом. Из формулы Эйлера следует, что неподвижная точка C тела удовлетворяет уравнению $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OC} = 0$. Умножив векторно это уравнение на вектор $\boldsymbol{\omega}$ слева и учитывая взаимную ортогональность векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_{OC} , получим следующую формулу, однозначно определяющую положение неподвижной точки тела:

$$\mathbf{r}_{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O / \omega^2; \quad \omega \neq 0. \quad (2.18)$$

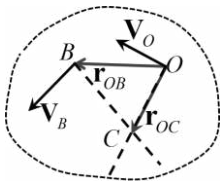


Рис. 2.5

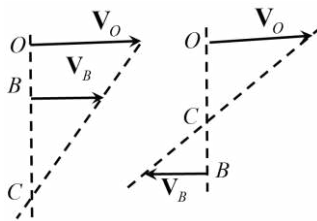


Рис. 2.6

Из формулы (2.18) следует, что мгновенный центр скоростей лежит на прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной к вектору скорости этой точки. Поэтому он может быть найден как точка пересечения перпендикуляров к скоростям двух точек тела, если скорости этих точек не параллельны друг другу (рис. 2.5). Для случая, когда известные скорости двух точек \mathbf{V}_B и \mathbf{V}_O параллельны, геометрический способ определения положения точки C приведен на рис. 2.6.

Использование мгновенного центра скоростей при решении задач на плоское движение полезно в том отношении, что если эту точку выбрать в качестве полюса, то формула Эйлера приобретает наиболее простой вид:

$$\mathbf{V}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB}. \quad (2.19)$$

Из этой формулы следует, что по величине скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей, а величину угловой скорости тела можно определить как отношение величины скорости некоторой точки тела к ее расстоянию до неподвижной точки C : $|\boldsymbol{\omega}| = |\mathbf{V}_B|/|\mathbf{r}_{CB}|$.

Отметим также, что при плоском движении тела выражение для осецилирующего ускорения точек в формуле Ривальса (2.14) в силу взаимной ортогональности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_{OM} принимает упрощенный вид:

$$\mathbf{W}_M^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM}) = -\omega^2 \mathbf{r}_{OM}. \quad (2.20)$$

2.3. Сложное движение точки и твердого тела

Под термином *сложное движение* подразумевается, что движение точки или твердого тела представляется в виде комбинации нескольких движений. В постановке задачи предполагается, что имеется неподвижная система отсчета $A_i \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ и подвижная система отсчета $B_j \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$. При этом считается известным *относительное движение*, т.е. движение точки или тела относительно базиса $B_j \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$, и *переносное движение* – движение базиса $B_j \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$ относительно базиса

$A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Требуется найти *абсолютное движение* – движение относительно базиса $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

Рассмотрим сначала задачу на сложное движение точки (рис. 2.7). Положение точки M в базисе $B\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\mathbf{j}_3$, относительная скорость и относительное ускорение точки M выражаются формулами

$$\mathbf{r}_M = \sum_{k=1}^3 r_k \mathbf{j}_k, \quad \mathbf{V}_M^{\text{отн}} = \sum_{k=1}^3 \dot{r}_k \mathbf{j}_k, \quad \mathbf{W}_M^{\text{отн}} = \sum_{k=1}^3 \ddot{r}_k \mathbf{j}_k. \quad (2.21)$$

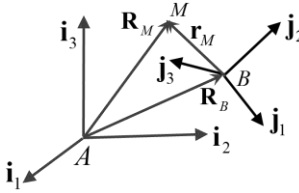


Рис. 2.7

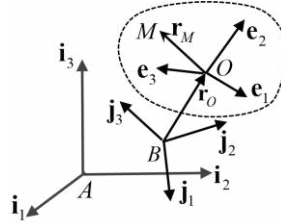


Рис. 2.8

Движение подвижного базиса относительно неподвижного задается скоростью $\mathbf{V}_B = \dot{\mathbf{R}}_B$ и ускорением $\mathbf{W}_B = \dot{\mathbf{V}}_B$ точки B , а также угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}}$ и угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}}$ подвижного базиса относительно неподвижного.

Абсолютная скорость точки M есть производная по времени от вектора $\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_B + \mathbf{r}_M$, вычисленная в системе отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Учитывая, что согласно формуле Эйлера (2.8):

$$\dot{\mathbf{j}}_k = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{j}_k; \quad k=1,2,3, \quad (2.22)$$

получим

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \sum_{k=1}^3 r_k \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{j}_k + \sum_{k=1}^3 \dot{r}_k \mathbf{j}_k = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M + \mathbf{V}_M^{\text{отн}}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{V}_M^{\text{абс}} = \mathbf{V}_B + \dot{\mathbf{r}}_M = \mathbf{V}_M^{\text{пер}} + \mathbf{V}_M^{\text{отн}}; \quad \mathbf{V}_M^{\text{пер}} = \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M. \quad (2.24)$$

Таким образом, абсолютная скорость точки M есть векторная сумма *переносной* скорости $\mathbf{V}_M^{\text{пер}}$ и *относительной* скорости $\mathbf{V}_M^{\text{отн}}$. При этом вектор $\mathbf{V}_M^{\text{пер}}$ выражается формулой Эйлера распределения

скоростей в твердом теле и равен скорости той точки подвижной системы $Bj_1j_2j_3$, рассматриваемой как твердое тело, в которой в данный момент находится точка M . Иначе говоря, переносная скорость точки M получается «замораживанием» относительного движения этой точки.

Абсолютное ускорение точки M находится дифференцированием вектора скорости (2.24) по времени в системе $Ai_1i_2i_3$. При учете формул (2.22) и (2.23) получим

$$\dot{\mathbf{V}}_M^{\text{отн}} = \sum_{k=1}^3 \ddot{r}_k \mathbf{j}_k + \sum_{k=1}^3 \dot{r}_k \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{j}_k = \mathbf{W}_M^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{V}_M^{\text{отн}}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{W}_M^{\text{абс}} = \mathbf{W}_B + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times (\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M) + \mathbf{W}_M^{\text{отн}} + 2\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{V}_M^{\text{отн}}. \quad (2.26)$$

В полученной формуле (2.26) сумма первых трех слагаемых

$$\mathbf{W}_M^{\text{пер}} = \mathbf{W}_B + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times (\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_M) \quad (2.27)$$

называется *переносным ускорением* точки M . В соответствии с формулой Ривальса (2.14) вектор $\mathbf{W}_M^{\text{пер}}$ (2.27) выражает ускорение той точки подвижной системы $Bj_1j_2j_3$, рассматриваемой как твердое тело, в которой в данный момент находится движущаяся относительно этой системы точка M . Этот вектор вычисляется «замораживанием» точки M в системе $Bj_1j_2j_3$.

Последнее слагаемое в формуле (2.26)

$$\mathbf{W}_M^{\text{кор}} = 2\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{V}_M^{\text{отн}} \quad (2.28)$$

называется *кориолисовым ускорением* точки.

Таким образом, абсолютное ускорение точки выражается следующей формулой, называемой *формулой Кориолиса*:

$$\mathbf{W}_M^{\text{абс}} = \mathbf{W}_M^{\text{пер}} + \mathbf{W}_M^{\text{отн}} + \mathbf{W}_M^{\text{кор}}. \quad (2.29)$$

Формулы (2.24) и (2.28) дают правило вычисления скоростей и ускорений точек методом сложного движения.

В задаче на сложное движение твердого тела (рис. 2.8) относительное движение тела задается относительной скоростью $\mathbf{V}_O^{\text{отн}}$ и относительным ускорением $\mathbf{W}_O^{\text{отн}}$ выбранного в теле полюса O , а

также относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ и относительным угловым ускорением тела $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}}$. Требуется найти абсолютную скорость $\mathbf{V}_O^{\text{абс}}$ и абсолютное ускорение $\mathbf{W}_O^{\text{абс}}$ полюса O , абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}}$ и абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{абс}}$ тела.

Поскольку векторы $\mathbf{V}_O^{\text{абс}}$ и $\mathbf{W}_O^{\text{абс}}$ определяются по установленным выше формулам (2.24) и (2.28) для сложного движения точки, то в рассматриваемой задаче остается получить формулы для вычисления $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{абс}}$.

Чтобы найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}}$ твердого тела в системе $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, запишем скорость произвольной точки M тела в этой системе. С одной стороны, в силу формулы Эйлера скорость точки M может быть записана через искомую угловую скорость в виде

$$\mathbf{V}_M^{\text{абс}} = \mathbf{V}_O^{\text{абс}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{абс}} \times \mathbf{r}_M. \quad (2.30)$$

С другой стороны, эту скорость можно выразить по установленным выше формулам сложного движения точки следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_M^{\text{абс}} &= \mathbf{V}_M^{\text{пер}} + \mathbf{V}_M^{\text{отн}} = [\mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times (\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_M)] + [\mathbf{V}_O^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} \times \mathbf{r}_M] = \\ &= \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{r}_O + \mathbf{V}_O^{\text{отн}} + (\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}) \times \mathbf{r}_M = \mathbf{V}_O^{\text{абс}} + (\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}) \times \mathbf{r}_M. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученную формулу с формулой (2.30) и учитывая, что \mathbf{r}_M – произвольный вектор из трехмерного пространства, получаем следующую *формулу сложения угловых скоростей*:

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{абс}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}. \quad (2.31)$$

Для вычисления абсолютного углового ускорения тела $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{абс}}$ нужно продифференцировать вектор абсолютной угловой скорости (2.31) в системе $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. При этом следует учитывать, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}}$ представляет собой производную по времени от вектора $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$, вычисленную в системе $B\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\mathbf{j}_3$. Поэтому производная по времени от вектора $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$, вычисленная в системе $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, равна

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \mathbf{j}_k + \sum_1^3 \omega_k^{\text{отн}} \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{j}_k = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}},$$

а формула для абсолютного углового ускорения твердого тела записывается в следующем виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{пер}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{отн}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}. \quad (2.32)$$

Формулы (2.24), (2.28), (2.31) и (2.32) дают возможность вычислять все кинематические параметры абсолютного движения точки и твердого тела через заданные кинематические параметры переносного и относительного движения.

2.4. Кинематика вращательного движения твердого тела в углах Эйлера

Для задания положения твердого тела в некоторой системе отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ необходимо задать положение связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

Если ввести систему отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, оси которой параллельны одноименным осям исходной системы $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ (рис. 2.9), то положение твердого тела может быть полностью описано положением точки O и некоторым набором переменных, задающих *ориентацию* твердого тела – *взаимное положение базисов* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, имеющих общее начало в точке O .

Описанная схема лежит в основе всех существующих способов задания положения твердого тела. В каждом из них в качестве трех переменных используются координаты вектора \mathbf{R}_O выбранного в теле полюса O , а различие заключается в разном выборе остальных переменных, задающих ориентацию тела.

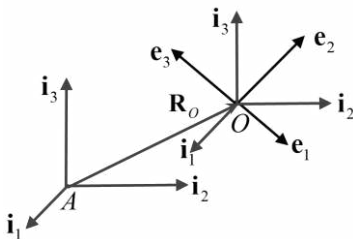


Рис. 2.9

Углы конечного вращения. Положение твердого тела с неподвижной точкой можно задавать различными системами углов –

Эйлера, Крылова и др. Суть такого описания основывается на том, что два правых ортонормированных базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, имеющих общее начало, можно совместить последовательными поворотами вокруг трех некопланарных осей на некоторые углы.

Рассмотрим систему углов Эйлера (рис. 2.10). Пусть базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ занимает произвольное положение. Все векторы \mathbf{i}_k базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ можно совместить с одноименными векторами \mathbf{e}_k базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с помощью следующих трех поворотов:

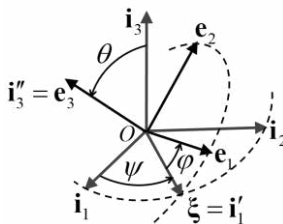


Рис. 2.10

1. Поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 на угол ψ до совмещения вектора \mathbf{i}_1 с линией узлов $\xi = \mathbf{i}'_1$, т. е. с линией пересечения плоскостей векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
2. Поворот вокруг линии узлов \mathbf{i}'_1 на угол θ до совмещения орта \mathbf{i}_3 с ортом \mathbf{e}_3 .
3. Поворот вокруг оси \mathbf{e}_3 на угол ϕ до полного совмещения базисов.

Совокупность указанных поворотов переводит базис $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ в базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и представляет собой последовательность поворотов на эйлеровы углы ψ (угол прецессии), θ (угол нутации) и ϕ (угол собственного вращения).

Кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела называются уравнения, связывающие в дифференциальной форме переменные, задающие ориентацию твердого тела, с угловой скоростью твердого тела.

Выведем кинематические уравнения в углах Эйлера. В соответствии с правилом выбора углов Эйлера (рис. 2.10) движение тела с

неподвижной точкой представляется в виде суммы трех вращений: 1) вокруг оси прецессии \mathbf{i}_3 с угловой скоростью $\dot{\psi}$; 2) вокруг линии узлов \mathbf{i}'_1 с угловой скоростью $\dot{\theta}$; 3) вокруг оси собственного вращения \mathbf{e}_3 с угловой скоростью $\dot{\phi}$. Поэтому из формулы сложения угловых скоростей (2.31) в сложном движении тела следует, что вектор угловой скорости определяется выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{i}_3 + \dot{\theta} \mathbf{i}'_1 + \dot{\phi} \mathbf{e}_3. \quad (2.33)$$

Проецируя равенство (2.33) на оси связанного с телом базиса и используя для проекций угловой скорости на эти оси предложенные Эйлером обозначения

$$p = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1, \quad q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2, \quad r = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3, \quad (2.34)$$

получим следующую систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Кинематические уравнения Эйлера получаются разрешением системы (2.35) относительно производных от углов Эйлера и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) / \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\phi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Если известны проекции угловой скорости $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ и начальные значения углов Эйлера, то интегрированием уравнений (2.36) определяются текущие значения углов Эйлера.

Следует отметить, что уравнения (2.36) вырождаются в точках $\sin \theta = 0$. Эта особенность ограничивает их применение в прикладных задачах, где ориентация твердого тела определяется по его угловой скорости численным интегрированием кинематических уравнений.

2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела в кватернионах

Алгебра кватернионов подробно изложена в Приложении 2.

Для задания ориентации твердого тела используются *нормированные* кватернионы:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} = \cos \varphi + \mathbf{e} \sin \varphi; \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \lambda_0^2 + |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1. \quad (2.37)$$

Здесь φ – угол в тригонометрической форме кватерниона.

Кватернионный способ задания ориентации твердого тела обосновывается нижеследующей теоремой.

Теорема 2.2. *Произвольное положение связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно системы отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ может быть задано нормированным кватернионом Λ по формулам*

$$\mathbf{e}_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \bar{\Lambda}; \quad k=1, 2, 3. \quad (2.38)$$

При этом каждому положению тела соответствуют два значения кватерниона Λ , отличающиеся знаком.

Доказательство. Найдем кватернион Λ из соотношений (2.38), рассматривая их как систему уравнений относительно неизвестного Λ . Решение будем искать в виде (2.37).

Введем следующие обозначения для разностей и сумм одноименных базисных векторов:

$$\mathbf{r}_k = (\mathbf{e}_k - \mathbf{i}_k), \quad \mathbf{s}_k = (\mathbf{e}_k + \mathbf{i}_k); \quad k=1, 2, 3. \quad (2.39)$$

Для этих векторов выполняются следующие равенства:

$$(\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{r}_k) = 0, \quad (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{r}_k) = -(\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{r}_j); \quad j \neq k. \quad (2.40)$$

Переписывая уравнения (2.38) в виде

$$\mathbf{e}_k \circ \Lambda = \Lambda \circ \mathbf{i}_k; \quad k=1, 2, 3,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0; \quad k=1, 2, 3, \quad (2.41)$$

$$\lambda_0 \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s}_k; \quad k=1, 2, 3. \quad (2.42)$$

Рассмотрим сначала случай, когда базисы совпадают, т.е. $\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k$; $k=1,2,3$. В этом случае $\mathbf{r}_k = 0$, $\mathbf{s}_k = 2\mathbf{i}_k$, а из уравнений (2.42) получим $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{i}_k = 0$; $k=1,2,3$. Отсюда следует $\boldsymbol{\lambda} = 0$, т.е. $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0$. Учитывая условие нормировки, получаем два решения $\boldsymbol{\Lambda} = \pm 1$, что соответствует утверждению теоремы.

В общем случае, когда базисы не совпадают, найдутся, по крайней мере, два не равных нулю вектора \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_j . Пусть для определенности $\mathbf{r}_1 \neq 0$ и $\mathbf{r}_2 \neq 0$. Тогда из уравнений (2.41) получим, что векторная часть искомого решения, будучи ортогональной каждому из векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , записывается в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = x(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2), \quad (2.43)$$

где x – некоторый скаляр. Подставляя это решение в уравнения (2.42) для $k=1,2$, получим два уравнения

$$\lambda_0 \mathbf{r}_1 = -x \mathbf{s}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = -x \mathbf{r}_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \Rightarrow \lambda_0 = -x(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \quad (2.44)$$

$$\lambda_0 \mathbf{r}_2 = -x \mathbf{s}_2 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = x \mathbf{r}_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \Rightarrow \lambda_0 = x(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1). \quad (2.45)$$

В силу формул (2.40) выражения (2.44) и (2.45) для скалярной части искомого кватерниона тождественно совпадают. Поэтому решение системы (2.38) для $k=1,2$ записывается в виде

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} = x(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

Отсюда, учитывая условие нормировки, получаем формулу

$$\boldsymbol{\Lambda} = \pm \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2}}, \quad (2.46)$$

которая определяет два нормированных кватерниона, отличающиеся друг от друга знаком.

Отметим, что по процедуре построения решение (2.46) удовлетворяет первым двум уравнениям системы (2.38). Но из формул $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2$, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2$ следует

$$\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{i}_1 \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{i}_2 \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{i}_3 \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}},$$

т.е. любое решение, удовлетворяющее двум уравнениям системы (2.38), удовлетворяет и третьему уравнению этой системы. *Теорема доказана.*

Преобразование $\mathbf{e}_k = \Lambda \circ () \circ \bar{\Lambda}$, фигурирующее в формулах (2.38), называется *присоединенным отображением*.

Таким образом, в кватернионном способе для задания ориентации твердого тела используются четыре параметра $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые подчинены одному уравнению связи:

$$\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (2.47)$$

На основании формул (2.38) преобразования базисов можно получить формулы преобразования компонент кватерниона при замене базиса. Пусть положение базиса $\mathbf{E} (O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ относительно базиса $\mathbf{I} (O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ задается кватернионом Λ . Рассмотрим некоторый кватернион \mathbf{R} . Обозначим через R_k^E и R_k^I его компоненты в базисе \mathbf{E} и \mathbf{I} соответственно, где $R_0^I = R_0^E = R_0$ (скалярная часть кватерниона не зависит от базиса). Этот кватернион можно записать в виде следующих двух выражений:

$$\mathbf{R} = R_0 + \sum_1^3 R_k^I \mathbf{i}_k = R_0 + \sum_1^3 R_k^E \mathbf{e}_k.$$

Отсюда, учитывая формулы (2.38) и равенство $\Lambda \circ \bar{\Lambda} = 1$, получим

$$R_0 + \sum_1^3 R_k^I \mathbf{i}_k = \Lambda \circ (R_0 + \sum_1^3 R_k^E \mathbf{e}_k) \circ \bar{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{R}^I = \Lambda \circ \mathbf{R}^E \circ \bar{\Lambda}, \quad (2.48)$$

где \mathbf{R}^I и \mathbf{R}^E – векторы-столбцы, составленные из компонент кватерниона \mathbf{R} в базисе \mathbf{I} и \mathbf{E} соответственно.

Формула (2.48) дает правило преобразования компонент кватерниона при замене базиса. Согласно этой формуле вектор-столбец \mathbf{r}' , составленный из координат произвольной точки твердого тела в базисе \mathbf{I} , выражается через вектор-столбец \mathbf{r} ее координат в базисе \mathbf{E} формулой

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}. \quad (2.49)$$

В дальнейшем условимся считать начальным положением тела такое его положение, когда орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета, т. е. $\mathbf{e}_k(0) = \mathbf{i}_k$. Тогда формула (2.49) будет определять связь между конечным положением \mathbf{r}' произвольной точки тела и ее начальным положением \mathbf{r} .

2.6. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела. Формулы сложения конечных поворотов

Теорема 2.3 (Эйлер). *Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси $\mathbf{e} = \boldsymbol{\lambda}/|\boldsymbol{\lambda}|$ на угол $\vartheta = 2\arccos\lambda_0$, где $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион, задающий положение тела.*

Доказательство. Преобразование произвольной точки тела из начального положения \mathbf{r} в конечное \mathbf{r}' задается формулой (2.49). Исследуем это преобразование, используя тригонометрическую форму (2.37) нормированного кватерниона.

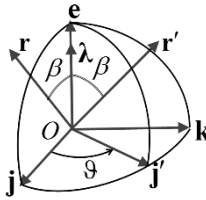


Рис. 2.11

Дополним единичный вектор \mathbf{e} единичными векторами \mathbf{j} и \mathbf{k} до правой ортогональной тройки ($\mathbf{e} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k}$) так, чтобы вектор \mathbf{r} оказался в плоскости векторов \mathbf{e} и \mathbf{j} (рис. 2.11). Тогда вектор \mathbf{r} запишется в виде $\mathbf{r} = r(\mathbf{e}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta)$.

Из взаимной ортогональности векторов \mathbf{e} и \mathbf{j} следует

$$\mathbf{j} \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda_0 \mathbf{j} - \mathbf{j} \times \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{j}.$$

Поэтому из формулы (2.49) получим

$$\mathbf{r}' = r(\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{e} \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \cos\beta + \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{j} \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \sin\beta) = r(\mathbf{e}\cos\beta + \boldsymbol{\Lambda}^2 \circ \mathbf{j} \sin\beta).$$

При учете формулы $\Lambda^2 = \cos 2\varphi + \mathbf{e} \sin 2\varphi$ полученное выражение приводится к виду

$$\mathbf{r}' = r(\mathbf{e} \cos \beta + \mathbf{j}' \sin \beta); \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j} \cos 2\varphi + \mathbf{k} \sin 2\varphi. \quad (2.50)$$

Из него следует, что конечное положение \mathbf{r}' каждой точки тела получается из начального положения \mathbf{r} поворотом вокруг оси \mathbf{e} на угол $\vartheta = 2\varphi = 2\arccos \lambda_0$. *Теорема доказана.*

В дальнейшем на основании доказанных теорем 2.2 и 2.3 будем говорить, что нормированный кватернион Λ задает *поворот* из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{E} , если этот кватернион связывает векторы этих базисов формулами (2.38).

Отметим, что обратное к (2.38) преобразование задается обратным кватернионом $\bar{\Lambda}$ по формулам $\mathbf{i}_k = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{e}_k \circ \Lambda; \quad k = 1, 2, 3$.

Кватернионные формулы сложения поворотов. Пусть кватернион Λ_1 задает поворот тела из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{I}' , а кватернион Λ_2 – поворот из базиса \mathbf{I}' в базис \mathbf{I}'' (рис. 2.12). Найдем кватернион Λ результирующего поворота из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{I}'' .

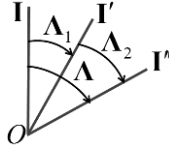


Рис. 2.12

В силу формулы (2.49) в результате указанных двух поворотов начальное положение \mathbf{r} произвольной точки тела преобразуется в конечное положение \mathbf{r}'' по формуле

$$\mathbf{r}'' = \Lambda_2 \circ \mathbf{r}' \circ \bar{\Lambda}_2 = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1) \circ \mathbf{r} \circ \overline{(\Lambda_2 \circ \Lambda_1)} = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}.$$

Отсюда следует, что кватернион результирующего поворота определяется формулой

$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1. \quad (2.51)$$

Для n последовательных поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$, формула сложения поворотов имеет вид

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \dots \circ \Lambda_1. \quad (2.52)$$

Эта формула легко доказывается методом индукции.

Формулы (2.52) пригодны для непосредственного использования в том случае, когда кватернионы составляющих поворотов заданы своими компонентами в одном и том же базисе. Если же кватернионы составляющих поворотов заданы в разных базисах, то возникает необходимость преобразования указанных формул так, чтобы векторные части всех сомножителей были записаны в ортах того базиса, в котором требуется найти результирующий кватернион (как правило, этим базисом является неподвижный базис \mathbf{I}).

Рассмотрим случай, когда составляющие повороты задаются параметрами Родрига–Гамильтона.

Определение. *Параметры Родрига–Гамильтона называются компонентами кватерниона в базисе, преобразуемом этим кватернионом.* В дальнейшем, чтобы отличать параметры Родрига–Гамильтона от компонент кватерниона в других базисах, будем обозначать их символами со звездочкой (за исключением скалярных компонент, не зависящих от базиса).

В задаче с двумя поворотами (рис. 2.12) параметрами Родрига–Гамильтона для первого и результирующего поворотов будут компоненты Λ_1 и Λ в базисе \mathbf{I} , а для второго поворота – компоненты Λ_2 в базисе \mathbf{I}' . Кватернионы этих поворотов выражаются через параметры Родрига–Гамильтона формулами

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^* \mathbf{i}_k, \quad \Lambda_1 = \lambda_{10} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{1k}^* \mathbf{i}_k, \quad \Lambda_2 = \lambda_{20} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{2k}^* \mathbf{i}'_k. \quad (2.53)$$

В случае n последовательных поворотов будем иметь

$$\Lambda_s = \lambda_{s0} + \lambda_s = \lambda_{s0} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{sk}^* \mathbf{i}_k^{(s-1)}; \quad \mathbf{i}_k^{(0)} = \mathbf{i}_k. \quad (2.54)$$

Здесь $\mathbf{i}_k^{(s-1)}$ – орты базиса $\mathbf{I}^{(s-1)}$, получаемого из базиса \mathbf{I} в результате первых $s-1$ поворотов.

Чтобы получить из формул (2.51) и (2.52) правило сложения поворотов в параметрах Родрига–Гамильтона, каждому s -му повороту поставим в соответствие *собственный кватернион*, определяемый формулой

$$\Lambda_s^* = \lambda_{s0} + \boldsymbol{\lambda}_s^* = \lambda_{s0} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{sk}^* \mathbf{i}_k. \quad (2.55)$$

Согласно этой формуле каждый собственный кватернион Λ_s^* получается из кватерниона Λ_s (2.54) заменой ортов $\mathbf{i}_k^{(s-1)}$ базиса $\mathbf{I}^{(s-1)}$ ортами \mathbf{i}_k неподвижного базиса \mathbf{I} . Иначе говоря, каждый собственный кватернион (2.55) представляет собой заданный *в неподвижном базисе* \mathbf{I} вектор-столбец, составленный из параметров Родрига–Гамильтона. Таким образом, векторная часть $\boldsymbol{\lambda}_s^*$ собственного кватерниона Λ_s^* получается отображением векторной части $\boldsymbol{\lambda}_s$ кватерниона Λ_s из базиса $\mathbf{I}^{(s-1)}$ в базис \mathbf{I} (рис. 2.13 и 2.14). При этом для первого и результирующего поворотов будем иметь

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^*, \quad \Lambda = \Lambda^*. \quad (2.56)$$

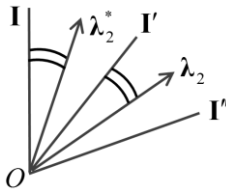


Рис. 2.13

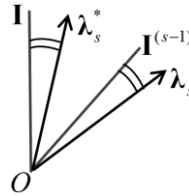


Рис. 2.14

Из формул (2.38) преобразования базисов и формул (2.52) сложения поворотов вытекает следующая связь между кватернионом Λ_s (2.54) и собственным кватернионом Λ_s^* (2.55):

$$\Lambda_s = (\Lambda_{s-1} \circ \dots \circ \Lambda_1) \circ \Lambda_s^* \circ \overline{(\Lambda_{s-1} \circ \dots \circ \Lambda_1)}; \quad s = 2, 3, \dots \quad (2.57)$$

В задаче с двумя поворотами будем иметь $\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \overline{\Lambda_1}$. Подставляя это выражение в формулу (2.51), получим формулу сложения поворотов в параметрах Родрига–Гамильтона:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \Rightarrow \Lambda = \Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*. \quad (2.58)$$

В этой формуле все кватернионы записаны в ортах неподвижного базиса \mathbf{I} , а их компонентами являются параметры Родрига–Гамильтона.

Для случая n поворотов формула сложения поворотов в параметрах Родрига–Гамильтона принимает вид

$$\Lambda = \Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \dots \circ \Lambda_n^*. \quad (2.59)$$

Обратим внимание, что в формулах (2.58) и (2.59) собственные кватернионы перемножаются в обратном порядке по отношению к порядку умножения кватернионов в формулах (2.51) и (2.52).

В качестве примера используем формулу (2.59) для определения связи между параметрами Родрига–Гамильтона, задающими положение твердого тела, и углами Эйлера (рис. 2.10).

Через углы Эйлера конечное положение связанного с телом базиса \mathbf{E} получается из начального положения \mathbf{I} в результате трех поворотов. Первым является поворот из положения \mathbf{I} вокруг оси \mathbf{i}_3 на угол прецессии ψ . Кватернион этого поворота Λ_1 и собственный кватернион Λ_1^* выражаются формулой

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^* = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Второй поворот осуществляется из положения \mathbf{I}' вокруг оси \mathbf{i}_1' на угол θ . Поэтому имеем

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_1' \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Lambda_2^* = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Для третьего поворота, осуществляемого из положения \mathbf{I}'' вокруг оси \mathbf{i}_3'' на угол φ , получаем

$$\Lambda_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3'' \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \Lambda_3^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Вычислив теперь в соответствии с формулой (2.59) произведение $\Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \Lambda_3^*$, найдем связь между параметрами Родрига–Гамильтона и углами Эйлера:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Согласно теореме 2.3 эти три поворота на углы Эйлера эквивалентны одному повороту, ось которого определяется компонентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а угол поворота выражается формулой

$$\vartheta = 2 \arccos(\lambda_0) = 2 \arccos \left[\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \right].$$

2.7. Уравнения Пуассона

Доказанная выше теорема 2.1 служит *неявным* определением угловой скорости твердого тела. В данном разделе будет дано *явное* определение угловой скорости твердого тела, основанное на теореме Эйлера 2.3 о конечном повороте твердого тела.

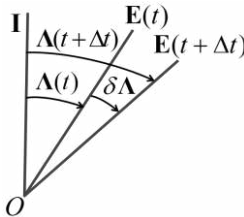


Рис. 2.15

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой относительно базиса \mathbf{I} (рис. 2.15). Моментам времени t и $t + \Delta t$ соответствуют положения связанного с телом базиса $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{E}(t + \Delta t)$. По теореме Эйлера о конечном повороте указанные положения можно совместить одним поворотом вокруг некоторой оси, задаваемой *единичным вектором* $\mathbf{e}(t, \Delta t)$, на некоторый угол $\Delta\varphi(t, \Delta t)$.

Определение. Угловой скоростью твердого тела относительно базиса \mathbf{I} в момент времени t называется предел

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} \mathbf{e}(t, \Delta t), \quad (2.61)$$

если такой предел существует.

Найдем выражение для вектора $\boldsymbol{\omega}$ через кватернион $\Lambda(t)$, задающий положение тела относительно базиса \mathbf{I} .

Перемещению тела в положение $\mathbf{E}(t + \Delta t)$ из положения $\mathbf{E}(t)$ соответствует кватернион

$$\delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = 1 + \mathbf{e} \frac{\Delta \varphi}{2} + O(\Delta \varphi)^2, \quad (2.62)$$

где $O(\Delta \varphi)^2$ – члены второго порядка и выше относительно $\Delta \varphi$.

Из формулы сложения поворотов (2.51) имеем

$$\Lambda(t + \Delta t) = \delta \Lambda \circ \Lambda(t). \quad (2.63)$$

Переписывая эту формулу в виде

$$\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t) = \delta \Lambda \circ \Lambda(t) - \Lambda(t) \Rightarrow \Delta \Lambda = (\delta \Lambda - 1) \circ \Lambda(t),$$

получим на основании определения (2.61) и формулы (2.62) следующее уравнение:

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \Lambda - 1}{\Delta t} \circ \Lambda(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \Lambda(t). \quad (2.64)$$

Здесь учтено, что из существования предела (2.61) следует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O((\Delta \varphi)^2)}{\Delta t} = 0.$$

Уравнения (2.64) являются кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела, записанными в кватернионах, и называются *уравнениями Пуассона*.

Формула для вектора угловой скорости получается разрешением уравнения (2.64) относительно $\boldsymbol{\omega}$ и имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}. \quad (2.65)$$

При практическом использовании кинематических уравнений (2.64) кватернион Λ целесообразно задавать компонентами в системе отсчета \mathbf{I} , т. е. параметрами Родрига–Гамильтона. В этом случае будем иметь

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_1^3 \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \dot{\Lambda} = \dot{\lambda}_0 + \sum_1^3 \dot{\lambda}_k \mathbf{i}_k. \quad (2.66)$$

Если и вектор ω угловой скорости тела задан компонентами ω_k в базисе \mathbf{I} , то, выполняя умножение в правой части уравнения (2.64), получим четыре скалярных дифференциальных уравнения, которые связывают компоненты кватерниона Λ с проекциями угловой скорости тела на оси базиса \mathbf{I} .

Однако во многих практических задачах угловая скорость тела задается проекциями $\omega_k^* = (\omega \cdot \mathbf{e}_k)$ на связанный с телом базис \mathbf{E} (эти проекции обычно обозначаются через p, q, r). В этих случаях уравнение (2.64) не может быть непосредственно использовано, т. к. сомножители в правой части этого уравнения заданы в разных базисах. Но, учитывая формулы (2.38) преобразования базисов, вектор ω можно записать в виде

$$\omega = \sum_1^3 \omega_k^* \mathbf{e}_k = \Lambda \circ \omega^* \circ \bar{\Lambda}; \quad \omega^* = \sum_1^3 \omega_k^* \mathbf{i}_k. \quad (2.67)$$

Здесь ω^* – заданный в базисе \mathbf{I} вектор-столбец, составленный из проекций p, q, r угловой скорости тела на связанные с телом оси. Подставляя это выражение в уравнение (2.64), получим *вторую форму кинематических уравнений Пуассона*:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega^*. \quad (2.68)$$

Эти дифференциальные уравнения связывает параметры Родрига–Гамильтона с проекциями угловой скорости тела на оси связанного с телом базиса.

Отметим, что дифференциальные уравнения (2.64) и (2.68) линейны и, в отличие от кинематических уравнений Эйлера (2.36), не

имеют никаких особенностей. Поэтому эти уравнения служат основным математическим аппаратом в современных системах ориентации и навигации.

О решениях уравнений Пуассона. Уравнения Пуассона (2.64) и (2.68) являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Если известен закон изменения угловой скорости тела $\omega(t)$ и задано начальное положение тела $\Lambda(0)$, то интегрированием этих уравнений определяется текущее положение тела $\Lambda(t)$.

Уравнения Пуассона (2.64) и (2.68) имеют первый интеграл

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \text{const.} \quad (2.69)$$

Действительно, из уравнения (2.64) при учете того, что операции сопряжения и дифференцирования по времени перестановочны, имеем $2\dot{\bar{\Lambda}} = 2\bar{\dot{\Lambda}} = -\bar{\Lambda} \circ \omega$. Поэтому, вычисляя производную по времени от нормы кватерниона на решениях уравнения (2.64), получим

$$\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = (\omega - \omega)/2 = 0.$$

Наличие первого интеграла (2.69) является важным свойством уравнений Пуассона. Из него следует, что если $\Lambda(0)$ – нормированный кватернион, то решение $\Lambda(t)$ будет также нормированным кватернионом. Тем самым подтверждается корректность использования нормированных кватернионов для задания ориентации твердого тела.

Исследуем структуру общего решения уравнения (2.64). Пусть $\Lambda(t)$ и $\Lambda'(t)$ – два решения этого уравнения. Записывая решение $\Lambda(t)$ в виде $\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{M}(t)$, получим уравнение

$$2(\dot{\Lambda}' \circ \mathbf{M} + \Lambda' \circ \dot{\mathbf{M}}) = \omega \circ \Lambda' \circ \mathbf{M}.$$

Отсюда, учитывая, что $2\dot{\Lambda}' = \omega \circ \Lambda'$, будем иметь $\Lambda'(t) \circ \dot{\mathbf{M}} = 0$, т. е. $\mathbf{M} = \mathbf{C}$ – постоянный кватернион.

Таким образом, общее решение уравнения (2.64) имеет вид

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{C}, \quad (2.70)$$

где $\Lambda'(t)$ – частное решение, а C – кватернионная константа.

Полученный результат можно трактовать таким образом, что общее решение (2.70) определяет положение твердого тела относительно любого неподвижного базиса $O\mathbf{I}$, а положение относительно конкретного базиса $O\mathbf{I}'$ определяется частным решением $\Lambda'(t)$. При этом взаимная ориентация базисов $O\mathbf{I}$ и $O\mathbf{I}'$ задается постоянным кватернионом C (рис. 2.16).

Возможна и другая трактовка, в которой общее решение (2.70) определяет положение любого связанного с телом базиса $O\mathbf{E}$ относительно системы отсчета $O\mathbf{I}$, а частное решение $\Lambda'(t)$ описывает положение некоторого фиксированного базиса $O\mathbf{E}'$ (рис. 2.17). При этом из формулы (2.58) следует $\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{M}^*$, где \mathbf{M}^* – собственный кватернион поворота из базиса $O\mathbf{E}'$ в базис $O\mathbf{E}$. В силу неизменности взаимной ориентации базисов $O\mathbf{E}'$ и $O\mathbf{E}$ кватернион \mathbf{M}^* – постоянный. Поэтому, полагая $\mathbf{M}^* = C$, приходим к решению (2.70).

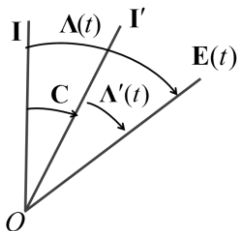


Рис. 2.16

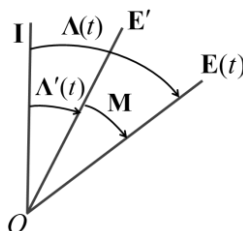


Рис. 2.17

Каждое конкретное решение уравнений Пуассона получается из общего решения (2.70) заданием начальных условий. При этом постоянная C в общем решении есть кватернион $\Lambda(0)$, определяющий начальное положение тела. Если $\Lambda(0) = 1$, то решение $\Lambda(t)$ будет определять текущее положение твердого тела относительно его начального положения в момент $t = 0$.

Простейшим движением твердого тела является вращение вокруг неподвижной оси, т. е. когда вектор угловой скорости имеет вид $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}\omega(t)$, где \mathbf{e} – неизменный единичный вектор. В этом случае

решение уравнения (2.64), удовлетворяющее начальному условию $\Lambda(0)=1$, определяется формулой

$$\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi(t)}{2}; \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (2.71)$$

Аналитически проинтегрировать кинематические уравнения Пуассона удастся также в случаях, когда движение твердого тела представляет собой комбинацию нескольких простых интегрируемых движений. К таким относится случай *прецессионного* движения твердого тела.

Определение. Движение твердого тела с неподвижной точкой O называется *прецессией*, если оно представимо в виде комбинации двух вращений, первым из которых является вращение вокруг неподвижной в системе отсчета оси $O\mathbf{i}$, вторым – вращение вокруг неподвижной в теле оси $O\mathbf{e}$, а угол θ между осями не меняется.

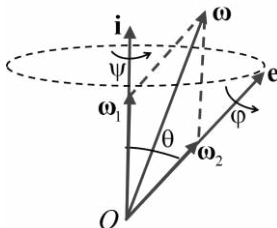


Рис. 2.18

Из этого определения следует, что в прецессионном движении угловая скорость тела раскладывается на две составляющие:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1(t)\mathbf{i} + \omega_2(t)\mathbf{e}. \quad (2.72)$$

При этом ось $O\mathbf{i}$ называется *осью прецессии*, ось $O\mathbf{e}$ – *осью собственного вращения*, а составляющие ω_1 и ω_2 называются *угловой скоростью прецессии* и *угловой скоростью собственного вращения* соответственно. Эти составляющие будут равны производным от углов Эйлера $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\phi}$ (рис. 2.18), если систему отсчета и связанный с телом базис выбрать так, что $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$. При таком выборе θ будет углом нутации.

Если составляющие ω_1 и ω_2 в формуле (2.72) постоянны, то такое движение тела называется *регулярной прецессией*.

Приведем решение кинематических уравнений (2.64) для рассматриваемого прецессионного движения тела. Будем считать, что ось прецессии направлена по вектору \mathbf{i}_3 .

Введем базис $O\mathbf{I}'$, вращающийся относительно неподвижного базиса $O\mathbf{I}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{i}_3$. Тогда связанный с телом базис $O\mathbf{E}$ будет вращаться относительно $O\mathbf{I}'$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{e}$.

Поскольку движение базиса $O\mathbf{I}'$ относительно базиса $O\mathbf{I}$ есть вращение вокруг неподвижной оси \mathbf{i}_3 , то положение этого базиса определяется кватернионом

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\vartheta_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\vartheta_1}{2}; \quad \vartheta_1 = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau.$$

В свою очередь, так как ось \mathbf{e} неподвижна в базисе $O\mathbf{I}'$, то кватернион Λ_2 , задающий положение базиса $O\mathbf{E}$ относительно $O\mathbf{I}'$, определяется формулой

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\vartheta_2}{2}; \quad \vartheta_2 = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau, \quad \mathbf{e} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \mathbf{i}'_k.$$

Здесь α_k – направляющие косинусы оси \mathbf{e} в базисе $O\mathbf{I}'$.

Применяя формулу сложения поворотов (2.58), находим кватернион Λ , определяющий текущее положение тела

$$\Lambda(t) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* = \left(\cos \frac{\vartheta_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\vartheta_1}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\vartheta_2}{2} + \mathbf{e}^0 \sin \frac{\vartheta_2}{2} \right). \quad (2.73)$$

Здесь $\mathbf{e}^0 = \alpha_1 \mathbf{i}_1 + \alpha_2 \mathbf{i}_2 + \alpha_3 \mathbf{i}_3$ – начальное положение оси собственного вращения \mathbf{e} в системе отсчета $O\mathbf{I}$.

2.8. Кинематика вращательного движения твердого тела в направляющих косинусах

Элементы матрицы направляющих косинусов, задающей ориентацию твердого тела

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{kj} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{e}_j), \quad (2.74)$$

представляют собой коэффициенты в разложении ортов связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ по ортам базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$:

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \mathbf{i}_k, \quad j=1, 2, 3. \quad (2.75)$$

Из ортонормированности базисов $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ следует, что матрица направляющих косинусов ортогональна, т. е.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}, \quad (2.76)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, « T » – знак транспонирования.

Условие (2.76) определяет шесть независимых уравнений, связывающих элементы матрицы \mathbf{A} . Поэтому только три из девяти направляющих косинусов являются независимыми.

Матрица (2.74) удовлетворяет условию $\det(\mathbf{A}) = 1$, вытекающему из того, что базисы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ являются правыми тройками векторов. Из формул (2.74) и (2.75) следует также, что имеет место взаимно однозначное соответствие между положениями тела и элементами матрицы \mathbf{A} .

Пусть \mathbf{r} – вектор-столбец, составленный из координат r_j некоторой точки тела в связанном с телом базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, а \mathbf{r}' – вектор-столбец, составленный из координат r'_k этой же точки в системе отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Записывая радиус-вектор этой точки через координаты r_j и через координаты r'_k , получим уравнение

$$\sum_{k=1}^3 r'_k \mathbf{i}_k = \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{e}_j.$$

Проецируя это уравнение на оси базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, получим следующую формулу, связывающую векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' :

$$r'_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_{kj} r_j; \quad k=1, 2, 3 \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}. \quad (2.77)$$

Если принять, что в начальный момент времени орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета, т.е. $\mathbf{e}_k(0) = \mathbf{i}_k$, то положение $\mathbf{r}(t)$ каждой точки тела будет определяться через ее начальное положение $\mathbf{r}(0)$ формулой

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{r}(0). \quad (2.78)$$

Приступим теперь к выводу уравнений вращательного движения твердого тела в направляющих косинусах. Продифференцируем равенство (2.76) по времени. Учитывая перестановочность операций дифференцирования по времени и транспонирования, получим

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T = -(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T)^T. \quad (2.79)$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T$ является кососимметрической, т.е. $\mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T$. Такую матрицу можно записать в виде

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты некоторого трехмерного вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3. \quad (2.81)$$

Чтобы найти связь матрицы (2.80) с угловой скоростью твердого тела, продифференцируем уравнение (2.78) по времени. Учитывая формулу (2.80), получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}(0) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{r} = \mathbf{\Omega}\mathbf{r}. \quad (2.82)$$

Матричное произведение в правой части формулы (2.82) может быть записано через векторное произведение $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор (2.81), определяющий матрицу (2.80). Сопоставляя эту формулу с формулой Эйлера $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, в которой $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость твердого тела, заключаем, что элементами матрицы (2.80) являются проекции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости твердого тела на оси неподвижного базиса. В связи с этим кососимметрическая матрица (2.80) называется *матрицей угловой скорости* твердого тела.

Разрешая уравнение (2.80) относительно $\dot{\mathbf{A}}$, получаем искомые уравнения вращательного движения твердого тела в направляющих косинусах, называемые *уравнениями Пуассона*:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{A}. \quad (2.83)$$

Проекциям p, q, r угловой скорости твердого тела на оси, связанные с телом, соответствует матрица

$$\mathbf{\Omega}^* = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Связь между матрицами (2.80) и (2.84) выражается формулой $\mathbf{\Omega} = \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^* \mathbf{A}^T$, а уравнения Пуассона через проекции угловой скорости на оси связанного с телом базиса записываются в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^*. \quad (2.85)$$

Отметим, что матричные уравнения Пуассона (2.83) и (2.85), так же как и кватернионные уравнения (2.64) и (2.68), линейны и не имеют особенностей. Их единственным недостатком по сравнению с кватернионными уравнениями является большая избыточность; число матричных уравнений равно девяти, а число кватернионных уравнений равно четырем.

Динамика системы. Основные теоремы

3.1. Основные понятия

В этом разделе рассматриваются механические системы, состоящие из произвольной фиксированной совокупности материальных точек. Массы точек обозначаются через m_i , положения точек в системе отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ задаются радиус-векторами \mathbf{r}_i , $\mathbf{V}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ – скорости точек относительно системы отсчета, \mathbf{F}_i – силы, действующие на точки системы (рис. 3.1).

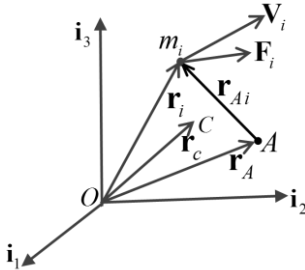


Рис. 3.1

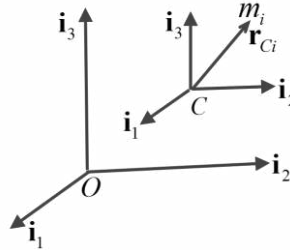


Рис. 3.2

Основными динамическими величинами, характеризующими движение механической системы, принято считать *импульс, момент импульса и кинетическую энергию*.

Импульсом механической системы относительно системы отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ называется вектор

$$\mathbf{Q} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i. \quad (3.1)$$

Центром масс (центром инерции) механической системы называется точка C , положение которой определяется формулой

$$m\mathbf{r}_C = \sum_i m_i \mathbf{r}_i; \quad m = \sum_i m_i. \quad (3.2)$$

Импульс системы выражается через скорость ее центра масс формулой

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{V}_C. \quad (3.3)$$

Кинетическим моментом (моментом импульса) механической системы относительно полюса A называется вектор

$$\mathbf{K}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \mathbf{V}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A) \times m_i \mathbf{V}_i. \quad (3.4)$$

Кинетическая энергия системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_i^2. \quad (3.5)$$

Таким образом, импульс и кинетическая энергия механической системы зависят от системы отсчета, а кинетический момент зависит и от системы отсчета, и от положения полюса.

Формула связи между моментами относительно разных полюсов легко выводится из определения (3.4) и имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{Q}. \quad (3.6)$$

Из этой формулы следует, что если импульс системы равен нулю, то кинетический момент не зависит от полюса.

Умножив скалярно обе части формулы (3.6) на \mathbf{Q} и на \mathbf{r}_{BA} , получим следующие два равенства, называемые *динамическими инвариантами*:

$$\mathbf{K}_B \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{Q}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}_B \cdot \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{r}_{BA}. \quad (3.8)$$

Равенство (3.7) означает, что проекция кинетического момента на направление импульса системы не зависит от полюса. А из равенства (3.8) следует, что для двух произвольных полюсов равны проекции кинетических моментов на направление, соединяющее эти полюсы.

Введем в рассмотрение *систему Кенига* $C \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$, которая имеет начало в центре масс C и *движется поступательно* (не вращается) относительно исходной системы отсчета $O \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ (рис. 3.2). Обозначим через \mathbf{r}_{Ci} радиус-векторы, а через $\mathbf{V}_i^{\text{отн}}$ — скорости точек в системе Кенига. Тогда на основании определения центра масс (3.2) будем иметь

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_{Ci} = 0, \quad \mathbf{Q}^{\text{отн}} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = 0, \quad (3.9)$$

а абсолютные скорости точек будут определяться формулами

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_i^{\text{отн}}. \quad (3.10)$$

Кинетический момент системы, вычисленный относительно ее центра масс, при учете формул (3.9), (3.10) запишется в виде

$$\mathbf{K}_C = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i (\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_i^{\text{отн}}) = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = \mathbf{K}_C^{\text{отн}}. \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что для центра масс кинетический момент абсолютного движения равен кинетическому моменту движения относительно системы Кенига.

Если в формуле (3.6) положить $A = C$, то при учете равенства (3.11) получим следующую формулу, называемую *теоремой Кенига для кинетического момента*:

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{Q} = \mathbf{K}_C^{\text{отн}} + \mathbf{r}_{BC} \times m \mathbf{V}_C. \quad (3.12)$$

Согласно этой формуле кинетический момент относительно произвольного полюса B выражается в виде суммы кинетического момента движения центра масс (второе слагаемое) и кинетического момента относительно центра масс, вычисленного в базисе Кенига (первое слагаемое).

Подставляя выражения (3.10) в формулу (3.5), получим при учете (3.9) следующую формулу, называемую *теоремой Кенига для кинетической энергии*:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_i^{\text{отн}})^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_C^2 + T^{\text{отн}}. \quad (3.13)$$

Здесь первое слагаемое называется кинетической энергией центра масс, а второе слагаемое представляет собой кинетическую энергию движения относительно системы Кенига.

Получим формулы для вычисления кинетической энергии и кинетического момента твердого тела. Рассмотрим сначала случай, когда некоторая точка A тела неподвижна в системе отсчета. Тогда движение тела представляет собой мгновенное вращение с угловой

скоростью ω вокруг оси $A\omega$ (рис. 3.3), а скорости точек тела выражаются по формуле Эйлера в виде

$$\mathbf{V}_i = \omega \times \mathbf{r}_{Ai} = \omega \times \mathbf{h}_{Ai}; \quad \mathbf{h}_{Ai} \perp \omega, \quad (3.14)$$

где \mathbf{h}_{Ai} – составляющая вектора \mathbf{r}_{Ai} , ортогональная вектору ω .

Подставляя выражения (3.14) в формулу (3.5), получим

$$T = \frac{1}{2} I_{A\omega} \omega^2; \quad I_{A\omega} = \sum_i m_i h_{Ai}^2. \quad (3.15)$$

Здесь $I_{A\omega}$ – *момент инерции тела* относительно оси вращения.

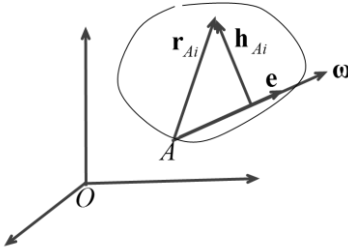


Рис. 3.3

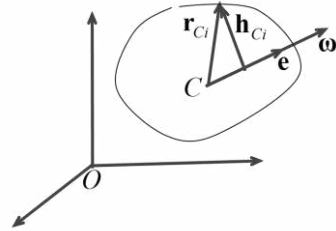


Рис. 3.4

В общем случае для вычисления кинетической энергии твердого тела можно воспользоваться теоремой Кенига (3.13). Поскольку движение тела относительно базиса Кенига есть вращение с неподвижной точкой C , то на основании формулы (3.15) будем иметь $T^{\text{отн}} = I_{C\omega} \omega^2 / 2$, а формула (3.13) для кинетической энергии твердого тела запишется в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2; \quad I_{C\omega} = \sum_i m_i h_{Ci}^2. \quad (3.16)$$

Здесь $I_{C\omega}$ – *момент инерции тела* относительно оси $C\omega$.

Кинетический момент твердого тела относительно *неподвижной точки тела A* (рис. 3.4) определяется выражением

$$\mathbf{K}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_{Ai}). \quad (3.17)$$

Найдем проекцию кинетического момента (3.17) на направление угловой скорости тела. Записывая вектор $\boldsymbol{\omega}$ в виде $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$, где \mathbf{e} – единичный вектор, получим

$$K_{A\omega} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e} = \sum_i m_i (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_{Ai})^2 \omega = \sum_i m_i h_{Ai}^2 \omega = I_{A\omega} \omega. \quad (3.18)$$

Кинетический момент твердого тела относительно центра масс тела записывается на основании формулы (3.11) в виде

$$\mathbf{K}_C = \sum_i \mathbf{r}_{Ci} \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Ci}), \quad (3.19)$$

а его проекция на направление угловой скорости тела определяется аналогичной (3.18) формулой

$$K_{C\omega} = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{e} = \sum_i m_i h_{Ci}^2 \omega = I_{C\omega} \omega. \quad (3.20)$$

Заметим, что в задачах на плоское движение плоской фигуры все векторы \mathbf{r}_{Ai} и \mathbf{r}_{Ci} в формулах (3.17) и (3.19) ортогональны вектору $\boldsymbol{\omega}$. В этих случаях, вычисляя по известному правилу двойные векторные произведения, получим для кинетического момента твердого тела относительно *неподвижной точки тела A* и центра масс тела *C* следующие формулы:

$$\mathbf{K}_A = I_{A\omega} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_C = I_{C\omega} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.21)$$

Здесь оси $A\omega$ и $C\omega$, относительно которых вычисляются моменты инерции плоской фигуры, ортогональны плоскости фигуры.

В формулировках основных теорем динамики будут использоваться определяемые ниже величины, характеризующие действующие на систему силы.

Главным вектором действующих на систему сил \mathbf{F}_i называется векторная сумма

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (3.22)$$

Главный момент сил \mathbf{F}_i относительно полюса *A* определяется формулой

$$\mathbf{M}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}_i. \quad (3.23)$$

Связь между моментами сил относительно разных полюсов выражается формулой

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}, \quad (3.24)$$

аналогичной формуле (3.6) для момента импульса. Из этой формулы следуют аналогичные (3.7) и (3.8) динамические инварианты:

$$\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{F}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{r}_{BA}. \quad (3.26)$$

Из формулы (3.24) следует также, что если главный вектор сил равен нулю, то момент сил не зависит от выбора полюса.

Мощность N и элементарная работа δA сил определяются формулами

$$N = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{V}_i, \quad \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (3.27)$$

Здесь \mathbf{V}_i и $d\mathbf{r}_i$ – скорость и элементарное (бесконечно малое) перемещение *материальной точки*, на которую действует сила \mathbf{F}_i .

Обратим внимание, что по определению мощность и элементарная работа сил зависят от системы отсчета.

Замечание. Элементарная работа силы обозначается символом δA , а не dA , потому, что в общем случае выражение для этой работы не является дифференциалом некоторой функции. При этом первичным понятием является элементарная работа силы, а работа силы на конечном перемещении определяется интегралом от элементарной работы на траекториях системы.

3.2. Основные теоремы динамики в инерциальных СО

Основные теоремы динамики выводятся из аксиом Ньютона, сформулированных для материальной точки. В *инерциальной системе отсчета* уравнение движения точки описывается вторым законом Ньютона и имеет вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}. \quad (3.28)$$

Здесь сила, действующая на точку, представлена двумя составляющими. Первая из них \mathbf{F}_i^{ex} – *внешняя сила*, действующая со стороны объектов, не входящих в рассматриваемую систему, а вторая \mathbf{F}_i^{in} – *внутренняя сила*, обусловленная взаимодействием с точками рассматриваемой системы.

Каждая внутренняя сила выражается суммой $\mathbf{F}_i^{\text{in}} = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}^{\text{in}}$, где слагаемые в силу третьего закона Ньютона подчиняются равенствам

$$\mathbf{F}_{ik}^{\text{in}} = -\mathbf{F}_{ki}^{\text{in}}, \quad \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_{ik}^{\text{in}} = -\mathbf{r}_{Ak} \times \mathbf{F}_{ki}^{\text{in}} \quad \forall A. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что для *внутренних сил главный вектор сил и главный момент относительно любого полюса равны нулю*:

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0, \quad \mathbf{M}_A^{\text{in}} = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0. \quad (3.30)$$

Теорема об изменении импульса получается дифференцированием определения (3.1) по времени. На основании уравнений (3.28) и равенств (3.30) получим

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (3.31)$$

т. е. *производная от импульса по времени равна главному вектору внешних сил*.

В силу формулы (3.3) теорему (3.31) можно записать в виде закона движения центра масс системы: $m\dot{\mathbf{V}}_C = \mathbf{F}^{\text{ex}}$.

Дифференцируя по времени определение (3.4), получим при учете (3.1), (3.3), (3.28) и (3.30) *теорему об изменении кинетического момента*:

$$\dot{\mathbf{K}}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_i (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_A) \times m_i \mathbf{V}_i = \mathbf{M}_A^{\text{ex}} + m\mathbf{V}_C \times \mathbf{V}_A. \quad (3.32)$$

Здесь \mathbf{V}_A – скорость полюса, \mathbf{V}_C – скорость центра масс системы. В случаях, когда полюс A неподвижен в системе отсчета либо совпадает с центром масс, теорема приобретает наиболее простой вид:

$$\dot{\mathbf{K}}_A = \mathbf{M}_A^{\text{ex}}, \quad \dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}. \quad (3.33)$$

Теорема об изменении кинетической энергии получается дифференцированием определения (3.5) по времени и записывается в виде

$$\dot{T} = \sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{V}_i) = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}) \cdot \mathbf{V}_i = N^{\text{ex}} + N^{\text{in}}. \quad (3.34)$$

Здесь N^{ex} – мощность внешних сил, а N^{in} – мощность внутренних сил. Таким образом, в общем случае изменение кинетической энергии системы обусловлено работой и внешних, и внутренних сил.

Для *действительных* перемещений системы элементарные перемещения точек выражаются через скорости точек формулами $d\mathbf{r}_i = \mathbf{V}_i dt$, а теорему (3.34) можно переписать в виде

$$dT = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}) \cdot d\mathbf{r}_i = \delta A^{\text{ex}} + \delta A^{\text{in}}. \quad (3.35)$$

Здесь δA^{ex} – элементарная работа внешних сил, а δA^{in} – элементарная работа внутренних сил.

Для примера вычислим элементарную работу сил, действующих на твердое тело. Выражая скорости точек тела по формуле Эйлера $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi}$, где \mathbf{V}_O – скорость точки O , принадлежащей телу, получим

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi}) dt = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O) dt.$$

Поэтому из теоремы (3.35) при учете равенств (3.30) следует

$$dT = (\mathbf{F}^{\text{ex}} \cdot \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{\text{ex}}) dt, \quad (3.36)$$

т. е. *изменение кинетической энергии твердого тела обусловлено только работой внешних сил* (работа внутренних сил, действующих в твердом теле, равна нулю).

В разделе 1.3 было дано определение потенциальности силы $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t)$, действующей на i -ю точку, для случая, когда эта сила зависит только от положения \mathbf{r}_i этой точки и времени. Для системы из N материальных точек действующая на каждую точку сила может зависеть от положения всех точек системы. Для таких случаев свойство потенциальности сил дается нижеследующим определением.

Определение. Силы $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$; $i = 1, 2, \dots, N$, называются *потенциальными*, если существует скалярная функция

$\Pi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, называемая *потенциальной энергией*, через которую каждая сила выражается формулой

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.37)$$

Из определения (3.37) следует, что *силы \mathbf{F}_i ; $i = 1, 2, \dots, N$, потенциальны тогда и только тогда, когда суммарная элементарная работа этих сил совпадает с изохронным дифференциалом некоторой функции $U = -\Pi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$* , т.е.

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -d^* \Pi = -d\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt. \quad (3.38)$$

Здесь $d\Pi$ – полный дифференциал функции $\Pi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$.

При наличии в системе потенциальных сил вводится понятие *полной энергии*:

$$E = T + \Pi, \quad (3.39)$$

а из теоремы (3.34) об изменении кинетической энергии выводится теорема об изменении полной энергии.

Пусть в системе действуют потенциальные силы (3.37) и непотенциальные силы \mathbf{F}_i^* . Мощность потенциальных сил выражается формулой

$$N^{\text{pot}} = -\sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\dot{\Pi} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.34), получим *теорему об изменении полной энергии*:

$$\dot{E} = \sum_i \mathbf{F}_i^* \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = N^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (3.40)$$

Здесь N^* – мощность непотенциальных сил.

Из уравнения (3.40) следует, что полная энергия системы сохраняется, если потенциальные силы не зависят явно от времени (такие силы называются *консервативными*), а мощность непотенциальных сил равна нулю.

3.3. Основные теоремы динамики в неинерциальных СО

Обозначим через $A \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ инерциальную систему отсчета, а через $B \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$ – неинерциальную систему отсчета (рис. 3.5).

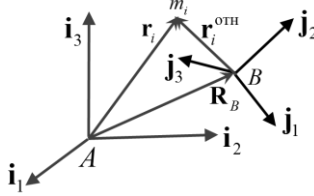


Рис. 3.5

Для определения вида основных теорем динамики в неинерциальной системе отсчета запишем уравнение движения точки в этой системе. Это уравнение можно получить из уравнения Ньютона (3.28), используя формулу Кориолиса:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i^{\text{отн}} + \mathbf{W}_i^{\text{пер}} + \mathbf{W}_i^{\text{кор}}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{W}_i^{\text{пер}} = \mathbf{W}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_i^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^{\text{отн}}), \quad \mathbf{W}_i^{\text{кор}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_i^{\text{отн}}. \quad (3.42)$$

Здесь $\ddot{\mathbf{r}}_i^{\text{отн}}$ – ускорение точки относительно неинерциальной системы отсчета, $\mathbf{W}_i^{\text{пер}}$ – переносное ускорение точки, $\mathbf{W}_i^{\text{кор}}$ – кориолисово ускорение точки, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловая скорость и угловое ускорение неинерциального базиса относительно инерциального.

Подставляя выражение (3.41) в уравнение (3.28), получим

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^{\text{отн}} = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}} + \mathbf{J}_i^{\text{пер}} + \mathbf{J}_i^{\text{кор}}. \quad (3.43)$$

Здесь слагаемые $\mathbf{J}_i^{\text{пер}}$ и $\mathbf{J}_i^{\text{кор}}$ определяются формулами

$$\mathbf{J}_i^{\text{пер}} = -m_i \mathbf{W}_i^{\text{пер}}, \quad \mathbf{J}_i^{\text{кор}} = -m_i \mathbf{W}_i^{\text{кор}} \quad (3.44)$$

и называются *переносной и кориолисовой силами инерции*, действующими на точку.

Уравнение (3.43) по форме будет совпадать с уравнением (3.28) движения точки в инерциальной системе, если сумму трех слагаемых, $\Phi_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{J}_i^{\text{пер}} + \mathbf{J}_i^{\text{кор}}$, трактовать как внешнюю силу, действу-

ющую на точку. Поэтому, дословно повторяя процедуру вывода основных теорем динамики в инерциальной системе отсчета, получим, что в неинерциальных системах эти теоремы имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} = \mathbf{F}^{\text{ex}} + \mathbf{J}^{\text{пер}} + \mathbf{J}^{\text{кор}}, \quad (3.45)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O^{\text{отн}} = \mathbf{M}_O^{\text{ex}} + \mathbf{M}_O^{\text{пер}} + \mathbf{M}_O^{\text{кор}} + m\mathbf{V}_C^{\text{отн}} \times \mathbf{V}_O^{\text{отн}}, \quad (3.46)$$

$$\dot{T}^{\text{отн}} = N_{\text{отн}}^{\text{ex}} + N_{\text{отн}}^{\text{ин}} + N_{\text{отн}}^{\text{пер}}. \quad (3.47)$$

В последнем уравнении отсутствует слагаемое $N_{\text{отн}}^{\text{кор}}$, поскольку оно равно нулю:

$$N_{\text{отн}}^{\text{кор}} = \sum_i \mathbf{J}_i^{\text{кор}} \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = -2 \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_i^{\text{отн}}) \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = 0. \quad (3.48)$$

Таким образом, кориолисовы силы инерции являются *гироскопическими* силами; их работа на действительных перемещениях системы равна нулю.

Из формул (3.42) и (3.44) следует, что главные векторы переносных и кориолисовых сил инерции выражаются через переносное и кориолисово ускорение центра масс системы формулами

$$\mathbf{J}^{\text{пер}} = -m\mathbf{W}_C^{\text{пер}}, \quad \mathbf{J}^{\text{кор}} = -m\mathbf{W}_C^{\text{кор}}. \quad (3.49)$$

Более сложной является задача вычисления главных моментов сил инерции $\mathbf{M}_O^{\text{пер}}$ и $\mathbf{M}_O^{\text{кор}}$. В общем случае поле сил инерции не является однородным, и моменты этих сил не совпадают с моментами главных векторов $\mathbf{J}^{\text{пер}}$ и $\mathbf{J}^{\text{кор}}$, приложенных в центре масс. Поэтому эти моменты вычисляются на основе определения интегрированием по всем точкам системы.

Часто в прикладных задачах используются неинерциальные системы отсчета, которые вращаются относительно инерциальных вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае переносные силы инерции потенциальны, причем их потенциальная энергия равна кинетической энергии переносного движения, взятой со знаком минус, т.е.

$$\Pi^{\text{пер}} = -T^{\text{пер}} = -\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2. \quad (3.50)$$

Здесь \mathbf{r}_i – вектор, соединяющий фиксированную точку O на оси вращения с i -й материальной точкой системы.

Формула (3.50) доказывается простой проверкой. Выражение для элементарной работы переносных сил инерции в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\delta A = \sum_i \mathbf{J}_i^{\text{пер}} \cdot d\mathbf{r} = - \sum_i [m_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}_i)$$

и совпадает, очевидно, с полным дифференциалом функции (3.50), взятой со знаком минус.

Определим вид основных теорем динамики в системе отсчета Кенига $C \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$, введенной в разделе 3.1 (рис. 3.2). Эта система движется *поступательно* относительно инерциального базиса со скоростью центра масс \mathbf{V}_C и в общем случае не является инерциальной, поскольку центр масс системы может двигаться с ускорением относительно инерциального базиса.

Теорема об изменении импульса в системе Кенига принимает тривиальный вид:

$$\mathbf{Q}^{\text{отн}} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} \equiv 0. \quad (3.51)$$

Теорема об изменении кинетического момента в системе Кенига для полюса, совпадающего с центром масс, следует из формулы (3.11) и уравнения (3.33) и записывается в виде

$$\dot{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}. \quad (3.52)$$

Переносные силы инерции в системе Кенига выражаются формулами $\mathbf{J}_i^{\text{пер}} = -m_i \mathbf{W}_C$, а их суммарная мощность в силу (3.51) равна нулю:

$$N_{\text{отн}}^{\text{пер}} = \sum_i \mathbf{J}_i^{\text{пер}} \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = -\mathbf{W}_C \cdot \sum_i m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = 0.$$

Поэтому теорема (3.47) в системе отсчета Кенига имеет вид

$$\dot{T}^{\text{отн}} = N_{\text{отн}}^{\text{ex}} + N_{\text{отн}}^{\text{in}}. \quad (3.53)$$

Таким образом, формулировки основных теорем динамики в системе отсчета Кенига не содержат сил инерции и выглядят так же, как и в инерциальной системе отсчета.

3.4. Динамика систем переменного состава

Представим себе в трехмерном пространстве некоторую область G , ограниченную оболочкой S фиксированной формы и размеров (рис. 3.6). Предполагается, что область G может перемещаться в пространстве, а через «проницаемую» оболочку в эту область могут попадать частицы извне, а некоторые частицы могут покидать область G . В такой постановке задачи система материальных точек, находящихся внутри области G , называется *системой переменного состава*. У такой системы меняется со временем и масса m , и импульс \mathbf{Q} , и кинетический момент \mathbf{K}_A , причем последние два вектора меняются не только за счет действия внешних сил, но и за счет того, что «влетающие» и «улетающие» частицы «приносят» и «уносят» соответствующее количество импульса и кинетического момента.

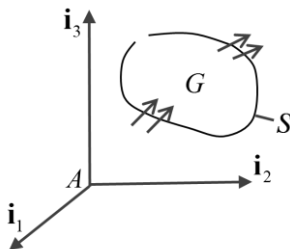


Рис. 3.6

В инерциальной системе отсчета $Ai_1i_2i_3$ теоремы об изменении импульса и кинетического момента системы переменного состава записываются в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + \mathbf{q}^{\text{BX}} - \mathbf{q}^{\text{YX}}; \quad \mathbf{q}^{\text{BX}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}^{\text{BX}}}{\Delta t}, \quad \mathbf{q}^{\text{YX}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}^{\text{YX}}}{\Delta t}, \quad (3.54)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_A = \mathbf{M}_A + \mathbf{k}_A^{\text{BX}} - \mathbf{k}_A^{\text{YX}}; \quad \mathbf{k}_A^{\text{BX}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}_A^{\text{BX}}}{\Delta t}, \quad \mathbf{k}_A^{\text{YX}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}_A^{\text{YX}}}{\Delta t}. \quad (3.55)$$

Здесь \mathbf{F} – главный вектор внешних сил, $\mathbf{q}^{\text{вх}}$ – количество импульса, поступающего в систему в единицу времени за счет влетающих частиц, \mathbf{q}^{yx} – количество импульса, уходящего из системы в единицу времени за счет улетающих частиц, \mathbf{M}_A – главный момент внешних сил, $\mathbf{k}_A^{\text{вх}}$ – количество кинетического момента, поступающего в систему в единицу времени за счет влетающих частиц, \mathbf{k}_A^{yx} – количество кинетического момента, уходящего из системы в единицу времени за счет улетающих частиц.

Приведем несколько примеров применения теорем (3.54) и (3.55).

В первом примере, используя теорему (3.54), получим *уравнение Мещерского поступательного движения ракеты* (рис. 3.7).

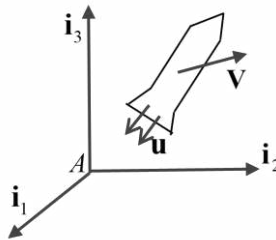


Рис. 3.7

Обозначим через $m(t)$ массу ракеты, через \mathbf{V} – скорость корпуса ракеты, а через \mathbf{u} – *относительную скорость* вылетающих частиц на срезе сопла ракеты. Импульс ракеты определяется формулой

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{пер}} + \mathbf{Q}^{\text{отн}} = m(t)\mathbf{V} + \mathbf{Q}^{\text{отн}}, \quad (3.56)$$

где $\mathbf{Q}^{\text{отн}}$ – *относительный импульс* движущихся внутри ракеты частиц. В рассматриваемом случае $\mathbf{q}^{\text{вх}} = 0$, а количество импульса, уносимого улетающими частицами в единицу времени, вычисленное в *инерциальной системе отсчета*, выражается формулой

$$\mathbf{q}^{\text{yx}} = -\dot{m}(\mathbf{V} + \mathbf{u}). \quad (3.57)$$

Подставляя выражения (3.56) и (3.57) в уравнение (3.54), получим

$$\dot{m}\mathbf{V} + m\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} = \mathbf{F} + \dot{m}(\mathbf{V} + \mathbf{u}).$$

После сокращения подобных членов будем иметь

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{u} - \dot{\mathbf{Q}}^{отн}. \quad (3.58)$$

Если $|\dot{\mathbf{Q}}^{отн}| \ll |\dot{m}\mathbf{u}|$, то пренебрегая последним слагаемым в правой части уравнения (3.58), получим следующее приближенное уравнение, называемое *уравнением Мещерского*:

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{u}. \quad (3.59)$$

В следующем примере демонстрируется применение теоремы (3.55) в задаче о вращательном движении космической станции, раскручиваемой реактивными двигателями.

Здесь предполагается, что баки с рабочим телом и реактивные двигатели находятся на расстоянии R от центра масс станции, станция вращается вокруг оси симметрии \mathbf{e}_3 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$, а истечение газов из реактивных двигателей происходит с постоянной относительной скоростью \mathbf{u} , направленной в плоскости симметрии, перпендикулярно радиальному направлению (рис. 3.8).

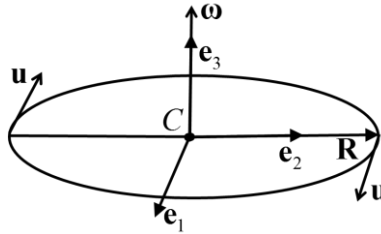


Рис. 3.8

Кинетический момент станции выражается формулой

$$\mathbf{K}_C = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_C^{отн}, \quad (3.60)$$

где $J(t)$ – момент инерции станции относительно оси симметрии, $\mathbf{K}_C^{отн}$ – относительный кинетический момент рабочего тела, движущегося *внутри корпуса станции*. В рассматриваемой задаче имеем

$$\mathbf{k}_C^{bx} = 0, \quad \mathbf{k}_C^{yx} = -\dot{m}[\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{u})] = -\dot{m}(\omega R^2 - uR)\mathbf{e}_3, \quad (3.61)$$

где $m(t)$ – масса станции. Подставляя выражения (3.60) и (3.61) в уравнение (3.55), получим в проекции на ось Ce_3 следующее уравнение:

$$\dot{J}\omega + J\dot{\omega} + \dot{K}_C^{\text{отн}} = \dot{m}(\omega R^2 - uR).$$

В рассматриваемом примере $\dot{J} = \dot{m}R^2$. Поэтому, если пренебречь слагаемым $\dot{K}_C^{\text{отн}}$, получим уравнение

$$J\dot{\omega} = -\dot{J}u/R.$$

Интегрируя это уравнение, получим закон изменения угловой скорости станции:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{u}{R} \ln \left(\frac{J(t)}{J_0} \right) = \omega_0 - \frac{u}{R} \ln \left(\frac{J_0 - R^2 \Delta m(t)}{J_0} \right).$$

Здесь ω_0 и J_0 – начальные значения угловой скорости и момента инерции станции, а $\Delta m(t)$ – масса израсходованного рабочего тела.

Движение в центральном поле

4.1. Динамика точки в поле неподвижного центра

Сначала рассмотрим задачу, в которой материальная точка массы m движется в поле неподвижного в инерциальной системе отсчета силового центра O . Предполагается, что действующая на точку сила \mathbf{F} является *центральной*, т.е. направлена по радиус-вектору \mathbf{r} (рис. 4.1), так что уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.1)$$

где F – скалярная функция от указанных переменных, $r = |\mathbf{r}|$.

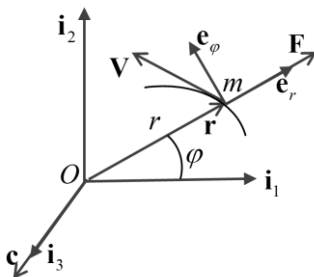


Рис. 4.1

В рассматриваемой задаче действующий на точку момент сил, вычисленный относительно полюса O , равен нулю: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Поэтому из теоремы об изменении кинетического момента $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$ следует сохранение вектора кинетического момента:

$$\mathbf{K}_O = m\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} = \text{const}. \quad (4.2)$$

Здесь через \mathbf{c} обозначен кинетический момент единичной массы. Величина и направление этого вектора в пространстве определяются начальными условиями (начальными значениями \mathbf{r} и \mathbf{V}).

Из закона сохранения (4.2) следует, что движение точки происходит в неподвижной плоскости, ортогональной вектору \mathbf{c} .

Для описания движения точки в плоскости будем использовать полярные координаты r и φ . В этих переменных будем иметь

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad c = r^2\dot{\varphi} = 2\dot{S}. \quad (4.3)$$

Здесь \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ – единичные векторы, указывающие радиальное и трансверсальное направление соответственно, а S – площадь, замещаемая радиус-вектором \mathbf{r} .

Таким образом, в любом центральном поле траекторией движения точки является плоская кривая и имеет место *интеграл площадей (второй закон Кеплера)*:

$$c = r^2\dot{\varphi} = 2\dot{S} = \text{const}. \quad (4.4)$$

4.2. Центально-симметричное поле. Уравнение Бине

Рассмотрим более подробно случай *центально-симметричного поля*, где величина силы зависит только от расстояния до силового центра, т.е. $F = F(r)$. В этом случае элементарная работа центральной силы записывается в виде

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r} = F(r) dr$$

и совпадает с полным дифференциалом функции $U = -\Pi(r)$, где

$$\Pi(r) = -\int F(r) dr. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что центально-симметричное поле является *консервативным*, т.е. потенциальным и не зависящим явно от времени. Потенциальная энергия материальной точки в этом поле определяется формулой (4.5), а интеграл полной механической энергии записывается в виде

$$E = T + \Pi = \frac{mV^2}{2} + \Pi(r) = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + \Pi(r) = \text{const}. \quad (4.6)$$

Записывая уравнения движения точки в форме уравнений Лагранжа в полярных координатах r, φ , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r} \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{F(r)}{m}. \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}. \quad (4.8)$$

Как видим, установленный ранее интеграл площадей (4.8) является непосредственным следствием уравнений Лагранжа. Этот пример показывает, что вся информация о свойствах системы содержится в ее уравнениях движения, и все законы сохранения, если они имеют место, можно установить из этих уравнений.

Используя интеграл площадей (4.8), можно исключить из уравнения (4.7) время и получить уравнение траектории точки в полярных координатах. Используя подстановку Бине $r = 1/u$ и обозначив штрихом производную по углу φ , получим

$$\dot{\varphi} = cu^2, \quad u' = \frac{du}{d\varphi}, \quad \dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2 u^2 u''. \quad (4.9)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (4.7), будем иметь

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = - \frac{F(1/u)}{mc^2 u^2}. \quad (4.10)$$

Полученное уравнение (4.10) называется *уравнением Бине*. После интегрирования этого уравнения находится траектория точки в виде $u = u(\varphi)$, а возвращаясь к исходной переменной r , получим уравнение траектории в виде $r = r(\varphi)$.

4.3. Ньютоновское поле. Законы Кеплера

Для *ньютоновского поля* (поля всемирного тяготения) имеем

$$F(r) = -\frac{km}{r^2}, \quad \Pi = -\frac{km}{r}; \quad k = \gamma M. \quad (4.11)$$

Здесь k – константа тяготения γ – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего центра. Уравнение движения точки в этом случае не зависит от массы движущейся точки и записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.12)$$

Исключив эту массу и из интеграла энергии (4.6), получим

$$V^2 - \frac{2k}{r} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{2k}{r} = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = h = \text{const}. \quad (4.13)$$

Здесь постоянная h есть *удвоенная полная энергия единичной массы*.

Уравнение Бине (4.9) для ньютоновского силового поля (4.11) принимает следующий вид:

$$u'' + u = \frac{1}{p}; \quad p = \frac{c^2}{k}. \quad (4.14)$$

Постоянная p в этом уравнении называется *фокальным параметром* орбиты.

Общее решение уравнения (4.14) записывается в виде

$$u = \frac{1}{p} + A \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (4.15)$$

где A и φ_0 – произвольные постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения. В переменных r , φ решение (4.15) переписывается в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (4.16)$$

где постоянная $e = Ap \geq 0$ называется *эксцентриситетом* орбиты.

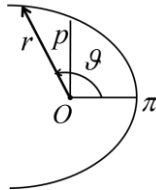


Рис. 4.2

Уравнение (4.16) называется *уравнением конических сечений*. Оно описывает кривую второго порядка в полярных координатах.

При $e < 1$ эта кривая является эллипсом (при $e = 0$ – окружность), при $e = 1$ – параболой, при $e > 1$ – гиперболой.

Перицентром орбиты π называется ближайшая точка траектории к силовому центру, а *истинной аномалией* – угол $\vartheta = \varphi - \varphi_0$, отсчитываемый от направления на перицентр (рис. 4.2). Через этот угол уравнение конических сечений записывается в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} . \quad (4.17)$$

Найдем выражение для величины эксцентриситета орбиты через постоянные c и h интеграла площадей и энергии. Из уравнения конических сечений (4.17) при учете интеграла площадей (4.4) и формулы (4.14) получим

$$e \cos \vartheta = \frac{p}{r} - 1 = \frac{c^2}{k r} - 1, \quad e \sin \vartheta = \frac{p \dot{\vartheta}}{r^2 \dot{\vartheta}} = \frac{c \dot{r}}{k} .$$

Отсюда, учитывая интеграл энергии (4.13), находим

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{k^2} \left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} - 2 \frac{k}{r} \right) = 1 + h \frac{c^2}{k^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}} . \quad (4.18)$$

Из уравнения (4.17) и формулы (4.18) следует, что эллиптическая орбита реализуется при $h < 0$. В этом случае уравнение траектории, записанное в декартовых координатах x, y (рис. 4.3), имеет вид $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где a и b – большая и малая полуоси эллипса, связанные с параметром и эксцентриситетом эллипса формулами

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b^2 = ap . \quad (4.19)$$

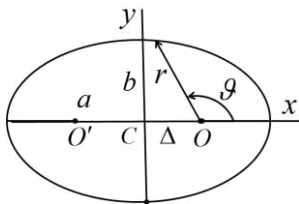


Рис. 4.3

Обозначим через T период обращения точки по эллиптической орбите. Выразив интеграл (4.4) через площадь S , заметаемую радиус-вектором \mathbf{r} , и учитывая вторую из формул (4.19), получим

$$c = \sqrt{pk} = 2\dot{S} \Rightarrow T\sqrt{pk} = 2\pi ab \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}. \quad (4.20)$$

Формулой (4.20) описывается *третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей*.

Отметим, что из формулы (4.18), учитывая первую из формул (4.19), можно получить следующее выражение для константы интеграла энергии через большую полуось эллиптической орбиты:

$$h = (e^2 - 1)\frac{k^2}{c^2} = (e^2 - 1)\frac{k}{p} = -\frac{k}{a}. \quad (4.21)$$

Эта формула показывает, что для движения по эллиптическим орбитам большая полуось эллипса является мерой полной энергии.

Для круговой орбиты ($e = 0, a = p = r$) из интеграла энергии (4.13) и формулы (4.21) следует

$$V^2 - \frac{2k}{r} = -\frac{k}{r} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{r}}. \quad (4.22)$$

Первой космической скоростью для планеты называется скорость спутника, движущегося вокруг этой планеты по круговой орбите радиуса $r = R$, где R – радиус планеты. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты выражается формулой $g = k/R^2$, получим

$$V_1 = \sqrt{k/R} = \sqrt{gR}. \quad (4.23)$$

Для планеты Земля $V_1 \approx 7.9$ км/с.

Второй космической скоростью называется скорость, которую нужно сообщить спутнику на поверхности планеты, чтобы спутник мог удалиться от планеты на бесконечное расстояние по параболической орбите. В этом случае $h = 0$, а из интеграла энергии (4.13) следует

$$V_2 = \sqrt{2k/R} = \sqrt{2gR}. \quad (4.24)$$

Для планеты Земля $V_2 \approx 11.2$ км/с.

При $h > 0$ ($e > 1$) орбита спутника будет гиперболической (рис. 4.4). В этом случае постоянные c , h и эксцентриситет орбиты e выражаются через скорость спутника на бесконечности V_∞ и *прицельное расстояние* ρ формулами

$$c = \rho V_\infty, \quad h = V_\infty^2, \quad e^2 = 1 + h \frac{c^2}{k^2} = 1 + \frac{\rho^2 V_\infty^4}{k^2}. \quad (4.25)$$

Определим угол χ поворота вектора скорости спутника в гравитационном поле планеты в рассматриваемом случае гиперболической орбиты. Этот угол выражается формулой $\chi = 2\vartheta_\infty - \pi$, где $\cos \vartheta_\infty = -1/e$. Отсюда, учитывая формулу (4.25), находим

$$\cos \chi = -\cos 2\vartheta_\infty = 1 - \frac{2}{e^2} = \frac{\rho^2 V_\infty^4 - k^2}{\rho^2 V_\infty^4 + k^2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{\rho V_\infty^2}{k}. \quad (4.26)$$

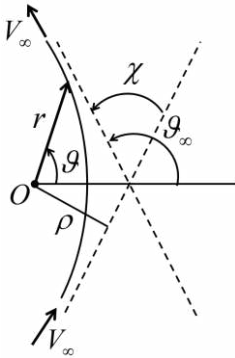


Рис. 4.4

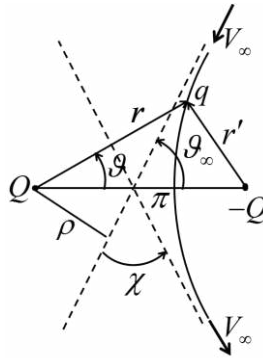


Рис. 4.5

Все исследованные выше траектории движения, получаемые из уравнения (4.12), принято называть *кеплеровскими* орбитами. Закон движения точки по этим орбитам (зависимость $\vartheta(t)$) находится из интеграла площадей (4.4) при учете уравнения конических сечений (4.17) и описывается следующим уравнением неявного вида:

$$t - \tau = \frac{p^2}{c} \int \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}. \quad (4.27)$$

Здесь τ – постоянная интегрирования, называемая *эпохой*. Она определяет момент прохождения точкой перигея орбиты.

4.4. Рассеяние частиц в кулоновом поле

Кулоново взаимодействие между электрическими зарядами тоже описывается центральной силой. Рассмотрим задачу о движении заряда q массы m в поле неподвижного заряда Q (рис. 4.5).

Сила, действующая на заряд q , выражается формулой Кулона:

$$\mathbf{F} = \frac{km}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad k = \frac{qQ}{m}. \quad (4.28)$$

В случае, когда знаки зарядов разные, получим задачу, полностью аналогичную рассмотренной выше задаче о движении точки в ньютоновском поле притяжения. Поэтому ниже будем иметь в виду силу отталкивания, что имеет место, когда знаки зарядов одинаковы, т.е. $k = Qq/m > 0$.

Уравнение Бине (4.10) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{1}{p}; \quad u = \frac{1}{r}, \quad p = \frac{c^2}{k}. \quad (4.29)$$

Здесь, как и в рассмотренных выше задачах, c – константа интеграла площадей $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$, значение которой выражается через скорость заряда q на бесконечности V_∞ и *прицельное расстояние* ρ формулой $c = \rho V_\infty$. Интеграл энергии записывается в виде

$$V^2 + \frac{2k}{r} = h; \quad h = V_\infty^2. \quad (4.30)$$

Интегрируя уравнение (4.29), получим следующее уравнение траектории частицы в поле отталкивающего центра:

$$r = \frac{p}{e \cos \vartheta - 1}; \quad e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}. \quad (4.31)$$

Здесь, как и в предыдущих примерах, угол ϑ отсчитывается от направления на перигей (рис. 4.5).

Угол χ поворота вектора скорости частицы в данном примере выражается формулой $\chi = \pi - 2\vartheta_\infty$, где $\cos \vartheta_\infty = 1/e$. В итоге получим формулу, полностью аналогичную формуле (4.26):

$$\cos \chi = \frac{\rho^2 V_\infty^4 - k^2}{\rho^2 V_\infty^4 + k^2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{\rho V_\infty^2}{k} = \frac{m \rho V_\infty^2}{qQ}. \quad (4.32)$$

Аналогия между указанными формулами свидетельствует о том, что движение частицы в поле отталкивающего заряда Q можно трактовать как движение в поле притягивающего заряда $-Q$, расположенного в сопряженном фокусе гиперболы (рис. 4.5).

Получим теперь формулу Резерфорда, которая использовалась для расчетов в опытах Резерфорда по рассеянию частиц. В этих опытах пучок электрически заряженных частиц, имеющий первоначально цилиндрическую форму, пролетая вблизи ядра тяжелого элемента с зарядом Q , приобретает коническую форму (рис. 4.6).

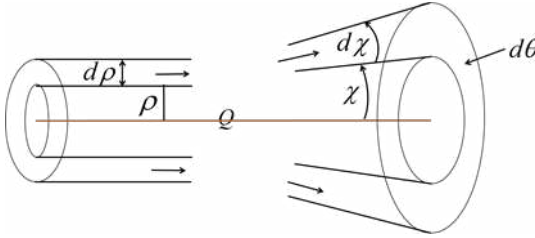


Рис. 4.6

Обозначим через n число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади цилиндрической трубки, а через dN – число частиц, рассеиваемых внутри угла от χ до $\chi + d\chi$. Отношение $d\sigma = dN/n$ называется *эффективным сечением рассеяния*. Оно выражается формулой $d\sigma = 2\pi \rho d\rho$, а после учета формулы (4.32) принимает вид

$$d\sigma = \pi \left(\frac{k}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)} d\chi. \quad (4.33)$$

Переходя от угла $d\chi$ к телесному углу $d\theta = 2\pi \sin \chi d\chi$, получим искомую *формулу Резерфорда*:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{qQ}{2mV_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}. \quad (4.34)$$

4.5. Задача двух тел

Постановки рассмотренных в предыдущих разделах задач о движении в центральном поле могут показаться искусственными, поскольку там предполагалось, что силовой центр неподвижен в инерциальной системе отсчета. В реальности же при взаимодействии двух точечных масс ускорение испытывают обе массы.

В этом разделе покажем, что *задача двух тел* (задача о движении двух взаимодействующих точек) сводится к задаче о движении одной точки в поле неподвижного силового центра, т.е. все решения рассмотренных выше «искусственных» задач вполне востребованы.

Положение точек с массами m_1 и m_2 в инерциальной системе отсчета зададим векторами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 (рис. 4.7). Эту СО можно выбрать так, чтобы центр масс этих двух точек, определяемый вектором $\mathbf{R}_C = (m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2)/(m_1 + m_2)$, был в ней неподвижен.

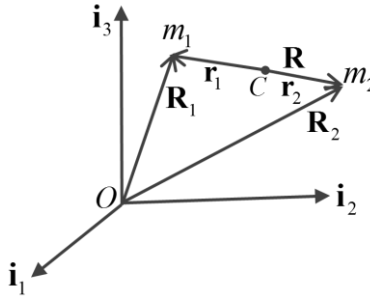


Рис. 4.7

Обозначим через $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ вектор, соединяющий точки. Тогда векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , задающие положения точек m_1 и m_2 в инерциальной системе отсчета, будут выражаться формулами

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R}. \quad (4.35)$$

Согласно третьему закону Ньютона действующие на точки m_1 и m_2 силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 можно записать в виде

$$\mathbf{F}_1 = F \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{F}_2 = -F \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (4.36)$$

где F – скалярная функция, которая в общем случае может зависеть от \mathbf{R} , $\dot{\mathbf{R}}$ и t . Записывая второй закон Ньютона для каждой точки

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{F}{m_1} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{F}{m_2} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

и вычитая из второго уравнения первое, получим следующее уравнение для наблюдаемой переменной \mathbf{R} :

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F \frac{\mathbf{R}}{R} \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{R}} = -F \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (4.37)$$

Полученное уравнение можно трактовать как закон движения материальной точки с приведенной массой $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ под действием центральной силы $\mathbf{F} = -F \mathbf{R} / R$, создаваемой неподвижным центром.

Для случая, когда точки взаимодействуют по закону всемирного тяготения, будем иметь $F = \gamma m_1 m_2 / R^2$, а уравнение (4.37) примет вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -k \frac{\mathbf{R}}{R^3}; \quad k = \gamma(m_1 + m_2). \quad (4.38)$$

Это уравнение полностью аналогично уравнению движения материальной точки в гравитационном поле неподвижной точки с массой $m_1 + m_2$.

Согласно формулам (4.35) траекториями движения масс m_1 и m_2 будут орбиты, подобные орбите для вектора \mathbf{R} .

4.6. Вектор Лапласа

Как было показано выше, в задаче двух тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона, уравнение для наблюдаемой переменной \mathbf{r} имеет точно такой же вид, как и уравнение движения точки в гравитационном поле неподвижной массы:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.39)$$

Отличие состоит только в том, что для задачи о движении массы m_2 в гравитационном поле неподвижной массы m_1 постоянная тяготения $k = \gamma m_1$, а в задаче двух тел $k = \gamma(m_1 + m_2)$.

Как установлено выше, следствиями уравнения (4.39) являются интеграл площадей

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const} \quad (4.40)$$

и интеграл энергии

$$V^2 - 2k/r = h = \text{const}, \quad (4.41)$$

а траектории в полярных координатах описываются уравнением конических сечений

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}; \quad p = \frac{c^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}} = \sqrt{1 + h \frac{p}{k}}. \quad (4.42)$$

Введем в рассмотрение следующий вектор, называемый *вектором Лапласа*:

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \frac{k \mathbf{r}}{r}. \quad (4.43)$$

Этот вектор, очевидно, ортогонален вектору \mathbf{c} , т.е. лежит в плоскости орбиты. Вычислим производную вектора (4.43) по времени в силу уравнения (4.39). Используя известную формулу для двойного векторного произведения и учитывая, что $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r \dot{r}$, получим

$$\dot{\mathbf{f}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) - \frac{k \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{k \mathbf{r} \dot{r}}{r^2} = 0. \quad (4.44)$$

Таким образом, вектор Лапласа сохраняется на решениях уравнения (4.43), т.е. является интегралом движения.

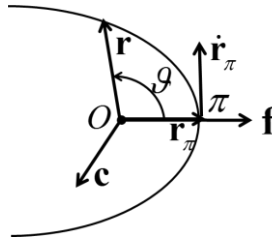


Рис. 4.8

Значение вектора Лапласа можно вычислить через значения \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ в точке перицентра орбиты (рис. 4.8). Учитывая, что в этой точке

$$\mathbf{r}_\pi \cdot \dot{\mathbf{r}}_\pi = 0, \quad (\dot{\mathbf{r}}_\pi)^2 = r_\pi^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{k p}{r_\pi^2}, \quad r_\pi = \frac{p}{1+e},$$

получим из определения (4.43)

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{r}}_\pi \times (\mathbf{r}_\pi \times \dot{\mathbf{r}}_\pi) - \frac{k \mathbf{r}_\pi}{r_\pi} = ke \frac{\mathbf{r}_\pi}{r_\pi}. \quad (4.45)$$

Из этой формулы следует, что вектор Лапласа указывает направление на перицентр орбиты, а его величина выражается формулой

$$f = ke. \quad (4.46)$$

Из формул (4.46) и (4.42) вытекает следующее выражение для величины вектора Лапласа через постоянные c и h :

$$f^2 = c^2 h + k^2. \quad (4.47)$$

Эту формулу можно получить и непосредственно из определения вектора Лапласа (4.43).

Таким образом, в задаче, где взаимодействие описывается уравнением (4.39), траекториями движения являются *кеплеровские* орбиты, для которых форма, размеры и положение в трехмерном пространстве полностью и однозначно определяются парой взаимно ортогональных векторов \mathbf{c} (4.40) и \mathbf{f} (4.43), т.е. пятью независимыми скалярными элементами.

В небесной механике для описания орбит спутников используется несколько разных систем элементов. Рассмотрим систему *кеплеровских элементов* орбиты.

Введем систему отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ с началом в силовом центре O , оси которой образуют правую тройку взаимно ортогональных единичных векторов (рис. 4.9). Обозначим через \mathbf{e}_3 единичный вектор нормали к плоскости орбиты, а через \mathbf{e}_1 — единичный вектор, указывающий направление *линии узлов* (линии пересечения плоскости $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ с плоскостью орбиты $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$). Тогда положение плоскости

кеплеровской орбиты и направление на перицентр однозначно определяются следующими тремя элементами.

Долгота восходящего узла Ω – угол между осью $O\mathbf{i}_1$ и линией узлов \mathbf{e}_1 . *Наклонение орбиты* i – угол между осью $O\mathbf{i}_3$ и вектором $\mathbf{c} = c\mathbf{e}_3$. *Аргумент перицентра* ω – угол между линией узлов \mathbf{e}_1 и вектором Лапласа $\mathbf{f} = ke\mathbf{e}_f$.

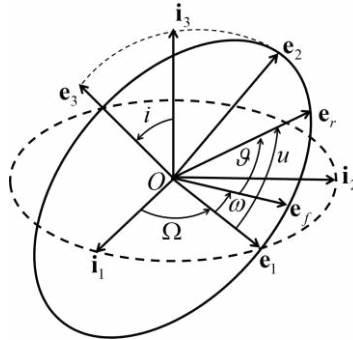


Рис. 4.9

Форма и размеры орбиты определяются фокальным параметром p и эксцентриситетом e , которые выражаются через величины векторов \mathbf{c} и \mathbf{f} формулами

$$p = c^2/k, \quad e = f/k. \quad (4.48)$$

Таким образом, пять независимых элементов

$$\Omega, i, \omega, p, e \quad (4.49)$$

полностью определяют кеплеровскую орбиту спутника в выбранной системе отсчета. Все эти элементы однозначно выражаются через значения первых интегралов \mathbf{c} и \mathbf{f} и поэтому также являются первыми интегралами уравнений (4.39).

Положение спутника на кеплеровской орбите задается углом ϑ (*истинной аномалией*) между векторами $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{f} = ke\mathbf{e}_f$, а траектория описывается уравнением конических сечений:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (4.50)$$

Иногда вместо ϑ используется переменная $u = \vartheta + \omega$, называемая *аргументом широты*.

4.7. О возмущениях кеплеровских орбит спутников

В прикладных задачах небесной механики, таких как задача о движениях искусственных спутников Земли или задача о движениях планет, траектории движения отличаются от рассмотренных выше кеплеровских орбит. В первом случае это связано с тем, что гравитационное поле Земли отличается от гравитационного поля материальной точки или однородного шара (за счет вращения относительно инерциальной системы отсчета Земля сплюснута в направлении полюсов). Кроме того, на спутник могут действовать возмущения негравитационного характера, например, силы сопротивления атмосферы. Во втором случае орбиты движения планет вокруг Солнца отличаются (хотя и мало) от кеплеровских за счет гравитационного возмущения от других планет.

В каждой из указанных задач уравнение движения отличается от уравнения (4.39) и записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}. \quad (4.51)$$

Здесь через \mathbf{a} обозначено *возмущающее ускорение*, представляющее собой «добавку» к ньютоновскому ускорению $-k\mathbf{r}/r^3$.

Уравнение (4.51) называется *уравнением возмущенного движения*, а под *невозмущенным* подразумевается исследованное выше кеплеровское движение при отсутствии возмущений (при $\mathbf{a} = 0$).

Для исследования решений уравнений возмущенного движения в качестве характеристик этого движения можно использовать те же взаимно ортогональные векторы \mathbf{c} и \mathbf{f} , что и для невозмущенного:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \frac{k\mathbf{r}}{r}. \quad (4.52)$$

Для невозмущенного движения эти векторы являются первыми интегралами и полностью определяют все элементы кеплеровской орбиты спутника. Для возмущенного движения эти векторы будут меняться со временем, поскольку их производные по времени, вычисленные в силу уравнения (4.51), выражаются формулами

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \quad (4.53)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}). \quad (4.54)$$

Для каждого момента времени векторы $\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$ однозначно определяют так называемую *оскулирующую* орбиту. По определению – это *касательная* к орбите возмущенного движения *кеплеровская* орбита, которая получилась бы, если бы действие возмущения в данный момент времени прекратилось. Таким образом, орбиту возмущенного движения представляют как эволюционирующую во времени *кеплеровскую* орбиту, эволюция которой характеризуется *оскулирующими* векторами $\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$.

Чтобы найти закон изменения оскулирующих элементов орбиты $\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$, необходимо проинтегрировать уравнения (4.53), (4.54) совместно с уравнением (4.51). В общем случае такая система не интегрируется аналитически. Но если возмущающее ускорение мало по сравнению с основным (ньютоновским) ускорением, то для выявления эффектов первого порядка от действия возмущений используется так называемое *первое приближение* уравнений возмущенного движения. По определению это *первое приближение* есть результат интегрирования уравнений (4.53), (4.54) на «кеплеровских» решениях невозмущенной системы, т.е. когда фигурирующие в правых частях уравнений элементы орбиты полагаются неизменными, а поведение переменной r описывается уравнением конических сечений (4.50). Осреднением по времени полученного таким образом решения определяется плавная часть решения, называемая *эволюцией* системы, а остальная часть решения называется *осцилляцией*.

Эволюция орбиты спутника при торможении в атмосфере планеты. Продемонстрируем применение теории возмущений для анализа эволюции орбиты при торможении спутника в атмосфере планеты. В этом случае возмущающее ускорение направлено обратно к вектору скорости $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$ и определяется выражением

$$\mathbf{a} = -F \dot{\mathbf{r}}, \text{ где } F > 0. \quad (4.55)$$

Это ускорение направлено в плоскости орбиты. Поэтому плоскость орбиты не меняет своей ориентации (элементы Ω и i постоянны).

Из уравнения (4.53) получаем

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = -F \mathbf{c} \Rightarrow \dot{p} = \frac{2\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}}{k} = -\frac{2F c^2}{k} = -2Fp < 0. \quad (4.56)$$

Отсюда следует, что параметр орбиты монотонно уменьшается.

Для анализа поведения эксцентриситета орбиты и ее перицентра используем уравнение (4.54). В рассматриваемой задаче оно принимает вид

$$\dot{\mathbf{f}} = -2F(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) = -2F\left(\mathbf{f} + k\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -2F\left(\mathbf{f} + k(\mathbf{e}_f \cos \vartheta + \mathbf{e}_g \sin \vartheta)\right). \quad (4.57)$$

Здесь \mathbf{e}_f – единичный вектор, направленный по вектору Лапласа, а \mathbf{e}_g – единичный вектор, определяемый формулой $\mathbf{e}_g = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_f$.

Проецируя уравнение (4.57) на направление вектора Лапласа, получим

$$\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{e}_f = k\dot{e} = -2kF(e + \cos \vartheta) \Rightarrow \dot{e} = -2F(e + \cos \vartheta). \quad (4.58)$$

Будем исходить из того, что действующая на спутник сила сопротивления пропорциональна плотности атмосферы ρ и квадратично зависит от скорости спутника. Тогда в наших обозначениях будем иметь $F = \mu \rho V$; $\mu = \text{const} > 0$.

Зависимость ρ от высоты H над поверхностью планеты имеет экспоненциальный характер и выражается в виде

$$\rho = \rho_0 \exp(-\alpha H), \quad H = r - R; \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (4.59)$$

Здесь R – радиус планеты.

Эволюция эксцентриситета орбиты определяется интегрированием уравнения (4.58) на кеплеровских траекториях невозмущенного движения, где

$$r^2 \dot{\vartheta} = c, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad V^2 = \frac{c^2}{p^2} (1 + 2e \cos \vartheta + e^2). \quad (4.60)$$

Используя в качестве независимой переменной истинную аномалию, получим из (4.58) следующее уравнение:

$$\frac{de}{d\vartheta} = -\frac{2\mu r^2 \rho V}{c} (e + \cos \vartheta). \quad (4.61)$$

Изменение Δe величины эксцентриситета орбиты за один оборот спутника выражается интегралом от правой части уравнения (4.61) по углу ϑ за период 2π . Учитывая, что на кеплеровских орбитах согласно формулам (4.59) и (4.60) правая часть уравнения (4.61) является четной функцией угла ϑ , получим

$$\Delta e = -\frac{4\mu}{c} \int_0^\pi r^2 \rho V (e + \cos \vartheta) d\vartheta \leq -\frac{4\mu}{c} \int_0^\pi r^2 \rho V \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.62)$$

Обозначим через $G(\vartheta)$ и $\Delta G(\vartheta)$ следующие функции:

$$G(\vartheta) = r^2 \rho V, \quad \Delta G(\vartheta) = G(\vartheta) - G(\vartheta + \pi/2).$$

В этих обозначениях неравенство (4.62) перепишется в виде

$$\Delta e \leq -\frac{4\mu}{c} \int_0^{\pi/2} \Delta G \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.63)$$

Введем в рассмотрение функцию $x(\vartheta) = r(\vartheta + \pi/2) - r(\vartheta)$. Из уравнения конических сечений следует, что при $e > 0$ эта функция на интервале $(0, \pi/2)$ строго положительна: $x(\vartheta) > 0$. Учитывая, что на этом интервале $V(\vartheta) > V(\vartheta + \pi/2)$, а также формулу (4.59), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\frac{G(\vartheta)}{G(\vartheta + \pi/2)} > \frac{\rho(\vartheta)}{\rho(\vartheta + \pi/2)} \cdot \frac{r^2(\vartheta)}{(r(\vartheta) + x)^2} = \frac{\exp(\alpha x)}{[1 + x/r(\vartheta)]^2} \geq \frac{\exp(\alpha x)}{(1 + x/P)^2} = S(x).$$

Здесь $P = p/(1 + e)$.

Исследуем значения функции $S(x)$, стоящей в правой части последнего неравенства. В точке $x = 0$ эта функции равна единице. Производная этой функции по x выражается формулой

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha \exp(\alpha x)}{P(1 + x/P)^3} \left(x + P - \frac{2}{\alpha} \right). \quad (4.64)$$

Из формулы (4.64) следует, что при $P > 2/\alpha$ и $x > 0$ функция $S(x)$ монотонно возрастает, т.е. $S(x) > 1$ при $x > 0$. В этом случае

из последнего неравенства будем иметь $\Delta G(\vartheta) > 0 \forall \vartheta \in (0, \pi/2)$, а из неравенства (4.63) получим $\Delta e < 0$.

В реальности условие $P = p/(1+e) > 2/\alpha$ заведомо выполняется, поскольку параметры орбит спутников измеряются тысячами километров, а величина $1/\alpha$ – десятками километров.

Таким образом, при *медленном* торможении спутника в атмосфере планеты (когда возмущающая сила много меньше ньютоновской силы притяжения) эксцентриситет уменьшается, т.е. орбиты стремятся к круговым. Уменьшается также и размер орбиты вследствие уменьшения параметра (неравенство (4.56)). При этом наблюдается так называемый «парадокс спутника», состоящий в том, что скорость спутника увеличивается. Этот «парадокс» следует из приведенной выше формулы (4.23), согласно которой при уменьшении радиуса *круговой* орбиты скорость увеличивается.

На самом деле никакого парадокса нет. За счет диссипации вследствие торможения полная энергия спутника уменьшается, а кинетическая энергия увеличивается потому, что потенциальная энергия в этом процессе убывает быстрее, чем полная энергия.

Поведение перицентра орбиты спутника описывается проекцией вектора $\dot{\mathbf{f}}$ (4.57) на направление \mathbf{e}_ϑ :

$$\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = ke\dot{\omega} = -2kF \sin \vartheta \Rightarrow e\dot{\omega} = -2F \sin \vartheta \Rightarrow \frac{d\omega}{d\vartheta} = -\frac{2r^2 \rho V \sin \vartheta}{ec}.$$

Здесь ω – аргумент перицентра. Интеграл от правой части этого уравнения по углу ϑ за период обращения спутника равен нулю, т.е. при медленном торможении спутника в атмосфере планеты направление на перицентр орбиты *в среднем* не меняется.

Динамика твердого тела

5.1. Геометрия масс твердого тела. Тензор инерции и эллипсоид инерции

Тензор инерции твердого тела естественным образом возникает при вычислении кинетического момента тела.

Рассмотрим движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ и вычислим его кинетический момент относительно произвольного полюса O . В соответствии с определением имеем

$$\mathbf{K}_O = \sum_i \mathbf{r}_{Oi} \times m_i \mathbf{V}_i, \quad (5.1)$$

где \mathbf{V}_i – скорость i -й точки тела относительно рассматриваемой системы отсчета, а \mathbf{r}_{Oi} – вектор, соединяющий полюс O с i -й точкой тела (рис. 5.1).

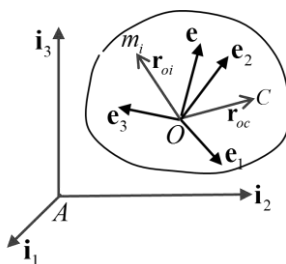


Рис. 5.1

Обозначим через \mathbf{V}_O скорость той точки тела, которая в данный момент совпадает с полюсом O . Тогда на основании формулы Эйлера $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi}$ получим

$$\mathbf{K}_O = m \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_O + \sum_i m_i \mathbf{r}_{Oi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi}). \quad (5.2)$$

Здесь m – масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, а \mathbf{r}_{OC} – радиус-вектор, соединяющий полюс O с центром масс тела C .

Свяжем с телом правый ортонормированный базис $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ и будем рассматривать \mathbf{r}_{Oi} и $\boldsymbol{\omega}$ как векторы-столбцы с компонентами x_i, y_i, z_i и $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в этом базисе. Тогда, используя известную формулу для двойного векторного произведения, второе слагаемое в формуле (1.2) можно записать через матричное произведение следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \mathbf{r}_{Oi} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Oi}) &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_{Oi} \cdot \mathbf{r}_{Oi}) \boldsymbol{\omega} - m_i \mathbf{r}_{Oi} (\mathbf{r}_{Oi} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{I} \mathbf{r}_{Oi}^2 - \mathbf{r}_{Oi} \mathbf{r}_{Oi}^T) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Здесь \mathbf{I} – единичная матрица размера 3×3 , T – знак транспонирования, а матрица

$$\mathbf{J}_O^{xyz} = \sum_i m_i (\mathbf{I} \mathbf{r}_{Oi}^2 - \mathbf{r}_{Oi} \mathbf{r}_{Oi}^T) = \begin{pmatrix} J_o^{xx} & J_o^{xy} & J_o^{xz} \\ J_o^{yx} & J_o^{yy} & J_o^{yz} \\ J_o^{zx} & J_o^{zy} & J_o^{zz} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

называется *тензором инерции твердого тела* относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Элементы этой матрицы определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}J_o^{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_o^{xy} = J_o^{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \\ J_o^{yy} &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad J_o^{yz} = J_o^{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i, \\ J_o^{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_o^{zx} = J_o^{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i.\end{aligned}\quad (5.4^*)$$

Из приведенных формул следует, что тензор инерции является симметричной матрицей и зависит от базиса, выбираемого в теле. Диагональные элементы этой матрицы представляют собой моменты инерции тела относительно осей $O\mathbf{e}_x, O\mathbf{e}_y, O\mathbf{e}_z$, а остальные элементы называются *центробежными моментами инерции* твердого тела.

Заметим, что если в формуле (5.3) заменить вектор $\boldsymbol{\omega}$ на любой другой вектор $\boldsymbol{\mu}$, то получим аналогичное выражение:

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_{Oi} \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}_{Oi}) = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\mu}. \quad (5.5)$$

Поэтому тензор инерции можно рассматривать как матричный оператор, с помощью которого для любого трехмерного вектора $\boldsymbol{\mu}$ двойное векторное произведение в левой части (5.5) выражается через матричное произведение.

Через тензор инерции \mathbf{J}_O можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку O . Обозначая через \mathbf{e} единичный вектор, указывающий направление оси, и учитывая формулу (5.5), получаем

$$J_{\mathbf{e}} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{e})^2 = \mathbf{e} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_{Oi}) = \mathbf{e}^T \mathbf{J}_O \mathbf{e}. \quad (5.6)$$

Определим закон преобразования тензора инерции при повороте базиса. Поворот от базиса $O\mathbf{E}$ к другому базису $O\mathbf{E}'$ представляет собой ортогональное преобразование, при котором каждый вектор \mathbf{r}_{Oi} преобразуется в вектор \mathbf{r}'_{Oi} по формуле $\mathbf{r}_{Oi} = \mathbf{S} \mathbf{r}'_{Oi}$, где \mathbf{S} – ортогональная матрица. Подставляя эти выражения в формулу (5.4), получаем

$$\mathbf{J}_O = \sum_i m_i [\mathbf{I}(\mathbf{r}'_{Oi})^2 - \mathbf{S} \mathbf{r}'_{Oi} \mathbf{r}'_{Oi}{}^T \mathbf{S}^T] = \mathbf{S} \mathbf{J}'_O \mathbf{S}^T.$$

Отсюда находим искомый закон преобразования тензора инерции твердого тела при повороте базиса:

$$\mathbf{J}'_O = \mathbf{S}^T \mathbf{J}_O \mathbf{S}. \quad (5.7)$$

Формула (5.7) преобразования тензора инерции (5.4) при повороте базиса совпадает, как нетрудно видеть, с формулой преобразования матрицы квадратичной формы $\mathbf{r}^T \mathbf{J}_O \mathbf{r}$. Поэтому на основе известного из курса линейной алгебры факта о приводимости любой квадратичной формы к сумме квадратов заключаем, что для любой точки O твердого тела существует *ортонормированный базис* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, в котором тензор инерции тела имеет диагональный вид:

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Оси указанного базиса называются *главными осями инерции* твердого тела для его точки O , а моменты инерции A, B, C относительно главных осей – *главными моментами инерции*.

Отдельная ось, например $O\mathbf{e}_z$, называется *главной осью инерции тела* для точки O , если соответствующие этой оси центробежные моменты инерции J_o^{zx} и J_o^{zy} равны нулю.

Задача определения главных осей инерции твердого тела в некотором базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ сводится к нахождению собственных векторов тензора инерции \mathbf{J}_O^{xyz} , вычисленного в этом базисе, а главными моментами инерции являются собственные числа тензора инерции. Эти собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и соответствующие им собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяются решениями уравнения $\mathbf{J}_O^{xyz}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$.

Главные моменты инерции твердого тела положительны (кроме случая, когда тело представляет собой совокупность точек, лежащих на одной прямой, а рассматриваемая точка O принадлежит этой прямой; в этом случае один из главных моментов инерции равен нулю). Поэтому в общем случае тензор инерции является положительно определенной матрицей. Однако главными моментами инерции не могут быть произвольные положительные числа, поскольку в силу формул (5.4*) они подчиняются следующим *неравенствам треугольника*:

$$A + B \geq C, \quad B + C \geq A, \quad C + A \geq B. \quad (5.9)$$

Определим закон преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса.

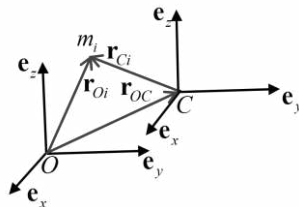


Рис. 5.2

Рассмотрим случай, когда первый базис $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ имеет начало в произвольной точке тела, а параллельный ему базис $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ имеет начало в центре масс твердого тела (рис. 5.2). Тогда на основании определения (5.4), используя обозначения $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_{Ci}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{OC}$ и учитывая формулы $\mathbf{r}_{Oi} = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_C$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O = & \sum_i m_i (\mathbf{I} \boldsymbol{\rho}_i^2 - \boldsymbol{\rho}_i \boldsymbol{\rho}_i^T) + m (\mathbf{I} \mathbf{r}_C^2 - \mathbf{r}_C \mathbf{r}_C^T) - \\ & - \sum_i m_i [\mathbf{I} (\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{r}_C) - \boldsymbol{\rho}_i \mathbf{r}_C^T] - \sum_i m_i [\mathbf{I} (\mathbf{r}_C^T \boldsymbol{\rho}_i) - \mathbf{r}_C \boldsymbol{\rho}_i^T]. \end{aligned}$$

Здесь m – масса тела. Последние две суммы в полученном выражении равны нулю в силу определения центра масс твердого тела, а первая сумма является тензором инерции твердого тела относительно центрального базиса $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Поэтому формула преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса из центра масс твердого тела записывается в виде

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m (\mathbf{I} \mathbf{r}_{OC}^2 - \mathbf{r}_{OC} \mathbf{r}_{OC}^T). \quad (5.10)$$

Формула (5.10) носит название *теоремы Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции*. Она обобщает известную теорему Гюйгенса–Штейнера для момента инерции. Второе слагаемое в формуле (5.10) представляет собой тензор инерции расположенной в центре масс тела точечной массы m относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$.

Каждому тензору инерции твердого тела \mathbf{J}_O ставится в соответствие *эллипсоид инерции* (рис. 5.3), который определяется как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{r}^T \mathbf{J}_O \mathbf{r} = 1. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) определяет поверхность второго порядка, которая действительно является эллипсоидом в силу положительной определенности тензора инерции. При этом главные оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции твердого тела для рассматриваемой точки.

Поскольку эллипсоид инерции неподвижен в теле, то анализ движения тела можно свести к анализу движения его эллипсоида инерции. Этот прием используется в некоторых задачах для геометрической интерпретации движения тела.

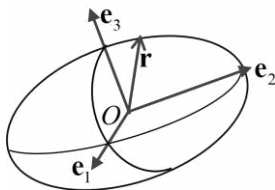


Рис. 5.3

Определим расстояние r_e от центра эллипсоида до его поверхности в направлении, задаваемом единичным вектором \mathbf{e} . Запишем вектор \mathbf{r} в виде $\mathbf{r} = \mathbf{e} r_e$. Подставляя это выражение в уравнение (5.11) и учитывая формулу (5.6), получим

$$r_e^2 \mathbf{e}^T \mathbf{J}_O \mathbf{e} = 1 \Rightarrow r_e = 1 / \sqrt{J_e}. \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что размер эллипсоида в заданном направлении обратно пропорционален квадратному корню от момента инерции твердого тела относительно этого направления.

Для вычисления главных осей и главных моментов инерции твердого тела для некоторой его точки O необходимо в общем случае вычислить тензор инерции тела в некотором базисе с началом в точке O , а затем найти собственные векторы и собственные числа этого тензора. Ниже рассматриваются частные случаи, когда некоторые из главных осей инерции тела могут быть найдены без решения задачи на собственные векторы. Указанные случаи характеризуются наличием у тела некоторой материальной симметрии.

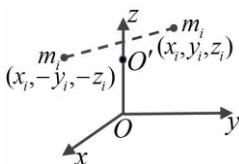


Рис. 5.4

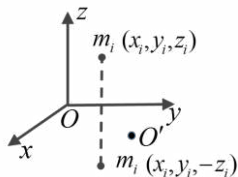


Рис. 5.5

Рассмотрим сначала случай, когда у тела имеется *ось материальной симметрии* Oz (рис. 5.4), т.е. когда каждой точке тела с массой m_i и координатами x_i, y_i, z_i соответствует симметричная относительно оси Oz точка с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и такой же массой m_i . В этом случае из формул (5.4*) следует, что центробежные моменты инерции J_o^{zx} и J_o^{zy} равны нулю, т.е. ось материальной симметрии – главная ось инерции тела для любой точки O на этой оси.

Рассмотрим теперь случай, когда тело имеет *плоскость материальной симметрии* Oxy (рис. 5.5), т.е. когда каждой точке тела с массой m_i и координатами x_i, y_i, z_i соответствует симметричная относительно плоскости Oxy точка с такой же массой m_i и координатами $x_i, y_i, -z_i$. И в этом случае, как следует из формул (5.4*), центробежные моменты инерции J_o^{zx} и J_o^{zy} равны нулю, т.е. ось Oz , ортогональная к плоскости материальной симметрии Oxy , является главной осью инерции тела для любой точки O из этой плоскости.

Из приведенных выше определений следует, что если у тела есть ось или плоскость материальной симметрии, то центр масс тела должен лежать на этой оси или в этой плоскости соответственно. Поэтому при наличии у тела материальной симметрии удастся, как правило, указать главные оси инерции твердого тела для центра масс тела и вычислить тензор инерции тела в главных центральных осях.

Для вычисления тензора инерции тела для точек тела, не совпадающих с центром масс, можно воспользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера (5.10), описывающей закон преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса из центра масс тела.

Обозначим через a, b, c координаты вектора \mathbf{r}_{Oc} в базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ на рис. 5.2. Тогда из формулы (5.10) получим

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Из формулы (5.13) следует, что если $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ – базис главных центральных осей инерции тела и две из координат вектора \mathbf{r}_{OC} равны нулю, то тензор инерции \mathbf{J}_O будет диагональным, т.е. базис, полученный параллельным переносом центрального базиса вдоль одной из главных центральных осей инерции, будет базисом главных осей инерции тела и для точки O .

В случае, когда только одна из координат вектора \mathbf{r}_{OC} равна нулю, например, $c=0$, то в выражении для тензора \mathbf{J}_O будут равны нулю только два центробежных момента инерции J_o^{zx} и J_o^{zy} , т.е. при параллельном переносе центрального базиса вдоль одной из главных центральных плоскостей инерции ось Oz , ортогональная этой плоскости, будет главной осью инерции тела и для точки O .

5.2. Формулы для кинетического момента и кинетической энергии твердого тела

Вернемся к вычислению кинетического момента твердого тела. Из формул (5.2) и (5.3) следует, что кинетический момент твердого тела относительно произвольного полюса O выражается формулой

$$\mathbf{K}_O = m\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_O + \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad (5.14)$$

где \mathbf{V}_O – скорость той *точки тела*, которая в данный момент совпадает с полюсом O , \mathbf{J}_O – тензор инерции тела в базисе с началом в точке O , $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела. Если полюс совпадает с неподвижной точкой тела или с его центром масс, то формула (5.14) приобретает упрощенный вид:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_C = \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega}. \quad (5.15)$$

Используя формулу, связывающую моменты относительно разных полюсов, кинетический момент тела относительно произвольного полюса можно выразить также формулой

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{Q} = \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_C, \quad (5.16)$$

где \mathbf{J}_C – тензор инерции твердого тела в базисе с началом в центре масс тела.

Если обозначить через p, q, r проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции тела $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а через A, B, C – главные моменты инерции тела для точки O , то выражение для кинетического момента тела относительно неподвижной точки тела или его центра масс запишется в виде

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = A p \mathbf{e}_1 + B q \mathbf{e}_2 + C r \mathbf{e}_3. \quad (5.17)$$

Кинетическую энергию твердого тела вычислим сначала для случая, когда некоторая точка O тела неподвижна в системе отсчета. В этом случае получим

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_i) = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела с неподвижной точкой O выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2), \quad (5.18)$$

где A, B, C – главные моменты инерции твердого тела для неподвижной точки O , а p, q, r – проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции.

В общем случае кинетическая энергия твердого тела может быть найдена по теореме Кенига. Учитывая, что движение твердого тела относительно системы Кенига представляет собой движение с неподвижной точкой C , и применяя формулу (5.18), получаем

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega}. \quad (5.19)$$

5.3. Динамические уравнения вращательного движения твердого тела

Рассмотрим сначала задачу о движении твердого тела с неподвижной (закрепленной) точкой O в инерциальной системе отсчета. Если выбрать эту неподвижную точку тела в качестве полюса, то вектор кинетического момента тела будет выражаться формулой

(5.15), а теорема об изменении кинетического момента запишется в виде

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}. \quad (5.20)$$

Далее будем считать, что вектор угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ задается проекциями p, q, r на оси связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, т. е. $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z$. Тогда, учитывая, что тензор инерции \mathbf{J}_O в базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ не меняется, производную $\dot{\mathbf{K}}_O$, вычисляемую в инерциальном базисе, можно представить суммой двух слагаемых:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad \text{где} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\mathbf{e}_x + \dot{q}\mathbf{e}_y + \dot{r}\mathbf{e}_z. \quad (5.21)$$

Здесь в правой части формулы (5.21) первое слагаемое есть производная по времени от вектора \mathbf{K}_O , вычисленная в базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, т. е. представляет собой относительную скорость вектора \mathbf{K}_O , а второе слагаемое – переносная скорость вектора \mathbf{K}_O , обусловленная вращением связанного с телом базиса.

Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), получим следующие уравнения, называемые *динамическими уравнениями Эйлера*:

$$\mathbf{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}. \quad (5.22)$$

Здесь \mathbf{M}_O^{ex} – момент действующих на тело внешних сил, вычисленный относительно неподвижной точки тела.

Уравнения (5.22) связывают в дифференциальной форме угловую скорость твердого тела с моментом действующих на тело сил.

В покоординатной записи уравнения (5.22) принимают наиболее простой вид, если в качестве связанного с телом базиса выбран базис главных осей инерции $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ твердого тела. В проекциях на эти главные оси инерции уравнения (5.22) описываются следующей системой:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_1, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_2, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела для неподвижной точки O , p, q, r – проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, а M_1, M_2, M_3 – проекции момента внешних сил на главные оси инерции.

Для общего случая, когда у тела нет закрепленной точки, динамические уравнения вращательного движения твердого тела выводятся из теоремы об изменении кинетического момента, записанной относительно центра масс тела. Учитывая полную аналогию между формулами (5.15), выражающими кинетические моменты относительно неподвижной точки тела и относительно его центра масс, и дословно повторяя процедуру вывода уравнений (5.22), получим из теоремы $\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}$ следующие, аналогичные (5.22), уравнения:

$$\mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}. \quad (5.22^*)$$

Здесь \mathbf{J}_C – центральный тензор инерции тела, а \mathbf{M}_C^{ex} – момент действующих на тело внешних сил, вычисленный относительно центра масс тела.

Заметим, что уравнения (5.24) фактически описывают движение твердого тела с неподвижной точкой C относительно базиса Кенига. При этом уравнения (5.22*) более универсальны и поэтому более востребованы для приложений, чем уравнения (5.22), поскольку уравнения (5.22) применимы только для задач о движении тела с закрепленной точкой в инерциальной системе отсчета, а для уравнений (5.22*) подобных ограничений нет.

Динамические уравнения Эйлера (5.22) или (5.22*) в сочетании с кинематическими уравнениями, записанными в той или иной форме, образуют замкнутую систему уравнений вращательного движения твердого тела. Интегрирование этой системы дает закон движения твердого тела в зависимости от момента действующих сил и начальных условий движения.

5.4. Уравнения движения динамически симметричного тела

Определение. Твердое тело называется *динамически симметричным относительно точки O* , если равны друг другу два из главных моментов инерции тела для точки O .

Для динамически симметричного относительно точки O тела тензор инерции в базисе главных осей инерции $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ имеет вид

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

При этом ось $O\mathbf{e}_3$, относительно которой момент инерции тела равен $C \neq A$, называется *осью динамической симметрии тела*, а плоскость $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ – *плоскостью динамической симметрии тела*.

В общем случае динамические уравнения Эйлера (5.22) или (5.22*) не образуют замкнутую систему, поскольку моменты внешних сил могут зависеть от ориентации твердого тела. Поэтому эти динамические уравнения решаются совместно с кинематическими.

Покажем, что движение динамически симметричного твердого тела может быть описано более простой по сравнению с общим случаем замкнутой системой уравнений.

Угловая скорость твердого тела в проекциях на главные оси инерции записывается в виде $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r\mathbf{e}_3$, а кинетический момент для динамически симметричного тела выражается формулой

$$\mathbf{K}_O = Ape_1 + Aqe_2 + Cre_3 = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)r\mathbf{e}_3. \quad (5.25)$$

Выражая из этой формулы угловую скорость тела

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{K}_O}{A} + \frac{A - C}{A} r\mathbf{e}_3, \quad (5.26)$$

получим на основании формулы Эйлера $\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3$ следующее уравнение:

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}_3}{A}. \quad (5.27)$$

В качестве второго уравнения возьмем теорему об изменении кинетического момента $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$.

В итоге получим систему из двух векторных уравнений:

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}_3}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O. \quad (5.28)$$

Если действующий на тело момент сил зависит только от направления оси симметрии \mathbf{e}_3 в пространстве и от вектора кинетического момента \mathbf{K}_O , уравнения (5.28) будут образовывать замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка. Переменными в этих уравнениях являются векторы \mathbf{K}_O и \mathbf{e}_3 , а сами уравнения записаны в проекциях на оси инерциального базиса.

По значениям переменных \mathbf{K}_O и \mathbf{e}_3 проекция угловой скорости тела на ось симметрии выражается формулой $r = (\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3)/C$.

Важно отметить, что аналогичными (5.28) уравнениями

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_C \times \mathbf{e}_3}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C \quad (5.28^*)$$

описывается и движение твердого тела, динамически симметричного относительно центра масс.

В задачах о движении динамически симметричного твердого тела главным является вопрос о движении оси динамической симметрии. Поэтому в таких задачах использование уравнений (5.28) или (5.28*) наиболее целесообразно.

Отметим также, что уравнения (5.28) и (5.28*) достаточно просты и не имеют никаких особенностей. Поэтому никаких проблем не возникает и при численном интегрировании этих уравнений.

5.5. Случай Эйлера

Уравнения вращательного движения твердого тела аналитически интегрируются лишь в редких случаях. Ниже рассматриваются *классические* случаи интегрируемого движения тела.

В задаче о движения твердого тела с неподвижной точкой O *случай Эйлера* определяется условием $\mathbf{M}_O = 0$ и называется *движением тела по инерции*.

В случае Эйлера в силу теоремы (5.20) сохраняется вектор кинетического момента тела в инерциальном базисе:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_O = \text{const}, \quad (5.29)$$

а в силу формулы (3.36) $\dot{T} = \mathbf{F}^{\text{ex}} \cdot \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{\text{ex}}$ сохраняется кинетическая энергия тела. В переменных p, q, r этим законам сохранения соответствуют два первых интеграла движения:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2 = \text{const}, \quad (5.30)$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = \text{const}. \quad (5.31)$$

Заметим, что наличие первых интегралов (5.30) и (5.31) можно установить также из динамических уравнений Эйлера (5.23).

Исследуем сначала движение *динамически симметричного тела* в случае Эйлера. Согласно формуле (5.26) угловая скорость динамически симметричного тела раскладывается на две составляющие:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2; \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{\mathbf{K}}{A}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{A-C}{A} r \mathbf{e}_3. \quad (5.32)$$

В рассматриваемой задаче в силу (5.29) составляющая $\boldsymbol{\omega}_1$ постоянна по величине и направлению. Составляющая $\boldsymbol{\omega}_2$ постоянна по величине, так как при $A = B$ из третьего уравнения системы (5.23) следует $r = \text{const}$. Не меняется также и угол θ между векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, поскольку имеет место равенство

$$K_3 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_3 = Cr = K \cos \theta = \text{const}.$$

Таким образом, согласно формуле (5.32) движение симметричного тела в случае Эйлера является *регулярной прецессией* (определение прецессии и регулярной прецессии дано в главе 2.5). Это движение представляется комбинацией двух простых вращений, где первым является вращение вокруг неизменного направления кинетического момента с постоянной угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\omega}_1$, вторым – вращение вокруг оси динамической симметрии тела с постоянной по величине угловой скоростью собственного вращения $\boldsymbol{\omega}_2$, а угол θ между осями остается постоянным (рис. 5.6). Параметры этой регулярной прецессии определяются формулами

$$\dot{\psi} = \omega_1 = \frac{K}{A}, \quad \dot{\phi} = \omega_2 = \frac{A-C}{A} r, \quad \cos \theta = \frac{Cr}{K}. \quad (5.33)$$

Регулярная прецессия динамически симметричного тела в случае Эйлера называется *свободной*, поскольку она происходит при отсутствии момента внешних сил. При этом, как следует из формул (5.33), параметры свободной регулярной прецессии связаны равенством

$$C\omega_2 + (C - A)\omega_1 \cos \theta = 0, \quad (5.34)$$

т. е. подбором начальных условий нельзя реализовать свободную регулярную прецессию с произвольными параметрами.

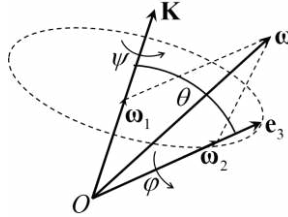


Рис. 5.6

В общем случае (при отсутствии динамической симметрии) интегрирование уравнений движения тела в случае Эйлера проводится по следующей схеме.

Из первых интегралов (5.30) и (5.31), полагая $A > B > C$, выражаются переменные p и r через q формулами

$$p = \pm \sqrt{a - bq^2}, \quad r = \pm \sqrt{c - dq^2}. \quad (5.35)$$

В этих формулах параметры a, b, c, d однозначно выражаются через постоянные в уравнениях (5.30) и (5.31). После подстановки выражений (5.35) во второе из динамических уравнений Эйлера (5.23) получим уравнение

$$B\dot{q} \pm (A - C)\sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)} = 0.$$

Из этого уравнения обращением эллиптического интеграла

$$\int_0^q \frac{dq}{\sqrt{(a - bq^2)(c - dq^2)}} = \pm \frac{C - A}{B}(t - t_0)$$

находится решение для $q(t)$, а затем по формулам (5.35) определяются $p(t)$ и $r(t)$. Таким образом, динамические уравнения в случае Эйлера интегрируются независимо от кинематических.

Покажем, что в рассматриваемом случае Эйлера по известным $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ интегрируются и кинематические уравнения в углах Эйлера (2.36). Для этого выберем инерциальную систему отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ так, чтобы вектор \mathbf{i}_3 был направлен по неизменному кинетическому моменту \mathbf{K} (рис. 5.7). Тогда проекции кинетического момента на главные оси инерции тела запишутся в виде

$$K_1 = Ap = K \sin \theta \sin \varphi, \quad K_2 = Bq = K \sin \theta \cos \varphi, \quad K_3 = Cr = K \cos \theta.$$

Из этих соотношений находятся законы изменения углов нутации и собственного вращения формулами

$$\cos \theta = \frac{Cr(t)}{K}, \quad \cos \varphi = \frac{Bq(t)}{K \sin \theta}.$$

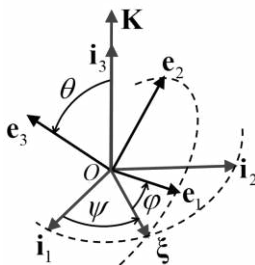


Рис. 5.7

Угол прецессии находится интегрированием первого из кинематических уравнений Эйлера (2.36) и записывается в виде

$$\psi(t) = \psi(0) + \int_0^t \frac{p(t) \sin \varphi(t) + q(t) \cos \varphi(t)}{\sin \theta(t)} dt.$$

Таким образом, в случае Эйлера уравнения вращательного движения твердого тела интегрируются при любых начальных условиях. Но получаемое при этом аналитическое решение выражается довольно сложным образом через эллиптические функции и особой наглядностью не отличается. В связи с этим анализ движения тела в

случае Эйлера дополняется геометрическими интерпретациями, наиболее известными из которых являются интерпретации Пуансо и Мак-Куллага.

В интерпретации Пуансо (рис. 5.8) движение твердого тела описывается движением жестко связанного с ним эллипсоида инерции, и в случае Эйлера этот эллипсоид катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента тела.

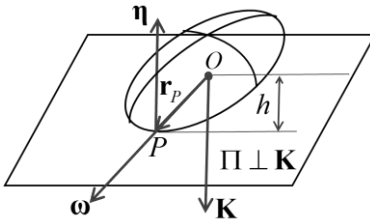


Рис. 5.8

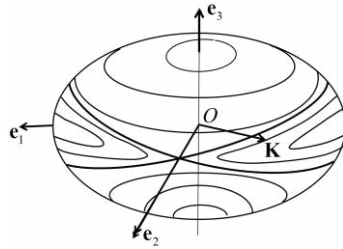


Рис. 5.9

Для доказательства интерпретации Пуансо обозначим через \mathbf{J} тензор инерции тела для неподвижной точки O , а через $\boldsymbol{\omega}$ – угловую скорость тела. Тогда кинетический момент и кинетическая энергия тела будут выражаться формулами $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, $2T = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, а уравнение эллипсоида инерции тела запишется в виде

$$f = \mathbf{r}^T \mathbf{J} \mathbf{r} - 1 = 0.$$

Рассмотрим неподвижную точку P на поверхности эллипсоида и проведем через нее плоскость Π , ортогональную вектору \mathbf{K} . Положение точки P будет определяться радиус-вектором $\mathbf{r}_P = r_P \boldsymbol{\omega} / \omega$, а из уравнения эллипсоида получим

$$\frac{r_P^2}{\omega^2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_P^2}{\omega^2} = \frac{1}{2T}.$$

Нормаль к поверхности эллипсоида в точке P выражается формулой

$$\boldsymbol{\eta} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right|_P = 2\mathbf{J}\mathbf{r} \Big|_P = \frac{2r_P}{\omega} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \frac{2r_P}{\omega} \mathbf{K}.$$

Из нее следует, что в неподвижной точке P эллипсоид инерции *касается* плоскости Π , ортогональной вектору \mathbf{K} .

Расстояние от центра эллипсоида до плоскости Π определяется формулой

$$h = \frac{\mathbf{r}_P^T \mathbf{K}}{K} = \frac{r_P}{K\omega} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{2T}}{K}$$

и остается неизменным вследствие постоянства T и K .

Таким образом, в случае Эйлера движение эллипсоида инерции тела представляет собой качение без проскальзывания по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента тела.

В интерпретации Мак-Куллага (рис. 5.9) первые интегралы (5.30) и (5.31) записываются через проекции кинетического момента \mathbf{K} на главные оси инерции тела в виде

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2, \quad (5.36)$$

$$\frac{K_1^2}{A} + \frac{K_2^2}{B} + \frac{K_3^2}{C} = 2T. \quad (5.37)$$

Здесь эллипсоид, описываемый уравнением (5.37), называется *эллипсоидом Мак-Куллага*. Линии пересечения сферы (5.36) с эллипсоидом (5.37) представляют собой траектории неподвижного в инерциальном базисе вектора кинетического момента \mathbf{K} на поверхности неподвижного в теле эллипсоида Мак-Куллага. Эти траектории являются замкнутыми кривыми и разделены двумя сепаратрисами, пересекающимися по главной оси \mathbf{e}_2 , соответствующей среднему по величине из главных моментов инерции тела ($A < B < C$).

Из рис. 5.9 можно видеть, что если в какой-то момент времени вектор \mathbf{K} близок по направлению к оси среднего момента инерции \mathbf{e}_2 , то в дальнейшем, двигаясь по соответствующей траектории, он в какой-то момент времени займет на поверхности эллипсоида Мак-Куллага положение, близкое по направлению к оси $-\mathbf{e}_2$. Это означает, что по отношению к неподвижному в инерциальном базисе вектору \mathbf{K} ось \mathbf{e}_2 поменяет свое направление на обратное.

Если учесть еще, что скорость вектора \mathbf{K} относительно тела выражается формулой $\dot{\mathbf{K}}^{отн} = \mathbf{K} \times \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}$ и она тем меньше, чем ближе вектор \mathbf{K} по направлению к оси \mathbf{e}_2 или $-\mathbf{e}_2$, то этого будет достаточно для объяснения так называемого «эффекта» Джанибекова, в котором закрученное вокруг оси среднего момента инерции тело неоднократно и почти скачкообразно меняет направление этой оси в пространстве на обратное.

5.6. Случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называется движение динамически симметричного относительно неподвижной точки O тела (волчка) в однородном поле тяжести, когда центр тяжести волчка C лежит на оси динамической симметрии $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ на расстоянии L от неподвижной точки (рис. 5.10).

В рассматриваемой задаче момент внешних сил выражается формулой $\mathbf{M}_O = mgL\mathbf{i} \times \mathbf{e}$, где \mathbf{i} – единичный вектор восходящей вертикали, а уравнения (5.28) принимают вид

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = mgL\mathbf{i} \times \mathbf{e}. \quad (5.38)$$

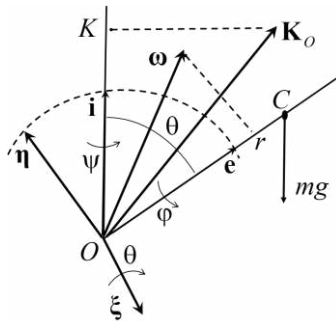


Рис. 5.10

Обозначим через $K = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{i}$ проекцию кинетического момента на вертикаль. Тогда из второго уравнения (5.38) получим

$$\dot{K} = \dot{\mathbf{K}}_O \cdot \mathbf{i} = mgL(\mathbf{i} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{i} = 0 \Rightarrow K = \text{const}. \quad (5.39)$$

Проекцию кинетического момента на ось симметрии обозначим через H . Она выражается формулой $H = \mathbf{e} \cdot \mathbf{K}_O = Cr$, а ее производная по времени, вычисленная в силу уравнений (5.38), равна нулю:

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{K}_O + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{K}}_O = 0 \Rightarrow H = Cr = \text{const}. \quad (5.40)$$

В рассматриваемом случае Лагранжа сохраняется также полная энергия волчка, поскольку сила тяжести консервативна, а реакция опоры приложена в неподвижной точке. Учитывая закон сохранения (5.40), интеграл энергии можно записать в виде

$$E = T' + \Pi = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + mgL \cos \theta = \text{const}. \quad (5.41)$$

Здесь $T' = T - Cr^2/2$, а p и q – проекции угловой скорости волчка на плоскость динамической симметрии.

Значения постоянных K , H и E в уравнениях (5.39) – (5.41) определяются начальными условиями движения.

Покажем, что первые интегралы (5.39) – (5.41) позволяют получить аналитическое решение задачи о движении волчка Лагранжа в конечной форме.

Зададим положение волчка углами Эйлера (рис. 5.10), где ψ – угол поворота вокруг вертикали (угол прецессии), θ – угол поворота вокруг *линии узлов* ξ (угол нутации), ϕ – угол поворота вокруг оси симметрии (угол собственного вращения).

На рис. 5.10 ξ и η – взаимно ортогональные единичные векторы, лежащие в плоскости симметрии волчка, причем вектор линии узлов ξ ортогонален плоскости, образованной векторами \mathbf{i} и \mathbf{e} , а вектор η лежит в этой плоскости. Поэтому угловая скорость волчка в проекциях на главные оси инерции \mathbf{e}, η, ξ , выраженная через производные по времени от углов Эйлера, запишется в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{i} + \dot{\phi} \mathbf{e} + \dot{\theta} \xi = r \mathbf{e} + \sin \theta \dot{\psi} \eta + \dot{\theta} \xi, \quad (5.42)$$

а для кинетического момента получим следующее выражение:

$$\mathbf{K}_O = H \mathbf{e} + A(\sin \theta \dot{\psi} \eta - \dot{\theta} \xi); \quad H = Cr = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta). \quad (5.43)$$

При учете формул (5.42), (5.43) первые интегралы (5.39), (5.41) запишутся в виде

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta + H\cos\theta = K. \quad (5.44)$$

$$A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + 2mgL\cos\theta = 2E. \quad (5.45)$$

Из уравнения (5.44) выразим переменную $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{K - H\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \quad (5.46)$$

Подставив это выражение в (5.45), получим уравнение движения по углу нутации:

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + W(\theta) = E; \quad W(\theta) = \frac{(K - H\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mgL\cos\theta. \quad (5.47)$$

Отсюда, обращением интеграла

$$t = t_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{Ad\vartheta}}{\sqrt{2(E - W(\vartheta))}}$$

определяется решение $\theta(t)$ для угла нутации. Далее, из (5.46) находится $\dot{\psi}(t)$, а интегрированием определяется закон движения по углу прецессии $\psi(t)$. Угол собственного вращения волчка $\varphi(t)$ находится интегрированием третьего из кинематических уравнений Эйлера (2.36) $\dot{\varphi} = r - \dot{\psi}(t)\cos\theta(t)$.

Таким образом, в случае Лагранжа уравнения движения интегрируются при любых начальных условиях. Однако здесь, как и в случае Эйлера, решение описывается эллиптическими функциями.

Проведем качественный анализ движения оси волчка Лагранжа. Введем переменную $u = \cos\theta$. Тогда, учитывая, что $\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta$, уравнение (5.47) можно переписать в виде

$$A^2\dot{u}^2 + (K - Hu)^2 + 2A(1 - u^2)(mgLu - E) = 0. \quad (5.48)$$

Рассмотрим случай, когда волчок начинает движение из положения θ_0 , а ось e неподвижна, что соответствует начальным условиям

$\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$. Тогда константы первых интегралов (5.44), (5.45) будут иметь значения

$$E = mgL \cos \theta_0, \quad K = H \cos \theta_0,$$

а уравнение (5.48) примет вид

$$\alpha^2 \dot{u}^2 + (\cos \theta_0 - u)^2 + \beta(1 - u^2)(u - \cos \theta_0) = 0. \quad (5.49)$$

$$\text{Здесь } \alpha = A/H, \quad \beta = 2AmgL/H^2. \quad (5.50)$$

Из уравнения (5.49) следует, что движение может происходить только для значений угла θ , удовлетворяющих неравенству

$$f(u) = (\cos \theta_0 - u)^2 - \beta(1 - u^2)(\cos \theta_0 - u) \leq 0. \quad (5.51)$$

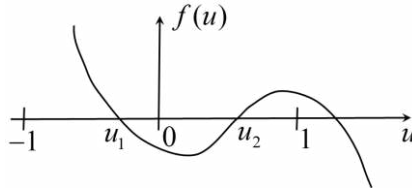


Рис. 5.11

Левая часть неравенства (5.51) представляет собой многочлен третьей степени относительно $u = \cos \theta$, график которого изображен на рис. 5.11. Данный многочлен имеет три корня. Одним из них является очевидное решение $u_2 = \cos \theta_0$. Два других корня находятся из уравнения $\beta u^2 - u + \cos \theta_0 - \beta = 0$ и выражаются формулами

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos \theta_0}}{2\beta}, \quad u_3 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos \theta_0}}{2\beta}. \quad (5.52)$$

При этом в силу неравенств

$$1 - \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos \theta_0} \leq 2\beta \cos \theta_0, \quad 1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos \theta_0} \geq 2\beta$$

корень u_1 расположен левее корня $u_2 = \cos \theta_0$, а корень $u_3 \geq 1$.

Таким образом, на отрезке $[-1, +1]$ возможных значений $u = \cos \theta$ находятся два корня многочлена u_1 и u_2 , которые определяют диапазон $[u_1, u_2]$ возможных положений оси волчка в рассматриваемом случае, т.е. движение волчка происходит таким образом, что косинус угла нутации периодически изменяется между минимальным значением u_1 и максимальным значением u_2 .

Поскольку в силу (5.46) угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ является однозначной функцией угла θ , то она также является периодической функцией с тем же самым периодом, что и для угла θ . Поэтому поведение оси волчка имеет вид, изображенный на рис. 5.12а траекторией конца единичного вектора \mathbf{e} на единичной сфере. В верхних точках заострения траектории (в точках возврата) ось останавливается, а в нижних точках траектории скорость оси максимальна, поскольку в них потенциальная энергия волчка минимальна.

Для начальных условий $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) \neq 0$ траектории оси динамической симметрии изображены на рис. 5.12в и 5.12с.

В случае в), который соответствует условию $\dot{\psi}(0) > 0$, траектория является гладкой кривой, причем для каждой точки этой траектории скорость прецессии положительна. В случае с), для которого $\dot{\psi}(0) < 0$ траектория является петлеобразной, а скорость прецессии во время движения меняет знак, так что в нижних точках траектории она положительна, а в верхних точках – отрицательна.

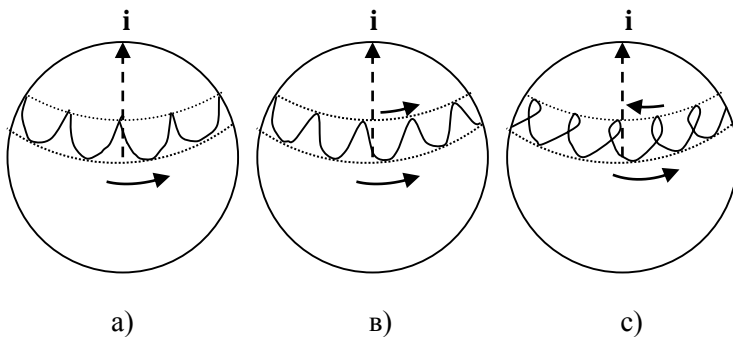


Рис. 5.12

Определим начальные условия, при которых траектория оси симметрии на единичной сфере превращается в окружность, соответствующую неизменному значению угла нутации θ . Такое движение волчка будет регулярной прецессией, поскольку в силу формул (5.44) и (5.43) значения $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ тоже будут постоянными. При этом осью прецессии будет вертикаль \mathbf{i} .

Неизменность угла θ описывается условиями $\dot{\theta} = 0$ и $\ddot{\theta} = 0$, что эквивалентно условиям $\dot{u} = 0$ и $\ddot{u} = 0$, где $u = \cos \theta = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$. Поэтому, используя уравнения (5.38), будем иметь $A\dot{u} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{K}_o \times \mathbf{e}) = 0$,

$$\begin{aligned} A^2 \ddot{u} &= \mathbf{i} \cdot [\mathbf{A} \dot{\mathbf{K}}_o \times \mathbf{e} + \mathbf{K}_o \times (\mathbf{K}_o \times \mathbf{e})] = \\ &= -AmgL \sin^2 \theta + KH - K_o^2 \cos \theta = 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Из формулы (5.43) при $\dot{\theta} = 0$ получим $K_o^2 = H^2 + A^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta$, а из первого интеграла (5.44) следует $K - H \cos \theta = A \dot{\psi} \sin^2 \theta$. Подставляя эти выражения в (5.53), получим после сокращения на $A \sin^2 \theta$ следующее уравнение:

$$A \dot{\psi}^2 \cos \theta - H \dot{\psi} + AmgL = 0. \quad (5.54)$$

Учитывая, что $H = Cr = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$, уравнение (5.54) можно переписать в виде

$$(A - C) \dot{\psi}^2 \cos \theta - C \dot{\psi} \dot{\phi} + AmgL = 0. \quad (5.55)$$

Это уравнение связывает параметры $\theta, \dot{\psi}, \dot{\phi}$ регулярной прецессии волчка Лагранжа.

Частным случаем регулярной прецессии волчка является движение, при котором ось волчка занимает вертикальное положение, т.е. $\cos \theta_0 = 1$. В этом случае неравенство (5.51) принимает вид

$$(1 - \cos \theta)^2 (1 - \beta(1 + \cos \theta)) \leq 0. \quad (5.56)$$

Если выполняется условие

$$2\beta \leq 1, \text{ т. е. } H^2 \geq 4AmgL, \quad (5.57)$$

то неравенство (5.56) имеет единственное решение $\cos \theta = 1$, и, следовательно, единственно возможным является вертикальное положение волчка. Неравенство (5.57) известно как условие устойчивости вертикального положения волчка (*условие Майевского*). Если вертикально поставленный волчок закручен вокруг оси симметрии с угловой скоростью, удовлетворяющей указанному неравенству, то в течение некоторого времени ось волчка остается практически неподвижной, что и объясняет название «спящий» волчок. Затем с течением времени момент сил трения в точке опоры уменьшает угловую скорость вращения волчка, в результате чего условие устойчивости нарушается, и волчок начинает раскачиваться.

5.7. «Быстрый» волчок

Проанализируем более детально движение «*быстрого*» волчка, который определяется условием

$$\beta \ll 1, \text{ т. е. } H^2 \gg AmgL. \quad (5.58)$$

Будем считать, как и ранее, что волчок начинает движение из состояния «покоя», т.е. $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$. Тогда из формулы (5.52) получим, что с точностью до членов второго порядка относительно β нижняя граница значений переменной $u = \cos \theta$ оценивается величиной $u_1 \approx \cos \theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0$, т.е. движение происходит в узком диапазоне значений угла нутации, определяемом неравенством

$$\cos \theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0 \leq \cos \theta \leq \cos \theta_0.$$

Дифференцируя уравнение (5.49) по времени с последующим сокращением на \dot{u} и оставляя только члены первого порядка малости по отношению к разности $u - \cos \theta_0$, получим следующее линеаризованное уравнение:

$$\alpha^2 \ddot{u} + (u - \cos \theta_0)(1 - 2\beta \cos \theta_0) + \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 = 0. \quad (5.59)$$

Для указанных выше начальных условий решение этого уравнения записывается в виде

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 (\cos \Omega t - 1), \quad (5.60)$$

где $\Omega = \sqrt{1 - 2\beta \cos \theta_0} / \alpha \approx H/A$.

На основе решения (5.60) и формулы (5.46) находим приближенное решение для угловой скорости прецессии:

$$\dot{\psi} = \frac{H\beta}{2A} (1 - \cos \Omega t) = \frac{mgL}{H} (1 - \cos \Omega t). \quad (5.61)$$

Из (5.60) и (5.61) следует, что в рамках уравнений линейного приближения движения по углу нутации и угловой скорости прецессии представляют собой гармонические колебания, а средние значения величин $u = \cos \theta$ и $\dot{\psi}$ выражаются формулами

$$\bar{u} = \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 \approx \cos \theta_0, \quad \bar{\dot{\psi}} = \frac{mgL}{H}. \quad (5.62)$$

Отсюда следует, что *осредненное* движение оси волчка $\bar{\mathbf{e}}(t)$ описывается уравнением

$$H \ddot{\bar{\mathbf{e}}} = mgL \mathbf{i} \times \bar{\mathbf{e}} \quad (5.63)$$

и представляет собой равномерное вращение вокруг вертикали с угловой скоростью $\bar{\dot{\psi}} = mgL/H$.

Уравнение (5.63) соответствует основному допущению приближенной (*прецессионной*) теории «быстрого» волчка (гироскопа), согласно которой кинетический момент гироскопа считается сосредоточенным на оси симметрии ($\mathbf{K}_O = H\mathbf{e}$). При этом скорость оси симметрии определяется уравнением $H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_\perp$, где \mathbf{M}_\perp — ортогональная оси \mathbf{e} составляющая момента действующих сил. Однако из проведенного анализа ясно, что уравнение (5.63) описывает только среднее движение оси волчка. Фактическое движение «быстрого» волчка состоит из среднего движения (5.63), на которое накладывается мелкое дрожание оси, описываемое решениями (5.60), (5.61), и поэтому называется *псевдорегулярной прецессией*.

Мы проанализировали движение «быстрого» волчка для случая, когда в начальный момент времени скорость оси волчка равна нулю. Результаты остаются в силе и при ненулевой начальной скорости

оси волчка, если эта скорость удовлетворяет сильному неравенству $A|\dot{\mathbf{e}}(0)| \ll H$, т.е. когда экваториальная составляющая кинетического момента волчка мала по сравнению с его осевой составляющей.

Отметим, что понятие «быстрый» гироскоп, определяемое в случае Лагранжа условием (5.58), при действии на гироскоп сил произвольной природы определяется следующим неравенством:

$$H^2 \gg A|M_{\perp}|; \quad H = Cr, \quad M_{\perp} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}. \quad (5.64)$$

Именно для «быстрых» гироскопов, закрученных вокруг оси симметрии, применимо прецессионное уравнение $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_{\perp}/H$, в силу которого средняя скорость «ухода» оси гироскопа равна отношению величины момента действующих сил к величине собственного кинетического момента гироскопа. Этим уравнением объясняется присущее быстрому гироскопу свойство гироскопической «жесткости», которая проявляется в том, что при сравнительно малых значениях возмущающего момента ось симметрии гироскопа остается практически неподвижной. На этом свойстве основано применение свободного гироскопа (гироскопа с тремя степенями свободы) в качестве указателя неизменного направления в инерциальном пространстве.

Из других технических применений гироскопов отметим их использование в качестве гироскопических компасов, указывающих направление относительно Земли, и в качестве датчиков угловой скорости летательных аппаратов. Силовые гироскопы (гиродины) используются для управления ориентацией космических аппаратов.

5.8. Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного тела

В этом разделе рассматривается задача о вычислении момента сил, действующих на динамически симметричное тело, совершающего регулярную прецессию с заранее заданными параметрами. Здесь предполагается, что движение тела задано (известно) и представляется в виде комбинации двух вращений, первым из которых является вращение вокруг неподвижной в инерциальном базисе оси \mathbf{i} с постоянной угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{i}$, вторым –

вращение вокруг оси симметрии \mathbf{e} с постоянной по величине угловой скоростью собственного вращения $\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{e}$, а угол θ между осями остается неизменным (рис. 5.13).

Для рассматриваемого движения вектор угловой скорости тела можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) \mathbf{e} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \mathbf{e} \omega_1 \cos \theta),$$

где составляющая $(\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) \mathbf{e}$ направлена по оси динамической симметрии тела, а составляющая $\boldsymbol{\omega}_1 - \mathbf{e} \omega_1 \cos \theta$ – в плоскости динамической симметрии.

Кинетический момент такого движения для динамически симметричного тела выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= C(\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) \mathbf{e} + A(\boldsymbol{\omega}_1 - \mathbf{e} \omega_1 \cos \theta) = \\ &= [C\omega_2 + (C - A)\omega_1 \cos \theta] \mathbf{e} + A\boldsymbol{\omega}_1. \end{aligned}$$

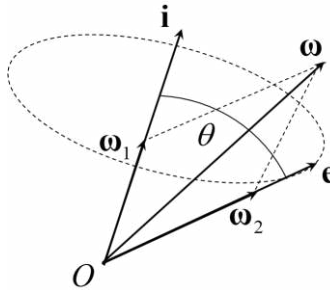


Рис. 5.13

Искомый момент сил вычисляется из теоремы об изменении кинетического момента. Учитывая, что $\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}$, получим

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{K}}_O = [C\omega_2 + (C - A)\omega_1 \cos \theta](\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}). \quad (5.65)$$

Если $\omega_2 \neq 0$, то формулу (5.65) можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_O = \left[C + (C - A) \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \theta \right] (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2). \quad (5.65^*)$$

Заметим, что в некоторых учебниках формулу (5.65*) называют основной формулой гироскопии, хотя никакого отношения к гироскопии она не имеет. Эта формула представляет собой лишь один из примеров решения «обратной» задачи динамики, где по *заданному* (известному) движению механической системы определяются силы, действующие на систему.

5.9. Динамический винт твердого тела

В общем случае динамика твердого тела относительно инерциального базиса описывается уравнениями

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}, \quad \mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C. \quad (5.66)$$

Первое из этих уравнений описывает движение центра масс, а второе – вращательное движение тела. В правых частях уравнений (5.66) \mathbf{F} – главный вектор внешних сил, а \mathbf{M}_C – главный момент внешних сил, вычисленный относительно центра масс тела.

В задачах динамики всевозможные преобразования сил, не изменяющие уравнений движения системы, называются *эквивалентными*. Из уравнений (5.66) следует, что в динамике твердого тела эквивалентными будут все преобразования, в результате которых не меняется главный вектор сил \mathbf{F} и главный момент сил \mathbf{M}_C .

С помощью эквивалентных преобразований любую систему действующих на тело сил можно заменить более простой системой. При этом задача упрощения заданной системы сил сводится к нахождению простейшей системы, для которой главный вектор и главный момент равны заданным значениям \mathbf{F} и \mathbf{M}_C соответственно.

Для решения этой задачи воспользуемся формулой, связывающей моменты относительно разных полюсов

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_C - \mathbf{r}_T \times \mathbf{F},$$

и найдем точку T , относительно которой момент \mathbf{M}_T параллелен вектору \mathbf{F} . Положение \mathbf{r}_T искомой точки T определяется из уравнения

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{M}_C - \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}) = 0. \quad (5.67)$$

Разложим искомый вектор \mathbf{r}_T на две составляющие

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{h}_T + \mathbf{f}_T, \text{ где } \mathbf{h}_T \perp \mathbf{F}, \text{ а } \mathbf{f}_T \parallel \mathbf{F}.$$

Тогда из уравнения (5.67) получим для \mathbf{h}_T следующее решение:

$$\mathbf{h}_T = \mathbf{F} \times \mathbf{M}_C / F^2, \quad (5.68)$$

а составляющая \mathbf{f}_T может принимать любое значение.

Таким образом, точки T , для которых $\mathbf{M}_T \parallel \mathbf{F}$, образуют целую прямую, параллельную вектору \mathbf{F} , расположенную на расстоянии (5.68) от точки C . Эта прямая называется *осью динамического винта* (рис. 5.14).

Простейшей системой, описывающей действующие на твердое тело силы с главным вектором \mathbf{F} и главным моментом $\mathbf{M}_T \parallel \mathbf{F}$, является тройка векторов, состоящая из *главного вектора* \mathbf{F} , приложенного в точке T , и *пары* векторов $\{\mathbf{f}, -\mathbf{f}\}$, расположенных в плоскости, ортогональной \mathbf{F} (рис. 5.15). Указанная тройка векторов и называется *динамическим винтом*. *Главный вектор* этой тройки равен главному вектору действующих на тело сил \mathbf{F} , а парой $\{\mathbf{f}, -\mathbf{f}\}$ реализуется *момент винта* \mathbf{M}_T . Величина этого момента вычисляется через заданные \mathbf{F} и \mathbf{M}_C формулой $M_T = (\mathbf{M}_C \cdot \mathbf{F}) / F$ и выражается произведением $M_T = f \cdot l$, где l – *плечо пары*.

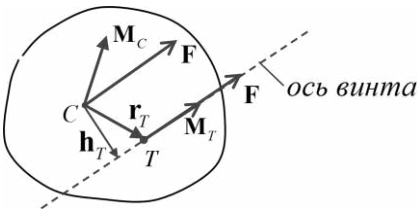


Рис. 5.14

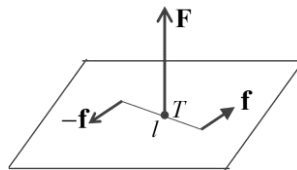


Рис. 5.15

Отметим, что частными случаями динамического винта являются *равнодействующая* ($\mathbf{F} \neq 0, \mathbf{M}_T = 0$), *пара сил* ($\mathbf{F} = 0, \mathbf{M}_T \neq 0$) и *векторный нуль* ($\mathbf{F} = 0, \mathbf{M}_T = 0$).

Лагранжева механика

6.1. Механические связи и их классификация

Рассмотрим конечномерную механическую систему, т.е. систему, состоящую из конечного числа материальных точек и твердых тел. Обозначим через $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_S)^T$ вектор, задающий положение рассматриваемой механической системы относительно системы отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Компонентами вектора \mathbf{R} могут служить декартовы координаты входящих в систему отдельных материальных точек и переменные, задающие положения твердых тел (например, координаты центров масс и углы Эйлера). Если система состоит из j материальных точек и l твердых тел, то размерность вектора \mathbf{R} будет равна $S = 3j + 6l$. Положения отдельных материальных точек и точек твердых тел будут выражаться однозначными функциями вектора \mathbf{R} в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{R})$.

Если на возможные положения \mathbf{R} и скорости $\dot{\mathbf{R}}$ системы не наложено никаких ограничений, то система называется *свободной*. В противном случае говорят, что на систему наложены *механические связи*.

Определение. Механическими связями называются ограничения на положения \mathbf{R} и скорости $\dot{\mathbf{R}}$ системы, которые выполняются при любых действующих в системе силах.

Механические связи описываются либо в виде равенств

$$f_k(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.1)$$

либо в виде неравенств

$$f_k(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}, t) \leq 0; \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.2)$$

В случае равенств (6.1) связи называются *удерживающими* (двухсторонними), а в случае неравенств – *неудерживающими* (односторонними). В дальнейшем ограничимся рассмотрением только удерживающих связей.

Удерживающие связи (6.1) называются *конечными (геометрическими)*, если они задают ограничения только на положения системы, т.е. уравнения связей имеют вид

$$f_k(\mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.3)$$

Если же в уравнение связи входят скорости $\dot{\mathbf{R}}$, то связь называется *дифференциальной (кинематической)*.

Отметим [2], что *все известные примеры дифференциальных механических связей характеризуются линейной зависимостью от скоростей $\dot{\mathbf{R}}$* , т.е. выражаются уравнениями вида

$$f = \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{R}} + b = \sum_{i=1}^S a_i \dot{R}_i + b = 0, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{R}, t)$ – S -мерная вектор-функция, а $b = b(\mathbf{R}, t)$ – скалярная функция переменных \mathbf{R}, t . Почленным умножением на dt уравнение (6.4) приводится к дифференциальной форме:

$$\mathbf{a}^T d\mathbf{R} + bdt = \sum_{i=1}^S a_i dR_i + bdt = 0. \quad (6.5)$$

Связь называется *стационарной (склерономной)*, если в уравнение этой связи не входит время t . В противном случае связь называется *нестационарной (реономной)*.

Дифференциальная связь (6.4) называется *интегрируемой*, если она представима в виде *эквивалентной* конечной связи:

$$F(\mathbf{R}, t) - c = 0, \quad (6.6)$$

где c – постоянная интегрирования. Под *эквивалентностью* связей (6.4) и (6.6) при этом понимается, что уравнение

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}^T} \dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (6.7)$$

получаемое дифференцированием уравнения (6.6) по времени, *эквивалентно* уравнению (6.4), т.е. в каждый момент времени уравнениями (6.4) и (6.7) описывается одно и то же множество $\{\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}\}$ состояний системы. Отметим, что тождественное совпадение уравнений

(6.4) и (6.7) является только достаточным условием их эквивалентности.

Ввиду произвольности постоянной c интегрируемая кинематическая связь эквивалентна семейству конечных связей (6.6). Но каждому отдельному значению постоянной c соответствует единственная конечная связь. Поскольку значение константы c однозначно определяется начальными условиями \mathbf{R}_0, t_0 в виде $c = F(\mathbf{R}_0, t_0)$, то задание этих начальных условий фактически превращает интегрируемую кинематическую связь в конкретную конечную связь.

Остановимся на вопросе об условиях интегрируемости кинематических связей.

Определим сначала достаточные условия интегрируемости связи (6.4), рассматривая случай, когда эквивалентность уравнений (6.4) и (6.7) обусловлена их тождественным совпадением, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}^T} \dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{R}} + b. \quad (6.8)$$

Ввиду произвольности $\dot{\mathbf{R}}$ тождество (6.8) выполняется только в случае, если функция $F(\mathbf{R}, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{a}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = b. \quad (6.9)$$

Поэтому на основании теоремы *об условиях интегрируемости* (см. Приложение 1) получаем следующее достаточное условие интегрируемости кинематической связи:

Для того чтобы связь (6.4) была интегрируемой, достаточно, чтобы матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{R}^T} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \\ \frac{\partial b}{\partial \mathbf{R}^T} & \frac{\partial b}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

была симметрической, т.е. $\Phi = \Phi^T$.

Необходимые условия интегрируемости связи (6.4) имеют существенно более сложный вид и здесь не приводятся. Но во многих конкретных примерах вопрос об интегрируемости кинематической

связи можно решить исходя непосредственно из определения. Например, в некоторых случаях, предположив сначала, что связь интегрируема, удастся либо доказать, что функции F , дающей уравнение (6.7), эквивалентное уравнению (6.4), не существует, либо найти F в явном виде. Можно воспользоваться также следующими соображениями. В случае интегрируемой связи в каждый момент времени различные положения системы \mathbf{R}_0 и \mathbf{R}_1 связаны некоторым уравнением:

$$F(\mathbf{R}_0, t) = F(\mathbf{R}_1, t) = c, \quad (6.11)$$

т.е. *не могут быть произвольными*. Следовательно, отсутствие какой-либо зависимости вида (6.11) между допустимыми положениями системы в один и тот же момент времени является признаком неинтегрируемости связи. Поэтому, если, например, рассматриваемая связь такова, что уравнение $\mathbf{a}^T \delta \mathbf{R} = 0$, получаемое из уравнения (6.5) при $dt = 0$ (при фиксированном времени), допускает перемещение системы из *любого* положения \mathbf{R}_0 в *произвольное* положение \mathbf{R}_1 , то эта связь неинтегрируемая.

Простейшим примером интегрируемой кинематической связи является ограничение, описывающее плоское качение колеса без скольжения. Эта связь описывается уравнением $\dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$, где x – координата центра колеса, φ – угол поворота колеса, R – радиус колеса. Эта связь представима в эквивалентном конечном виде $x - R\varphi = c$, а значение константы интегрирования c зависит в данном случае от того, с какими значениями x_0, φ_0 поставлено колесо на дорогу.

Кинематическая связь $t(\dot{x} + \dot{y}) + x + y = 0$ тоже интегрируема. Ей соответствует эквивалентная конечная связь $t(x + y) - c = 0$.

В предыдущих примерах связи удовлетворяли достаточным условиям интегрируемости. В следующем примере связь $\dot{x} + \dot{y} + x + y = 0$ этим условиям не удовлетворяет, поскольку, как нетрудно убедиться, матрица (6.10) не является симметрической. Тем не менее эта связь интегрируема. Ей соответствует эквивалентная конечная связь $\ln|x + y| + t - c = 0$.

Способ доказательства неинтегрируемости кинематических связей проиллюстрируем на примере связи $\dot{y} + x = 0$. Предположим, что эта связь интегрируема, т.е. существует функция $F(x, y, t)$ такая, что уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (6.12)$$

эквивалентно уравнению $\dot{y} + x = 0$. Если указанные уравнения эквивалентны, то подстановка выражения $\dot{y} = -x$ в уравнение (6.12) должна обращать это уравнение в тождество, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0.$$

Отсюда ввиду произвольности \dot{x} следуют равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0, \quad -\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0.$$

Первое из этих равенств показывает, что функция F не зависит от x . Вследствие этого второе тождество может выполняться при любых значениях x только в случае, если $\partial F / \partial y \equiv 0$, $\partial F / \partial t \equiv 0$. Таким образом, функция F не зависит от переменных x, y, t , т.е. является тождественной постоянной. Но такая «функция» не задает никаких ограничений на положения системы. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} + x = 0$ противоречит определению интегрируемости.

Связь $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$, описывающая ограничение на движение конька по льду, неинтегрируемая. Этот факт можно доказать разными способами [2, 3], в частности, показав, что уравнение $\delta x \sin \varphi - \delta y \cos \varphi = 0$ допускает перемещение из *любой* точки $\{x_0, y_0, \varphi_0\}$ в *произвольную* точку $\{x_1, y_1, \varphi_1\}$.

Аналогичным образом можно показать, что в задаче о движении шара по горизонтальной плоскости ограничения, описывающие условия качения шара *без скольжения*, представляют собой неинтегрируемые кинематические связи.

Все конечные и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*, а все остальные связи – *неголономными*. В свою очередь, системы без связей и системы, на которые наложены *только* голономные связи, называются *голономными*, а при наличии хотя бы одной неголономной связи – *неголономными*.

Число степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора \mathbf{R} , задающего положение системы без связей, и числом m *независимых* связей, наложенных на систему:

$$n = S - m. \quad (6.13)$$

Если все m связей голономны, т.е. выражаются в конечном виде (6.3) или (6.6), то из уравнений этих связей можно выразить m переменных R_i через остальные n переменных R_k , рассматриваемых как независимые, и время t . Вследствие этого положение голономной системы в каждый момент времени будет однозначно определяться значениями n переменных.

В качестве независимых переменных не обязательно выбирать именно компоненты вектора \mathbf{R} . Произвольный набор из n *независимых* переменных $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, через которые *однозначными* функциями

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t) \quad (6.14)$$

определяется положение системы в любой заданный момент времени, будем называть *обобщенными координатами* голономной системы.

Введение *независимых* переменных, однозначно определяющих положение системы в виде (6.14), называется *параметризацией* механической системы. Под *независимостью* переменных подразумевается, что в каждый момент времени разным значениям вектора \mathbf{q} отвечают разные положения системы. В этом случае ввиду однозначности функций (6.14) между положениями системы и значениями вектора \mathbf{q} имеется взаимно однозначное соответствие. Если такое соответствие имеет место для всех возможных положений системы, то параметризация называется *глобальной*. В прикладных за-

дачах достаточно, чтобы выбор независимых переменных удовлетворял условиям *локальной параметризации*, т.е. когда взаимно однозначное соответствие между \mathbf{R} и \mathbf{q} требуется не всюду, а только в некоторой окрестности каждого положения системы. Условия локальной параметризации формулируются следующим образом:

для любого положения системы любая вариация вектора \mathbf{q} приводит к изменению положения системы в данный момент времени, т.е.

$$\delta \mathbf{R}(d\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} \neq 0 \quad \forall d\mathbf{q} \neq 0. \quad (6.15)$$

Здесь $\delta \mathbf{R}$ – *изохронный* дифференциал функции $\mathbf{R}(\mathbf{q}, t)$.

В дальнейшем будем полагать, что выбор обобщенных координат удовлетворяет условиям (6.15) локальной параметризации.

Таким образом, для *голономной системы* число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат, однозначно определяющих положение системы в любой заданный момент времени. Неголономные системы указанным свойством не обладают. И это принципиальное различие между голономными и неголономными системами приводит в итоге к тому, что для голономных систем можно написать уравнения движения в независимых координатах, число которых равно числу степеней свободы системы, а для неголономных – нет.

6.2. Идеальные связи. Общее уравнение динамики

Рассмотрим произвольную механическую систему, положение которой в выбранной системе отсчета задается S -мерным вектором \mathbf{R} . Будем считать известными зависимости

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{R}), \quad (6.16)$$

которыми определяется положение \mathbf{r}_j каждой материальной точки системы через вектор \mathbf{R} .

Пусть на рассматриваемую систему наложены p конечных связей

$$f_k(\mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, \dots, p \quad (6.17)$$

и d дифференциальных связей вида (6.4)

$$\varphi_i = \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{R}} + b_i = \sum_{v=1}^S a_{iv} \dot{R}_v + b_i = 0; \quad i=1, \dots, d. \quad (6.18)$$

Заменяя уравнения (6.17) эквивалентными дифференциальными равенствами и умножая почленно уравнения (18) на dt , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R} + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt &= 0; \quad k=1, \dots, p, \\ \mathbf{a}_i^T d\mathbf{R} + b_i dt &= 0; \quad i=1, \dots, d. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Множество всех решений $d\mathbf{R}(dt)$ системы (6.19) называется множеством *возможных перемещений* механической системы. Для любого фиксированного значения dt размерность этого множества равна числу степеней свободы системы $n = S - p - d$.

Важнейшим в механике систем со связями является понятие *виртуальных перемещений*. Виртуальные перемещения системы определяются как множество всех решений $\delta\mathbf{R}$ системы уравнений:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R} = 0 \quad (k=1, \dots, p), \quad \mathbf{a}_i^T \delta\mathbf{R} = 0 \quad (i=1, \dots, d), \quad (6.20)$$

получаемой из (6.19) при $dt=0$, и трактуются как перемещения, допускаемые связями, при «замороженном» времени. Размерность множества виртуальных перемещений также совпадает с числом степеней свободы системы. Если все конечные связи стационарны, а во всех кинематических связях $b_i = 0$, то виртуальные перемещения совпадают с возможными.

Возможные и виртуальные перемещения материальных точек системы выражаются через $d\mathbf{R}$ и $\delta\mathbf{R}$ вытекающими из (6.16) формулами:

$$d\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} d\mathbf{R}, \quad \delta\mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} \delta\mathbf{R}. \quad (6.21)$$

При выводе законов движения произвольной механической системы используются элементарные законы, описывающие движение ее материальных точек, т.е. законы Ньютона.

В инерциальной системе отсчета движение каждой материальной точки механической системы описывается уравнением

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{N}_j. \quad (6.22)$$

Здесь результирующая сила, действующая на точку, разделена на две части. Первое слагаемое \mathbf{F}_j называется *активной силой* и определяется как сила, действующая на точку при отсутствии связей в системе. Второе слагаемое \mathbf{N}_j называется *реакцией связи*. Это дополнительные силы, которые возникают при наложении на систему механических связей. Активные силы \mathbf{F}_j представляют собой заранее известные функции времени, положения и скоростей механической системы, а реакции связей \mathbf{N}_j являются неизвестными в уравнениях (6.22).

Если заданы только связи (6.17), (6.18) и ничего неизвестно о характере реакций, вызываемых этими связями, то задача определения движения механической по заданным активным силам оказывается неопределенной (для системы из N материальных точек число $3N + p + d$ скалярных уравнений (6.17), (6.18), (6.22) меньше числа $6N$ неизвестных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_N$). Задача становится полностью определенной, если рассмотрение ограничить случаем *идеальных связей*.

Определение. Связи называются *идеальными*, если суммарная работа реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum_j \mathbf{N}_j^T \delta \mathbf{r}_j = 0. \quad (6.23)$$

Здесь суммирование ведется по всем материальным точкам системы.

Во многих практических примерах условие (6.23) обеспечивается за счет ортогональности реакций связи к множеству виртуальных

перемещений системы. Таким примером является задача о движении точки по неподвижной или движущейся по заранее известному закону *гладкой поверхности*. В обоих случаях действующая на точку реакция гладкой поверхности нормальна к плоскости виртуальных перемещений точки.

Свободное твердое тело представляет собой систему материальных точек с идеальными связями. Реакции связей в этом случае являются внутренними силами, а сами связи таковы, что работа этих сил на любом перемещении тела равна нулю.

Система твердых тел, соединенных *идеальными шарнирами* (при вращении одного тела относительно другого отсутствует момент сил трения в шарнире), является системой с идеальными связями.

Твердое тело, катящееся по неподвижной или движущейся по заранее известному закону поверхности *без скольжения*, тоже есть система с идеальными связями. В этой задаче реакция, действующая на тело со стороны поверхности, приложена в точке контакта, виртуальное перемещение которой равно нулю.

Два тела, катящиеся друг по другу *без скольжения*, тоже образуют систему с идеальными связями. Действующие в точке контакта тел реакции подчиняются третьему закону Ньютона $\mathbf{N}_{12} = -\mathbf{N}_{21}$, а виртуальные перемещения контактирующих точек одинаковы. Поэтому суммарная работа этих сил равна нулю.

В приведенных примерах показаны системы, движение которых характеризуется отсутствием трения *скольжения*. В связи с этим идеальные связи часто называют *связями без трения*.

Понятие идеальных связей применимо и к системам с трением. Во многих задачах силы трения могут быть определены на основе экспериментальных законов трения и отнесены к активным силам. Тогда оставшиеся составляющие реакций связей будут удовлетворять условию (6.23), и, следовательно, связи можно считать идеальными.

Далее всюду будем полагать, что наложенные на систему связи идеальны. Из условия идеальности связей (6.23) и уравнений (6.22) получаем следующее уравнение, называемое *общим уравнением динамики*:

$$\sum_j (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{r}}_j)^T \delta \mathbf{r}_j = 0. \quad (6.24)$$

Это уравнение озвучивается так: для любого совместимого со связями движения системы сумма работ активных сил \mathbf{F}_j и сил инерции $(-m_j \ddot{\mathbf{r}}_j)$ на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

6.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Рассмотрим голономную систему с идеальными связями, движущуюся в некоторой инерциальной системе отсчета. Для такой системы, как было показано выше, можно выбрать обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n в количестве, равном числу степеней свободы системы, которые будут задавать параметризацию системы в виде (6.14). Вследствие равенств (6.16) положения материальных точек системы тоже будут выражаться через \mathbf{q} и t конкретными зависимостями:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}, t). \quad (6.25)$$

Дифференцируя равенства (6.25) по времени, получим

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Отсюда вытекают следующие тождества:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.27)$$

Обратим внимание, что по смыслу частных производных при вычислении производных $\partial f / \partial q_k$ и $\partial f / \partial \dot{q}_k$ от функций $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ координаты q_k и скорости \dot{q}_k следует рассматривать как независимые переменные.

Сопоставляя следующие два соотношения:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial t}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_s \partial q_k} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial t \partial q_k},$$

получаем вторую группу тождеств:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.28)$$

Тождества (6.28) означают перестановочность операций вычисления полной производной по времени и частной производной по координате.

Обратимся теперь к общему уравнению динамики (6.24). Предварительно покажем, что виртуальные перемещения материальных точек системы представляют собой *изохронные* дифференциалы функций (6.25), т.е. выражаются в виде

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_s} dq_s. \quad (6.29)$$

Учитывая, что функции (6.14) $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t)$, будучи подставлены в уравнения голономных связей $f_k(\mathbf{R}, t) = 0$, должны обращать эти уравнения в тождества, получим

$$f_k(\mathbf{R}(\mathbf{q}, t), t) \equiv 0; \quad k = 1, \dots, m.$$

Дифференцируя эти тождества, будем иметь

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial t} \right) dt \equiv 0; \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.30)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} = \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{R}^T} \delta \mathbf{R} = 0; \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.31)$$

т.е. изохронные дифференциалы $\delta \mathbf{R}$ функций $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t)$ подчиняются тем же самым уравнениям (6.20), что и виртуальные перемещения голономной системы. Учитывая формулы (6.21), получаем для виртуальных перемещений материальных точек выражения

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{R}^T} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q},$$

полностью совпадающие с выражениями (6.29).

Подставляя выражения (6.29) в общее уравнение динамики (6.24), получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_j (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{r}}_j)^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \right) dq_k = 0. \quad (6.32)$$

Ввиду того, что вариации dq_1, \dots, dq_n независимы, уравнение (6.32) эквивалентно системе из n уравнений

$$\sum_j m_j \ddot{\mathbf{r}}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.33)$$

Выразим ускорения каждой материальной точки через ее кинетическую энергию $T_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j^T \dot{\mathbf{r}}_j / 2$ с помощью формулы

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}. \quad (6.34)$$

Учитывая тождества (6.27) и (6.28), преобразуем левые части уравнений (6.33) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \right) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j^T} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Здесь $T = \sum_j T_j$ – суммарная кинетическая энергия системы.

Соотношение (6.35) позволяет записать уравнения (6.33) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k; \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.36)$$

Здесь через Q_k обозначены правые части уравнений (6.33), называемые *обобщенными силами*:

$$Q_k = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.37)$$

Уравнения (6.36) носят название *уравнений Лагранжа 2-го рода*. Они представляют собой систему из n уравнений второго порядка для n обобщенных координат q_1, \dots, q_n . Второй порядок уравнений (6.36) обусловлен тем, что в левую часть этих уравнений, помимо t , \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$, обязательно входят вторые производные по времени от обобщенных координат, т.е. обобщенные ускорения $\ddot{\mathbf{q}}$. Обобщенные силы, стоящие в правых частях уравнений, могут зависеть только от t , \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$ (в классической механике случаи, когда силы зависят от ускорений, не рассматриваются).

Уравнения Лагранжа (6.36) можно записать также в векторном виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F}_j, \quad (6.38)$$

где \mathbf{Q} – n -мерный вектор-столбец обобщенных сил. Левая часть уравнений Лагранжа представляет собой результат действия на функцию $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ дифференциального *оператора Эйлера*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}.$$

Алгоритм составления уравнений Лагранжа состоит в следующем. Нужно сначала выбрать независимые обобщенные координаты \mathbf{q} и выразить кинетическую энергию системы в виде $T = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$. После выполнения всех требуемых операций дифференцирования получается конкретный вид левых частей уравнений (6.36). Обобщенные силы вычисляются по формулам (6.37). При этом, учитывая определение частных производных, эти формулы можно переписать в виде

$$Q_k = \frac{\sum_j \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j(dq_k)}{dq_k} = \frac{\delta A(dq_k)}{dq_k}. \quad (6.37^*)$$

Здесь $\delta A(dq_k)$ – элементарная работа активных сил на виртуальном перемещении системы, обусловленном изменением координаты q_k на величину dq_k .

Определение. Обобщенные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ называются *потенциальными*, если существует скалярная функция $\Pi(\mathbf{q}, t)$ (*потенциальная энергия*) такая, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.39)$$

В силу теоремы об *условиях интегрируемости* критерием потенциальности обобщенных сил является симметричность матрицы $\partial \mathbf{Q}^T / \partial \mathbf{q}$, т.е. условие

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T}. \quad (6.40)$$

Эквивалентное (6.40) условие потенциальности сил, вытекающее из определения (6.39), звучит так: *силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ являются потенциальными*, если элементарная работа этих сил выражается *изохронным* дифференциалом некоторой функции $U = -\Pi(\mathbf{q}, t)$, т.е.

$$\delta A = \mathbf{Q}^T d\mathbf{q} = -d^* \Pi(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q}. \quad (6.40^*)$$

Определение. Обобщенные силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ называются *обобщенно потенциальными*, если существует скалярная функция $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (*обобщенный потенциал*) такая, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.41)$$

Если обобщенные силы потенциальны или обобщенно потенциальны, то имеется возможность записать уравнения Лагранжа в наиболее компактной форме. Для этого используется *функция Лагранжа (лагранжиан)* L . В случае потенциальных сил *лагранжиан* определяется формулой

$$L = T - \Pi, \quad (6.42)$$

а в случае обобщенно потенциальных сил – формулой

$$L = T - V. \quad (6.43)$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (6.44)$$

В дальнейшем механические системы, описываемые уравнениями Лагранжа вида (6.44), будем называть *лагранжевыми системами*. Примечательно, что уравнения движения, а следовательно, и все свойства лагранжевых систем определяются одной скалярной функцией – лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

Выше была изложена процедура составления уравнений Лагранжа в инерциальных системах отсчета. Она основывалась на уравнениях (6.22), справедливых в инерциальных системах отсчета, и поэтому в уравнениях Лагранжа (6.38) кинетическая энергия $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ тоже должна вычисляться в инерциальной системе отсчета.

В неинерциальной системе отсчета движение каждой материальной точки описывается уравнением

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j^{отн} = \mathbf{F}_j + \mathbf{J}_j^{nep} + \mathbf{J}_j^{kop} + \mathbf{N}_j,$$

где \mathbf{J}_j^{nep} и \mathbf{J}_j^{kop} – переносная и кориолисова силы инерции, действующие на точку. На основании этих уравнений, повторяя дословно все выкладки, проведенные при выводе уравнений (6.38), получим уравнения Лагранжа, составленные в неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{отн}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T^{отн}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{nep} + \mathbf{Q}^{kop}. \quad (6.45)$$

Здесь $T^{отн}$ – кинетическая энергия системы, вычисленная относительно неинерциального базиса, \mathbf{Q} – обобщенные силы, соответствующие активным силам \mathbf{F}_j , а \mathbf{Q}^{nep} и \mathbf{Q}^{kop} – обобщенные силы, обусловленные переносными и кориолисовыми силами инерции.

Очевидно, что конкретный вид уравнений Лагранжа зависит не от способа их составления (в инерциальной или неинерциальной системе отсчета), а от выбора обобщенных координат. Если уравнения (6.38) и (6.45) записаны в одних и тех же обобщенных координатах, то они должны тождественно совпадать. Отсюда следует

$$\mathbf{Q}^{ин} = \mathbf{Q}^{нер} + \mathbf{Q}^{кор} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}; \quad V = T^{отн} - T, \quad (6.46)$$

т.е. силы инерции являются обобщенно потенциальными и им соответствует обобщенный потенциал $V = T^{отн} - T$.

Отметим, что составление уравнений Лагранжа в неинерциальных системах отсчета в большинстве случаев представляет собой более громоздкую процедуру, чем их составление в инерциальной системе отсчета. То возможное упрощение, которое получается в выражении для кинетической энергии $T^{отн}$ по сравнению с T , компенсируется существенным усложнением, связанным с вычислением обобщенных сил $\mathbf{Q}^{нер}$ и $\mathbf{Q}^{кор}$. Если же для вычисления этих сил использовать формулу (6.46), то в результате придем к уравнениям (38), составленным в инерциальной системе отсчета.

Следует иметь в виду, что если ставится задача написать уравнения движения некоторой механической системы относительно неинерциального базиса, то это означает, что в качестве обобщенных координат нужно использовать переменные, описывающие положение системы в этом базисе, и никоим образом не регламентирует способ составления этих уравнений. В большинстве таких задач проще получить искомые уравнения, составляя их в инерциальных системах отсчета, т.е. на основе уравнений (6.38), а не уравнений (6.45).

6.4. Свойства уравнений Лагранжа

1. Ковариантность. Прежде всего отметим, что под ковариантностью уравнений подразумевается инвариантность правила их составления по отношению к замене переменных, а не инвариантность самих уравнений [2].

Ковариантность уравнений Лагранжа означает, что при любой невырожденной дважды непрерывно дифференцируемой замене координат

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t); \quad \det \left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right) \neq 0 \quad (6.47)$$

уравнения Лагранжа сохраняют свою форму, т.е. в новых переменных $\tilde{\mathbf{q}}$ эти уравнения принимают аналогичный (6.38) вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{F}_j, \quad (6.48)$$

где $\tilde{T}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ – кинетическая энергия системы, записанная в новых переменных, $\tilde{\mathbf{Q}}$ – соответствующие новым координатам обобщенные силы.

Ковариантность уравнений Лагранжа следует из самого вывода этих уравнений. Если исходные координаты \mathbf{q} удовлетворяют условиям (6.15) локальной параметризации, то в силу оговоренных выше свойств преобразования (6.47) новые координаты $\tilde{\mathbf{q}}$ также будут удовлетворять этим условиям, вследствие чего для них будут справедливы уравнения (6.48). В ковариантности уравнений Лагранжа можно убедиться и непосредственной проверкой, применив преобразование (6.47) к уравнениям (6.38). Используя правила дифференцирования сложных и обратных функций, получим в конечном итоге уравнения

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{Q}},$$

которые после умножения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{q}^T / \partial \tilde{\mathbf{q}}$ приводятся к виду (6.48).

Связь между обобщенными силами $\tilde{\mathbf{Q}}$ и \mathbf{Q} выражается следующей *формулой преобразования обобщенных сил* при замене координат:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{F}_j = \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{F}_j = \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{Q}. \quad (6.49)$$

При преобразованиях координат в *лагранжевых* системах (6.44) новый лагранжиан $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$ определяется как старый лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, выраженный через новые переменные.

2. Калибровочная инвариантность. Непосредственной проверкой устанавливается, что для функции $\varphi = \dot{f}(\mathbf{q}, t)$, представляющей собой полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \equiv 0. \quad (6.50)$$

Отсюда следует, что при добавлении такой функции к кинетической энергии системы уравнения Лагранжа (6.38) остаются неизменными. Это свойство уравнений Лагранжа называется *калибровочной инвариантностью*.

Уравнения Лагранжа (6.44) остаются неизменными, если функцию L заменить функцией $L' = cL + \dot{f}(\mathbf{q}, t)$, где $c \neq 0$ – постоянная. Таким образом, лагранжиан системы (6.44) определен с точностью до мультипликативной постоянной $c \neq 0$ и аддитивной функции $\varphi = \dot{f}(\mathbf{q}, t)$.

3. Структура кинетической энергии и функции Лагранжа. Выясним зависимость кинетической энергии системы $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ от обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$. На основании соотношений (6.26) имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{r}}_j^T \dot{\mathbf{r}}_j = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} \right)^2 + \dot{\mathbf{q}}^T \left(\sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \right)^2.$$

Ввиду того, что производные $\partial \mathbf{r}_j^T / \partial \mathbf{q}$ и $\partial \mathbf{r}_j / \partial t$ могут зависеть только от \mathbf{q} и t , кинетическая энергия представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} + T_0 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (6.51)$$

где $T_2 \geq 0$ – квадратичная форма обобщенных скоростей, T_1 – линейная форма обобщенных скоростей, T_0 – форма, не зависящая от

скоростей, а симметрическая матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ размера $n \times n$, n -мерный вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$ и скалярная функция $T_0(\mathbf{q}, t)$ выражаются формулами

$$\mathbf{A} = \sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}^T}, \quad \mathbf{b} = \sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \right)^2. \quad (6.52)$$

Функция Лагранжа, определяемая формулами (6.42) и (6.43), имеет аналогичную (6.51) структуру, т.е. тоже выражается функцией второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{d} + L_0 = L_2 + L_1 + L_0. \quad (6.53)$$

Действительно, для случая потенциальных сил лагранжиан определяется формулой $L = T - \Pi(\mathbf{q}, t)$, на основании которой получаем

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \quad (6.54)$$

Для выяснения структуры функции $L = T - V$ в случае обобщенно потенциальных сил определим структуру обобщенного потенциала $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Из формулы (6.41) следует

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Отсюда, учитывая, что в классической механике рассматриваются только те случаи, когда силы не зависят от ускорений, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \equiv 0.$$

Это тождественное равенство означает, что обобщенный потенциал линейно зависит от обобщенных скоростей, т.е.

$$V = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}(\mathbf{q}, t) + \Pi(\mathbf{q}, t) = V_1 + V_0. \quad (6.55)$$

Здесь второе слагаемое в обобщенном потенциале, если оно не равно нулю, трактуется как «обычная» потенциальная энергия, поскольку получаемая за счет него формулой (6.41) составляющая обобщенной

силы определяется выражением $-\partial V_0/\partial \mathbf{q}$, аналогичным определению (6.39) «обычного» потенциала. Из формулы (6.55) следует, что и в случае обобщенно потенциальных сил функция Лагранжа $L = T - V$ имеет структуру вида (6.53), где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0 = T_0 - \Pi. \quad (6.56)$$

Система называется *склерономной (стационарной)*, если параметризация (6.14) стационарна, т.е. $\partial \mathbf{R}/\partial t \equiv 0$. Для склерономных систем положения материальных точек будут зависеть только от значений обобщенных координат $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q})$, а кинетическая энергия не зависит явно от времени и выражается квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}; \quad \frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0. \quad (6.57)$$

Заметим, что если все наложенные на систему связи (6.3) стационарны, то имеется возможность выбрать обобщенные координаты \mathbf{q} так, что и параметризация (6.14) будет стационарной: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$. Но зависящая от времени замена координат $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t)$ делает параметризацию нестационарной. Поэтому между стационарностью связей и стационарностью параметризации прямой зависимости, вообще говоря, нет.

4. Разрешимость относительно старших производных. Подставляя выражение для кинетической энергии (6.51) в уравнения Лагранжа (6.38), получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t).$$

После выполнения операций дифференцирования уравнения примут вид

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (6.58)$$

Таким образом, уравнения Лагранжа линейны по обобщенным ускорениям, а матрица коэффициентов при обобщенных ускорениях совпадает с матрицей квадратичной части кинетической энергии системы.

Покажем, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений, т.е. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Предположим противное, т.е. $\det \mathbf{A} = 0$. Тогда найдется вектор обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^* \neq 0$ такой, что

$$T_2(\dot{\mathbf{q}}^*) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \dot{\mathbf{q}}^* \right)^2 = 0.$$

Отсюда следует существование вектора $d\mathbf{q}^* = \lambda \dot{\mathbf{q}}^* \neq 0$ такого, что

$$\delta \mathbf{r}_j(d\mathbf{q}^*) = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} d\mathbf{q}^* = 0 \quad \forall j,$$

т.е. отличная от нуля вариация обобщенных координат не приводит к изменению положения системы, что противоречит оговоренным выше условиям (6.15) локальной параметризации.

Таким образом, уравнения Лагранжа разрешимы относительно старших производных, т.е. представимы в нормальной форме Коши:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (6.59)$$

Этот факт и составляет содержание *основной теоремы лагранжева формализма*. Из него следует, что при необременительных ограничениях на правые части, которые в задачах механики, как правило, выполняются, система уравнений (6.59) имеет единственное решение для любых начальных условий $t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$, т.е. движение системы полностью *детерминировано* ее состоянием (положением и скоростями) в начальный момент времени.

Структура кинетической энергии (6.51) и функции Лагранжа (6.53) позволяет записать условие $\det \mathbf{A} \neq 0$ в следующем виде:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) \neq 0. \quad (6.60)$$

Отметим, что в силу неравенства $T_2 \geq 0$ условие $\det \mathbf{A} \neq 0$ означает строгую положительную определенность матрицы \mathbf{A} .

Лагранжевы системы, в которых функция L имеет структуру (6.53), где L_2 – строго положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей, называются *натуральными*.

6.5. Первые интегралы уравнений Лагранжа.

Теоремы об изменении обобщенной и полной энергии

Определение. *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений называется функция фазовых переменных и времени, определенная в той же области, что и сама система, и сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

Уравнения Лагранжа представляют собой уравнения второго порядка. Фазовыми переменными в них являются обобщенные координаты \mathbf{q} и обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}}$. Поэтому первыми интегралами уравнений Лагранжа могут быть функции вида $f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

Распространенным типом первых интегралов в лагранжевых системах являются *циклические* интегралы. Переменная называется *циклической*, если она не входит в выражение для функции Лагранжа L . Из уравнений Лагранжа (6.44) следует, что если q_k – циклическая координата, то функция $\partial L / \partial \dot{q}_k$ является циклическим первым интегралом системы.

Рассмотрим голономную систему, в которой обобщенные силы \mathbf{Q} имеют непотенциальные составляющие \mathbf{Q}^* . Полагая, что потенциальные и обобщенно потенциальные составляющие обобщенных сил учтены в лагранжиане L , получим уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*. \quad (6.61)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \quad (6.62)$$

называемую *обобщенной энергией* системы. Определяя структуру этой функции на основе структуры функции Лагранжа (6.53), получим

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}) - \frac{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}}{2} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{d} - L_0 = \frac{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}}{2} - L_0 = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (6.63)$$

Таким образом, обобщенная энергия не содержит членов, линейно зависящих от обобщенных скоростей.

Если система склерономна, то $T_0 = T_1 = 0$ и обобщенная энергия совпадает с полной энергией:

$$H = E = T + \Pi. \quad (6.64)$$

Исследуем поведение функции (6.62) на движениях системы (6.61). Полная производная по времени от этой функции записывается в виде

$$\dot{H} = \ddot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Сокращая в этом выражении подобные члены и учитывая уравнения Лагранжа (6.61), получим

$$\dot{H} \Big|_{(6.61)} = \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.65)$$

Формула (6.65) описывает искомый закон изменения обобщенной энергии на движениях системы (6.61). Первое слагаемое в правой части этой формулы есть *мощность* непотенциальных сил \mathbf{Q}^* .

Если мощность непотенциальных сил равна нулю, а лагранжиан не зависит явно от времени, т.е. $\partial L / \partial t \equiv 0$, то обобщенная энергия системы сохраняется:

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = h = \text{const}. \quad (6.66)$$

Этот первый интеграл называется *интегралом обобщенной энергии*, или *интегралом Пенлеве–Якоби*.

Заметим, что интеграл обобщенной энергии (6.66) тоже можно отнести к циклическим первым интегралам. Этот первый интеграл существует, когда циклической переменной является время t .

Для *склерономной* системы на основании формул (6.65), (6.57) и (6.64) получим закон изменения полной энергии:

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (6.67)$$

Здесь V – обобщенный потенциал, определяемый формулой (6.55). В случаях, когда учтенные в лагранжиане силы имеют обычный потенциал или линейная по скоростям часть V_1 обобщенного потенциала (6.55) не зависит явно от времени, т.е. $\partial \mathbf{c} / \partial t \equiv 0$, формула (6.67) принимает вид

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (6.68)$$

Склерономная система называется *консервативной*, если все обобщенные силы потенциальны, а потенциальная энергия не зависит явно от времени, т.е. $\partial \Pi / \partial t \equiv 0$. Для консервативной системы интеграл обобщенной энергии (6.66) принимает вид закона сохранения полной энергии:

$$E = T + \Pi = \text{const}. \quad (6.69)$$

Полная энергия *склерономной* системы может сохраняться и в случаях, когда силы обобщенно потенциальны, но $\partial V / \partial t \equiv 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы оба слагаемых обобщенного потенциала (6.55) не зависели явно от времени.

Обобщенные силы называются *гироскопическими*, если для любого значения вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ их мощность равна нулю, т.е.

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k Q_k^* = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.70)$$

В силу этого свойства гироскопические силы \mathbf{Q}^* никак не влияют на законы изменения обобщенной и полной энергии и, следовательно, не нарушают законов сохранения (6.66), (6.69).

Примерами гироскопических сил являются сила Лоренца, действующая на точечный электрический заряд в магнитном поле, и кориолисова сила инерции. Эти силы ортогональны скоростям точек и не совершают работы на любых движениях системы.

Обобщенные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна, или равна нулю:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k Q_k^* \leq 0. \quad (6.71)$$

Диссипативные силы называются *строго диссипативными* (определенно диссипативными, силами с полной диссипацией), если их мощность отрицательна на любом движении системы, т.е.

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}^* < 0 \quad \forall \quad \dot{\mathbf{q}} \neq 0. \quad (6.72)$$

Если в системе действуют только диссипативные непотенциальные силы, то из формулы (6.65) при $\partial L / \partial t \equiv 0$ получим $\dot{H} \leq 0$, а для склерономной системы из формулы (6.67) при $\partial V / \partial t \equiv 0$ будем иметь $\dot{E} \leq 0$. Для случая строго диссипативных сил неравенства принимают вид

$$\dot{H} < 0 \quad \forall \quad \dot{\mathbf{q}} \neq 0 \quad \text{и} \quad \dot{E} < 0 \quad \forall \quad \dot{\mathbf{q}} \neq 0. \quad (6.73)$$

6.6. Принцип Гамильтона

Рассмотрим *лагранжеву систему* – систему, уравнения которой определяются одной функцией Лагранжа $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ и записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (6.74)$$

где \mathbf{q} – n -мерный вектор независимых обобщенных координат. Такими уравнениями описываются, в частности, голономные механические системы, в которых активные силы имеют обычный потенциал $\Pi(\mathbf{q}, t)$ или обобщенный потенциал $V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$. В указанных случаях лагранжиан определяется формулой $L = T - \Pi$ или $L = T - V$ соответственно, где T – кинетическая энергия системы.

Дадим определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Расширенным координатным пространством системы называется $(n+1)$ -мерное пространство обобщенных координат \mathbf{q} и времени t . Те кривые $\mathbf{q}(t)$ в этом пространстве, которые соответствуют действительным траекториям движения системы с заданным лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, т.е. являются решениями уравнений (6.74), будем называть *прямыми путями* этой системы и обозначать через $\mathbf{q}^*(t)$, а все остальные кривые – *окольными путями* для этой системы.

Действием по Гамильтону называется следующий функционал:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) dt. \quad (6.75)$$

Этот функционал ставит в соответствие каждой кривой $\mathbf{q}(t)$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t_0, t_1]$, некоторое число W . Значения этого интеграла зависят как от кривой $\mathbf{q}(t)$, которую можно условно называть аргументом функционала, так и от структуры лагранжиана $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

Обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \delta\mathbf{q}(t)$ произвольную непрерывно дифференцируемую на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функцию, которую будем называть *вариацией кривой* $\mathbf{q}(t)$, и запишем приращение функционала (6.75), получаемое при переходе от кривой $\mathbf{q}(t)$ к кривой $\mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$:

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} L[(\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), (\mathbf{q} + \boldsymbol{\varepsilon}), t] dt - \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) dt. \quad (6.76)$$

Первой вариацией функционала (6.75) на кривой $\mathbf{q}(t)$ называется линейная по $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ часть разности (6.76), т.е.

$$\delta W|_{\mathbf{q}(t)} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt. \quad (6.77)$$

Интегрируя первое слагаемое в выражении (6.77) по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} dt = \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt,$$

получим следующую формулу для первой вариации действия по Гамильтону:

$$\delta W|_{\mathbf{q}(t)} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt. \quad (6.78)$$

В нижеследующей формулировке принципа Гамильтона в качестве $\varepsilon(t)$ используются всевозможные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_0, t_1]$ функции, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\varepsilon(t_0) = 0, \quad \varepsilon(t_1) = 0. \quad (6.79)$$

Такие вариации кривых $\mathbf{q}(t)$ будем называть *допустимыми*. Они представляют собой всевозможные «деформации» кривой, оставляющие на месте граничные точки $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ и $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ (рис. 6.1).

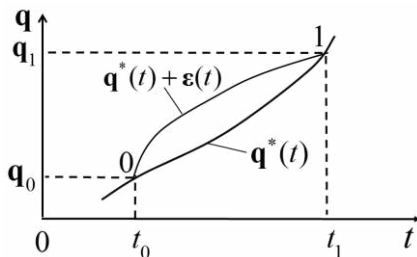


Рис. 6.1

Теорема (принцип Гамильтона). Если кривая $\mathbf{q}^*(t)$, соединяющая две точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$ расширенного координатного пространства, является прямым путем системы с лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, то при любом допустимом варьировании этой кривой первая вариации функционала (6.75) равна нулю:

$$\delta W \Big|_{\mathbf{q}^*(t)} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) dt = 0. \quad (6.80)$$

Иначе говоря, на прямом пути системы действие по Гамильтону принимает стационарное значение.

Утверждение теоремы следует непосредственно из формулы (6.78) при учете условий (6.79) и того, что каждая точка прямого пути удовлетворяет уравнениям Лагранжа (6.74).

Обратная теорема. Если на некоторой дважды непрерывно дифференцируемой кривой $\mathbf{q}(t)$, соединяющей точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$ расширенного координатного пространства, функционал (6.75)

принимает стационарное значение, то эта кривая является прямым путем системы с лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

Для доказательства этой теоремы используется *основная лемма вариационного исчисления*, которая гласит: если $\mathbf{f}(x)$ – непрерывная вектор-функция на отрезке $[a, b]$ и для любой непрерывно дифференцируемой на этом отрезке вектор-функции $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ выполняется равенство $\int_a^b \boldsymbol{\varepsilon}^T(x) \mathbf{f}(x) dx = 0$, то $\mathbf{f}(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

По условиям обратной теоремы для произвольной функции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющей условиям (6.79), выполняется равенство

$$\delta W|_{\mathbf{q}(t)} = - \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt = 0. \quad (6.81)$$

При этом вследствие того, что $\mathbf{q}(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, выражение в скобках под интегралом (6.81) будет непрерывной функцией времени. Поэтому из равенства (6.81) в силу *основной леммы* следует, что кривая $\mathbf{q}(t)$ должна удовлетворять уравнениям (6.74), т.е. является прямым путем системы с лагранжианом $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$.

В вариационном исчислении уравнения (6.74) носят название уравнений Эйлера, а кривые, определяемые этими уравнениями, называются экстремалами функционала (6.75). При этом задача нахождения экстремалей, соединяющих две заданные точки расширенного координатного пространства, называется *задачей с закрепленными концами*. Именно в этой задаче в качестве *допустимых* вариаций кривых используются функции $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (6.79).

Заметим, что в классе непрерывно дифференцируемых функций вариационная задача с закрепленными концами может не иметь решения, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Остановимся вкратце на вопросе о характере экстремума действия по Гамильтону на прямых путях системы. Ответ зависит от наличия или отсутствия на прямом пути *сопряженных кинетических фокусов*.

Две точки A и A^* расширенного координатного пространства называются сопряженными друг к другу *кинетическими фокусами*, если краевая задача определения экстремали, соединяющей эти точки, имеет особенность. В большинстве случаев такая особенность выражается в том, что эти точки соединяются бесконечным числом прямых путей системы.

Установлено, что если на отрезке прямого пути отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке, то действие по Гамильтону на этом пути принимает строгий локальный минимум. В противном случае существует такое варьирование прямого пути с закрепленными граничными точками, при котором приращение функционала действия принимает нулевые или отрицательные значения (речь идет о приращениях функционала, получаемых за счет вариаций высших порядков; первая вариация функционала действия на любом прямом пути равна нулю).

Заметим, что кинетические фокусы, если они есть в системе, располагаются на некотором конечном расстоянии друг от друга. Поэтому если начальная и конечная точка прямого пути выбраны достаточно близко друг к другу, то действие по Гамильтону будет принимать на этом пути локальный минимум. В связи с этим принцип Гамильтона часто называют принципом наименьшего действия.

Рассмотрим теперь голономную систему общего вида, описываемую уравнениями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}. \quad (6.82)$$

Пусть кривая $\mathbf{q}^*(t)$, соединяющая две точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$ расширенного координатного пространства, является прямым путем этой системы. Рассматривая непрерывно дифференцируемые вариации этой кривой $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \delta \mathbf{q}(t)$, получим для вариации кинетической энергии следующее выражение:

$$\delta T = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (6.83)$$

Учитывая уравнения Лагранжа (6.82), будем иметь

$$\delta T + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right). \quad (6.84)$$

Отсюда, рассматривая *допустимые* вариации $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, т.е. вариации, удовлетворяющие граничным условиям (6.79), получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0. \quad (6.85)$$

Здесь

$$\delta A = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (6.86)$$

– элементарная работа активных сил на виртуальном перемещении системы, обусловленном вариацией $\delta \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ вектора \mathbf{q} в момент времени t .

Таким образом, для голономных систем общего вида принцип Гамильтона заключается в том, что *при любом допустимом варьировании прямого пути интеграл (6.85) равен нулю*.

Обратное утверждение формулируется следующим образом: *если при любом допустимом варьировании дважды непрерывно дифференцируемой кривой $\mathbf{q}(t)$, соединяющей точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$, интеграл (5.85) равен нулю, то эта кривая является прямым путем системы*.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству обратной теоремы для лагранжевых систем. Используя формулы (6.83) и (6.86), получим

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right).$$

При учете того, что допустимые вариации $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ удовлетворяют граничным условиям (6.79), равенство (6.85) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right) dt = 0.$$

Отсюда на основании *основной леммы* получаем, что рассматриваемая кривая удовлетворяет уравнениям (6.82).

Отметим, что в общем случае равенство (6.85) не сводится к условию стационарности некоторого функционала, как это имеет место для лагранжевых систем. Только в том случае, когда силы потенциальны или обобщенно потенциальны, элементарная работа $\delta A = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}$ выражается в виде изохронного дифференциала некоторой функции, а равенство (6.85) принимает вид (6.80).

6.7. Формула преобразования лагранжиана при замене координат и времени

Используя принцип Гамильтона, исследуем вопрос о преобразованиях уравнений Лагранжа (6.74) при замене координат и времени.

Уравнения Лагранжа, как нам уже известно, ковариантны относительно преобразований координат. Выясним, обладают ли эти уравнения таким же свойством по отношению к преобразованиям координат и времени.

Рассмотрим невырожденное преобразование

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}), \quad t = t(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}), \quad (6.87)$$

где $\tilde{\mathbf{q}}$ и \tilde{t} – новые координаты и новое время. При таком преобразовании кривая $\mathbf{q}(t)$, соединяющая точки $\{t_0, \mathbf{q}_0\}$ и $\{t_1, \mathbf{q}_1\}$, переходит в кривую $\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t})$, соединяющую точки $\{\tilde{t}_0, \tilde{\mathbf{q}}_0\}$ и $\{\tilde{t}_1, \tilde{\mathbf{q}}_1\}$, а интеграл (6.75) действия по Гамильтону записывается в новых переменных в виде

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} L \frac{dt}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \tilde{L} d\tilde{t}, \quad (6.88)$$

где подынтегральная функция

$$\tilde{L}\left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}\right) = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \frac{dt}{d\tilde{t}} \quad (6.89)$$

выражена через новые переменные $d\tilde{\mathbf{q}}/d\tilde{t}$, $\tilde{\mathbf{q}}$, \tilde{t} .

Прямым путем системы $\mathbf{q}^*(t)$ в исходных переменных будут соответствовать в пространстве новых переменных прямые пути $\tilde{\mathbf{q}}^*(\tilde{t})$. При этом поскольку в исходных переменных прямые пути $\mathbf{q}^*(t)$ соответствуют экстремалиям функционала (6.88), то в новых переменных экстремалиями этого же функционала будут прямые пути $\tilde{\mathbf{q}}^*(\tilde{t})$. В силу обратной теоремы принципа Гамильтона экстремали функционала (6.88) в новых переменных описываются уравнениями

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}'} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = 0; \quad \tilde{\mathbf{q}}' = \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}.$$

Отсюда следует, что уравнения Лагранжа (6.84) ковариантны по отношению к преобразованиям (6.87), а лагранжиан системы в новых переменных определяется формулой (6.89).

Чтобы записать выражение (6.89) для нового лагранжиана \tilde{L} в новых лагранжевых переменных $\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{t}$, нужно выразить \mathbf{q} и t соотношениями (6.87), а для вычисления $\dot{\mathbf{q}}$ и $dt/d\tilde{t}$ использовать следующие формулы:

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{\partial t}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} \tilde{\mathbf{q}}' + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} \tilde{\mathbf{q}}' + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{t}}}{\frac{\partial t}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} \tilde{\mathbf{q}}' + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}}. \quad (6.90)$$

6.8. Теорема Эмми Нетер

Нижеследующая теорема устанавливает связь между первыми интегралами (законами сохранения) механических систем и свойством инвариантности их уравнений движения по отношению к преобразованиям координат и времени.

Рассматривается однопараметрическое семейство (*группа*) преобразований координат и времени:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \Psi(\mathbf{q}, t, \alpha), \quad \tau = \varphi(\mathbf{q}, t, \alpha). \quad (6.91)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{q}}$ и τ – новые координаты и новое время, а α – параметр. Предполагается, что это преобразование имеет обратное

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tau, \alpha), \quad t = t(\tilde{\mathbf{q}}, \tau, \alpha), \quad (6.92)$$

а при $\alpha = 0$ оно тождественно, т.е.

$$\tilde{\mathbf{q}}\Big|_{\alpha=0} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, 0) = \mathbf{q}, \quad \tau\Big|_{\alpha=0} = \varphi(\mathbf{q}, t, 0) = t. \quad (6.93)$$

Теорема Эмми Нетер. Если лагранжиан системы $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ инвариантен относительно преобразования (6.91), удовлетворяющего условиям (6.92), (6.93), то эта система имеет первый интеграл:

$$f = \mathbf{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L. \quad (6.94)$$

Здесь \mathbf{p} – вектор обобщенных импульсов, а H – обобщенная энергия системы.

Под инвариантностью лагранжиана относительно преобразования (6.91) подразумевается, что новый лагранжиан, вычисленный с помощью обратного преобразования (6.92) по формуле (6.89)

$$\tilde{L}(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau) = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \frac{dt}{d\tau}, \quad (6.95)$$

имеет точно такую же структуру, что и старый лагранжиан L , т.е. \tilde{L} не зависит от α и

$$\tilde{L}(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau) = L(d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau, \tilde{\mathbf{q}}, \tau). \quad (6.96)$$

Иными словами, при наличии инвариантности новый лагранжиан \tilde{L} получается таким, как при тождественном преобразовании.

Доказательство. Из условий (6.93) теоремы следует

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} \Big|_{\alpha=0} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\alpha=0} = 1. \quad (6.97)$$

Отсюда, используя тождество

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt}, \quad (6.98)$$

получаем

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{d\varphi} \Big|_{\alpha=0} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.99)$$

Введем обозначения

$$\eta = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad \xi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (6.100)$$

Учитывая перестановочность операций дифференцирования по α и t , имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\Psi}{dt} \right) \right)_{\alpha=0} = \frac{d\eta}{dt}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right)_{\alpha=0} = \frac{d\xi}{dt}. \quad (6.101)$$

Кроме того, дифференцируя тождество (6.98) по параметру α , получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\Psi}{d\varphi} \right) \right)_{\alpha=0} = -\dot{\mathbf{q}} \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt}. \quad (6.102)$$

Условие теоремы об инвариантности лагранжиана по отношению к преобразованию (6.91) можно записать в виде

$$L \left(\frac{d\Psi}{d\varphi}, \Psi, \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt} = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (6.103)$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от α , то не зависит от α и левая часть. Поэтому, дифференцируя левую часть по параметру α и полагая $\alpha = 0$, получим при учете второго из соотношений (6.100) следующее равенство:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\Psi}{d\varphi} \right) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + L \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = 0. \quad (6.104)$$

После подстановки выражений (6.99) – (6.102) будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \eta + \frac{\partial L}{\partial t} \xi + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) \frac{d\xi}{dt} = 0. \quad (6.105)$$

С учетом уравнений Лагранжа (6.74) и формулы (6.65) это равенство преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \eta \right) + \frac{d}{dt} \left(\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) \xi \right) = 0. \quad (6.106)$$

Отсюда следует, что функция (6.94) является первым интегралом системы. *Теорема доказана.*

Замечание. Для проверки инвариантности лагранжиана достаточно убедиться, что полученное с помощью формулы (6.95) выражение не зависит от α . Действительно, в силу условий теоремы при $\alpha = 0$ новый лагранжиан будет тождественно совпадать со старым. Поэтому при отсутствии зависимости \tilde{L} от α инвариантность будет иметь место при любых значениях α .

Преобразования вида (6.91), удовлетворяющие теореме Нетер, называются *преобразованиями вариационной симметрии*. Уравнения Лагранжа инвариантны по отношению к таким преобразованиям.

Приведем несколько примеров, в которых наличие первых интегралов устанавливается с помощью теоремы Нетер.

1. Пусть лагранжиан системы не зависит явно от времени, т.е. $L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Используя преобразование

$$\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi} = \mathbf{q}, \quad \tilde{t} = \varphi = t + \alpha, \quad (6.107)$$

которое, очевидно, удовлетворяет условиям (6.92) и (6.93), получим

$$d\tilde{\mathbf{q}}/d\tilde{t} = \tilde{\mathbf{q}}' = \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \tilde{L} = L(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}).$$

Отсюда следует, что лагранжиан системы инвариантен по отношению к преобразованию (6.107). При этом $\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\alpha = 0$, $\partial\varphi/\partial\alpha = 1$. Следовательно, по теореме Нетер система имеет определяемый формулой (6.94) первый интеграл:

$$f = -H = -\left(\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L\right),$$

которым описывается установленный ранее из других соображений закон сохранения обобщенной энергии для таких систем.

2. Аналогичным образом с помощью теоремы Нетер формулой (6.94) устанавливается наличие циклического первого интеграла $f_k = p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ для системы с циклической переменной q_k , т.е. когда $\partial L / \partial q_k = 0$. В этом случае лагранжиан системы инвариантен относительно преобразования

$$\tilde{q}_k = \psi_k = q_k + \alpha, \quad \tilde{q}_i = \psi_i = q_i; \quad i \neq k, \quad \tilde{t} = \varphi = t.$$

3. Пусть система из n материальных точек описывается лагранжианом

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{\mathbf{r}}_k)^2 - \Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (6.108)$$

в котором функция $\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ зависит только от расстояний $\rho_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ между точками. Лагранжиан такой системы инвариантен относительно следующего преобразования:

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\Psi}_k = \mathbf{r}_k + \alpha \mathbf{e}; \quad k = 1, \dots, n, \quad \tilde{t} = \varphi = t,$$

где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор из трехмерного пространства. В этом случае имеем $\partial \boldsymbol{\Psi}_k / \partial \alpha = \mathbf{e}$, $\partial \varphi / \partial \alpha = 0$, а на основании формулы (6.94) получаем для рассматриваемой системы следующий первый интеграл:

$$f = \mathbf{e}^T \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (6.109)$$

Этот интеграл описывает закон сохранения суммарного импульса системы, поскольку из него следует, что проекция этого импульса на любое направление \mathbf{e} в трехмерном пространстве не меняется.

Лагранжиан (6.108) при оговоренных выше условиях на функцию Π инвариантен также относительно преобразований поворота в трехмерном пространстве. Такие преобразования можно записать с помощью нормированного кватерниона $\Lambda = \cos \alpha + \mathbf{e} \sin \alpha$, где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор, следующими формулами:

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\Psi}_k = \Lambda \circ \mathbf{r}_k \circ \bar{\Lambda}; \quad k = 1, \dots, n, \quad \tilde{t} = \varphi = t. \quad (6.110)$$

Для этого преобразования получим

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \mathbf{e} \circ \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k \circ \mathbf{e} = 2\mathbf{e} \times \mathbf{r}_k; \quad k = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

а первый интеграл (6.94) запишется в виде

$$f = 2 \sum_{k=1}^n (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_k)^T m_k \dot{\mathbf{r}}_k = 2 \mathbf{e}^T \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k = 2 \mathbf{e}^T \mathbf{K}.$$

Этим первым интегралом описывается сохранение проекции суммарного кинетического момента системы \mathbf{K} на любое направление в трехмерном пространстве, т.е. закон сохранения вектора суммарного кинетического момента.

Равновесия, устойчивость, колебания

7.1. Положения равновесия голономных систем.

Принцип виртуальных перемещений

Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы. Она может состоять из отдельных материальных точек и твердых тел. Обозначим через $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_S)^T$ вектор, задающий положение рассматриваемой механической системы относительно системы отсчета $Oi_1i_2i_3$. Положение отдельных материальных точек и точек твердых тел будут выражаться однозначными функциями вектора \mathbf{R} в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{R})$.

Предполагается, что на систему наложены голономные идеальные связи, в общем случае зависящие от времени:

$$f_k(\mathbf{R}, t) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.1)$$

Число степеней свободы такой системы равно $n = S - m$, а векторы \mathbf{R} и $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{R})$ будут выражаться через обобщенные координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ зависимостями вида $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$.

Определение. Совместимое со связями (7.1) положение системы \mathbf{R}^0 называется положением равновесия, если из начальных условий $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^0$ и $\dot{\mathbf{R}}(0) = 0$ следует $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^0 \quad \forall t > 0$.

Иными словами, в положении равновесия материальная система остается бесконечно долго, если она приведена в это положение с нулевыми скоростями. Наличие таких положений зависит от системы отсчета и от действующих на материальную систему сил.

Замечание. Из уравнений связей (7.1) следует

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{\partial f_k(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}^T} \dot{\mathbf{R}} + \frac{\partial f_k(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.2)$$

Поэтому если связи зависят от времени, то «кандидатами» в положения равновесия могут быть только точки \mathbf{R}^0 , в которых

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{R}^0, t)}{\partial t} = 0 \quad \forall t; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.3)$$

Это означает, что в этих точках зависимость от времени должна «исчезать» и все частные производные функций f_k по времени должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial^n f_k(\mathbf{R}^0, t)}{\partial t^n} = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

В качестве примера, поясняющего, что наличие положений равновесия зависит от системы отсчета, приведем изображенную на рис. 7.1 систему, в которой маятник может перемещаться в вертикальной плоскости, а сама плоскость вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью.

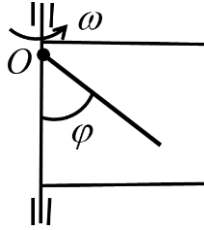


Рис. 7.1

Эта система имеет одну степень свободы. Положениями равновесия маятника относительно неподвижной системы отсчета могут быть только такие, для которых $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Что же касается положений равновесия маятника относительно вращающейся плоскости, то для них никаких ограничений на значения угла φ нет.

Прежде чем формулировать и доказывать теорему об условиях равновесия, напомним, что *виртуальные* перемещения $\delta \mathbf{R}$ голономной системы со связями (7.1) описываются системой уравнений

$$\delta f_k = \frac{\partial f_k(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}^T} \delta \mathbf{R} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.5)$$

а виртуальные перемещения материальных точек системы выражаются формулами

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{R}^T} \delta \mathbf{R} . \quad (7.6)$$

В инерциальной системе отсчета уравнение движения каждой точки описывается вторым законом Ньютона в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i , \quad (7.7)$$

где \mathbf{F}_i – активные силы, \mathbf{N}_i – реакции связей. При этом в случае идеальных связей для любого виртуального перемещения системы выполняется *общее уравнение динамики*:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad \forall \delta \mathbf{R} \in (7.5) . \quad (7.8)$$

Теорема 7.1 (принцип виртуальных перемещений). *Для того чтобы положение \mathbf{R}^0 голономной системы с идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы была равна нулю:*

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{R} \in (7.5) . \quad (7.9)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathbf{R}^0 – положение равновесия. Тогда из условий $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^0$ и $\dot{\mathbf{R}}(0) = 0$ следует $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Это означает, что равно нулю ускорение каждой точки системы ($\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$), а из общего уравнения динамики (7.8) следует условие (7.9).

Достаточность. Пусть выполняется условие (7.9). Тогда из уравнения (7.8) будем иметь

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{R} \in (7.5) . \quad (7.10)$$

Продифференцируем уравнения (7.2) по времени. Положив в полученных уравнениях $\dot{\mathbf{R}} = 0$, получим при учете формул (7.4) следующие уравнения для возможных ускорений системы:

$$\left. \frac{d^2 f_k}{dt^2} \right|_{\dot{\mathbf{R}}=0} = \frac{\partial f_k(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}^T} \ddot{\mathbf{R}} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m . \quad (7.11)$$

Обратим внимание, что уравнения (7.5) для виртуальных перемещений и уравнения (7.11) для возможных ускорений – это линейные однородные уравнения с одной и той же матрицей. Поэтому все множество виртуальных перемещений системы может быть записано через множество возможных ускорений в виде $\delta \mathbf{R} = \lambda \ddot{\mathbf{R}}$. Вычисляя левую часть равенства (7.10) на виртуальном перемещении системы $\delta \mathbf{R} = \lambda \ddot{\mathbf{R}}$, где виртуальные перемещения точек выражаются через их ускорения в виде $\delta \mathbf{r}_i = \lambda \ddot{\mathbf{r}}_i$, получим

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \lambda \sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i)^2. \quad (7.12)$$

Отсюда следует, что равенство (7.10) выполняется только в том случае, когда ускорение каждой точки системы равно нулю, т.е. при выполнении условия (7.9) рассматриваемое положение является положением равновесия. *Теорема доказана.*

В качестве примера применения теоремы 7.1 определим условия равновесия твердого тела в инерциальной системе отсчета (рис. 7.2).

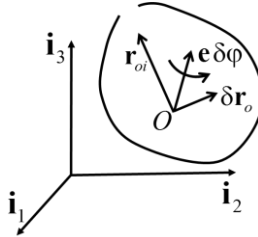


Рис. 7.2

Перемещение тела можно задать вектором $\delta \mathbf{r}_O$ перемещения выбранного в теле полюса O и поворотом вокруг оси \mathbf{e} на угол $\delta \varphi$. Рассматривая всевозможные векторы $\delta \mathbf{r}_O$ из трехмерного пространства и всевозможные направления единичного вектора \mathbf{e} , получим все множество виртуальных перемещений тела. Виртуальные перемещения точек тела определяются формулой Эйлера:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_O + \mathbf{e} \times \mathbf{r}_{Oi} \delta \varphi,$$

а условие равновесия (7.9) принимает следующий вид:

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\delta \mathbf{r}_o + \mathbf{e} \times \mathbf{r}_{oi} \delta \varphi) = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_o + \mathbf{M}_o \cdot \mathbf{e} \delta \varphi = 0. \quad (7.13)$$

Здесь \mathbf{F} и \mathbf{M}_o – главный вектор и главный момент действующих на твердое тело внешних сил. Поскольку равенство (7.13) должно выполняться для любых векторов $\delta \mathbf{r}_o$ и \mathbf{e} из трехмерного пространства, то из него следует, что условием равновесия твердого тела является равенство нулю главного вектора и главного момента внешних сил: $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_o = 0$.

Условия равновесия в терминах обобщенных сил. Далее будем рассматривать голономные системы со стационарными связями. Для таких систем и параметризация может быть выбрана стационарной, т.е. обобщенные координаты \mathbf{q} можно выбрать так, что положения точек системы будут выражаться зависимостями вида $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$, причем эта зависимость будет взаимно однозначной. Это взаимно однозначное соответствие между положениями системы и обобщенными координатами позволяет переформулировать приведенное выше определение положений равновесия в терминах обобщенных координат следующим образом.

Определение. \mathbf{q}^0 называется положением равновесия, если из условий $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0$ и $\dot{\mathbf{q}}(0) = 0$ следует $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^0 \forall t > 0$.

Виртуальные перемещения точек системы выражаются через вариацию $d\mathbf{q}$ вектора \mathbf{q} формулами

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}^T} d\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} dq_k.$$

Подставляя эти выражения в условие (7.9) принципа виртуальных перемещений, получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) dq_k = 0 \quad \forall d\mathbf{q}. \quad (7.14)$$

Поскольку равенство (7.14) должно выполняться для любого вектора $d\mathbf{q}$ из n -мерного пространства, а выражения в скобках – это

обобщенные силы Q_k , то в терминах обобщенных сил принцип виртуальных перемещений (7.9) принимает следующую формулировку:

Теорема 7.2. *Для того чтобы положение \mathbf{q}^0 было положением равновесия стационарной голономной системы, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы были равны нулю:*

$$Q_k(\mathbf{q}^0) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)_{\mathbf{q}^0} = 0; \quad k=1,2,\dots,n. \quad (7.15)$$

Если механическая система является *консервативной*, то обобщенные силы выражаются через потенциальную энергию системы $\Pi(\mathbf{q})$ формулами

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow Q_k(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k}; \quad k=1,2,\dots,n. \quad (7.16)$$

В этом случае условия равновесия (7.15) принимают вид

$$\left. \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}^0} = 0; \quad k=1,2,\dots,n, \quad (7.17)$$

т.е. *положениям равновесия консервативной системы соответствуют стационарные точки потенциальной энергии.*

Замечание. *Добавление гироскопических и диссипативных сил не меняет положений равновесия консервативной системы.* Последний вывод следует из того, что в неподвижных состояниях системы гироскопические и диссипативные силы равны нулю.

Положения равновесия в неинерциальных СО. В неинерциальных системах отсчета уравнение движения каждой материальной точки системы записывается в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{J}_i^{nep} + \mathbf{J}_i^{kop} + \mathbf{N}_i, \quad (7.18)$$

где \mathbf{F}_i – активные силы, \mathbf{J}_i^{nep} – переносные силы инерции, \mathbf{J}_i^{kop} – кориолисовы силы инерции, \mathbf{N}_i – реакции связей. Поскольку кориолисовы силы инерции в неподвижных состояниях системы равны

нулю, то применительно к неинерциальным системам отсчета принцип виртуальных перемещений (7.9) принимает следующий вид:

$$\delta A = \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_i^{nep}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{R} \in (5), \quad (7.19)$$

т.е. в положениях равновесия относительно неинерциальной системы отсчета суммарная работа активных сил и переносных сил инерции на любом виртуальном перемещении системы равна нулю. В терминах обобщенных сил условие (7.19) переписывается в виде

$$Q_k(\mathbf{q}^0) + Q_k^{nep}(\mathbf{q}^0) = \left(\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_i^{nep}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right)_{\mathbf{q}^0} = 0; \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.20)$$

Заметим, что *в частном случае*, когда неинерциальная СО вращается относительно инерциальной с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, переносные силы инерции являются потенциальными, а обусловленная этими силами потенциальная энергия есть кинетическая энергия переносного движения системы, взятая со знаком минус, т.е. $\Pi^{nep} = -T^{nep}$. Если при этом и активные силы потенциальны, то положения равновесия относительно вращающейся системы отсчета будут соответствовать стационарным точкам суммарной потенциальной энергии $\Pi = \Pi^{акт} + \Pi^{nep}$.

Для примера определим положения равновесия стержня относительно вращающейся плоскости в системе, изображенной на рис. 7.1, где однородный стержень массы m и длины l может поворачиваться в плоскости вокруг неподвижной точки O , а плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Полагаем, что система находится в однородном поле тяжести.

В рассматриваемом примере суммарная потенциальная энергия сил тяжести и переносных сил инерции выражается формулой

$$\Pi = -\frac{mgl}{2} \cos \varphi - \frac{ml^2 \omega^2}{6} \sin^2 \varphi.$$

Стационарные точки этой функции определяются из уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{mgl}{2} \sin \varphi - \frac{ml^2 \omega^2}{3} \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

которое при любых значениях ω имеет два решения $\varphi = 0, \pi$, а при $\omega^2 > 3g/(2l)$ имеет еще решение $\cos \varphi = 3g/(2l\omega^2)$, соответствующее отклоненным от вертикали положениям равновесия стержня.

7.2. Устойчивость. Прямой (второй) метод Ляпунова

Движение голономных механических систем описывается в обобщенных координатах уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (7.21)$$

где \mathbf{q} – вектор обобщенных координат, $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей, $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ – кинетическая энергия системы, а $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ – вектор обобщенных сил. Уравнения Лагранжа (7.21) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка. Фазовыми переменными в этих уравнениях являются обобщенные координаты \mathbf{q} и обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}}$, а любое частное решение этих уравнений зависит от начальных значений этих фазовых переменных.

В дальнейшем для упрощения записей будем использовать $2n$ -мерный вектор фазовых переменных $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, составленный из компонент векторов \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$. В фазовом пространстве системы положениям равновесия \mathbf{q}^0 будет соответствовать вектор $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{q}^0, \mathbf{0})$. Поскольку соответствующей заменой координат любой вектор \mathbf{q}^0 можно «переместить» в начало координат, то далее без ограничения общности будем полагать, что для рассматриваемого положения равновесия $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Определение. Положение равновесия $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ системы (7.21) называется устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что $\forall |\mathbf{x}(0)| < \delta$ $|\mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t)| < \varepsilon \forall t > 0$, т.е. все фазовые траектории системы, «стартующие» из δ -окрестности положения равновесия, не покидают с течением времени ε -окрестность положения равновесия (рис. 7.3).

Определение. Положение равновесия $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ системы (7.21) называется неустойчивым, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall \delta > 0$

$\exists |\mathbf{x}(0)| < \delta$ и $t^* > 0$, такие, что $|\mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t^*)| \geq \varepsilon$, т.е. найдется хотя бы одна фазовая траектория системы, «стартующая» из δ -окрестности положения равновесия, которая покинет в некоторый момент времени ε -окрестность положения равновесия.

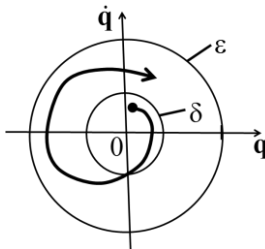


Рис. 7.3

Определение. Положение равновесия $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ системы (7.21) называется *притягивающим*, если существует область притяжения $\Delta > 0$, такая, что $\forall |\mathbf{x}(0)| < \Delta \exists \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}[\mathbf{x}(0), t]| = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, т.е. все фазовые траектории системы, «стартующие» из Δ -окрестности, «сходятся» со временем к положению равновесия (рис. 7.4).

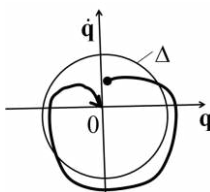


Рис. 7.4

Определение. Положение равновесия $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ системы (7.21) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и притягивающее.

Заметим, что из свойства притяжения не следует в общем случае свойство устойчивости. Поэтому в определение асимптотической устойчивости помимо притяжения включается и устойчивость.

Уравнения Лагранжа (7.21), как известно, разрешимы относительно старших производных, т.е. могут быть приведены к виду $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Эти n дифференциальных уравнений второго порядка

при использовании фазового вектора $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ преобразуются к следующей системе из $2n$ уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_j = x_{j+n}; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \dot{x}_k = f_k(\mathbf{x}, t); \quad k = n+1, \dots, 2n. \quad (7.22)$$

В векторной записи система (7.22) имеет вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Ее положениями равновесия являются те из решений \mathbf{x} системы уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$, в которых отсутствует зависимость от времени.

Ниже ограничимся анализом положений равновесия *автономных систем*, описываемых уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (7.23)$$

Положениями равновесия такой системы будут все решения системы уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$.

В данном разделе излагается *прямой (второй) метод Ляпунова* исследования устойчивости положений равновесия применительно к автономным системам (7.23). В этом методе для исследования устойчивости положений равновесия используются вспомогательные *непрерывно дифференцируемые* скалярные функции $V(\mathbf{x})$, а заключение об устойчивости или неустойчивости делается по результатам анализа поведения этих функций на решениях системы (7.23).

Основу прямого метода Ляпунова составляют приводимые ниже теоремы. Всюду далее без ограничения общности будем полагать, что положением равновесия является точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а $V(\mathbf{0}) = 0$.

Теорема 7.3 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (7.23) существует (найдется) определенно-положительная функция $V(\mathbf{x})$ (имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), а ее производная по времени, вычисленная в силу уравнений (7.23), знакоотрицательна, т.е.*

$$\dot{V}|_{(7.23)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}}|_{(7.23)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (7.24)$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво.

Функции, удовлетворяющие условиям теоремы 7.3, называются *функциями Ляпунова*.

Доказательство. По условиям теоремы $V(\mathbf{0})=0$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $V(\mathbf{x})$ на сфере $|\mathbf{x}| = \varepsilon$ принимает положительные значения. Обозначим через $V_\varepsilon^{\min} > 0$ наименьшее из значений функции $V(\mathbf{x})$ на этой сфере. В силу непрерывности функции $V(\mathbf{x})$ существует достаточно малое $\delta > 0$, такое, что

$$V_\delta^{\max} = \max_{|\mathbf{x}| \leq \delta} V(\mathbf{x}) < V_\varepsilon^{\min}.$$

Поэтому для всех траекторий, стартующих из δ -окрестности положения равновесия, на основании условия (7.24) будем иметь $V(t) \leq V_\delta^{\max} < V_\varepsilon^{\min}$. А это означает, что ни одна из указанных траекторий системы никогда не достигнет границы ε -окрестности. *Теорема доказана.*

Простым следствием теоремы 7.3 является нижеследующая теорема о достаточных условиях устойчивости положений равновесия консервативных систем.

Теорема Лагранжа. *Если потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ консервативной системы непрерывна и в положении равновесия имеет строгий минимум, то это положение устойчиво.*

Для доказательства этой теоремы достаточно взять в качестве функции Ляпунова полную энергию системы $V = T + \Pi$. Для консервативной системы кинетическая энергия является строго положительно-определенной квадратичной формой обобщенных скоростей. А ввиду того, что функция $\Pi(\mathbf{q})$ имеет строгий минимум по координатам, полная энергия в положениях равновесия будет иметь строгий минимум по всем фазовым переменным. Поскольку полная энергия консервативной системы сохраняется ($\dot{V}|_{(7.23)} = 0$), то все условия теоремы 7.3 выполнены.

Замечание. *Если потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ консервативной системы в положении равновесия имеет строгий минимум, то это положение остается устойчивым при добавлении гироскопических и диссипативных сил.*

Для обоснования этого утверждения снова возьмем в качестве функции Ляпунова полную энергию системы. Производная от пол-

ной энергии по времени, как известно, равна мощности непотенциальных сил. Но мощность гироскопических сил равна нулю, а мощность диссипативных сил меньше или равна нулю, так что и в этом случае выполняются все условия теоремы 7.3.

В нижеследующей теореме областью $V > 0$ называется область значений \mathbf{x} , в которой $V(\mathbf{x}) > 0$, а поверхность $V = 0$ – границей области $V > 0$. Предполагается также, что положение равновесия системы (7.23) является граничной точкой области $V > 0$ (рис. 7.5).

Теорема 7.4 (теорема Четаева о неустойчивости). *Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (7.23) существует функция $V(\mathbf{x})$ и область $V > 0$, такие, что в области $V > 0$ производная $\dot{V}|_{(7.23)} > 0$, то это положение равновесия неустойчиво.*

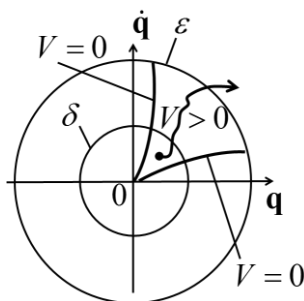


Рис. 7.5

Доказательство. Выберем достаточно малую ε -окрестность положения равновесия, в которой выполняются условия теоремы, и зададимся некоторой δ -окрестностью. В этой δ -окрестности выберем начальное условие $\mathbf{x}(0)$ из области $V > 0$. Поскольку по условию теоремы функция $V(\mathbf{x})$ в этой области возрастает, траектория системы не может бесконечно близко подходить к границе $V = 0$ области $V > 0$. Поэтому для значений $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ будет ограничена снизу некоторой положительной величиной a , т.е. $\dot{V}(\mathbf{x}) \geq a > 0$, а поведение функции $V(\mathbf{x})$ будет описываться неравенством $V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}(0)) + at$. Из этого неравенства и непрерывности

функции $V(\mathbf{x})$ следует, что наступит момент времени, когда значение функции $V(\mathbf{x}(t))$ превысит ее максимально возможное значение в ε -окрестности, т.е. фазовая траектория покинет ε -окрестность. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 7.4 условия $V > 0$, $\dot{V}|_{(7.23)} > 0$ эквивалентны условиям $V < 0$, $\dot{V}|_{(7.23)} < 0$. Область $V > 0$ ($V < 0$) может совпадать с полной окрестностью положения равновесия.

Теорема 7.5 (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский). Пусть в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (7.23) существует функция $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям:

$$1. \dot{V}|_{(7.23)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (7.25)$$

2. Множество X^0 точек фазового пространства, в которых производная (7.25) равна нулю, т.е.

$$X^0 : \dot{V}|_{(7.23)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.26)$$

кроме положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, не содержит других **целых траекторий** системы (7.23).

Тогда:

А). Если в положении равновесия функция $V(\mathbf{x})$ имеет строгий минимум, то это положение асимптотически устойчиво.

Б). Если в положении равновесия функция $V(\mathbf{x})$ не имеет минимума, включая нестрогий, то это положение неустойчиво.

Здесь под *целой траекторией* системы подразумевается вся кривая, описываемая фазовым вектором на промежутке времени от некоторого момента $t = t_0$ до $t = \infty$. Множество X^0 (2.6) представляет собой в общем случае некоторую гиперповерхность в фазовом пространстве, а условие 2 означает, что если некоторые фазовые траектории системы и попадают на эту гиперповерхность, то не задерживаются на ней бесконечно долго. Эквивалентная формулировка

условия 2 звучит так: *положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является единственной целой траекторией системы, на которой значение функции $V(\mathbf{x})$ не меняется.*

Ниже при доказательстве теоремы решения системы (7.23), определяемые начальными условиями $t = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, будем обозначать через $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$. Из курса дифференциальных уравнений известно, что решения автономных систем обладают групповым свойством:

$$\Phi(\mathbf{x}_0, t + T) = \Phi[\Phi(\mathbf{x}_0, t), T]. \quad (7.27)$$

Кроме того, из условия 2 теоремы следует, что если \mathbf{x}_0 не является положением равновесия, то найдется $T > 0$, такое, что

$$V[\Phi(\mathbf{x}_0, T)] < V(\mathbf{x}_0). \quad (7.28)$$

Доказательство утверждения А). Если функция $V(\mathbf{x})$ имеет строгий минимум в положении равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то из условия (7.25) и теоремы 7.3 следует, что это положение устойчиво. Поэтому если выбрать достаточно малую ε -окрестность точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, в которой выполняются условия теоремы, то для нее найдется $\Delta > 0$ такое, что

$$\forall |\mathbf{x}_0| < \Delta \rightarrow |\mathbf{x}(t)| = |\Phi(\mathbf{x}_0, t)| < \varepsilon \quad \forall t > 0. \quad (7.29)$$

Покажем, что Δ -окрестность является областью притяжения для точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. По условиям теоремы функция $V(\mathbf{x}(t))$ монотонно убывает в ε -окрестности положения равновесия и ограничена снизу значением $V = 0$. Поэтому она имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[\Phi(\mathbf{x}_0, t)] = V^* \geq 0. \quad (7.30)$$

Рассмотрим бесконечную последовательность моментов времени $t_k (k = 1, 2, \dots)$, где $t_{k+1} > t_k$ и $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. В силу неравенства (7.29) последовательность $\mathbf{x}_k = \Phi(\mathbf{x}_0, t_k)$ ограничена и по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность:

$$\mathbf{x}_i = \Phi(\mathbf{x}_0, t_i), \text{ где } \lim_{t_i \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}_0, t_i) = \mathbf{x}^*. \quad (7.31)$$

Поэтому предел (7.30) можно выразить через значение функции $V(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* формулой

$$V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V[\varphi(\mathbf{x}_0, t)] = V(\mathbf{x}^*). \quad (7.32)$$

С другой стороны, используя групповое свойство (7.27), предел (7.30) можно записать в виде

$$V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V[\varphi(\mathbf{x}_0, t + T)] = V(\mathbf{x}^*, T). \quad (7.33)$$

Предположим теперь, что для некоторого начального значения \mathbf{x}_0 из Δ -окрестности предел $V^* > 0$. Тогда из формулы (7.32) при учете строгой положительной определенности функции $V(\mathbf{x})$ следует $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$, т.е. \mathbf{x}^* не является положением равновесия. Но тогда из формулы (7.33) при учете неравенства (7.28) получим, что найдется $T > 0$ такое, что

$$V^* = V(\mathbf{x}^*, T) < V(\mathbf{x}^*), \text{ т.е. } V^* < V^*. \quad (7.34)$$

Полученное противоречие показывает, что в условиях теоремы пределов, для которых $V^* > 0$, не существует, т.е. для всех начальных значений \mathbf{x}_0 из Δ -окрестности предел $V^* = 0$. Отсюда в силу строгой положительной определенности функции $V(\mathbf{x})$ следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{0} \quad \forall |\mathbf{x}_0| < \Delta, \quad (7.35)$$

т.е. Δ -окрестность является областью притяжения для устойчивого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, что и доказывает асимптотическую устойчивость этого положения равновесия.

Доказательство утверждения Б). Доказательство неустойчивости проведем методом «от обратного». Предположим, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво. По условиям теоремы в любой достаточно малой ε -окрестности положения равновесия существует область $V < 0$ (область значений \mathbf{x} , где $V(\mathbf{x}) < 0$), а из предполагаемой устойчивости должно следовать существование $\Delta > 0$ такого, что для любых начальных значений \mathbf{x}_0 из Δ -окрестности выполняется неравенство

(7.29) и имеется сходящаяся подпоследовательность (7.31). Выберем начальное значение $|\mathbf{x}_0| < \Delta$ из области $V < 0$. В силу непрерывности функция $V[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0, t)]$ ограничена снизу в ε -окрестности, а в силу монотонного убывания и неравенства (7.29) она должна иметь предел $\lim_{t \rightarrow \infty} V[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0, t)] = V^*$, причем, поскольку $V(\mathbf{x}_0) < 0$, то $V^* < 0$. Записывая этот предел формулами (7.32) и (7.33), и учитывая неравенство (7.28), получим $\mathbf{x}^* \neq 0$ и противоречивое неравенство (7.34), которое в данном случае опровергает предположение о том, что решения $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0, t)$, «стартовые» из области $V < 0$ Δ -окрестности, ограничены ε -окрестностью (неравенством (7.29)). Тем самым опровергается предположение об устойчивости решения $\mathbf{x} = 0$ и, следовательно, доказывается его неустойчивость. *Теорема доказана.*

Замечание к теореме 7.5. Для доказательства утверждения Б) о неустойчивости достаточно, чтобы условия 1 и 2 теоремы выполнялись в области $V < 0$.

Отметим, что теорему Четаева о неустойчивости (теорему 7.4) можно рассматривать как следствие теоремы 7.5 Барбашина–Красовского, поскольку накладываемые теоремой 7.4 условия не выходят за рамки условий теоремы 7.5. При этом условия теоремы 7.4 являются более «жесткими» по сравнению с условиями теоремы 7.5.

Не менее простым следствием теоремы 7.5 является следующая теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема 7.6. *Если в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (7.23) существует определено-положительная функция $V(\mathbf{x})$, а ее производная $\dot{V}|_{(2.3)}$ является определено-отрицательной, то положение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво.*

По условиям этой теоремы множество X^0 (7.26) состоит из единственной точки $\mathbf{x} = 0$, так что выполняются все условия теоремы 7.5.

Следствием теоремы 7.5 является и следующая теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

Теорема 7.7. *Если в положении равновесия $\mathbf{q} = 0$ консервативной системы потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ имеет строгий **изолированный** минимум, то это положение становится асимптотически*

устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.

Напомним, что силами с полной диссипацией (строго диссипативными) называются силы, мощность которых отрицательна на любом движении системы, т.е. $\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$. Поэтому если взять в качестве функции $V(\mathbf{x})$ полную энергию системы, то для ее производной по времени будет выполняться условие (7.25) теоремы 7.5, причем эта производная будет равна нулю только при $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Таким образом, множество X^0 (7.26) в рассматриваемом случае состоит из неподвижных состояний системы. Но целыми траекториями на множестве неподвижных состояний могут быть только положения равновесия. Поскольку по условию теоремы положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ является изолированным, то в некоторой его окрестности других положений равновесия нет, так что выполняются все условия теоремы 7.5 об асимптотической устойчивости.

Заметим, что во многих случаях устойчивое положение равновесия консервативной системы становится асимптотически устойчивым и при добавлении сил с частичной диссипацией, и в таких случаях теорема 7.5 является наиболее эффективным инструментом доказательства асимптотической устойчивости.

7.3. Первый метод Ляпунова исследования устойчивости

Уравнения движения механической системы с n степенями свободы, записанные в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (7.36)$$

в общем случае являются нелинейными. Для стационарных (склерономных) систем кинетическая энергия выражается квадратичной формой обобщенных скоростей, а обобщенные силы являются функциями обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Положения равновесия такой механической системы определяются решениями системы уравнений $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Всюду далее будем

полагать, что исследуемому положению равновесия соответствует точка $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$.

Излагаемый в этом разделе *первый метод Ляпунова* состоит в том, что заключение об устойчивости или неустойчивости положения равновесия делается по результатам анализа *уравнений, полученных линеаризацией уравнений* (7.36) в окрестности рассматриваемого положения равновесия. Поэтому его называют методом исследования устойчивости *по первому (линейному) приближению*.

Уравнения, линеаризованные в окрестности положения равновесия $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$, записываются в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (7.37)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – *постоянные* матрицы, определяемые формулами

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{0}), \quad \mathbf{B} = -\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right|_{\mathbf{0}}, \quad \mathbf{C} = -\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T} \right|_{\mathbf{0}}. \quad (7.38)$$

Как известно из курса дифференциальных уравнений, для любой линейной системы можно построить общее решение, вид которого определяется значениями корней $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 1, \dots, 2n$) *характеристического уравнения*:

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0. \quad (7.39)$$

При этом если среди корней λ_k нет кратных, то вещественная часть общего решения записывается в виде

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \mathbf{u}_k e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, \quad (7.40)$$

где \mathbf{u}_k – n -мерные столбцы с постоянными элементами, а c_k – произвольные постоянные, значения которых определяются начальными значениями обобщенных координат $\mathbf{q}(0)$ и обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}(0)$. А в случае, когда λ_k – корень кратности $s+1$, то в решении появляются слагаемые вида (так называемые вековые члены):

$$(c_{0k} + c_{1k}t + \dots + c_{sk}t^s) \mathbf{u}_k e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t. \quad (7.40^*)$$

Из структуры общего решения (7.40) и (7.40*) следует, что если все вещественные части корней характеристического уравнения

(7.39) отрицательны, то любое частное решение линейной системы (7.37) ограничено и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т.е. положение равновесия $\mathbf{q}^0 = 0$ этой системы асимптотически устойчиво. Если же среди корней характеристического полинома есть корни с положительной вещественной частью, то имеются частные решения, уходящие за пределы любой окрестности положения равновесия, т.е. положение равновесия неустойчиво.

Нижеследующей теоремой установленные выше условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия линеаризованной системы (7.37) распространяются на положения равновесия исходной нелинейной системы (7.36).

Теорема 7.8 (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению). *Если вещественные части всех корней характеристического уравнения линеаризованной системы (7.37) отрицательны, то положение равновесия нелинейной системы (7.36) является асимптотически устойчивым, а если имеются корни с положительной вещественной частью, то это положение неустойчиво.*

Случай, когда у характеристического полинома (7.39) системы (7.37) нет корней справа от мнимой оси, но есть корни, лежащие на мнимой оси, называются *критическими*. В таких случаях судить о свойствах устойчивости положений равновесия исходной нелинейной системы (7.36) по линеаризованным уравнениям (7.37) нельзя, поскольку в этих случаях нелинейные члены уравнений движения являются определяющими в вопросе об устойчивости.

Характеристическое уравнение (7.39) обычно записывают в виде

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0; \quad m = 2n, \quad (7.41)$$

где a_k называются коэффициентами характеристического полинома $f(\lambda)$. По теореме Безу уравнение (7.41) можно записать в виде

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k) = 0; \quad \lambda_k = \alpha_k + i \beta_k, \quad (7.42)$$

где λ_k — корни полинома $f(\lambda)$.

Таким образом, согласно приведенной выше теореме Ляпунова 7.8 вопрос об устойчивости положений равновесия сводится к опре-

делению расположения корней характеристического полинома линейной системы по отношению к мнимой оси. В связи с этим полином $f(\lambda)$ называется *устойчивым (гурвицевым)*, если все его корни лежат слева от мнимой оси (все $\alpha_k < 0$), и *неустойчивым*, если имеются корни справа от мнимой оси ($\exists \alpha_j > 0$).

Очевидно, что корни полинома полностью определяются его коэффициентами. При этом замена знака всех коэффициентов полинома на обратный не меняет его корней. Поэтому всюду далее полагается, что полином приведен к виду, в котором коэффициент при высшей степени λ положителен, т.е.

$$a_0 > 0. \quad (7.43)$$

Используя запись полинома в форме (7.42), легко показать, что для устойчивости полинома *необходимо*, чтобы все коэффициенты полинома имели один и тот же знак. При учете (7.43) это *необходимое условие устойчивости* записывается в виде

$$a_k > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (7.44)$$

Если же у полинома есть коэффициенты разных знаков, то у него заведомо имеются корни, лежащие справа от мнимой оси.

Универсальным «инструментом», позволяющим определять расположение корней полинома по отношению к мнимой оси без их непосредственного вычисления, является приведенная ниже теорема Рауса–Гурвица. В формулировке этой теоремы используется *матрица Гурвица* \mathbf{G} размера $m \times m$, которая определяется через коэффициенты полинома формулой

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & \dots & a_{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & & & a_m \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Строится эта матрица по следующей схеме. В первой строке матрицы располагаются коэффициенты полинома с нечетными номерами, начиная с a_1 , а во второй – коэффициенты с четными номерами, начиная с a_0 . При этом оставшиеся позиции заполняются нулями. Следующие две строки матрицы получаются сдвигом двух предыдущих на одну позицию вправо, а освободившиеся позиции заполняются нулями. Диагональными элементами матрицы \mathbf{G} являются коэффициенты полинома a_1, a_2, \dots, a_m .

Теорема 7.9 (теорема Рауса–Гурвица). 1. Для того чтобы все корни характеристического полинома лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы детерминанты всех главных диагональных миноров матрицы (7.45) были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_m = \det(\mathbf{G}) > 0. \quad (7.46)$$

2. Если среди детерминантов (7.46) имеются отрицательные, то полином имеет корни справа от мнимой оси.

В данной формулировке теоремы полагается, что полином приведен к виду, в котором $a_0 > 0$.

Часто первую часть теоремы 7.9 называют критерием асимптотической устойчивости. Но это справедливо только для линейных систем. Для нелинейных систем эта часть теоремы дает достаточные условия асимптотической устойчивости. Вторая часть теоремы дает достаточные условия неустойчивости как для линейных, так и для нелинейных систем.

Учет необходимых условий (7.44) устойчивости полинома позволяет заменить систему неравенств (7.46) одной из следующих двух эквивалентных (7.46) систем:

$$a_k > 0; k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \Delta_{2k+1} > 0; k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.47)$$

$$a_k > 0; k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \Delta_{2k} > 0; k = 1, 2, \dots \quad (7.48)$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости полинома, описываемые системой неравенств (7.47) или (7.48), называются критерием Рауса–Гурвица в форме Лъенара–Шипара.

Доказательства теорем 7.8 и 7.9 приведены в учебниках [1,2] и книге [7].

7.4. Устойчивость положений равновесия консервативных систем

Консервативная система полностью определяется кинетической и потенциальной энергией. Уравнения ее движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (7.49)$$

где кинетическая энергия является строго положительно-определенной квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (7.50)$$

Потенциальная энергии $\Pi(\mathbf{q})$ в окрестности положения равновесия $\mathbf{q}^0 = 0$ описывается рядом Тейлора:

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi(0) + \mathbf{q}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \dots; \quad \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} \Big|_0. \quad (7.51)$$

Здесь многоточием обозначены члены выше второго порядка малости по отклонениям \mathbf{q} от положения равновесия. Отбрасывая в выражении (7.51) аддитивную постоянную $\Pi(0)$ и учитывая, что в положениях равновесия $\partial \Pi / \partial \mathbf{q} = 0$, получаем, что разложение потенциальной энергии в окрестности положения равновесия начинается с членов второго порядка малости по \mathbf{q} :

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \dots; \quad \mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} \Big|_0. \quad (7.52)$$

Матрица \mathbf{C} (7.52) вторых производных потенциальной энергии называется *матрицей потенциальной энергии*.

Линеаризованные уравнения консервативной системы в окрестности положения равновесия можно получить из уравнений Ла-

гранжа (7.49), если в выражениях (7.50) и (7.52) ограничиться членами второго порядка по фазовым переменным $\dot{\mathbf{q}}$ и \mathbf{q} , т.е. использовать в качестве T и Π следующие функции:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{A} = \mathbf{A}(0), \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (7.53)$$

Подставляя эти функции в уравнения (7.49), получим

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (7.54)$$

В полученных уравнениях \mathbf{A} и \mathbf{C} – постоянные симметрические матрицы, причем матрица \mathbf{A} кинетической энергии является строго положительно-определенной.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия консервативных систем, как нам уже известно, определяются теоремой Лагранжа, согласно которой положение устойчиво, если в этом положении потенциальная энергия имеет строгий минимум. Этот строгий минимум заведомо имеет место, если матрица \mathbf{C} (7.52) является строго положительно-определенной.

Достаточные условия неустойчивости положений равновесия консервативных систем определим, используя линеаризованные уравнения (7.54) и приведенную выше теорему Ляпунова 7.8 об устойчивости по первому приближению.

Поскольку в выражении (7.53) кинетическая энергия является строго положительно-определенной квадратичной формой скоростей, то существует невырожденное линейное преобразование координат

$$\mathbf{q} = \mathbf{U} \boldsymbol{\theta}, \quad (7.55)$$

приводящее обе квадратичные формы (7.53) к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mu_k \theta_k^2. \quad (7.56)$$

Переменные $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, в которых кинетическая и потенциальная энергии линеаризованной консервативной системы имеет вид (7.56), называются *нормальными (ортогональными) координатами*. Записанные в этих переменных уравнения Лагранжа (7.49) для линеаризованной системы распадаются на n независимых уравнений:

$$\ddot{\theta}_k + \mu_k \theta_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.57)$$

Характеристическое уравнение системы (7.57) записывается в виде

$$\prod_{k=1}^n (\lambda^2 + \mu_k) = 0. \quad (7.58)$$

Из него следует, что если среди μ_k найдется $\mu_j < 0$, то характеристический полином имеет корни справа от мнимой оси, а из теоремы Ляпунова 7.8 об устойчивости по первому приближению будет следовать, что положение равновесия неустойчиво.

Учитывая теперь, что μ_k — это собственные числа матрицы потенциальной энергии, записанной в нормальных координатах, и что при невырожденных линейных преобразованиях сигнатура квадратичной формы не меняется, т.е. остается неизменным число положительных и число отрицательных собственных чисел матрицы этой квадратичной формы, получаем следующее *достаточное условие неустойчивости положения равновесия консервативных систем*.

Теорема 7.10 (теорема Ляпунова о неустойчивости консервативных систем). *Если среди собственных чисел матрицы потенциальной энергии \mathbf{C} (7.52), вычисленной в положении равновесия, имеются отрицательные, то это положение равновесия неустойчиво.*

7.5. О гироскопической стабилизации

Как нам уже известно, если положение равновесия консервативной системы устойчиво по теореме Лагранжа, то эта устойчивость не «разрушается» гироскопическими и диссипативными силами. Более того, диссипативные силы обеспечивают во многих случаях асимптотическую устойчивость таких положений равновесия.

Устойчивость, которая не разрушается гироскопическими и диссипативными силами, принято называть *вековой устойчивостью*.

Если же положение равновесия консервативной системы неустойчиво, то в некоторых случаях возможна *гироскопическая стабилизация*, т.е. при добавлении гироскопических сил такие положения могут стать устойчивыми.

Линеаризованные уравнения Лагранжа при наличии гироскопических сил имеют вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (7.59)$$

Здесь \mathbf{A} – симметрическая строго положительно-определенная матрица кинетической энергии, \mathbf{C} – симметрическая матрица потенциальной энергии (7.52), а \mathbf{G} – *кососимметрическая* матрица гироскопических сил.

Кососимметричность матрицы \mathbf{G} следует из определения гироскопических сил. Для них мощность равна нулю, т.е. $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0$. А это возможно только в случае, когда $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$.

Степенью неустойчивости по Пуанкаре положения равновесия консервативной системы называется число отрицательных собственных чисел матрицы потенциальной энергии \mathbf{C} .

В нижеследующих теоремах рассматривается случай, когда положение равновесия консервативной системы является *невыврожденным*, т.е. $\det \mathbf{C} \neq 0$.

Теорема 7.11 (Кельвин–Четаев). *Если степень неустойчивости положения равновесия консервативной системы нечетна ($\det \mathbf{C} < 0$), то это положение нельзя стабилизировать гироскопическими силами.*

Доказательство. Характеристический полином системы (7.59) записывается в виде

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{G}\lambda + \mathbf{C}). \quad (7.60)$$

Проанализируем поведение функции $f(\lambda)$, рассматривая вещественные значения λ от $\lambda = 0$ до $\lambda = +\infty$. При нечетной степени неустойчивости имеем $f(0) = \det(\mathbf{C}) < 0$, а из строгой положительной определенности матрицы \mathbf{A} получаем $f(+\infty) = +\infty$. Отсюда следует, что график функции $f(\lambda)$ пересекает ось $f = 0$ при некотором $\lambda > 0$, т.е. характеристический полином имеет положительный вещественный корень, и по теореме Ляпунова 7.8 положение равновесия неустойчиво. *Теорема доказана.*

Замечание. При доказательстве теоремы 7.11 кососимметричность матрицы \mathbf{G} не использовалась. Поэтому утверждение теоремы остается в силе и в случаях, когда помимо гироскопических сил в системе действуют и другие силы, линейно зависящие от скоростей, например, диссипативные.

Теорема 7.12 (Кельвин–Четаев). *Если степень неустойчивости положения равновесия консервативной системы четная, то это положение можно стабилизировать в линейном приближении гироскопическими силами.*

Доказательство. Перейдем к нормальным координатам, в которых линеаризованные уравнения консервативной системы распадаются на n независимых уравнений (7.57):

$$\ddot{\theta}_k + \mu_k \theta_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.61)$$

Для подсистемы из уравнений, где $\mu_k > 0$, устойчивость имеет место и при отсутствии, и при наличии гироскопических сил. Рассмотрим подсистему из уравнений, где $\mu_k < 0$. При четной степени неустойчивости число таких уравнений четно. Поэтому эти уравнения можно разделить на пары и для каждой пары отдельно проанализировать влияние гироскопических сил. Рассмотрим, например, пару с номерами $k = 1, 2$. Уравнения движения для этой пары переменных при добавлении гироскопических сил запишется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.62)$$

Для характеристического полинома этой системы получим следующее выражение:

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 + \mu_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + \mu_2 \end{pmatrix} = \lambda^4 + (\mu_1 + \mu_2 + g^2)\lambda^2 + \mu_1\mu_2 = 0.$$

Корни этого полинома определяются формулой

$$\lambda^2 = \frac{-(\mu_1 + \mu_2 + g^2) \pm \sqrt{D}}{2}; \quad D = (\mu_1 + \mu_2 + g^2)^2 - 4\mu_1\mu_2. \quad (7.63)$$

Из этой формулы следует, что при условиях

$$\mu_1 + \mu_2 + g^2 > 0 \text{ и } D > 0, \quad (7.64)$$

которые выполняются для достаточно больших значений g^2 (*при достаточной интенсивности гироскопических сил*), все корни полинома будут чисто мнимыми и отличными от нуля, т.е. положение равновесия системы (7.59) будет *устойчиво в линейном приближении*. Теорема доказана.

Заметим, что *устойчивость в линейном приближении* не следует путать с *устойчивостью по первому приближению*, о которой шла речь в теореме 7.8. Под *устойчивостью в линейном приближении* подразумевается *устойчивость положения равновесия линеаризованной системы*. Такая устойчивость не гарантирует, вообще говоря, устойчивость положения равновесия исходной нелинейной системы. Вопрос об устойчивости в строгой нелинейной постановке в таких случаях требует дополнительного исследования.

Отметим также, что устойчивость, которая обеспечивается за счет гироскопических сил, заведомо «разрушается» диссипативными силами с полной диссипацией (теорема 7.5), а во многих случаях и силами с частичной диссипацией. Поэтому, в отличие от *вековой устойчивости*, такая устойчивость называется *временной*.

7.6. Колебания механических систем

Движения механической системы в малой окрестности устойчивого положения равновесия ограничены и называются *колебаниями*.

Малыми колебаниями механической системы в окрестности устойчивого положения равновесия будем называть *решения линеаризованной системы* при условии, что линеаризация не нарушает устойчивости положения равновесия.

Термин *малые колебания* означает, что решения линеаризованных уравнений адекватно описывают движения нелинейной системы в малой окрестности положения равновесия, причем чем меньше эта окрестность, тем точнее решения линеаризованной системы будут совпадать с решениями нелинейной системы.

Очевидно также, что решения линеаризованной системы будут качественно отличаться от решений нелинейной системы, если в результате линеаризации положение равновесия «потеряет» устойчивость. В качестве иллюстрации такого случая приведем пример консервативной системы с одной степенью свободы, где потенциальная

энергия выражается формулой $\Pi(q) = aq^4$; $a > 0$. По теореме Лагранжа положение равновесия $q = 0$ устойчиво. В результате линеаризации уравнений Лагранжа члены $\partial\Pi/\partial q = 4aq^3$ будут отброшены, а это означает, что для линеаризованной системы $\Pi = 0$ и для нее положение равновесия $q = 0$ будет неустойчивым.

Приведем решение задачи о малых колебаниях консервативной системы. Эта система описывается уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (7.65)$$

а полученные в разделе 7.4 линеаризованные уравнения записываются в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (7.66)$$

Здесь \mathbf{A} и \mathbf{C} – постоянные симметрические матрицы, причем матрица \mathbf{A} кинетической энергии является строго положительно-определенной. Для того чтобы в этой линейной системе положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ было устойчивым, необходимо, чтобы и матрица потенциальной энергии \mathbf{C} (7.52) была строго положительно-определенной.

Если, как обычно, искать общее решение линейной системы (7.66) в виде комбинации экспонент $e^{\lambda_k t}$, то вследствие симметричности и положительной определенности матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} все показатели λ_k окажутся чисто мнимыми. А это означает, что интересующее нас вещественное решение системы описывается комбинацией гармонических функций времени. Поэтому сразу ищем решение в виде

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{u}_k \cos(\omega_k t + \alpha_k). \quad (7.67)$$

Здесь n – число степеней свободы системы, ω_k – частоты колебаний, \mathbf{u}_k – амплитудные векторы, а c_k и α_k – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

В общем решении (7.67) слагаемые $\mathbf{q}_k(t) = c_k \mathbf{u}_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)$ называются *главными колебаниями системы*. Амплитудные векторы \mathbf{u}_k указывают направления этих колебаний в n -мерном пространстве, а ω_k – частоты.

Чтобы определить направления и частоты главных колебаний, подставим решение $\mathbf{u} \cos(\omega t + \alpha)$ в уравнение (7.66). Получим

$$(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{C})\mathbf{u} \cos(\omega t + \alpha) = 0.$$

После сокращения на отличный от нуля множитель $\cos(\omega t + \alpha)$ будем иметь

$$(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{C})\mathbf{u} = 0. \quad (7.68)$$

Это линейное однородное уравнение имеет нетривиальное решение \mathbf{u} только в случае, когда матрица $(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{C})$ вырождена, т.е.

$$\det(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{C}) = 0. \quad (7.69)$$

Уравнение (7.69) называется *вековым уравнением* или *уравнением частот*. Его левая часть представляет собой полином степени n относительно ω^2 . Из этого уравнения и определяются все частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ главных колебаний системы. После подстановки каждой из этих частот в уравнение (7.68) получим уравнения

$$(-\mathbf{A}\omega_k^2 + \mathbf{C})\mathbf{u}_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.70)$$

из которых находятся все амплитудные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.

Если среди частот главных колебаний нет кратных, то амплитудные векторы линейно независимы, причем каждые два вектора взаимно ортогональны в метрике матрицы кинетической энергии, т.е.

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{u}_k = 0 \quad \forall j \neq k. \quad (7.71)$$

Свойство (7.71) легко установить, используя уравнения (7.70). Если k -е из этих уравнений умножить скалярно на \mathbf{u}_j , а j -е урав-

нение умножить скалярно на \mathbf{u}_k , а затем вычесть из одного уравнения другое, то при $\omega_k \neq \omega_j$, учитывая симметричность матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} , получим равенство (7.71).

Чтобы определить вид общего решения при наличии кратных частот векового уравнения, перейдем к *нормальным координатам* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, определенным в разделе 7.4. В этих переменных кинетическая и потенциальная энергии линейной консервативной системы записываются в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mu_k \theta_k^2, \quad (7.72)$$

а уравнения Лагранжа распадаются на n независимых уравнений:

$$\ddot{\theta}_k + \mu_k \theta_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.73)$$

Переход от исходных координат \mathbf{q} к нормальным координатам $\boldsymbol{\theta}$ задается линейным преобразованием $\mathbf{q} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta}$, где \mathbf{U} – невырожденная матрица размера $n \times n$. Если обозначить через \mathbf{u}_k столбцы матрицы \mathbf{U} , то это преобразование запишется в виде

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \theta_k. \quad (7.74)$$

Общее решение для каждой из нормальных координат, определяемое из уравнений (7.73), представляет собой гармоническое колебание

$$\theta_k(t) = c_k \cos(\omega_k t + \alpha_k); \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.75)$$

где $\omega_k = \sqrt{\mu_k}$ – частоты колебаний, c_k, α_k – произвольные постоянные. После подстановки этих решений в формулу (7.74) получим общее решение в исходных координатах в виде (7.67). Отсюда следует, во-первых, что преобразование $\mathbf{q} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta}$ к нормальным координатам задается матрицей \mathbf{U} , столбцами которой являются амплитудные векторы \mathbf{u}_k , определяемые из уравнений (7.70). Кроме того, по-

скольку матрица \mathbf{U} невырожденная, векторы \mathbf{u}_k линейно независимы, так что общее решение в любом случае (*независимо от наличия кратных частот векового уравнения*) будет записываться в виде (7.67) комбинацией n независимых колебаний.

Отметим, что кратность частоты ω_k векового уравнения (7.69) равна степени вырождения матрицы $(-\mathbf{A}\omega_k^2 + \mathbf{C})$. Поэтому если частота ω_k имеет кратность s , то ранг матрицы $(-\mathbf{A}\omega_k^2 + \mathbf{C})$ равен $n - s$, и тогда уравнение (7.70) имеет s линейно независимых решений $\mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2}, \dots, \mathbf{u}_{ks}$.

Используя нормальные координаты, легко определить вид общего решения линейной системы (7.66) и для случая, когда среди частот векового уравнения имеются нулевые. Если $\omega_k = \sqrt{\mu_k} = 0$, то k -е уравнение (7.73) принимает вид $\ddot{\theta}_k = 0$ и имеет общее решение $\theta_k = c_k t + \alpha_k$, где c_k и α_k – произвольные постоянные. После подстановки этого решения в формулу (7.74) получим, что частоте $\omega_k = 0$ соответствует следующее слагаемое в общем решении:

$$\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{u}_k(c_k t + \alpha_k). \quad (7.76)$$

Замечание. Наличие нулевых частот векового уравнения (7.69) означает, что положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ линейной консервативной системы (7.66) неустойчиво. В этом случае решения линеаризованной системы непригодны для адекватного описания движений исходной нелинейной системы.

7.7. Вынужденные колебания линейных систем. Резонансы

Рассмотренные в предыдущем параграфе колебания консервативных систем в окрестности устойчивого положения равновесия называются *собственными* или *свободными* колебаниями системы.

Ниже рассматривается задача о движениях *линейной механической системы* под действием гармонической по времени вынуждающей силы. Уравнение движения такой системы записывается в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t. \quad (7.77)$$

Здесь $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – n -мерный вектор обобщенных координат системы, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – постоянные матрицы размера $n \times n$, ω – частота вынуждающей силы, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ – постоянный n -мерный вектор амплитуд вынуждающей силы.

Как известно из курса дифференциальных уравнений, общее решение неоднородной *линейной* системы (7.77) записывается в виде

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{\text{одн}}(t) + \tilde{\mathbf{q}}(t), \quad (7.78)$$

где $\mathbf{q}^{\text{одн}}(t)$ – *общее решение однородной системы*, а $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ – *частное решение неоднородной системы*.

Частное решение $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ системы (7.77) будем называть *вынужденными колебаниями* этой системы. В тех случаях, когда положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ однородной системы является асимптотически устойчивым, $\mathbf{q}^{\text{одн}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, частное решение $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ будет описывать *установившиеся движения* системы (7.77).

Для определения частного решения системы (7.77) удобно ее вещественную правую часть заменить комплексной функцией $\boldsymbol{\alpha} e^{i\omega t}$:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha} e^{i\omega t}. \quad (7.77^*)$$

Затем выделим из комплексного решения $\mathbf{q}^*(t)$ системы (7.77*) вещественную часть, которая в силу принципа суперпозиции для линейных систем и будет являться частным решением системы (7.77).

Частное решение системы (7.77*) будем искать в виде

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{u} e^{i\omega t}. \quad (7.79)$$

После подстановки этого решения в уравнения (7.77*) и сокращения на $e^{i\omega t}$ получим уравнение

$$(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}. \quad (7.80)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}; \quad \mathbf{W}(\omega) = (-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})^{-1}. \quad (7.81)$$

Матрица $\mathbf{W}(\omega)$, определяемая формулой (7.81), называется *матрицей частотных (амплитудно-фазовых) характеристик* линейной

системы (7.77). В общем случае элементы этой матрицы являются комплексными функциями частоты вынуждающей силы и могут быть записаны в виде $W_{jk} = |W_{jk}| e^{i\varphi_{jk}}$, где функции $|W_{jk}(\omega)|$ называются *амплитудными*, а функции $\varphi_{jk}(\omega) = \arg W_{jk}(\omega)$ – *фазовыми* характеристиками системы (рис. 7.6).

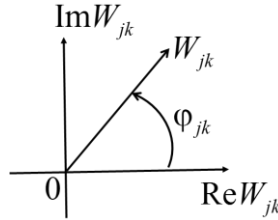


Рис. 7.6

После подстановки выражения для \mathbf{u} из (7.81) в формулу (7.79) получим

$$q_j^*(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_{jk} e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^n \alpha_k |W_{jk}| e^{i(\omega t + \varphi_{jk})}; \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (7.82)$$

Выделяя из этого комплексного решения вещественную часть, получим следующие формулы для компонент частного решения системы (7.77):

$$\tilde{q}_j(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{q}_{jk}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k |W_{jk}| \cos(\omega t + \varphi_{jk}); \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (7.83)$$

Из формул (7.83) следует, что вынужденные колебания системы (7.77) представляют собой гармонические колебания с частотой вынуждающей силы. При этом амплитудные характеристики $|W_{jk}(\omega)|$ являются множителями в выражениях для амплитуд вынужденных колебаний $\tilde{q}_{jk}(t)$ через амплитуды α_k вынуждающих сил Q_k , а фазовые характеристики $\varphi_{jk}(\omega)$ определяют сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и вынужденными колебаниями системы.

Согласно правилам вычисления элементов обратной матрицы элементы $W_{jk}(\omega)$ матрицы (7.81) выражаются формулами

$$W_{jk}(\omega) = \frac{\Delta_{jk}(\omega)}{\det(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})}, \quad (7.84)$$

где Δ_{jk} – алгебраическое дополнение элемента D_{jk} матрицы $\mathbf{D}(\omega) = (-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})$.

В формуле (7.84) числители представляют собой полиномы степени $2(n-1)$ по ω , а знаменатель – полином степени $2n$ по ω . Отсюда следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ все амплитудные характеристики системы стремятся к нулю, т.е. *линейные системы являются фильтром высоких частот*.

На рисунке 7.7 изображены графики амплитудной $|W(\omega)|$ и фазовой $\varphi(\omega)$ характеристик для системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = \alpha \cos \omega t$. Здесь сплошными линиями обозначены характеристики для случаев $\beta > 0$, а штриховыми – при $\beta = 0$ (для консервативной системы).

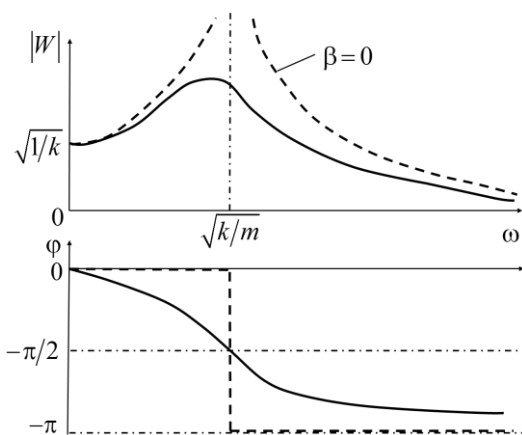


Рис. 7.7

Отметим, что если в системе (7.77) вынуждающая сила $\mathbf{Q}(t)$ не является гармонической, но является периодической функцией времени с периодом T , то ее можно представить рядом Фурье:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k \cos(k\omega t + \psi_k); \quad \omega = 2\pi/T. \quad (7.85)$$

В таких задачах, используя принцип суперпозиции для линейных систем, частное решение $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ системы (7.77) можно записать в виде суммы частных решений $\tilde{\mathbf{q}}_k(t)$ систем:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_k(t); \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (7.86)$$

При этом, учитывая, что линейные системы являются фильтром высоких частот, для приближенного описания вынужденных колебаний можно ограничиться конечным числом членов ряда $\tilde{\mathbf{q}}_k(t)$.

Резонансы в задаче о вынужденных колебаниях линейных систем. Частное решение (7.83) адекватно описывает вынужденные колебания линейных систем, если в каждый конечный момент времени это решение ограничено. В свою очередь, ограниченность решения (7.83) заведомо имеет место, если ограничены все амплитудные характеристики $|W_{jk}(\omega)|$. Случаи, когда при некотором $\omega = \omega^*$

некоторые из амплитудных характеристик $|W_{jk}(\omega^*)|$ обращаются в бесконечность, называются *резонансными*.

Из формулы (7.84) следует, что резонансные случаи в рассматриваемой задаче могут иметь место только на частотах ω^* , при которых знаменатель обращается в нуль, т.е.

$$\det(-\mathbf{A}\omega^{*2} + \mathbf{B}i\omega^* + \mathbf{C}) = 0. \quad (7.87)$$

Условие (7.87) означает, что среди корней характеристического полинома системы $\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0$ имеются чисто мнимые. Поэтому если положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ однородной системы асимптотически устойчиво, то резонансных случаев в такой системе быть не может.

В резонансных случаях решение вида (7.83) непригодно для описания вынужденных колебаний системы, т.е. частное решение в таких случаях следует искать в другом виде.

Для линейной консервативной системы уравнения (7.77) записываются в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t. \quad (7.88)$$

При этом резонансные частоты определяются из уравнения

$$\det(-\mathbf{A}\omega^{*2} + \mathbf{C}) = 0 \quad (7.89)$$

и совпадают с частотами собственных колебаний системы.

Для исследования вынужденных колебаний консервативной системы (7.88) в резонансных случаях перепишем эти уравнения в нормальных координатах $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)^T$. Преобразование к этим координатам задается формулой (7.74):

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \theta_k, \quad (7.90)$$

где \mathbf{u}_k – амплитудные векторы собственных колебаний системы.

Обозначим через $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)^T$ вектор обобщенных сил, соответствующий переменным $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)^T$. Формулы преобразования обобщенных сил при замене координат получим, записывая выражение для элементарной работы на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = d\mathbf{q}^T \mathbf{Q} = d\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Theta}. \quad (7.91)$$

Отсюда, учитывая вытекающее из (7.90) равенство $d\mathbf{q}^T = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{U}^T$, будем иметь $d\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Theta} = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{U}^T \mathbf{Q}$. Поскольку последнее равенство должно выполняться для любых векторов $d\boldsymbol{\theta}$ из n -мерного пространства, то из него следует искомая формула преобразования обобщенных сил:

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \Rightarrow \Theta_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{Q}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.92)$$

В итоге получаем, что в нормальных координатах система (7.88) распадается на n независимых уравнений следующего вида:

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{Q}(t) = \beta_k \cos \omega t; \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{a}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.93)$$

где ω_k – частоты собственных колебаний системы.

Для консервативной системы частотные характеристики являются вещественными функциями частоты вынуждающей силы. В нормальных координатах матрица (7.81) является диагональной, и в нерезонансном случае (когда частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот системы) частные решения по каждой из нормальных координат выражаются формулами

$$\tilde{\theta}_k = W_{kk} \beta_k \cos \omega t = \frac{\beta_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos \omega t; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.94)$$

В исходных координатах это решение записываются в виде

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \tilde{\theta}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (7.95)$$

Рассмотрим теперь резонансный случай. Пусть частота вынуждающей силы совпадает с одной из собственных частот системы, например, $\omega = \omega_s$. Тогда уравнения (7.93) примут вид

$$\ddot{\theta}_s + \omega_s^2 \theta_s = \beta_s \cos \omega_s t, \quad (7.96)$$

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = \beta_k \cos \omega_s t; \quad k \neq s. \quad (7.97)$$

В этом случае для переменных θ_k , где $k \neq s$, частные решения описываются аналогичными (7.95) формулами

$$\tilde{\theta}_k = \frac{\beta_k}{\omega_k^2 - \omega_s^2} \cos \omega_s t; \quad k \neq s. \quad (7.98)$$

Для переменной θ_s частное решение уравнения (7.96), адекватно описывающее вынужденные колебания, записывается в виде

$$\tilde{\theta}_s = \frac{\beta_s t}{2\omega_s} \sin \omega_s t. \quad (7.99)$$

Это решение ограничено при любом ограниченном значении t и представляет собой колебание, амплитуда которого линейно растет со временем.

В исходных координатах вынужденные резонансные колебания консервативной системы (7.88) записываются в виде

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{k \neq s}^n \mathbf{u}_k \frac{\mathbf{u}_k^T \boldsymbol{\alpha}}{\omega_s^2 - \omega_k^2} \cos \omega_s t + \mathbf{u}_s \frac{\mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\alpha}}{2\omega_s} t \sin \omega_s t. \quad (7.100)$$

В заключение отметим, что совпадение частоты вынуждающей силы с одной из собственных частот консервативной системы необязательно приводит к явлению *резонанса*, т.е. к неограниченному возрастанию со временем амплитуды вынужденных колебаний. Из уравнения (7.96) и формулы (7.100) следует, что система *не будет резонировать* на собственной частоте ω_s , если $\beta_s = \mathbf{u}_s^T \boldsymbol{\alpha} = 0$, т.е. когда направление вынуждающей силы ортогонально амплитудному вектору \mathbf{u}_s собственного колебания системы, соответствующему частоте ω_s . Из уравнений (7.93) следует также, что система будет резонировать *только* на частоте ω_k , если $\boldsymbol{\alpha} = \lambda \mathbf{A} \mathbf{u}_k$. В этом случае в силу свойства (7.71) вектор вынуждающей силы ортогонален всем амплитудным векторам собственных колебаний, частоты которых отличны от ω_k .

7.8. О бифуркациях в механических системах

Рассмотрим стационарную (склерономную) механическую систему, в которой кинетическая энергия $T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}/2$ является строго положительно-определенной квадратичной формой обобщенных скоростей, а вектор обобщенных сил $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \alpha)$ зависит от скалярного параметра α . Положениями равновесия \mathbf{q}^0 такой системы являются решения векторного уравнения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \alpha) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \alpha) = \mathbf{0}. \quad (7.101)$$

Функции $\mathbf{q}^0(\alpha)$, описывающие зависимость положений равновесия от параметра α , называются *кривыми равновесия* системы.

Если в положении равновесия $\mathbf{q}^0(\alpha)$ выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \neq 0,$$

то по теореме о неявных функциях в окрестности значения α существует единственное решение $\Delta \mathbf{q}^0(\Delta \alpha)$, которое в первом приближении описывается формулой

$$\Delta \mathbf{q}^0 = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \right)^{-1} \Delta \alpha. \quad (7.102)$$

Если же в положении равновесия $\mathbf{q}^0(\alpha^*)$ матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q}^T$ вырождена, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \alpha^*)}{\partial \mathbf{q}^T} \right) = 0, \quad (7.103)$$

то значение α^* называется *точкой бифуркации (точкой ветвления)* положений равновесия. В окрестностях точек бифуркации решение $\Delta \mathbf{q}^0(\Delta \alpha)$ свойством единственности не обладает.

Рассмотрим основные типы бифуркаций на примере консервативной системы с одной степенью свободы с потенциальной энергией $\Pi(q, \alpha)$, зависящей от параметра α . Положениями равновесия $q^0(\alpha)$ системы являются решения уравнения

$$f(q, \alpha) = -\Pi_q(q, \alpha) = -\frac{\partial \Pi(q, \alpha)}{\partial q} = 0, \quad (7.104)$$

а точки бифуркаций α^* определяются условием

$$f_q = \frac{\partial f(q, \alpha^*)}{\partial q} = -\Pi_{qq}(q, \alpha^*) = 0. \quad (7.105)$$

Для исследования решений уравнения (7.104) в окрестности точки α^* запишем *уравнение разветвления*, которое получается разложением левой части уравнения (7.104) в ряд по степеням $\varepsilon = \Delta \alpha = \alpha - \alpha^*$ и $x = \Delta q = q^0(\alpha) - q^0(\alpha^*)$:

$$f_q x + f_\alpha \varepsilon + (f_{qq} x^2 + 2f_{q\alpha} x\varepsilon + f_{\alpha\alpha} \varepsilon^2) / 2 + \\ + (f_{qqq} x^3 + 3f_{qq\alpha} x^2 \varepsilon + 3f_{q\alpha\alpha} x \varepsilon^2 + f_{\alpha\alpha\alpha} \varepsilon^3) / 6 + \dots = 0. \quad (7.106)$$

Здесь многоточием обозначены члены выше третьего порядка, а в точках бифуркаций $f_q = 0$.

Точки бифуркаций положений равновесия в рассматриваемой задаче подразделяются на несколько типов в зависимости от поведения решений $x(\varepsilon)$ уравнения (7.106) в окрестности $\varepsilon = 0$. В свою очередь, поведение указанных решений зависит от значений коэффициентов в разложении (7.106).

Рассмотрим основные (наиболее часто встречающиеся) типы бифуркаций в рассматриваемой задаче.

1) Бифуркация «*складка*». Этот тип бифуркаций реализуется при следующих условиях:

$$f_q = 0, \quad f_{qq} \neq 0, \quad f_\alpha \neq 0. \quad (7.107)$$

В этом случае решение уравнения (7.106) приближенно описывается формулой

$$\varepsilon = -\frac{f_{qq}}{2f_\alpha} x^2. \quad (7.108)$$

На рис. 7.8 бифуркациям типа «*складка*» отвечают точки M_1 .

2) Бифуркация «*смена устойчивости*» реализуется при следующих условиях:

$$f_q = 0, \quad f_{qq} \neq 0, \quad f_\alpha = 0, \quad D = f_{q\alpha}^2 - f_{qq} f_{\alpha\alpha} > 0. \quad (7.109)$$

В этом случае решение уравнения (7.106) с точностью до членов более высокого порядка малости записывается в виде

$$x = \frac{-f_{q\alpha} \pm \sqrt{f_{q\alpha}^2 - f_{qq} f_{\alpha\alpha}}}{f_{qq}} \varepsilon. \quad (7.110)$$

Эти типы бифуркаций отмечены на рис. 7.8 точками M_2 .

3) Бифуркация «*вилка*» реализуется при следующих условиях:

$$f_q = 0, \quad f_{qq} = 0, \quad f_\alpha = 0, \quad f_{qqq} f_{q\alpha} \neq 0. \quad (7.111)$$

Решения уравнения (7.106) в этом случае приближенно описываются формулами

$$\text{а) } x = -\frac{f_{\alpha\alpha}}{2f_{q\alpha}}\varepsilon, \quad \text{б) } \varepsilon = -\frac{f_{qqq}}{6f_{q\alpha}}x^2, \quad (7.112)$$

а бифуркации этого типа обозначены на рис. 7.8 точками M_3 .

Изображенная на рис. 7.8 кривая равновесий, описываемая уравнением $f(q, \alpha) = 0$, разделяет плоскость на области $f > 0$ и $f < 0$. По заданному расположению этих областей можно определить характер устойчивости положений равновесия рассматриваемой консервативной системы на каждой из ветвей кривой равновесий.

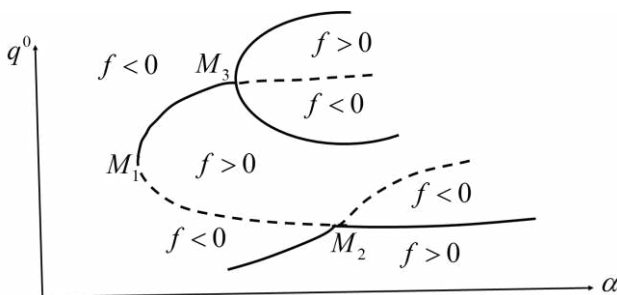


Рис. 7.8. Кривая равновесий $f(q, \alpha) = 0$

Действительно, характер устойчивости определяется знаком второй производной $\Pi_{qq}(q, \alpha)$, которая в силу формулы (7.105) равна $-f_q$. Отсюда следует, что если на рис. 7.8 область $f < 0$ лежит над ветвью кривой равновесий, то $\Pi_{qq} = -f_q > 0$, т.е. эта ветвь состоит из устойчивых равновесий. Если же область $f < 0$ лежит под ветвью кривой равновесий, то $\Pi_{qq} < 0$, т.е. все положения равновесия из этой ветви неустойчивы. На рис. 7.8 ветви устойчивых равновесий изображены сплошными линиями, а для неустойчивых – штриховыми линиями.

Кривые равновесий, в которых для каждой ветви указан характер устойчивости, называются *бифуркационными диаграммами*. Рисунок 7.8 является иллюстрацией такой диаграммы.

Гамильтонова механика

8.1. Гамильтоновы системы

Рассмотрим систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ фазовых переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} , где

$$\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Переменные \mathbf{q} и \mathbf{p} будем называть обобщенными координатами и обобщенными импульсами соответственно. Предполагается, что система разрешима относительно производных, т.е. представима в нормальной форме Коши:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (8.1)$$

Обозначим через \mathbf{x} $2n$ -мерный вектор-столбец фазовых переменных $\mathbf{x}^T = (\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T)$, а через \mathbf{X} – $2n$ -мерный вектор-столбец правых частей системы (8.1) $\mathbf{X}^T = (\mathbf{Q}^T, \mathbf{P}^T)$. Тогда система (8.1) запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (8.2)$$

Определение. Система дифференциальных уравнений четного порядка (8.1) называется *гамильтоновой*, если существует скалярная функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, с помощью которой система представима в следующей *канонической* форме:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \text{т.е.} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad k=1, \dots, n. \quad (8.3)$$

Функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы, а сами уравнения (8.3) – *каноническими уравнениями* Гамильтона. Переменные q_k и p_k называются *сопряженными* друг к другу гамильтоновыми переменными.

Из приведенного определения следует, что гамильтониан системы определен с точностью до аддитивной функции времени.

Для записи уравнений (8.3) в терминах фазового вектора \mathbf{x} используется следующая матрица, называемая *симплектической единицей*:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Здесь \mathbf{E}_n – единичная матрица порядка n .

Матрица \mathbf{J} обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}\mathbf{J}^T = \mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (8.5)$$

С помощью матрицы (8.4) канонические уравнения (8.3) записываются в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (8.6)$$

Условия гамильтоновости системы определяются с помощью теоремы об *условиях интегрируемости* (см. Приложение 1). В силу этой теоремы для гамильтоновости системы (8.2) необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{J} \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}^T$ была симметрической, т.е.

$$\mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}^T} + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \equiv 0. \quad (8.7)$$

Для системы, записанной в форме (8.1), критерий гамильтоновости описывается следующими тремя матричными тождествами:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}^T} \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}^T} \equiv \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}^T} \equiv -\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{q}}.$$

Канонические уравнения Гамильтона представляют особый интерес в механике в связи с тем, что этими уравнениями можно описать движения *лагранжевых* систем, в частности, голономных систем в случаях, когда действующие силы имеют обычный или обобщенный потенциал. Движения таких систем описываются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (8.8)$$

которые представляют собой систему из n уравнений второго порядка для n -мерного вектора обобщенных координат \mathbf{q} .

Переход от уравнений Лагранжа (8.8) к уравнениям Гамильтона (8.3) осуществляется следующей процедурой.

1. С помощью преобразования Лежандра

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (8.9)$$

определяется вектор *обобщенных импульсов* \mathbf{p} и связь между *переменными Гамильтона* $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ и *переменными Лагранжа* $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$. При условии

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) \neq 0, \quad (8.10)$$

которое выполняется для всех *натуральных* систем, уравнения (8.9) разрешимы относительно скоростей $\dot{\mathbf{q}}$, т.е. имеется возможность выразить в явном виде обобщенные скорости через переменные Гамильтона $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (8.11)$$

2. *Функция Гамильтона* определяется формулой

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]_{(8.11)} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}, t). \quad (8.12)$$

Здесь необходимо иметь в виду, что по определению функция Гамильтона есть функция гамильтоновых переменных, т.е. в формуле (8.12) обобщенные скорости должны быть выражены через гамильтоновы переменные соотношениями (8.11).

Функция (8.12), выраженная через переменные Лагранжа, представляет собой *обобщенную энергию* системы, а для склерономной системы – полную энергию $E = T + \Pi$ (см. раздел 6.5).

Учитывая правила дифференцирования сложных функций и формулу (8.9), получим для частных производных от функции (8.12) по переменным $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ следующие выражения:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}. \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^T}{\partial t} \mathbf{p} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8.15)$$

Из (8.14) следует, что уравнения (8.11) записываются с помощью функции (8.12) в виде $\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ и совпадают с первой группой канонических уравнений Гамильтона (8.3). В свою очередь, учитывая определение (8.9) и равенства (8.13), получаем, что уравнения Лагранжа (8.8) принимают в переменных Гамильтона следующий вид: $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}$, т.е. совпадают со второй группой уравнений (8.3).

Таким образом, преобразование Лежандра (8.9), определяя функцию Гамильтона формулой (8.12), уравнения Лагранжа (8.8) приводятся к форме канонических уравнений Гамильтона (8.3).

Преобразование Лежандра (8.9) представляет собой один из возможных вариантов преобразования уравнений второго порядка в уравнения первого порядка. Достоинство этого преобразования состоит в том, что в результате получаются уравнения, разрешенные относительно производных, и эти уравнения, как и уравнения Лагранжа (8.8), определяются одной функцией – в данном случае гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

К уравнениям Гамильтона (но уже не каноническим) приводятся уравнения Лагранжа и в случаях, когда имеются непотенциальные составляющие \mathbf{Q}^* обобщенных сил \mathbf{Q} . Полагая, что потенциальные составляющие обобщенных сил учтены в лагранжиане $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, получим уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (8.16)$$

Используя преобразование Лежандра (8.9) и определяя функцию $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ формулой (8.12), получим соотношения (8.11), (8.13), (8.14), на основании которых уравнения (8.16) запишутся в переменных Гамильтона следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (8.17)$$

Здесь \mathbf{F}^* – вектор непотенциальных обобщенных сил \mathbf{Q}^* , выраженный через гамильтоновы переменные. Эти $2n$ уравнений первого порядка, так же как и уравнения (8.3), имеют нормальную форму Коши, но не являются каноническими.

Переход от уравнений Гамильтона (8.17) к уравнениям Лагранжа осуществляется следующей процедурой.

1. Из первой группы уравнений (8.17)

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (8.18)$$

при условии

$$\det \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}^T} \right) \neq 0 \quad (8.19)$$

выражаются обобщенные импульсы через переменные Лагранжа:

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (8.20)$$

2. Функция Лагранжа определяется на основании (8.12) формулой

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)]_{(8.20)} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} - H(\mathbf{q}, \mathbf{f}, t), \quad (8.21)$$

в которой обобщенные импульсы выражены с помощью функций (8.20) через переменные Лагранжа.

Вычисляя частную производную от обеих частей равенства (8.21) по переменной $\dot{\mathbf{q}}$, получим при учете уравнений (8.18) следующее соотношение:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p}.$$

Подставляя его во вторую группу уравнений (8.17) и учитывая равенства (8.13), приходим к уравнениям Лагранжа вида (8.16):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t).$$

Здесь \mathbf{Q}^* есть вектор \mathbf{F}^* , выраженный через лагранжевы переменные. Описанной процедурой канонические уравнения Гамильтона (8.3) преобразуются в уравнения Лагранжа (8.8).

Отметим, что для произвольной гамильтоновой системы условие (8.19) может не выполняться. В таких случаях переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Лагранжа невозможен.

Дальнейшее изложение будет посвящено в основном изучению гамильтоновых систем, т.е. систем, описываемых каноническими уравнениями Гамильтона (8.3).

8.2. Скобки Пуассона

Скобки Пуассона являют собой пример вспомогательных функций, используемых для компактной записи громоздких выражений.

Для двух скалярных функций $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и $f_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ скобка Пуассона (f_1, f_2) определяется следующим скалярным выражением:

$$(f_1, f_2) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial q_s} \frac{\partial f_2}{\partial p_s} - \frac{\partial f_1}{\partial p_s} \frac{\partial f_2}{\partial q_s} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}. \quad (8.22)$$

Здесь \mathbf{x} — $2n$ -мерный вектор-столбец переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} , а \mathbf{J} — симплектическая матрица (8.4).

Если заданы m функций f_1, f_2, \dots, f_m , то все скобки Пуассона (f_j, φ) функций f_j с функцией φ можно записать в виде вектора-столбца следующим образом:

$$(\mathbf{f}, \varphi) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} (f_1, \varphi) \\ (f_2, \varphi) \\ \vdots \\ (f_m, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Здесь через \mathbf{f} обозначен m -мерный вектор-столбец, составленный из функций f_1, f_2, \dots, f_m .

В свою очередь, все скобки Пуассона (f_j, f_k) можно записать одним выражением в виде следующей кососимметрической матрицы размера $m \times m$:

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_m) \\ (f_2, f_1) & 0 & \dots & (f_2, f_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_m, f_1) & (f_m, f_2) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Косая симметрия матрицы Φ ($\Phi^T = -\Phi$) следует из приведенных ниже свойств скобок Пуассона.

Свойства скобок Пуассона:

$$1^\circ. (f_j, f_k) = -(f_k, f_j);$$

$$2^\circ. (f_j, c(t)f_k) = c(t)(f_j, f_k);$$

$$3^\circ. (f_j + f_k, f_s) = (f_j, f_s) + (f_k, f_s);$$

$$4^\circ. \frac{\partial (f_j, f_k)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial t}, f_k \right) + \left(f_j, \frac{\partial f_k}{\partial t} \right);$$

$$5^\circ. ((f_1, f_2), f_3) + ((f_2, f_3), f_1) + ((f_3, f_1), f_2) = 0.$$

Свойства 1°– 3° следуют непосредственно из определения (8.22), а для доказательства свойства 4° достаточно учесть перестановочность операций дифференцирования по \mathbf{x} и t .

Докажем свойство 5°, называемое *тождеством Пуассона*. Вычисляя по определению (8.22) левую часть равенства 5°, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} = \\ & = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J}^T \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}} + \\ & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J}^T \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} + \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J}^T \frac{\partial^2 f_3}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Каждое из шести слагаемых в этом выражении есть скаляр, и, следовательно, при транспонировании не меняется. Заменяв каждое четное слагаемое его транспонированным значением и учитывая, что $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ и что матрица вторых производных каждой функции симметрическая, получим тождество 5°.

8.3. Первые интегралы гамильтоновых систем

Первым интегралом системы дифференциальных уравнений первого порядка (8.2) называется функция $f(\mathbf{x}, t)$ фазовых переменных и времени, определенная в той же области, что и сама система, и сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

Тот факт, что функция $f(\mathbf{x}, t)$ является первым интегралом системы, описывается уравнением $f(\mathbf{x}, t) = c$, где c – постоянная первого интеграла, значение которой определяется начальными условиями движения системы.

Первые интегралы отражают законы сохранения, представляющие самостоятельный интерес в механике. Кроме того, наличие первых интегралов позволяет понизить порядок системы, а в некоторых случаях (при достаточном количестве первых интегралов) проинтегрировать систему, т.е. получить общее решение системы в конечной форме.

Критерий первого интеграла вытекает непосредственно из определения. Функция $f(\mathbf{x}, t)$ будет первым интегралом системы (8.2) тогда и только тогда, когда ее полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений (8.2), равна нулю, т.е.

$$\dot{f}|_{(8.2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{(8.2)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0. \quad (8.25)$$

Для гамильтоновой системы критерий первого интеграла принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial t} = (f, H) + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0. \quad (8.26)$$

Здесь (f, H) – скобка Пуассона функций f и H . Для векторных функций \mathbf{f} этот критерий записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = (\mathbf{f}, H) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \equiv 0. \quad (8.26^*)$$

Теорема Якоби–Пуассона. Если $f_1(\mathbf{x}, t)$ и $f_2(\mathbf{x}, t)$ – первые интегралы некоторой гамильтоновой системы, то их скобка Пуассона (f_1, f_2) также является первым интегралом этой системы.

Доказательство. По условиям теоремы функции f_1 и f_2 удовлетворяют критерию (8.26), т.е.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \equiv -(f_1, H) = (H, f_1), \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} \equiv -(f_2, H).$$

Учитывая эти равенства и используя свойства 1°, 4° и 5° скобок Пуассона, получим

$$\begin{aligned} ((f_1, f_2), H) + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial t} &= ((f_1, f_2), H) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}, f_1\right) = \\ &= ((f_1, f_2), H) + ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция (f_1, f_2) тоже удовлетворяет критерию (8.26) первого интеграла. *Теорема доказана.*

На первый взгляд, может показаться, что при наличии у гамильтоновой системы двух первых интегралов с помощью теоремы Якоби–Пуассона можно «тиражировать» новые первые интегралы в виде функций (f_1, f_2) , $(f_1, (f_1, f_2))$ и т.д. Однако в подавляющем большинстве случаев такие функции оказываются либо зависимыми по отношению к исходным функциям, либо тождественными константами.

Циклические первые интегралы. Переменная называется *циклической*, если она не входит в выражение для функции Гамильтона. В силу канонических уравнений Гамильтона (8.3) каждой циклической координате q_k соответствует *циклический* первый интеграл $p_k = \beta_k = \text{const}$ (сохраняется обобщенный импульс p_k), а каждому

циклическому импульсу p_k – первый интеграл $q_k = \alpha_k = \text{const}$ (сохраняется обобщенная координата q_k).

Если циклической переменной является время t , т.е. $\partial H / \partial t \equiv 0$ (такие системы называются *обобщенно консервативными*), то в этом случае первым интегралом системы будет функция Гамильтона:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = \text{const}. \quad (8.27)$$

Этот интеграл называется *обобщенным интегралом энергии*. Его наличие следует из критерия (8.26). Ввиду того, что $(H, H) \equiv 0$, условие первого интеграла для функции H имеет вид $\partial H / \partial t \equiv 0$.

Отметим, что в силу соотношений (8.13) и (8.15) гамильтониан системы не будет зависеть от координаты q_k или времени t , если не зависит от координаты q_k или времени лагранжиан, и наоборот.

Другие примеры первых интегралов. Переходя к рассмотрению других примеров первых интегралов гамильтоновых систем, заметим, что общих методов поиска первых интегралов не существует. Поэтому в большинстве случаев применяется «метод угадывания», т.е. делается предположение, что некая функция является первым интегралом системы, а потом с помощью критерия (8.26) это предположение доказывается или опровергается. В приведенных ниже примерах наличие первых интегралов обусловлено специальной структурой функции Гамильтона.

1°. Гамильтониан с *отделимыми парами сопряженных переменных*. Сопряженные переменные q_k, p_k называются *отделимыми*, если гамильтониан системы имеет следующую структуру:

$$H = H[q_1, p_1, \dots, q_{k-1}, p_{k-1}, f_k(q_k, p_k), q_{k+1}, p_{k+1}, \dots, q_n, p_n, t]. \quad (8.28)$$

Для такой системы скобка Пуассона (f_k, H) равна нулю:

$$(f_k, H) = \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f_k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial p_k} - \frac{\partial f_k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \equiv 0.$$

Поэтому в силу критерия (8.26) система имеет первый интеграл:

$$f_k(q_k, p_k) = c_k. \quad (8.29)$$

Отметим, что первые интегралы (8.29) представляют собой обобщение циклических интегралов, существующих в случаях, когда циклической переменной является обобщенная координата q_k или обобщенный импульс p_k . В первом случае $f_k = p_k$, а во втором случае $f_k = q_k$.

2°. Гамильтониан со структурой *вложенных функций* («матрешка»). Рассмотрим гамильтонову систему, для которой функция Гамильтона выражается в виде

$$\begin{aligned} H &= H(f_m, q_{m+1}, p_{m+1}, \dots, q_n, p_n, t) = H(f_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t); \\ f_k &= f_k(f_{k-1}, q_k, p_k); \quad k = 2, \dots, m, \quad f_1 = f_1(q_1, p_1). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Здесь через $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ обозначены $(n-m)$ -мерные векторы неотделимых переменных q_j, p_j ($j = m+1, \dots, n$).

Вычисляя скобки Пуассона (f_k, H) для всех $k = 1, \dots, m$, получим

$$\begin{aligned} (f_k, H) &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_k}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу критерия (8.26) следует, что система имеет первые интегралы:

$$f_1(q_1, p_1) = c_1, \quad f_k(f_{k-1}, q_k, p_k) = c_k; \quad k = 2, \dots, m. \quad (8.31)$$

3°. Гамильтониан с *отделимой группой сопряженных переменных*. Обобщением случаев 1° и 2° является следующая структура гамильтониана:

$$H = H[f(q_1, p_1, \dots, q_m, p_m), \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t]. \quad (8.32)$$

Здесь $2 \leq m \leq n$, f – произвольная функция своих переменных, через $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ обозначены $(n-m)$ -мерные векторы неотделимых переменных q_j, p_j ($j = m+1, \dots, n$). Для такой системы получаем

$$(f, H) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_j} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция f является первым интегралом системы:

$$f(q_1, p_1, \dots, q_m, p_m) = c. \quad (8.33)$$

В зависимости от структуры функция f , фигурирующей в гамильтониане (8.32), система может иметь помимо (8.33) и другие первые интегралы. Например, если функция f имеет структуру функции f_m (8.30), то, как было показано выше, система имеет m первых интегралов. Аналогичным свойством обладают системы с гамильтонианом следующего вида:

$$H = H(f, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t); \quad f = \frac{\sum_{k=1}^m \varphi_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^m \psi_k(q_k, p_k)}. \quad (8.34)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что в этом случае помимо первого интеграла

$$f = c \quad (8.35)$$

система имеет m следующих первых интегралов:

$$f_k(q_k, p_k) = \varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) = c_k; \quad k = 1, \dots, m. \quad (8.36)$$

Нетрудно проверить, что в совокупности первые интегралы (8.35), (8.36) зависимы. Кроме того, поскольку уравнение (8.35) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^m f_k(q_k, p_k) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) = 0,$$

то постоянные c_k тоже зависимы между собой:

$$\sum_{k=1}^m c_k = 0. \quad (8.37)$$

В рассматриваемом примере в качестве независимых первых интегралов следует взять m функций f_k (8.36), а для того, чтобы в этих уравнениях фигурировали только *произвольные* постоянные, исключить c_m , используя равенство (8.37). Тогда независимые первые интегралы запишутся в виде

$$\begin{aligned}\varphi_k(q_k, p_k) - c\psi_k(q_k, p_k) &= c_k; \quad k=1, \dots, m-1, \\ \varphi_m(q_m, p_m) - c\psi_m(q_m, p_m) &= -\sum_{k=1}^{m-1} c_k,\end{aligned}\tag{8.38}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c$ будут произвольными постоянными.

8.4. Использование первых интегралов в задачах интегрирования уравнений движения

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = X_k(x_1, \dots, x_N, t); \quad k=1, \dots, N, \tag{8.39}$$

описывающая движение некоторой механической системы, имеет m независимых первых интегралов:

$$f_j(x_1, \dots, x_N, t) = c_j; \quad j=1, \dots, m, \tag{8.40}$$

где c_j – произвольные постоянные первых интегралов. Тогда из уравнений (8.40) можно в явном виде выразить m переменных x_1, \dots, x_m через остальные переменные x_{m+1}, \dots, x_N и время t :

$$x_s = \varphi_s(x_{m+1}, \dots, x_N, t, c_1, \dots, c_m); \quad s=1, \dots, m. \tag{8.41}$$

Подставляя эти выражения в последние $N-m$ уравнений системы (8.39), получим систему, которая имеет порядок $N-m$:

$$\dot{x}_k = X_k^*(x_{m+1}, \dots, x_N, c_1, \dots, c_m, t); \quad k=m+1, \dots, N. \tag{8.42}$$

Таким образом, каждый первый интеграл позволяет понизить порядок системы по крайней мере на одну единицу. Если будет найдено общее решение системы (8.42), то оно будет иметь вид

$$x_k = \psi_k(c_1, \dots, c_N, t); \quad k=m+1, \dots, N, \tag{8.43}$$

где c_1, \dots, c_N – произвольные постоянные. Тогда общее решение для переменных x_1, \dots, x_m находится подстановкой решения (8.43) в формулы (8.41).

Если система (8.39) имеет полный набор независимых первых интегралов, т.е. $m = N$, то явный вид ее общего решения определяется разрешением системы уравнений (8.40) относительно x_1, \dots, x_N .

Если система (8.39) *автономна*, т.е. правые части не зависят явно от времени, и имеет $N-1$ *автономных* (не зависящих от времени) первых интегралов, то в качестве (8.42) получим одно уравнение следующего вида:

$$\dot{x}_N = X_N^*(x_N, c_1, \dots, c_{N-1}).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными интегрируется. Его решение $x_N = \psi_N(c_1, \dots, c_{N-1}, t)$ находится из уравнения

$$F(x_N, c_1, \dots, c_{N-1}) = \int \frac{dx_N}{X_N^*(x_N, c_1, \dots, c_{N-1})} = t + c_N,$$

которое можно трактовать как неавтономный первый интеграл системы.

В таких случаях, когда построение общего решения системы дифференциальных уравнений сводится к вычислению первообразных от известных функций и обращению функций, говорят, что система *интегрируется в квадратурах*. Использование термина *в квадратурах* объясняется тем, что раньше квадратурами называли неопределенные интегралы (первообразные).

Исследуем теперь подробно, что дают рассмотренные в разделе 8.3 первые интегралы для понижения порядка гамильтоновой системы. Начнем с циклических первых интегралов и покажем, что каждый из них позволяет понизить порядок системы не на одну, а на две единицы. Пусть q_1, \dots, q_m – циклические координаты, т.е.

$$H = H(p_1, \dots, p_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t), \quad (8.44)$$

где через $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ обозначены $(n-m)$ -мерные векторы нециклических переменных q_j, p_j ($j = m+1, \dots, n$). Для функции Гамильтона с такой

структурой уравнения для переменных $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ при учете первых интегралов $p_k = c_k$ ($k=1, \dots, m$) записываются с помощью функции

$$\tilde{H} = H(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t) \quad (8.45)$$

в канонической форме

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{F}}(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t), \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{G}}(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t) \quad (8.46)$$

и образуют замкнутую систему порядка $2n-2m$. Если будет найдено общее решение системы (8.46), то оно будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{x}}(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{c}}, t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{y}}(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{c}}, t), \quad (8.47)$$

где $\tilde{\mathbf{c}}$ – $(2n-2m)$ -мерный вектор произвольных постоянных. После подстановки этого решения в функцию (8.45) циклические координаты q_1, \dots, q_m определяются из уравнений

$$\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k = \partial \tilde{H} / \partial c_k = F_k(c_1, \dots, c_m, \tilde{\mathbf{c}}, t)$$

с помощью квадратур

$$q_k = \int F_k dt + c_{m+k}; \quad k=1, \dots, m.$$

Таким образом, при наличии m циклических первых интегралов задача поиска общего решения гамильтоновой системы сводится к интегрированию системы уравнений (8.46), порядок которой на $2m$ единиц меньше, чем порядок исходной системы. Кроме того, при понижении порядка системы с использованием циклических первых интегралов сохраняется свойство гамильтоновости системы.

Если функция Гамильтона не зависит от всех обобщенных координат, т.е. $H = H(p_1, \dots, p_n, t)$, то система интегрируется, а ее общее решение записывается в виде

$$p_k = c_k, \quad q_k = \int \frac{\partial \tilde{H}}{\partial c_k} dt + c_{n+k}; \quad k=1, \dots, n.$$

Аналогичным образом показывается, что при наличии циклических импульсов p_k каждый циклический интеграл $q_k = c_k$ позволяет понизить порядок системы на две единицы.

8.5. Уравнения Уиттекера

Обобщенный интеграл энергии

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h \quad (8.48)$$

тоже является циклическим первым интегралом и позволяет понизить порядок системы на две единицы. В этом случае в процедуре понижения порядка используется свойство автономности системы, которое позволяет исключить время t и выбрать в качестве независимой переменной, играющей роль времени, одну из обобщенных координат. Полагая, что $\partial H / \partial p_1 \neq 0$, выразим из уравнения (8.48) обобщенный импульс p_1 :

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h), \quad (8.49)$$

а обобщенную координату q_1 выберем в качестве независимой переменной. Из уравнений Гамильтона выразим производные от переменных q_k, p_k ($k = 2, \dots, n$) по координате q_1 :

$$\frac{dq_k}{dq_1} = \frac{\partial H / \partial p_k}{\partial H / \partial p_1}, \quad \frac{dp_k}{dq_1} = -\frac{\partial H / \partial q_k}{\partial H / \partial p_1}. \quad (8.50)$$

Учитывая, что подстановка выражения (8.49) в уравнение (8.48) обращает это уравнение в тождество

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, -K, p_2, \dots, p_n, h) \equiv h,$$

и дифференцируя это тождество по переменным q_k, p_k ($k = 2, \dots, n$), получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_k} = 0.$$

С учетом этих равенств уравнения (8.50) приводятся к виду

$$\frac{dq_k}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_k}; \quad k = 2, \dots, n. \quad (8.51)$$

Уравнения (8.51) носят название *уравнений Уиттекера*. Они образуют замкнутую систему из $2n-2$ уравнений для $2n-2$ неизвестных q_k, p_k ($k = 2, \dots, n$), а координата q_1 играет роль времени. Уравнения (8.51) имеют гамильтонову форму (8.3), а в роли функции Гамильтона выступает функция K (8.49), называемая *функцией Уиттекера*.

Общее решение системы (8.51) будет иметь вид

$$q_k = x_k(q_1, c_1, \dots, c_{2n-2}, h), \quad p_k = y_k(q_1, c_1, \dots, c_{2n-2}, h); \quad k = 2, \dots, n, \quad (8.52)$$

а та часть решения, которой определяется поведение координат, будет описывать множество траекторий в координатном пространстве системы.

Если общее решение (8.52) системы (8.51) найдено, то закон движения исходной гамильтоновой системы в зависимости от времени определяется следующей процедурой. Из уравнения Гамильтона $\dot{q}_1 = \partial H / \partial p_1$ после подстановки в его правую часть выражений (8.49) и (8.52) получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{q}_1 = F(q_1, c_1, \dots, c_{2n-2}, h),$$

решение которого $q_1 = x_1(c_1, \dots, c_{2n-2}, h, t)$ определяется квадратурой

$$\int \frac{dq_1}{F(q_1, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}.$$

После подстановки этого решения в (8.52) находится зависимость переменных q_k, p_k ($k = 2, \dots, n$) от времени, а затем по формуле (8.49) определяется зависимость p_1 от времени.

Процедура понижения порядка гамильтоновой системы для рассмотренных в разделе 8.3 случаев $1^\circ-3^\circ$, где система имеет первые интегралы вида (8.29), (8.31) или (8.38), описывается той же схемой, что и изложенная выше для циклических первых интегралов. В каждом из этих случаев каждый первый интеграл позволяет понизить

порядок системы на две единицы, а если гамильтонова система порядка $2n$ имеет n таких первых интегралов, то она интегрируется в квадратурах.

8.6. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

Нижеследующая *теорема Лиувилля* охватывает все рассмотренные выше примеры как частные случаи и дает *достаточные условия интегрируемости* гамильтоновых систем. Прежде чем приступить к формулировке этой теоремы, дадим определение инволюции.

Функции $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \dots, f_m(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ образуют систему в инволюции, если все их скобки Пуассона (f_j, f_k) ($j, k = 1, \dots, m$) тождественно равны нулю.

Обозначив через \mathbf{f} m -мерный вектор-столбец, составленный из функций f_1, \dots, f_m , условие их инволюции можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (8.53)$$

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система порядка $2n$ имеет n независимых первых интегралов в инволюции, то она интегрируется в квадратурах.*

Доказательство. Запишем уравнения, определяющие указанные в теореме первые интегралы, в векторном виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mathbf{a}) = 0. \quad (8.54)$$

Здесь \mathbf{a} — n -мерный вектор произвольных постоянных. Значения этих постоянных однозначно определяются значениями $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$. Поэтому уравнение (8.70) разрешимо относительно \mathbf{a} , т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a}^T) \neq 0. \quad (8.55)$$

Вследствие независимости первых интегралов система (8.53) разрешима относительно некоторой группы из n переменных. Полагая, что

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0, \quad (8.56)$$

выразим в явном виде импульсы:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}). \quad (8.57)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (8.54), получим тождество

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}), t, \boldsymbol{\alpha}) \equiv 0. \quad (8.58)$$

Дифференцируя это тождество по переменной \mathbf{q} , получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} = - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{q}^T}. \quad (8.59)$$

Подставляя это выражение в условие инволюции (8.53), будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Это матричное равенство после сокращения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T$ принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (8.60)$$

Отсюда следует, что матрица $\partial \boldsymbol{\Psi} / \partial \mathbf{q}^T$ — симметрическая, и поэтому в силу *теоремы об условиях интегрируемости* (см. Приложение 1) существует функция $S(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$, с помощью которой вектор-функция $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ выражается в виде

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \quad (8.61)$$

Обозначим через $H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ функцию, получаемую из функции Гамильтона после подстановки вместо импульсов их выражений (8.57), т.е.

$$H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = H(\mathbf{q}, \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}), t). \quad (8.62)$$

Для частных производных функции H^* получим следующие выражения:

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (8.63)$$

По условию теоремы функции (8.57) удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Поэтому имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (8.64)$$

Из соотношений (8.63) и (8.64) получаем следующее равенство:

$$-\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (8.65)$$

Из равенств (8.60) и (8.65) следует симметричность матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial \Psi / \partial \mathbf{q}^T & \partial \Psi / \partial t \\ -\partial H^* / \partial \mathbf{q}^T & -\partial H^* / \partial t \end{pmatrix}, \quad (8.66)$$

вследствие чего по *теореме об условиях интегрируемости* существует функция $S(\mathbf{q}, t, \mathbf{a})$, которая помимо (8.61) удовлетворяет также уравнению

$$-H^* = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (8.67)$$

При этом решение системы, составленной из уравнений (8.61) и (8.67), определяется с точностью до аддитивной функции $\varphi(\mathbf{a})$ следующей формулой:

$$S(\mathbf{q}, t, \mathbf{a}) = \int_0^1 [\mathbf{q}^T \Psi(\theta \mathbf{q}, t, \mathbf{a}) - t H^*(\mathbf{q}, \theta t, \mathbf{a})] d\theta. \quad (8.68)$$

Перейдем теперь к заключительной части доказательства теоремы. Покажем, что вектор-функция

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = \partial S / \partial \mathbf{a} \quad (8.69)$$

– первый интеграл системы. Для полной производной по времени от этой функции в силу уравнений Гамильтона будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}} \right) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}}, H \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{a}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T \partial \mathbf{a}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{a}}. \quad (8.70)$$

Отсюда, учитывая соотношения (8.61), (8.63) и уравнение (8.67), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}} \right) = \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{a} \partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.71)$$

Таким образом, n -мерная вектор-функция (8.69) является первым интегралом системы, т.е. переменные \mathbf{q} удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t)}{\partial \mathbf{a}} = \boldsymbol{\beta}, \quad (8.72)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — n -мерный вектор произвольных постоянных.

Покажем, что из уравнений (8.72) можно в явном виде найти решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, t)$. По теореме о неявных функциях система (8.72) разрешима относительно \mathbf{q} , если выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T \partial \mathbf{a}} \right) \neq 0. \quad (8.73)$$

Дифференцируя тождество (8.58) по \mathbf{a} и учитывая (8.61), получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{a}} = - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T \partial \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}}.$$

Отсюда в силу неравенств (8.57), (8.58) следует условие (8.73).

Таким образом, уравнения (8.72) представляют собой систему из n независимых первых интегралов, из которой с помощью квадратур находится общее решение для обобщенных координат: $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, t)$. После постановки этого решения в (8.57) находится общее решение для обобщенных импульсов: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, t)$. *Теорема доказана.*

Отметим, что условие (8.56) разрешимости первых интегралов (8.54) относительно импульсов не является принципиальным и использовалось только для упрощения доказательства теоремы.

Доказанную теорему можно трактовать таким образом, что для гамильтоновой системы порядка $2n$ при наличии n первых интегралов в инволюции можно найти еще n дополнительных первых интегралов, которые в совокупности с исходными определяют общее решение системы.

Следствие. *Гамильтонова система второго порядка, имеющая первый интеграл, интегрируется в квадратурах.*

Возвращаясь к рассмотренным в разделе 8.3 примерам, обратим внимание, что в случаях 1°–3° первые интегралы (8.29), (8.31) и (8.38) характеризовались одним общим свойством. В каждом из них фигурировала только одна пара сопряженных переменных:

$$f_k(q_k, p_k, \alpha) = 0; \quad k = 1, \dots, m.$$

Такие первые интегралы образуют, очевидно, систему в инволюции. Этим свойством первых интегралов и объясняется возможность понижения порядка системы в указанных случаях на $2m$ единиц, а при $m = n$ найти общее решение в квадратурах.

Канонические преобразования в гамильтоновых системах

9.1. Критерии каноничности преобразований

Для гамильтоновой системы с n степенями свободы уравнения движения, записанные в векторно-матричной форме, имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (9.1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (9.2)$$

Здесь \mathbf{x} – $2n$ -мерный вектор-столбец фазовых переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} , $H(\mathbf{x}, t)$ – гамильтониан, E_n – единичная матрица порядка n , \mathbf{J} – матрица порядка $2n$, называемая *симплектической единицей*.

Уравнения Лагранжа, как известно, *ковариантны* относительно преобразований обобщенных координат. Уравнения Гамильтона (9.1) свойством ковариантности относительно *произвольных преобразований фазовых* переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} не обладают, т.е. гамильтонова система в результате преобразования может оказаться не гамильтоновой.

Определение. *Каноническими называются невырожденные преобразования фазовых переменных*

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

переводящие любую гамильтонову систему в гамильтонову систему, т.е. если $\forall H(\mathbf{x}, t) \exists \tilde{H}(\mathbf{y}, t)$ такая, что канонические уравнения (9.1) и в новых переменных \mathbf{y} будут иметь каноническую форму:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}}. \quad (9.4)$$

Иными словами, каноническими называются все преобразования, относительно которых ковариантны канонические уравнения Гамильтона.

Из приведенного определения непосредственно не следует, по каким формулам вычисляется «новый» гамильтониан $\tilde{H}(\mathbf{y}, t)$. Ответ на этот вопрос будет дан ниже после того, как будут получены условия каноничности преобразования.

Канонические преобразования используются для упрощения уравнений движения гамильтоновых систем, в частности, в задачах интегрирования этих уравнений.

При использовании канонических преобразований задача определения конкретного вида уравнений движения в новых переменных сводится к нахождению одной функции – функции Гамильтона в новых переменных. Для произвольных (не канонических) преобразований такого простого алгоритма определения уравнений движения в новых переменных нет.

Для вывода условий каноничности преобразований будет использоваться нижеследующая вспомогательная теорема. В этой теореме $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – $2n$ -мерная векторная функция фазовых переменных \mathbf{x} и времени t , а \mathbf{F} – кососимметрическая матрица:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}; \quad F_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \quad (9.5)$$

Теорема 9.1. Для того чтобы при любой скалярной функции $H(\mathbf{x}, t)$ существовала скалярная функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{F} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (9.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось матричное тождество

$$\mathbf{F} = c \mathbf{J}, \quad (9.7)$$

где $c \neq 0$ – постоянная.

Доказательство достаточности. При выполнении равенства (9.7) уравнение (9.6) принимает вид

$$c \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}.$$

Для этого уравнения условие существования функции Φ (условие интегрируемости) при учете перестановочности операций дифференцирования по переменным \mathbf{x} и t сводится к матричному равенству:

$$c \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0,$$

которое при условии (9.7) в силу симметричности матрицы вторых производных от любой скалярной функции удовлетворяется для любых функций H .

Докажем *необходимость* условия (9.7), рассматривая различные варианты функций H . Возьмем линейные по переменной \mathbf{x} функции $H = \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{b}$, где \mathbf{b} – произвольный постоянный вектор. В этом случае будем иметь $\partial H / \partial \mathbf{x} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{b}$, а уравнения (9.6) примут вид

$$\mathbf{F} \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \varphi_j = \sum_{s=1}^{2n} F_{js} b_s + \partial f_j / \partial t = \partial \Phi / \partial x_j; \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Записывая условия интегрируемости для этих уравнений, получим

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{2n} \left(\frac{\partial F_{js}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_j} \right) b_s + \frac{\partial}{\partial t} F_{jk} = 0. \quad (9.8)$$

В свою очередь, из формул (9.5), определяющих матрицу \mathbf{F} , имеем

$$\frac{\partial F_{js}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ks}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right).$$

С учетом этих формул уравнения (9.8) переписываются в виде

$$\sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_s} b_s + \frac{\partial}{\partial t} F_{jk} = 0; \quad k, j = 1, \dots, 2n.$$

Ввиду произвольности выбора коэффициентов b_s отсюда следует

$$\partial F_{jk} / \partial t = 0, \quad \partial F_{jk} / \partial x_s = 0; \quad k, j = 1, \dots, 2n, \quad (9.9)$$

т.е. \mathbf{F} – *постоянная* матрица, не зависящая от \mathbf{x} и t .

Для постоянных матриц \mathbf{F} условие интегрируемости для уравнений (9.6) сводится к следующему матричному равенству:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{C}^T = 0; \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{J}. \quad (9.10)$$

Здесь \mathbf{H} – симметрическая матрица вторых производных функции H , $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{J}$ – постоянная матрица.

По условию теоремы равенство (9.10) должно выполняться для любых симметрических матриц \mathbf{H} . А это возможно только в случае, когда $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{J} = c\mathbf{E}$, где c – постоянная, а \mathbf{E} – единичная матрица. Разрешая последнее равенство относительно \mathbf{F} , получим $\mathbf{F} = -c\mathbf{J}$. Теорема доказана.

Теорема 9.2 (критерий каноничности в терминах производящих функций). Для каноничности преобразования (9.3) необходимо и достаточно существование *производящей функции* $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и постоянной (*валентности*) $c \neq 0$, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{\mathbf{p}}^T \delta \tilde{\mathbf{q}} - c \mathbf{p}^T d\mathbf{q} = -\delta F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (9.11)$$

Здесь символом δ обозначаются *изохронные* дифференциалы функций, т.е. дифференциалы, вычисленные при «замороженном» времени. Дифференциалы независимых переменных и полные дифференциалы функций обозначаются символом d .

Эквивалентная форма записи условий (9.11) выглядит так:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} - c \mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}. \quad (9.11^*)$$

Отметим, что производящая функция определена с точностью до аддитивной функции времени (как и гамильтониан системы).

Теорема 9.3 (локальный критерий каноничности). Для каноничности преобразования (9.3) необходимо и достаточно выполнения матричного тождества:

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = c \mathbf{J}, \quad c \neq 0; \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}. \quad (9.12)$$

Здесь \mathbf{M} – матрица Якоби преобразования (9.3).

При доказательстве сформулированных теорем будем использовать известный факт о том, что канонические уравнения Гамильтона (9.1) можно записать с помощью функции Лагранжа:

$$L^* = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \Leftrightarrow L^* = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J} \mathbf{x} / 2 - H(\mathbf{x}, t) \quad (9.13)$$

в форме уравнений Лагранжа следующим образом [1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (9.1^*)$$

Обратим внимание, что уравнения Лагранжа (9.1*) записаны в $4n$ -мерном пространстве фазовых переменных $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$, где в роли координат выступают переменные \mathbf{q}, \mathbf{p} , а в роли скоростей – $\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (9.1*) *тождественно* совпадают с уравнениями (9.1).

Возможность записи $2n$ дифференциальных уравнений (9.1) первого порядка в форме (9.1*) основывается на том, что для линейных по скоростям функций вида $L^* = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \Phi(\mathbf{x}, t)$ уравнения Лагранжа тоже представляют собой систему из $2n$ уравнений первого порядка:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (9.14)$$

Для функций L^* (9.13) эти уравнения принимают вид канонических уравнений (9.1): $\mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} = -\partial H / \partial \mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \partial H / \partial \mathbf{x}$.

Запись канонических уравнений (9.1) в форме уравнений Лагранжа (9.1*) удобна тем, что в рамках лагранжева формализма преобразование (9.3) трактуется как преобразование координат. Это позволяет использовать свойство *ковариантности* уравнений Лагранжа по отношению к преобразованиям координат (уравнения Лагранжа преобразуются в уравнения Лагранжа, а «новый» лагранжиан представляет собой «старый» лагранжиан, выраженный через новые переменные), а также свойство *калибровочной инвариантности* (уравнения, определяемые функциями $L^*(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ и $cL^* + \dot{F}(\mathbf{x}, t)$, где $c \neq 0$, тождественно совпадают).

Приступим теперь к доказательству теорем 9.2, 9.3.

Доказательство достаточности условия (9.11). Пусть система в исходных переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} является гамильтоновой и выполняется условие (9.11). Тогда уравнения (9.1) этой системы можно записать с помощью функции Лагранжа (9.13) в форме уравнений Лагранжа (9.1*). Определив функцию \tilde{H} формулой

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial t} \mathbf{p}, \quad (9.15)$$

условие (9.11) можно переписать в виде

$$d\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{H} dt = c(d\mathbf{q}^T \mathbf{p} - H dt) - dF. \quad (9.16)$$

Поделив обе части равенства (9.16) на dt , получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{H} = c(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - H) - \dot{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (9.17)$$

Из этого уравнения лагранжиан системы $L^* = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - H$ выражается через новые переменные формулой

$$\tilde{L}^* = \left(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{H} + \dot{F}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t) \right) / c.$$

Отсюда при учете свойства калибровочной инвариантности следует, что уравнения движения системы в новых переменных, записанные в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{p}}}} - \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} = 0,$$

однозначно определяются функцией $\tilde{L}^* = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{H}$ и тождественно совпадают с каноническими уравнениями (9.4).

Таким образом, при условиях (9.11) в результате преобразования (9.3) любая гамильтонова система переходит в гамильтонову. При этом «новый» гамильтониан определяется формулой (9.15), в которой все «старые» переменные должны быть выражены через «новые» переменные с помощью формул обратного преобразования.

Равенство (9.16) называется *основным тождеством*. Оно включает и критерий каноничности (9.11) и формулу (9.15) преобразования лагранжиана.

Доказательство достаточности условия (9.12) сводится к определению условий существования функции F в критерии (9.11). При учете формул

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} = 2\delta \mathbf{q}^T \mathbf{p} - \delta(\mathbf{q}^T \mathbf{p}), \quad \delta \mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{y} = 2\delta \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \delta(\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}}) \quad (9.18)$$

условие (9.11) переписывается в виде

$$\delta \mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{y} - c \delta \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} = -2\delta F^*; \quad F^* = F + (\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}} - c \mathbf{q}^T \mathbf{p})/2 \quad (9.19)$$

и эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \mathbf{y} - c \frac{\mathbf{J} \mathbf{x}}{2} = -\frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{x}}. \quad (9.20)$$

По теореме об условиях интегрируемости для существования функции $F^*(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению (9.20), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось матричное равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \mathbf{y} - c \mathbf{J} \mathbf{x} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \mathbf{y} - c \mathbf{J} \mathbf{x} \right)^T = 0. \quad (9.21)$$

На основании доказанной в Приложении 1 формулы

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \Psi \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \Psi \right)^T = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (9.22)$$

равенство (9.21) сводится к тождеству (9.12):

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} - c \mathbf{J} = (\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} - c \mathbf{J})^T \Rightarrow \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = c \mathbf{J}.$$

Доказательство необходимости условий (9.11) и (9.12) каноничности преобразования (9.3). Пусть преобразование (9.3) переводит произвольную гамильтонову систему в гамильтонову. Тогда уравнения движения в новых переменных \mathbf{y} можно записать с помощью функции $L^* = \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{J} \mathbf{y} / 2 - \tilde{H}(\mathbf{y}, t)$ в форме уравнений Лагранжа (9.1*). Через старые переменные \mathbf{x} эта функция выражается формулой

$$L^* = \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{J} \mathbf{y} / 2 - \tilde{H}(\mathbf{y}, t) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (9.23)$$

где

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{2}, \quad \Phi = \frac{\partial \mathbf{y}^T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \frac{\mathbf{J} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{2} - \tilde{H}(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t). \quad (9.24)$$

Записывая уравнения Лагранжа (9.1*), определяемые функцией (9.23), и учитывая гамильтоновость системы в исходных переменных, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (9.25)$$

Уравнение (9.25) должно удовлетворяться для любых функций $H(\mathbf{x}, t)$. По теореме 9.1 необходимые и достаточные условия существования функции $\Phi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению (9.25) при любых $H(\mathbf{x}, t)$, описываются матричным равенством

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = c \mathbf{J} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{y}}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{y}}{2} \right)^T = c \mathbf{J}. \quad (9.26)$$

Это равенство при учете формулы (9.22) сводится к тождеству (9.12): $\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = c \mathbf{J}$, что и доказывает *необходимость условия* (9.12).

Заметим теперь, что равенство (9.26), будучи критерием каноничности преобразования, совпадает с равенством (9.21), которое является критерием существования производящей функции в теореме 9.2. Отсюда следует, что условие (9.11) является не только достаточным, но и необходимым условием каноничности преобразования (9.3). *Теоремы 9.2 и 9.3 доказаны.*

В доказанном критерии каноничности условие $c \neq 0$ вытекает из требования о невырожденности преобразования, поскольку из равенства (9.12) якобиан преобразования определяется формулой

$$(\det \mathbf{M})^2 = c^{2n}. \quad (9.27)$$

Матрицы \mathbf{M} , удовлетворяющие равенству (9.12) $\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = c \mathbf{J}$, называются *обобщенно симплектическими* при $c \neq 1$ и просто *симплектическими* при $c = 1$.

Каноническое преобразование при $c = 1$ называется *универсальным*.

Преобразование, обратное к каноническому, тоже является каноническим. Чтобы убедиться в этом, умножим обе части равенства (9.12) слева на матрицу $(\mathbf{M}^T)^{-1}$, а справа – на матрицу \mathbf{M}^{-1} . Учитывая перестановочность операций обращения и транспонирования матриц, получим

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}/c. \quad (9.28)$$

Отсюда следует, что матрица \mathbf{M}^{-1} обратного преобразования удовлетворяет критерию каноничности, а валентность обратного преобразования равна $1/c$.

Обращением обеих частей равенства (9.28) критерий каноничности преобразования приводится к следующему виду:

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = c \mathbf{J}. \quad (9.29)$$

Отметим, что левая часть равенства (9.12) называется *обобщенной скобкой Лагранжа* для преобразования $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, а левая часть равенства (9.29) – *обобщенной скобкой Пуассона*.

Рассмотрим последовательность двух канонических преобразований $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$. Матрицы Якоби этих преобразований $\mathbf{M}_1 = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}^T$ и $\mathbf{M}_2 = \partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{y}^T$ удовлетворяют критерию (9.12), а матрица Якоби результирующего преобразования определяется формулой

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1.$$

Подставляя это выражение в критерий (9.12), получим

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_2^T \mathbf{J} \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = c_2 \mathbf{M}_1^T \mathbf{J} \mathbf{M}_1 = c_2 c_1 \mathbf{J}.$$

Отсюда следует, что результирующее преобразование является каноническим, а его валентность равна произведению валентностей последовательных преобразований.

9.2. Примеры канонических преобразований.

Теорема о фазовом потоке гамильтоновой системы

Из критерия (9.11) следует, что тождественное преобразование является унивалентным ($c = 1$) каноническим с производящей функцией $F = 0$.

Преобразование

$$\begin{aligned}\tilde{q}_j &= p_j, \quad \tilde{p}_j = -q_j; \quad j=1, \dots, m, \\ \tilde{q}_k &= q_k, \quad \tilde{p}_k = p_k; \quad k=m+1, \dots, n\end{aligned}\quad (9.30)$$

также является унивалентным каноническим с производящей функцией $F = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \dots + q_m p_m$. С помощью такого преобразования можно поменять ролями координаты и импульсы для любой пары сопряженных переменных q_j, p_j .

Рассмотрим линейное преобразование

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \quad (9.31)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ – постоянные матрицы размера $n \times n$. Матрица Якоби такого преобразования определяется выражением

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix},$$

а условия каноничности записываются в виде

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{A}) & (\mathbf{A}^T \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}) \\ (\mathbf{B}^T \mathbf{C} - \mathbf{D}^T \mathbf{A}) & (\mathbf{B}^T \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{B}) \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{vmatrix}. \quad (9.32)$$

Производящая функция преобразования определяется из уравнений (9.11*), которые для рассматриваемого примера принимают вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}\mathbf{q} + (\mathbf{A}^T \mathbf{D} - c\mathbf{E}_n)\mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{B}^T (\mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}) = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}.$$

Отсюда, учитывая равенства (9.32), находим

$$-F = \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}\mathbf{q} / 2 + \mathbf{p}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{p} / 2 + \mathbf{q}^T \mathbf{C}^T \mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (9.33)$$

Преобразование растяжения $\tilde{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{q}$, $\tilde{\mathbf{p}} = \alpha\mathbf{p}$ является каноническим с валентностью $c = \alpha^2$ и производящей функцией $F = 0$. При таком преобразовании вычисленная по формуле (9.15) функция Гамильтона в новых переменных выражается через $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в виде $\tilde{H} = \alpha^2 H(\tilde{\mathbf{q}}/\alpha, \tilde{\mathbf{p}}/\alpha, t)$.

Замечание. Произвольное каноническое преобразование представляется в виде комбинации унивалентного преобразования и преобразования растяжения. Поскольку преобразование растяжения принципиально не изменяет структуру функции Гамильтона, то для упрощения уравнений движения гамильтоновых систем используются унивалентные канонические преобразования.

Важный пример канонического преобразования дает нижеследующая теорема. В этой теореме *фазовым потоком* гамильтоновой системы называется закон движения $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{x}_0, t)$ в зависимости от времени и начальных условий \mathbf{x}_0 .

Теорема 9.4. *Фазовый поток любой гамильтоновой системы $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{x}_0, t)$ представляет собой унивалентное каноническое преобразование начальных значений фазовых переменных \mathbf{x}_0 в текущие значения \mathbf{x} .*

Доказательство. Положим $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. В момент времени t_0 преобразование тождественное и матрица Якоби $\mathbf{M}_0 = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0^T = \mathbf{E}_{2n}$ удовлетворяет критерию (9.12) при $c = 1$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что матрица $\mathbf{F} = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M}$ не меняется с течением времени.

Вычислим производную $\dot{\mathbf{F}}$ в силу канонических уравнений Гамильтона. В рассматриваемой задаче полные производные по времени от \mathbf{x} и \mathbf{M} равны частным производным по времени от Ψ и $\partial \Psi / \partial \mathbf{x}_0^T$. Поэтому, учитывая перестановочность операций $\partial / \partial \mathbf{x}_0^T$ и $\partial / \partial t$, будем иметь

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_0^T} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0^T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0^T},$$

а матрица $\dot{\mathbf{F}}$ запишется в виде

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^T}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{J} \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \mathbf{J} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{J}^T \right) \mathbf{J} \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0^T} \left(\mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

Из формул для производных от сложных функций следует

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{M}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0^T} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \mathbf{M}.$$

В итоге, учитывая симметричность матрицы $\partial^2 H / \partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}$, получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{M}^T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{M} \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Локальный критерий каноничности (9.12) позволяет проверить на каноничность любое преобразование, заданное в явной форме.

Для построения канонических преобразований используются критерии, записанные в терминах производящих функций. При этом простой и конструктивный алгоритм построения канонических преобразований удастся получить, используя производящие функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$, $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$, $S(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t)$, $S(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, t)$ «смешанных» переменных («старых» и «новых»). Ниже рассматриваются наиболее часто используемые преобразования, задаваемые первыми двумя из указанных видов функций.

9.3. Свободные канонические преобразования

Преобразование

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (9.34)$$

называется *свободным*, если в нем в качестве независимых переменных можно выбрать переменные $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}$, т.е. если формулы преобразования можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t). \quad (9.35)$$

Преобразование (9.34) будет свободным, если

$$\det(\partial \tilde{\mathbf{q}} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0. \quad (9.36)$$

В этом и только в этом случае можно выразить $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ из первой группы уравнений (9.35), а затем из второй группы уравнений (9.35) найти $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$.

Для определения условий каноничности свободных преобразований обратимся к *основному тождеству* (9.16). Это тождество инвариантно по отношению к выбору независимых переменных и для свободных преобразований записывается в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{p}}^T(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t) d\tilde{\mathbf{q}} - c \mathbf{p}^T(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t) d\mathbf{q} - (\tilde{H} - c H) dt = -dS(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t). \quad (9.37)$$

Здесь $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ есть производящая функция F , выраженная через переменные $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t$, называемая *производящей функцией свободного преобразования*.

Приравнявая в обеих частях тождества (9.37) множители при независимых вариациях $d\tilde{\mathbf{q}}, d\mathbf{q}$, получаем такую формулировку условий каноничности для свободных преобразований.

Теорема 9.5 (критерий каноничности в $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}$ -описании). *Для каноничности преобразования необходимо и достаточно существование производящей функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ и валентности $c \neq 0$, таких, что*

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad c \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9.38)$$

В свою очередь, приравнявая в обеих частях равенства (9.37) множители при dt , получаем *формулу преобразования гамильтониана*:

$$\tilde{H} = c H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.39)$$

Для свободных преобразований, записанных в виде (9.35), проверка условий каноничности сводится к проверке тождеств:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}^T} + c \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} = 0; \quad c \neq 0. \quad (9.40)$$

Термин *производящая функция* адекватно характеризует функцию $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$. Если заданы $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ и $c \neq 0$, то уравнениями (9.38) однозначно определяются формулы преобразования в виде (9.35). Для того чтобы эти формулы приводились к виду (9.34), должно выполняться условие

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \tilde{\mathbf{q}}^T} \right) \neq 0. \quad (9.41)$$

Это условие гарантирует возможность выразить из второй группы уравнений (9.35) переменные $\tilde{\mathbf{q}}$ через $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$, а затем из первой группы уравнений (9.35) найти зависимость $\tilde{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$.

При условии (9.41) однозначно определяются и формулы обратного преобразования. При этом зависимость $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ находится из первой группы уравнений (9.35), а затем из второй группы определяется $\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$.

Таким образом, все множество *свободных* канонических преобразований можно получить на основе формул (9.38), рассматривая всевозможные функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$, удовлетворяющие условию (9.41), и постоянные $c \neq 0$.

Преобразования, допускающие $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}$ -описание. Рассмотрим преобразования (9.34), в которых в качестве независимых можно выбрать переменные $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}$, т.е. формулы (9.34) можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t). \quad (9.42)$$

Таковыми являются те из преобразований (9.34), для которых выполняется условие

$$\det(\partial \tilde{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0. \quad (9.43)$$

В независимых переменных $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}$ основное тождество (9.16) при учете формулы $d\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}} = d(\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}}) - d\tilde{\mathbf{p}}^T \tilde{\mathbf{q}}$ записывается в виде

$$-d\tilde{\mathbf{p}}^T \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{H}dt - c(d\mathbf{q}^T \mathbf{p} - H)dt = -dS(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t). \quad (9.44)$$

Приравнявая в обеих частях равенства (9.44) множители при независимых вариациях $d\mathbf{q}, d\tilde{\mathbf{p}}$ и dt , получим

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad c\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.45)$$

Первые два равенства (9.45) определяют условия каноничности преобразования в $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}$ -описании, а третье – формулу преобразования гамильтониана.

По заданной функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ и валентности $c \neq 0$ уравнениями (9.45) однозначно определяются формулы преобразования в виде (9.42). Для того чтобы эти формулы приводились к виду (9.34), должно выполняться условие

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \tilde{\mathbf{p}}^T} \right) \neq 0. \quad (9.46)$$

Таким образом, все множество канонических преобразований, допускающих $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}$ -описание, можно получить на основе формул (9.45), рассматривая всевозможные функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$, удовлетворяющие условию (9.46), и постоянные $c \neq 0$.

Отметим, что потребность использования помимо свободных и других типов канонических преобразований обусловлена тем, что не все канонические преобразования являются свободными. Например, свободными не являются тождественные преобразования. В теории возмущений используются преобразования, близкие к тождественным. Если их задавать производящими функциями $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ по формулам (9.38), то такие преобразования будут близки к вырожденным, в то время как те же преобразования, задаваемые производящими функциями $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ по формулам (9.45), таких особенностей иметь не будут.

9.4. Уравнение Гамильтона–Якоби

В этом разделе излагается метод Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона. Идея метода основывается на изложенных выше свойствах свободных канонических преобразований.

Пусть задана гамильтонова система с функцией Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Ставится задача найти такое свободное унивалентное каноническое преобразование, в результате которого получится система с «новым» гамильтонианом $\tilde{H} = 0$. Тогда в новых переменных уравнения Гамильтона будут иметь простейший вид $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$, $\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0$ с очевидным общим решением

$$\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\beta}, \quad (9.47)$$

где α и β – n -мерные векторы произвольных постоянных, а закон движения системы в исходных переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} будет определен по формулам обратного преобразования.

Задача поиска указанного выше преобразования сводится к нахождению его производящей функции, которая вследствие (9.47) превращается в функцию $S = S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ и для которой условие (9.41) принимает вид

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \alpha^T} \right) \neq 0. \quad (9.48)$$

В свою очередь, уравнение, из которого находится функция S , получается из формулы (9.39), если положить $\tilde{H} = 0$, $c = 1$, а обобщенные импульсы в гамильтониане $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ заменить частными производными функции S согласно формулам (9.38): $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{q}$. В итоге получается следующее уравнение в частных производных, называемое уравнением Гамильтона–Якоби:

$$H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (9.49)$$

Определение. Полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби (9.49) называется его решение $S = S(\mathbf{q}, \alpha, t)$, удовлетворяющее условию (9.48), зависящее от n произвольных постоянных α .

Теорема Якоби. По полному интегралу $S = S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ уравнения Гамильтона–Якоби (9.49) общее решение гамильтоновой системы находится из системы уравнений

$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \alpha, t), \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \alpha, t), \quad (9.50)$$

где β – n -мерный вектор произвольных постоянных.

Действительно, уравнения (9.50) следуют из соотношений (9.38), (9.47) и задают в неявной форме закон движения системы в переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} . По теореме о неявных функциях при выполнении условия

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^T \partial \alpha} \right) \neq 0,$$

которое, очевидно, совпадает с условием (9.48), из первой группы уравнений (9.50) находится в явном виде решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$, а после его подстановки во вторую группу уравнений (9.50) находится решение $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$.

Таким образом, если известен полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то процедура нахождения общего решения гамильтоновой системы сводится к вычислению производных $\partial S / \partial \mathbf{q}$ и $\partial S / \partial \boldsymbol{\alpha}$ в уравнениях (9.50) и обращению функций.

Уравнения (9.50) при выполнении условия (9.48) можно трактовать как $2n$ независимых первых интегралов гамильтоновой системы, наличие которых и позволяет выписать общее решение в явном виде.

Постоянные $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ в общем решении однозначно определяются через начальные условия $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$, поскольку в силу (9.48) из второй группы уравнений (9.50) можно найти в явном виде $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, а после подстановки в первую группу уравнений (9.50) определяется $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

По известному полному интегралу $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ однозначно определяется и гамильтониан системы. Он находится из уравнения (9.49) по формуле

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} = \varphi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t), \quad (9.51)$$

в которую нужно подставить найденные из второй группы уравнений (9.50) функции $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, чтобы получить функцию $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

Таким образом, полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби содержит всю информацию о гамильтоновой системе.

В изложенном выше методе Якоби задача интегрирования канонических уравнений Гамильтона, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения, сводится к эквивалентной по трудности задаче – поиску полного интеграла уравнения в частных производных (9.49). При решении прикладных задач применять метод Якоби целесообразно в тех случаях, когда для нахождения полного интеграла (если это возможно) требуется меньший объем вычислений, чем при «прямом» интегрировании системы. Метод

Якоби эффективно используется в задачах приближенного аналитического интегрирования канонических уравнений.

Для гамильтоновых систем произвольного вида общих методов построения точных решений, равно как и методов нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби, нет. Здесь мы рассмотрим так называемый *метод разделения переменных*, с помощью которого удастся найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в отдельных случаях, характеризующихся специальной структурой функции Гамильтона.

Суть *метода разделения переменных* состоит в том, что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби ищется в виде

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = S_0(\mathbf{a}, t) + \sum_{k=1}^n S_k(q_k, \mathbf{a}), \quad (9.52)$$

т.е. в искомом решении должны быть разделены переменные t, q_1, \dots, q_n так, что t входит только в S_0 , а q_k только в S_k . Зависимость функций S_0 и S_k от \mathbf{a} при этом заранее не регламентируется. Этим, собственно, идейная часть «метода» и ограничивается. Далее рассматриваются *случаи разделения переменных*, т.е. приводятся примеры функций Гамильтона, структура которых позволяет найти полный интеграл в виде (9.52), и излагается процедура поиска этого решения. Все эти случаи характеризуются наличием у гамильтоновой системы первых интегралов определенного вида.

Случаи разделения переменных

1°. Гамильтониан с отделимыми парами сопряженных переменных:

$$H = H[f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), \dots, f_n(q_n, p_n), t]. \quad (9.53)$$

2°. Система вложенных функций («матрешка»):

$$H = H[f_n, t]; f_k = f_k(f_{k-1}, q_k, p_k); k = 2, \dots, n, f_1 = f_1(q_1, p_1). \quad (9.54)$$

$$3^\circ. \quad H = H(f, t); \quad f = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^n \psi_k(q_k, p_k)}. \quad (9.55)$$

В каждом из перечисленных случаев система имеет n независимых первых интегралов (см. раздел 8.3). В случае 1° первые интегралы выражаются функциями

$$f_k(q_k, p_k) = \alpha_k; \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.56)$$

В случае 2° первые интегралы имеет вид

$$f_1(q_1, p_1) = \alpha_1, \quad f_k(q_k, p_k, \alpha_{k-1}) = \alpha_k; \quad k = 2, \dots, n. \quad (9.57)$$

В случае 3° независимые первые интегралы записываются в виде

$$\begin{aligned} f_k &= \varphi_k(q_k, p_k) - \alpha_n \psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k; \quad k = 1, \dots, n-1, \\ f_n &= \varphi_n(q_n, p_n) - \alpha_n \psi_n(q_n, p_n) = - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Рассматриваемые три случая характеризуются общим свойством: *система имеет n независимых первых интегралов, в каждом из которых фигурирует только одна пара сопряженных переменных*:

$$f_k(q_k, p_k, \mathbf{a}) = 0; \quad k = 1, \dots, n, \quad (9.59)$$

где \mathbf{a} — n -мерный вектор произвольных постоянных. Это общее свойство позволяет изложить процедуру нахождения полного интеграла методом разделения переменных для всех трех случаев единообразно.

Предполагаем, что каждый из первых интегралов (9.59) разрешим относительно импульсов, т.е. уравнения (9.59) можно переписать в виде

$$p_k = \psi_k(q_k, \mathbf{a}); \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.60)$$

Выражая обобщенные импульсы по формулам (9.38), получим для слагаемых S_k полного интеграла (9.52) следующие уравнения:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k}{\partial q_k} = \psi_k(q_k, \mathbf{a}); \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.61)$$

Отсюда функции S_k находятся с помощью формул

$$S_k = \int \psi_k(q_k, \mathbf{a}) dq_k; \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.62)$$

Функция S_0 находится непосредственно из уравнения Гамильтона–Якоби с учетом того, что $\partial S/\partial t = \partial S_0/\partial t$, а гамильтониан в каждом случае выражается через постоянные α и время t . Для случая 1° получим

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) + \partial S_0/\partial t = 0.$$

Отсюда находим

$$S_0 = -\int H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) dt. \quad (9.63)$$

Для случаев 2° и 3° будем иметь

$$H(\alpha_n, t) + \partial S_0/\partial t = 0. \Rightarrow S_0 = -\int H(\alpha_n, t) dt. \quad (9.64)$$

Покажем, что полученное решение действительно является полным интегралом, т.е. удовлетворяет условию (9.48).

Обозначим через \mathbf{f} и Ψ вектор-функции, составленные из скалярных функций f_k и ψ_k , фигурирующих в уравнениях (9.59) и (9.60). Тогда эти уравнения запишутся в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \alpha) = 0. \quad (9.65)$$

$$\mathbf{p} = \Psi(\mathbf{q}, \alpha) = \partial S/\partial \mathbf{q}. \quad (9.66)$$

Ввиду того, что значения постоянных α однозначно определяются значениями \mathbf{q}, \mathbf{p} , уравнения (9.65) разрешимы относительно α , т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f}/\partial \alpha^T) \neq 0. \quad (9.67)$$

В свою очередь, условие разрешимости уравнений (9.65) относительно импульсов описывается неравенством

$$\det(\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{p}^T) \neq 0. \quad (9.68)$$

Учитывая, что подстановка выражений (9.66) в уравнения (9.65) приводит к тождеству

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \Psi(\mathbf{q}, \alpha), \alpha) \equiv 0,$$

и дифференцируя это тождество по α , получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{a}^T \partial \mathbf{q}}.$$

Из этого матричного соотношения в силу неравенств (9.67) и (9.68) следует неравенство (9.48).

Замечание. В изложенной выше процедуре построения полного интеграла предполагалось, что все первые интегралы (9.59) разрешимы относительно импульсов. Это условие не является принципиальным. Если, например, первые m уравнений (9.59) неразрешимы относительно импульсов p_k , то они разрешимы относительно координат q_k . Поэтому с помощью унивалентного канонического преобразования

$$\begin{aligned} q_k &= -\tilde{p}_k, \quad p_k = \tilde{q}_k; \quad k=1, \dots, m, \\ q_j &= \tilde{q}_j, \quad p_j = \tilde{p}_j; \quad j=m+1, \dots, n \end{aligned} \quad (9.69)$$

система приводится к виду, в котором все первые интегралы (9.59) будут разрешимы относительно импульсов.

Преобразования вида (9.69) позволяют поменять ролями любую пару сопряженных переменных q_k, p_k .

9.5. Теорема Лиувилля об условиях интегрируемости гамильтоновой системы методом Якоби

В этом разделе докажем теорему Лиувилля об условиях интегрируемости канонических уравнений Гамильтона, основываясь на уравнении Гамильтона–Якоби:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (9.70)$$

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система порядка $2n$ имеет n независимых первых интегралов в инволюции, то она интегрируется методом Якоби.*

Доказательство. Запишем уравнения, определяющие указанные в теореме первые интегралы $f_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mathbf{a}) = 0$; $k=1, \dots, n$, в векторном виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \boldsymbol{\alpha}) = 0. \quad (9.71)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ — n -мерный вектор произвольных постоянных. Значения этих постоянных однозначно определяются значениями $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$. Поэтому уравнения (9.71) разрешимы относительно $\boldsymbol{\alpha}$, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\alpha}^T) \neq 0. \quad (9.72)$$

Условие инволюции первых интегралов (все скобки Пуассона (f_j, f_k) тождественно равны нулю) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (9.73)$$

Вследствие независимости первых интегралов система (9.71) разрешима относительно некоторой группы из n переменных. Имея в виду, что преобразование вида (9.69) можно поменять ролями любую пару сопряженных переменных, без ущерба для общности можно считать, что система (9.71) разрешима относительно импульсов, т.е.

$$\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T) \neq 0. \quad (9.74)$$

Выражая из уравнений (9.71) импульсы

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) \quad (9.75)$$

и учитывая, что $\partial S / \partial \mathbf{q} = \mathbf{p}$, получим следующую систему уравнений, эквивалентную уравнению (9.70):

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \psi_{n+1} = -H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.76)$$

Здесь $H^*(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ — функция, полученная из функции Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ после подстановки вместо импульсов их выражений (9.75).

Покажем, что для системы (9.76) выполнены условия интегрируемости, т.е. существует решение $S(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$. Дифференцируя тождество

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha}), t, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (9.77)$$

по переменной \mathbf{q} , получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T}.$$

Подставляя это выражение в условие инволюции (9.73), будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Отсюда после сокращения на невырожденную матрицу $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}^T$ следует

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (9.78)$$

По условию теоремы функции (9.75) удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Поэтому имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Исключая отсюда производную $\partial H / \partial \mathbf{q}$ с помощью соотношения

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

и учитывая (9.78), приходим к следующему равенству:

$$-\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (9.79)$$

Из равенств (9.78) и (9.79) следует, что $(n+1)$ -мерная матрица

$$\begin{pmatrix} \partial \Psi / \partial \mathbf{q}^T & \partial \Psi / \partial t \\ \partial \psi_{n+1} / \partial \mathbf{q}^T & \partial \psi_{n+1} / \partial \mathbf{q}^T \end{pmatrix}$$

является симметрической. Поэтому для системы (64) выполнены условия интегрируемости, а ее решение $S(\mathbf{q}, t, \boldsymbol{\alpha})$ определяется с точностью до аддитивной постоянной $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ следующей формулой:

$$S(\mathbf{q}, t, \mathbf{a}) = \int_0^1 [\mathbf{q}^T \Psi(\theta \mathbf{q}, t, \mathbf{a}) - t H^*(\mathbf{q}, \theta t, \mathbf{a})] d\theta. \quad (9.80)$$

Покажем, что полученное решение будет полным интегралом. Дифференцируя тождество (9.77) по \mathbf{a} , получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}^T} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}^T} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{a}^T \partial \mathbf{q}}.$$

Отсюда в силу неравенств (9.72), (9.74) следует

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{a}^T \partial \mathbf{q}} \right) \neq 0.$$

Теорема доказана.

Интегральные инварианты гамильтоновых систем

10.1. Инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана

Рассмотрим $(2n+1)$ -мерное расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы – фазовое пространство переменных \mathbf{q}, \mathbf{p} , дополненное осью времени t . В этом пространстве выберем произвольный замкнутый контур C_0 – одномерное множество точек, описываемое параметрическими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_0(\alpha), \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0(\alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha); \quad \alpha \in [0, 1], \\ \mathbf{q}_0(0) &= \mathbf{q}_0(1), \quad \mathbf{p}_0(0) = \mathbf{p}_0(1), \quad t_0(0) = t_0(1), \end{aligned} \quad (10.1)$$

где функции $\mathbf{q}_0(\alpha), \mathbf{p}_0(\alpha), t_0(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по параметру α .

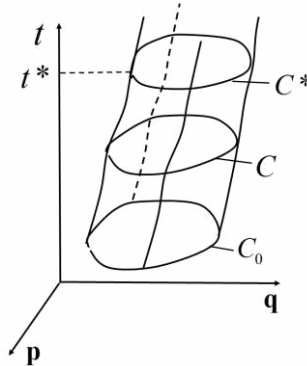


Рис. 10.1

Для гамильтоновой системы с заданным гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ каждая точка контура C_0 задает начальные условия и определяет однозначно траекторию движения этой системы:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t), \quad (10.2)$$

т.е. решение канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (10.3)$$

Эти траектории называются *прямыми путями системы*, а множество траекторий, порожаемое контуром C_0 , – *трубкой прямых путей системы*.

На трубке прямых путей, порожаемой контуром C_0 , можно произвольным образом выбрать другой замкнутый контур C . Точки этого контура будут образами точек контура C_0 , т.е. каждая точка контура C определяется решением (10.2), соответствующим некоторой точке $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0$ контура C_0 . Все контуры, охватывающие одну и ту же трубку прямых путей системы, называются *согласованными*.

Условимся далее называть контур, все точки которого характеризуются одним и тем же моментом времени t , *изохронным* и обозначать C^* .

Ниже будет исследоваться поведение контурных интегралов Пуанкаре и Пуанкаре–Картана на трубках прямых путей гамильтоновых систем.

Интеграл Пуанкаре определяется формулой

$$I_{\Pi} = \oint_{C^*} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} = \oint \sum_{k=1}^n p_i \delta q_i. \quad (10.4)$$

Здесь C^* – изохронный контур.

Интеграл Пуанкаре–Картана имеет вид

$$I_{\Pi K} = \oint_C (\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} - H \delta t), \quad (10.5)$$

где C – произвольный контур в расширенном фазовом пространстве системы, а $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ – функция Гамильтона.

Символом δ здесь и далее обозначается приращение функции при «движении» по контуру. Для контура C_0 (10.1) это приращение представляется в виде дифференциала функции по параметру α .

Если контур начальных условий C_0 параметризован в соответствии с формулами (10.1), то в силу соотношений (10.2) решения системы, образующие трубку прямых путей, будут иметь вид

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}(\alpha, t), \quad \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{g}}(\alpha, t); \quad \tilde{\mathbf{f}}(1, t) = \tilde{\mathbf{f}}(0, t), \quad \tilde{\mathbf{g}}(1, t) = \tilde{\mathbf{g}}(0, t). \quad (10.6)$$

Для того чтобы на основе этих решений получить произвольный контур C , согласованный с контуром C_0 , необходимо для каждого значения α задать значение момента времени t . Эту зависимость зададим функцией

$$t = t(\alpha, \tau); \quad t(0, \tau) = t(1, \tau), \quad t(\alpha, 0) = t_0(\alpha), \quad (10.7)$$

непрерывно дифференцируемой по параметрам α и τ . Рассматривая всевозможные функции вида (10.7) и задаваясь различными значениями параметра τ , можно получить произвольное смещение контура вдоль трубки прямых путей системы.

Теорема 10.1. *Для гамильтоновых систем интегралы Пуанкаре (10.4) и Пуанкаре–Картана (10.5) сохраняют свои значения при произвольном смещении контура вдоль любой трубки прямых путей системы.*

Указанное в теореме свойство контурных интегралов называется их *инвариантностью*.

Заметим, что применительно к интегралу Пуанкаре, который определен только на изохронных контурах, под произвольным смещением контура подразумевается переход от изохронного контура C_0^* к любому другому изохронному контуру C^* , согласованному с C_0^* . Кроме того, интеграл Пуанкаре является, очевидно, частным случаем интеграла Пуанкаре–Картана (на изохронных контурах интегралы (10.4) и (10.5) тождественно совпадают). Поэтому для доказательства теоремы 10.1 достаточно установить инвариантность интеграла (10.5).

Доказательство теоремы. С помощью соотношений (10.2) интеграл (10.5) по контуру C выражается через интеграл по контуру C_0 в виде

$$I_{\text{ПК}} = \oint_C (\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} - H \delta t) = \oint_{C_0} (\mathbf{f}^T(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t) \delta \mathbf{g}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t) - H \delta t). \quad (10.8)$$

Здесь функция Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ также выражена через $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t_0, t$ с помощью соотношений (10.2), символ δ обозначает дифференциал функций по параметру α , а t – произвольная функция вида (10.7).

Вычислим производную от интеграла (10.8) по параметру τ при $\tau = 0$ (эту производную обозначим штрихом). Учитывая перестановочность операций дифференцирования по α и τ , уравнения Гамильтона (10.3), а также формулы

$$\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q}' = \delta(\mathbf{p}^T \mathbf{q}') - \delta \mathbf{p}^T \mathbf{q}', \quad H \delta t' = \delta(H t') - t' \delta H, \quad \oint_{C_0} \delta \varphi = 0, \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = t' \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \delta H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^T} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^T} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t, \quad (10.10)$$

получим

$$\begin{aligned} I'_{\text{ПК}} \big|_{\tau=0} &= \oint_{C_0} (\mathbf{g}'^T \delta \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \delta \mathbf{f}' - H' \delta t - H \delta t') = \\ &= \oint_{C_0} (\mathbf{g}'^T \delta \mathbf{f} - \delta \mathbf{g}^T \mathbf{f}' - H' \delta t + t' \delta H) = \\ &= \oint_{C_0} (t' (\dot{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{f} - \dot{\mathbf{q}}^T \delta \mathbf{g} - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \delta H)) = \\ &= \oint_{C_0} t' (-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^T} \delta \mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^T} \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \delta H) \equiv 0. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь учтено, что при $\tau = 0$ $\delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{q}$, $\delta \mathbf{g} = \delta \mathbf{p}$.

Полученное выражение для производной $I'_{\text{ПК}}$ оказалось тождественно равным нулю для любой функции $t' = \partial t / \partial \tau$ и для любого контура C_0 . Это означает, что интеграл Пуанкаре–Картана сохраняет свое значение при любом смещении контура вдоль трубки прямых путей гамильтоновой системы. *Теорема доказана.*

В интегралах Пуанкаре и Пуанкаре–Картана интегрирование ведется по одномерному множеству (контур) в фазовом или расширенном фазовом пространстве. Поэтому они называются *относительными* интегральными инвариантами *первого порядка*. При этом

интеграл Пуанкаре называется *универсальным* инвариантом вследствие того, что его выражение не зависит от H .

Для интегралов Пуанкаре и Пуанкаре–Картана имеют место и обратные теоремы.

Теорема 10.2. *Если для системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (10.12)$$

инвариантен интеграл вида Пуанкаре–Картана

$$I = \oint_C (\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} - F \delta t), \quad (10.13)$$

то эта система гамильтонова, а ее гамильтониан $H = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

Доказательство. Как и при доказательстве «прямой» теоремы, рассмотрим произвольный контур C_0 , параметризованный формулами (10.1), и согласованный с ним контур C , параметризованный формулами (10.7). Тогда интеграл (10.13) по контуру C выразится через интеграл по контуру C_0 соотношением вида (10.8), где вместо H будет стоять функция F , а для производной I' получим аналогичное (10.11) выражение

$$\begin{aligned} I' \Big|_{\tau=0} &= \oint_{C_0} (\dot{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{x} - \dot{\mathbf{q}}^T \delta \mathbf{g} - \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \delta F) = \\ &= \oint_{C_0} (t' (\mathbf{P}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{p} - \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \delta F)). \end{aligned}$$

По условию теоремы эта производная равна нулю для любой функции $t' = \partial t / \partial \tau$ и для любого контура C_0 , что возможно только в случае, если

$$\mathbf{P}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{p} - \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \delta F = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться в любой точке любого контура C_0 , а значит, в любой точке расширенного фазового пространства, то из него в силу уравнений (10.12) и формулы для полного дифференциала

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}^T} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}^T} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t$$

вытекают равенства

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}.$$

Из них следует гамильтоновость системы (10.12) и формула $H = F$. Теорема доказана.

Теорема 10.3. Если для системы дифференциальных уравнений (10.12) инвариантен интеграл Пуанкаре, то эта система гамильтонова.

Доказательство. Так как интеграл Пуанкаре определен только на изохронных контурах, то условие теоремы сводится к равенству

$$0 = \dot{I}_{\Pi} \Big|_{t=t_0} = \oint_{C_0^*} (\dot{\mathbf{f}}^T \delta \mathbf{g} + \mathbf{f}^T \delta \dot{\mathbf{g}}) = \oint_{C_0^*} (\dot{\mathbf{f}}^T \delta \mathbf{g} - \dot{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{f}) = \oint_{C_0^*} (\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{p} - \mathbf{P}^T \delta \mathbf{q}),$$

которое выполняется для любого изохронного контура C_0^* . Отсюда следует, что выражение $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{p} - \mathbf{P}^T \delta \mathbf{q}$ должно быть *изохронным* дифференциалом $\delta^* H$ некоторой функции $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, т.е.

$$\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{p} - \mathbf{P}^T \delta \mathbf{q} = \delta^* H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^T} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^T} \delta \mathbf{q}.$$

Из этого соотношения вытекают равенства

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},$$

свидетельствующие о том, что система (10.12) гамильтонова.

10.2. Теорема Ли Хуа-чжуна

Из прямой и обратной теоремы для интеграла Пуанкаре следует, что *инвариантность этого интеграла является критерием гамильтоновости* системы. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли другие контурные интегралы, обладающие таким же свойством (речь идет об интегралах, определенных на изохронных контурах

C^*). Нижеследующая теорема утверждает, что с точностью до мультипликативной постоянной интеграл Пуанкаре является единственным интегралом такого рода.

Ниже будем использовать такую форму записи канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Здесь \mathbf{x} – вектор-столбец фазовых переменных, $H(\mathbf{x}, t)$ – гамильтониан, \mathbf{E}_n – единичная матрица размера $n \times n$, \mathbf{J} – симплектическая единица порядка $2n$, обладающая свойствами

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} \mathbf{J}^T = \mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (10.15)$$

Произвольный контурный интеграл в $2n$ -мерном пространстве фазовых переменных записывается в виде

$$I = \oint_{C^*} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \oint_{C^*} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{x}, \quad (10.16)$$

где C^* – изохронный контур, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – произвольная $2n$ -мерная функции фазовых переменных \mathbf{x} и времени t .

В свою очередь, с учетом формул

$$d\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} = \mathbf{p}^T d\mathbf{q} - \mathbf{q}^T d\mathbf{p}, \quad \delta(\mathbf{p}^T \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \delta \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} \quad (10.17)$$

интеграл Пуанкаре можно записать в виде

$$I_{\Pi} = \oint_{C^*} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} = \frac{1}{2} \oint_{C^*} d\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x}. \quad (10.18)$$

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Интеграл (10.16) является универсальным интегральным инвариантом гамильтоновых систем в том и только в том случае, когда он отличается от интеграла Пуанкаре на мультипликативную постоянную $c \neq 0$, т.е.*

$$I = \oint_{C^*} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = c I_{\Pi} = \frac{c}{2} \oint_{C^*} d\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x} \quad \forall C^*. \quad (10.19)$$

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна: если интеграл (10.16) выражается через интеграл Пуанкаре соотношением (10.19), то его инвариантность следует из инвариантности интеграла Пуанкаре.

Докажем необходимость. Пусть интеграл (10.16) является универсальным инвариантом, т.е. сохраняет свои значения вдоль *любой* трубки прямых путей *любой* гамильтоновой системы. Тогда, выразив с помощью соотношений $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$, формально описывающих закон движения системы (14), интеграл по контуру C^* через интеграл по согласованному с ним контуру C_0^* , получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dI}{dt} = \oint_{C_0^*} (\delta \dot{\boldsymbol{\Psi}}^T \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\Psi}^T \dot{\mathbf{f}}) = \\ &= \oint_{C_0^*} (\delta (\dot{\boldsymbol{\Psi}}^T \mathbf{f}) - \dot{\boldsymbol{\Psi}}^T \delta \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\Psi}^T \dot{\mathbf{f}}) = \oint_{C_0^*} (\delta \boldsymbol{\Psi}^T \dot{\mathbf{f}} - \delta \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\Psi}}). \end{aligned}$$

Отсюда при учете формул

$$\delta \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \delta \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad \dot{\boldsymbol{\Psi}} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \delta \boldsymbol{\Psi} \Big|_{t=t_0} = \delta \mathbf{x}$$

и уравнений Гамильтона (10.14) следует

$$\dot{I} \Big|_{t=t_0} = \oint_{C_0^*} \delta \mathbf{x}^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = 0. \quad (10.20)$$

Полученный интеграл равен нулю по любому замкнутому изохронному контуру. Поэтому выражение под знаком интеграла есть полный изохронный дифференциал некоторой функции $\Phi(\mathbf{x}, t)$, т.е.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (10.21)$$

По условиям теоремы функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая уравнению (10.21), должна существовать при любых функциях $H(\mathbf{x}, t)$. Условия существования такой функции определены теоремой 9.1 и выражаются следующим тождеством:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = c \mathbf{J}, \quad (10.22)$$

где c – постоянная. Это равенство, записанное в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\mathbf{f} - \frac{c \mathbf{J} \mathbf{x}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{f} - \frac{c \mathbf{J} \mathbf{x}}{2} \right)^T,$$

означает, что дифференциальная форма $d\mathbf{x}^T (\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2)$ представляет собой изохронный дифференциал δF некоторой функции $F(\mathbf{x}, t)$. На основании этого получаем равенство

$$0 = \oint_{C^*} \delta F = \oint_{C^*} d\mathbf{x}^T (\mathbf{f} - c\mathbf{J}\mathbf{x}/2) = \oint_{C^*} d\mathbf{x}^T \mathbf{f} - \frac{c}{2} \oint_{C^*} d\mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{x},$$

которое в точности совпадает с равенством (10.19). Неравенство $c \neq 0$ обусловлено тем, что в противном случае интеграл (10.16) есть тождественный нуль, а такие «инварианты» не представляют интереса. *Теорема доказана.*

10.3. Инвариантность фазового объема

Следующей теоремой устанавливается свойство инвариантности фазового объема для гамильтоновых систем. *Фазовым объемом* называется интеграл $2n$ -го порядка, представляющий собой объем $2n$ -мерной области G в *фазовом* пространстве, определяемый формулой

$$I = \int \dots \int_G \delta q_1 \dots \delta q_n \delta p_1 \dots \delta p_n = \int \dots \int_G \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n}. \quad (10.23)$$

Если в момент времени t_0 выбрать в фазовом пространстве некоторую область G_0 , то для системы с заданным гамильтонианом $H(\mathbf{x}, t)$ каждая точка \mathbf{x}_0 этой области будет порождать траекторию прямого пути $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$, а все точки области – $(2n+1)$ -мерный пучок прямых путей. В сечении этого пучка гиперплоскостью $t = \text{const} \neq t_0$ получается область G_t , согласованная с областью G_0 .

Теорема Лиувилля. *На решениях гамильтоновых систем фазовый объем сохраняется, т.е. объемы любых двух согласованных областей равны:*

$$\int_{G_t} \dots \int \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n} = \int_{G_0} \dots \int \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n} . \quad (10.24)$$

Для доказательства теоремы выразим объем по области G_t через объем по согласованной с ним области G_0 известной формулой:

$$\int_{G_t} \dots \int \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n} = \int_{G_0} \dots \int |\mathbf{M}| \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n} ; \quad |\mathbf{M}| = \det(\mathbf{M}) . \quad (10.25)$$

Здесь $\mathbf{M} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0^T$ – матрица Якоби преобразования начальных значений \mathbf{x}_0 фазовых переменных в текущие значения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t)$. Ранее (теорема 9.4) было установлено, что это преобразование каноническое и унивалентное. Поэтому из формулы $(\det \mathbf{M})^2 = c^{2n}$, вытекающей из локального критерия каноничности, следует $(\det \mathbf{M})^2 = 1$. Поскольку в момент $t = t_0$ преобразование тождественное, т.е. $\det \mathbf{M}(t_0) = 1$, то в силу непрерывности решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t)$ равенство $\det \mathbf{M} = 1$ выполняется в любой момент времени. Поэтому из равенства (10.25) следует равенство (10.24). *Теорема доказана.*

Заметим, что для фазового объема, в отличие от интеграла Пуанкаре, обратной теоремы в общем случае нет, т.е. фазовый объем может сохраняться и для не гамильтоновых систем.

Более общая формулировка теоремы Лиувилля звучит так:

если правые части системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ m -го порядка удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = 0 , \quad (10.26)$$

то на решениях системы фазовый объем сохраняется.

Заметим, что для механических систем с одной степенью свободы (для систем дифференциальных уравнений 2-го порядка) из сохранения фазового объема следует гамильтоновость системы. Этому имеется простое объяснение. Фазовый объем для системы второго порядка представляет собой площадь плоской области. Будучи выраженным через контурный интеграл по границе области, он тождественно совпадает с интегралом Пуанкаре, для которого обратная теорема имеет место.

Стационарные движения

11.1. Уравнения Рауса

Рассмотрим лагранжеву систему с n степенями свободы. Движение такой системы определяется функцией Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ и описывается системой из n дифференциальных уравнений второго порядка для n -мерного вектора обобщенных координат \mathbf{q} :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (11.1)$$

Как нам известно (раздел 8.1), уравнения (11.1) с помощью преобразования Лежандра могут быть приведены к каноническим уравнениям Гамильтона, представляющих собой систему из $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка.

При переходе к уравнениям Рауса преобразование Лежандра применяется не для всех, а только для части переменных Лагранжа, т.е. в уравнениях Рауса одной частью независимых переменных служат переменные Лагранжа, а другой – переменные Гамильтона.

Опишем процедуру вывода уравнений Рауса. Обозначим через \mathbf{x} m -мерный вектор переменных q_1, \dots, q_m , а через \mathbf{y} – $(n-m)$ -мерный вектор переменных q_{m+1}, \dots, q_n . Функция Лагранжа в этих обозначениях запишется в виде $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$. От лагранжевых переменных $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ перейдем к гамильтоновым переменным \mathbf{y}, \mathbf{p} , используя преобразование Лежандра:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t). \quad (11.2)$$

Из этих соотношений при выполнении условия

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{y}} \partial \dot{\mathbf{y}}^T} \right) \neq 0 \quad (11.3)$$

выражаются обобщенные скорости $\dot{\mathbf{y}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{p}, t). \quad (11.4)$$

Функция Рауса определяется формулой

$$R(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{p}, t) = [\dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{p} - L]_{(11.4)} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{p} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\Psi}, t), \quad (11.5)$$

где обобщенные скорости $\dot{\mathbf{y}}$ выражены через переменные Рауса соотношениями (11.4).

На основании определений (11.2), (11.4), (11.5) и правил дифференцирования сложных функций частные производные функции Рауса по переменным Рауса выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}, \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}, \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}} = \boldsymbol{\Psi} + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{y}}, \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial t} \mathbf{p} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (11.10)$$

На основании этих формул уравнения Лагранжа (11.1) приводятся к следующей системе из двух групп уравнений, называемых *уравнениями Рауса*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (11.11)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}}. \quad (11.12)$$

При этом первая группа (11.11) уравнений Рауса имеет форму уравнений Лагранжа, а вторая (11.12) – форму уравнений Гамильтона.

Исследуем структуру функции Рауса. Рассмотрим общий случай, когда функция Лагранжа представляется формой второй степени по обобщенным скоростям, т. е.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) + L_0(\mathbf{q}, t),$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ – симметрическая положительно-определенная матрица.

Записывая матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ и вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$ в блочном виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xy} \\ \mathbf{A}_{xy}^T & \mathbf{A}_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_{xx} \dot{\mathbf{x}} + 2 \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}_{xy} \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{A}_{yy} \dot{\mathbf{y}}) + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{b}_x + \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{b}_y + L_0. \quad (11.13)$$

Определяя по формуле (11.2) соответствующие переменным \mathbf{y} обобщенные импульсы, получим

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}_{yy} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_{xy}^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_y \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y - \mathbf{A}_{xy}^T \dot{\mathbf{x}}). \quad (11.14)$$

После подстановки выражений (11.14) функция Лагранжа (11.13) запишется через переменные Рауса в виде

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{b}^* + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_y^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{b}_y + L_0, \quad (11.15)$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_{xx} - \mathbf{A}_{xy} \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{xy}^T, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{b}_x - \mathbf{A}_{xy} \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{b}_y. \quad (11.16)$$

На основании формул (11.5), (11.14) и (11.15) для функции Рауса получим следующее выражение:

$$-R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{g} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y)^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y) + L_0, \quad (11.17)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}_{xy} \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y) + \mathbf{b}_x. \quad (11.18)$$

Обобщенная энергия системы записывается через переменные Рауса в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - L_0 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y)^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{b}_y) - L_0.$$

Для склерономной системы с лагранжианом $L = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}/2 - \Pi$ будем иметь $\mathbf{b}_x = \mathbf{b}_y = 0$, $L_0 = -\Pi$. При этом обобщенная энергия будет представлять собой полную энергию и выражаться формулой

$$H = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{p} + \Pi.$$

11.2. Стационарные движения систем с циклическими координатами

Разберем теперь случай, когда для рассмотренной в предыдущем разделе системы переменные \mathbf{y} являются циклическими координатами. В этом случае в силу соотношений (11.8) от переменных \mathbf{y} не будет зависеть и функция Рауса, а из уравнений (11.12) получим, что обобщенные импульсы \mathbf{p} являются первыми интегралами уравнений движения системы.

Функция Рауса (1.17) в рассматриваемом случае будет зависеть от переменных $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t$ и произвольных постоянных \mathbf{c} первых интегралов \mathbf{p} . Поэтому уравнения (11.11) отделяются от уравнений (11.12) и образуют замкнутую систему, записанную в форме уравнений Лагранжа, где лагранжианом будет служить функция

$$L^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{c}, t) = -R^* = T^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) - \Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t); \quad (11.19)$$

$$T^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A}_{xx} - \mathbf{A}_{xy} \mathbf{A}_{yy}^{-1} \mathbf{A}_{xy}^T,$$

$$\Pi^* = \frac{1}{2} (\mathbf{c} - \mathbf{b}_y)^T \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{c} - \mathbf{b}_y) - L_0,$$

$$V^* = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{g}; \quad \mathbf{g} = \mathbf{A}_{xy} \mathbf{A}_{yy}^{-1} (\mathbf{c} - \mathbf{b}_y) + \mathbf{b}_x.$$

Система, определяемая лагранжианом (11.19), называется *приведенной* по отношению к исходной (полной) системе. Слагаемое T^* в выражении (11.19) называют *кинетической энергией приведенной системы*, слагаемое Π^* – *приведенным потенциалом*, или *потенциалом Рауса*, а слагаемое $V^* = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{g}$ – *обобщенным потенциалом* приведенной системы.

Уравнения движения приведенной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (11.20)$$

Здесь \mathbf{G} – *кососимметрическая* матрица, определяемая формулой

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T} - \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}}; \quad \mathbf{G}^T = -\mathbf{G}. \quad (11.21)$$

Слагаемым $\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}}$ в уравнении (11.20) описываются *гироскопические силы*. Мощность этих сил равна нулю: $\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} \equiv 0$.

Если лагранжиан исходной системы не зависит явно от времени (система является обобщенно консервативной), то система имеет первый интеграл (интеграл обобщенной энергии):

$$H = T^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = h. \quad (11.22)$$

При этом уравнениями (11.20) допускаются положения равновесия приведенной системы $\mathbf{x}_0(\mathbf{c})$ – стационарные точки потенциала Рауса $\Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, определяемые решениями уравнений

$$\frac{\partial \Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (11.23)$$

Определение. Движения исходной (полной) системы, соответствующие положениям равновесия приведенной системы, называются *стационарными движениями*. На этих движениях не меняются *позиционные переменные* $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ и *циклические скорости* $\dot{\mathbf{y}}$, а сами циклические координаты \mathbf{y} меняются линейно со временем.

Из данного определения следует, что понятие *стационарные движения* представляет собой обобщения понятия *положения равновесия*. В положениях равновесия все фазовые переменные системы неизменны, а на стационарных движениях не меняет своих значений только часть фазовых переменных системы.

11.3. Устойчивость стационарных движений

Поскольку сколь угодно малые возмущения циклических скоростей $\dot{\mathbf{y}}$ приводят со временем к конечным изменениям циклических

координат y , то стационарное движение не может быть устойчивым по отношению к циклическим координатам. В связи с этим для стационарных движений можно рассматривать задачу об устойчивости только по отношению к той части фазовых переменных, значения которых не меняются на этих движениях. Поэтому для систем с циклическими координатами под устойчивостью стационарных движений подразумевается *устойчивость по отношению к позиционным переменным $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ и циклическим импульсам \mathbf{p}* .

Ниже приводятся основные теоремы об устойчивости стационарных движений систем с циклическими координатами.

Теорема 11.1. *Если для стационарного движения $\mathbf{x}_0(\mathbf{c})$ потенциал Рауса $\Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ имеет строгий минимум по переменным \mathbf{x} , то это стационарное движение устойчиво.*

Для доказательства теоремы достаточно взять в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$V = \left(T^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \Pi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \Pi^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}) \right)^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{c})^2. \quad (11.24)$$

Эта функция равна нулю на рассматриваемом стационарном движении, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, и строго положительна в его окрестности. Кроме того, производная по времени от функции (11.24), вычисленная в силу уравнений Рауса, равна нулю (так как $H = T^* + \Pi^*$ и \mathbf{p} являются первыми интегралами). Следовательно, выполняются все условия теоремы Ляпунова 7.3 об устойчивости.

Для гироскопически связанной системы (если матрица \mathbf{G} гироскопических сил в уравнениях (11.20) отлична от нуля) достаточные условия неустойчивости определяются следующей теоремой.

Теорема 11.2. *Если степень неустойчивости по Пуанкаре положения равновесия $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ приведенной системы нечетна (матрица $C^* = \partial^2 \Pi^* / \partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T$ имеет нечетное число отрицательных собственных чисел), то стационарное движение неустойчиво.*

Для доказательства достаточно заметить, что при условиях теоремы 11.2 положение равновесия приведенной системы при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$

неустойчиво (теорема 7.11), а из неустойчивости положения равновесия приведенной системы при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ следует неустойчивость соответствующего стационарного движения.

Для гироскопически несвязанной системы (если матрица $\mathbf{G} = 0$) приведенная система будет консервативной. В этом случае *стационарное движение неустойчиво при наличии отрицательных собственных чисел у матрицы \mathbf{C}^* в положении равновесия приведенной системы, независимо от их четности* (теорема 7.10).

Пример. Стационарные движения волчка Лагранжа. Рассмотрим задачу о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа (раздел 5.6). Используя в качестве обобщенных координат углы Эйлера φ, ψ, θ , где θ – угол между осью симметрии волчка и восходящей вертикалью, получим для функции Лагранжа волчка следующее выражение:

$$L = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - mgL \cos \theta. \quad (11.25)$$

Циклическими координатами для рассматриваемой системы являются угол собственного вращения φ и угол прецессии ψ , и им соответствуют циклические первые интегралы:

$$p_{\varphi} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cr = H, \quad p_{\psi} = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + H \cos \theta = K. \quad (11.26)$$

Здесь r – проекция угловой скорости волчка на ось симметрии, а K – проекция кинетического момента на вертикаль.

Функция Рауса (11.17) в данной задаче записывается в виде

$$-R = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} - \frac{(p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} - \frac{p_{\varphi}^2}{2C} - mgL \cos \theta,$$

а лагранжиан приведенной системы и потенциал Рауса (11.19) выражаются формулами

$$L^* = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} - W; \quad W = \Pi^* = \frac{(K - H \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgL \cos \theta. \quad (11.27)$$

В этих формулах отброшена аддитивная постоянная $Cr^2/2$.

Таким образом, приведенная система в рассматриваемой задаче представляет собой систему с одной степенью свободы, где обобщенной координатой служит угол нутации θ .

Стационарным движениям волчка Лагранжа (регулярным прецессиям) соответствуют положения равновесия приведенной системы – стационарные точки потенциала Рауса, определяемые решениями уравнения

$$W' = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{(K - H \cos \theta)H}{A \sin \theta} - \frac{(K - H \cos \theta)^2 \cos \theta}{A \sin^3 \theta} - mgL \sin \theta = 0. \quad (11.28)$$

Это уравнение определяет двухпараметрическое семейство стационарных движений $\theta(K, H)$, где K, H – произвольные постоянные первых интегралов (11.26).

Характер устойчивости стационарных движений определяется знаком второй производной потенциала Рауса по углу θ :

$$W'' = \frac{H^2}{A} - \frac{K - H \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \left(2K + H \cos \theta - 3 \frac{K - H \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) - mgL \cos \theta. \quad (11.29)$$

Положительным значениям функции (11.29) отвечают устойчивые стационарные движения, а отрицательным – неустойчивые.

В уравнении (11.28) и формуле (11.29) имеется особенность при $\sin \theta = 0$ ($\theta = 0, \pi$). Но эта особенность устранимая. Решение $\theta = 0$ (вращение волчка вокруг вертикали с наивысшим расположением центра масс) уравнения (11.28) существует только при $K = H$. В этом случае, учитывая формулу $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, получим

$$\frac{K - H \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Big|_{K=H} = \frac{H}{2 \cos^2(\theta/2)}, \quad (11.30)$$

а уравнение (11.28) запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{K=H} = \left(\frac{H^2}{2A \cos^3(\theta/2)} - 2mgL \cos(\theta/2) \right) \sin(\theta/2) = 0. \quad (11.31)$$

Уравнение (11.31) имеет решения $\theta = 0$. На этих решениях для производной (11.29) при учете формулы (11.30) получим

$$W'' \Big|_{\theta=0} = H^2/(4A) - mgL.$$

Отсюда согласно теоремам 11.1 и 11.2 следует, что вращение волчка Лагранжа вокруг вертикали с наивысшим расположением центра масс *устойчиво* при $C^2 r^2 > 4AmgL$ (условие Майевского) и *неустойчиво* при $C^2 r^2 < 4AmgL$.

Уравнение (11.31) имеет также следующие решения:

$$\cos^4(\theta/2) = H^2/(4AmgL).$$

Эти решения отвечают от решений $\theta = 0$ в точке $H^2 = 4AmgL$ и существуют при $H^2 < 4AmgL$. Для них $\sin \theta \neq 0$. Ниже будет показано, что все такие решения устойчивы.

В свою очередь, решение $\theta = \pi$ (вращение волчка вокруг вертикали с наинизшим расположением центра масс) уравнения (11.28) существует только при $K = -H$. В этом случае будем иметь

$$\left. \frac{K - H \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right|_{K=-H} = -\frac{H}{2\sin^2(\theta/2)}, \quad (11.32)$$

а уравнение (11.28) принимает вид

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \theta} \right|_{K=-H} = -\left(\frac{H^2}{2A\sin^3(\theta/2)} + 2mgL\sin(\theta/2) \right) \cos(\theta/2) = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\theta = \pi$, для которого на основании формул (11.29) и (11.32) получим

$$W''|_{\theta=\pi} = H^2/(4A) + mgL > 0.$$

Отсюда следует, что вращение волчка Лагранжа вокруг вертикали с наинизшим расположением центра масс *устойчиво* при любых значениях угловой скорости.

Исследуем теперь решения уравнения (11.28), для которых $\sin \theta \neq 0$. В этом случае вторая производная (11.29), вычисленная на решениях уравнения (11.28), выражается формулой

$$W''|_{(11.28)} = \frac{H^2}{A} - 4mgL\cos \theta + \frac{(K - H \cos \theta)^2}{A\sin^2 \theta}, \quad (11.33)$$

а множество решений уравнения (11.28) записывается в виде

$$\frac{K - H \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4AmgL \cos \theta}}{2A \cos \theta} . \quad (11.34)$$

Подставляя выражение (11.34) в формулу (11.33), получим

$$W'' \Big|_{(11.28)} = \frac{H^2}{A} - 4mgL \cos \theta + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{4A} \left(H \pm \sqrt{H^2 - 4AmgL \cos \theta} \right)^2 .$$

Поскольку решение (11.34) существует при $H^2 \geq 4AmgL \cos \theta$, то из последней формулы следует $W'' > 0$, т.е. *все регулярные прецессии волчка Лагранжа, отличные от вращений вокруг вертикали, устойчивы.*

11.4. Теоремы об устойчивости стационарных движений систем с первыми интегралами

В разделе 11.2 было дано определение стационарных движений для систем с циклическими координатами. Ниже дается обобщение этого понятия на случай произвольной механической системы.

Пусть имеется «полная» механическая система, описываемая $2n$ -мерным вектором фазовых переменных \mathbf{z} , и пусть некоторая часть \mathbf{x} этих переменных описывается *замкнутой* автономной системой из $N \leq 2n$ дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \quad (11.35)$$

Определение. Движения «полной» механической системы, соответствующие положениям равновесия системы (11.35), будем называть *стационарными движениями*.

В соответствии с данным определением, как и в случае систем с циклическими координатами, на стационарных движениях в общем случае остаются неизменными только часть фазовых переменных «полной» механической системы.

Ниже рассматриваются случаи, когда система (11.35) имеет $m + 1$ независимых автономных первых интегралов:

$$H(\mathbf{x}) = h , \quad (11.36)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}; \quad U_k(\mathbf{x}) = c_k; \quad k = 1, \dots, m, \quad 0 \leq m < N , \quad (11.37)$$

и приводятся теоремы, в которых излагается метод исследования устойчивости положений равновесия системы (11.35), т.е. стационарных движений «полной» механической системы, с использованием этих первых интегралов.

Теорема 11.3. *Невырожденная стационарная точка $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ первого интеграла $H(\mathbf{x})$ на многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$ является положением равновесия системы (11.35).*

Доказательство. Покажем, что точка $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. В окрестности точки $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ многообразие, определяемое независимыми первыми интегралами $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, может быть записано в явном виде $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, \mathbf{c})$, где \mathbf{y} – $(N - m)$ -мерный вектор независимых переменных. В координатах \mathbf{y}, \mathbf{c} система (11.35) перепишется в виде

$$\dot{\mathbf{c}} = 0, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}), \quad (11.38)$$

а правая часть системы (11.35) будет выражаться формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}). \quad (11.39)$$

В переменных \mathbf{y}, \mathbf{c} будем иметь $H = H(\mathbf{y}, \mathbf{c})$, а точке $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ будет соответствовать точка $\mathbf{y}_0(\mathbf{c}_0)$, определяемая из уравнения

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}_0} = 0. \quad (11.40)$$

В независимых переменных \mathbf{y} условие невырожденности точки $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ записываются в виде

$$\det \mathbf{H} \neq 0; \quad \mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}^T} \right|_{\mathbf{y}_0}. \quad (11.41)$$

Поскольку $H(\mathbf{y}, \mathbf{c})$ – первый интеграл, то имеет место тождество

$$\dot{H} \Big|_{(11.38)} = \frac{\partial H(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \equiv 0. \quad (11.42)$$

Дифференцируя это тождество по переменной \mathbf{y} , будем иметь

$$\frac{\partial^2 H(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}) + \frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial H(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{y}} = 0. \quad (11.43)$$

Отсюда, учитывая условия (11.40) и (11.41), получаем равенство $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \mathbf{c}_0) = 0$, из которого в силу формулы (11.39) следует равенство $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$, т.е. точка \mathbf{x}_0 – положение равновесия системы (11.35). Теорема доказана.

Замечание 11.1. Утверждение теоремы 11.3 без изменений переносится и на случай, когда $H(\mathbf{x})$ – не первый интеграл системы (11.35), а *невозрастающая вдоль решений этой системы функция*, т.е. когда

$$\dot{H} \Big|_{(11.35)} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (11.44)$$

В независимых переменных \mathbf{y} это условие переписывается в виде

$$\dot{H}(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \Big|_{(11.38)} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \leq 0. \quad (11.45)$$

В рассматриваемом случае стационарность и невырожденность точки $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ будут описываться в независимых переменных \mathbf{y} теми же условиями (11.40) и (11.41). Кроме того, поскольку производная \dot{H} достигает в точке $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ максимального значения, равного нулю, получаем условие, совпадающее с (11.43):

$$\frac{\partial \dot{H}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \right) \Big|_{\mathbf{y}_0} = 0. \quad (11.46)$$

Из условий (11.40), (11.41) и (11.46) следует $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \mathbf{c}_0) = 0$, а на основании формулы (11.39) получаем $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Теорема 11.4. Точка $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ строгого локального минимума или максимума первого интеграла $H(\mathbf{x})$ на многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$ определяет устойчивое положение равновесия системы (11.35).

Из условий теоремы следует, что $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ – невырожденная стационарная точка функции $H(\mathbf{x})$ на множестве $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$. Поэтому по теореме 11.3 она является положением равновесия системы (11.35).

Для доказательства устойчивости возьмем в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$V(\mathbf{x}) = (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_0))^2 + (\mathbf{U}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}_0)^2. \quad (11.47)$$

Эта неотрицательная функция является первым интегралом системы и в малой окрестности точки \mathbf{x}_0 принимает нулевое значение только при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, поскольку при $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ либо $\mathbf{U}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}_0 = \mathbf{c} - \mathbf{c}_0 \neq 0$, либо $H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_0) \neq 0$ (последнее следует из условий строгого условного экстремума функции $H(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ на множестве $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$). Таким образом, функция (11.47) удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова 7.3 об устойчивости. *Теорема доказана.*

Замечание 11.2. В случае, когда $H(\mathbf{x})$ – невозрастающая вдоль решений системы (11.35) функция, утверждение теоремы 11.4 об устойчивости остается в силе *только для точек $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ строгого локального минимума функции $H(\mathbf{x})$ на многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$.*

Теорема 11.5. *Невырожденная стационарная точка $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ первого интеграла $H(\mathbf{x})$ на многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$ определяет неустойчивое положение равновесия системы (11.35), если выполняются условия:*

$$1) \operatorname{rank} \left(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}^T \right) \Big|_{\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)} = N - m,$$

2) *матрица второй вариации функции $H(\mathbf{x})$ на линейном многообразии $d\mathbf{U} = 0$ имеет нечетное число отрицательных собственных значений.*

Доказательство. В независимых переменных \mathbf{y} движение системы описывается уравнениями (11.38), а условия теоремы 11.5 переписываются в виде

$$\operatorname{rank} \mathbf{P} = N - m \Rightarrow \det \mathbf{P} \neq 0; \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y}^T} \Big|_{\mathbf{y}_0}. \quad (11.48)$$

$$\det \mathbf{H} < 0; \quad \mathbf{H} = \frac{\partial^2 H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}^T} \Big|_{\mathbf{y}_0}. \quad (11.49)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать неустойчивость положения равновесия $\mathbf{y}_0(\mathbf{c}_0)$, рассматривая движения системы на многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$, т.е. исходя из уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0). \quad (11.50)$$

Раскладывая правую часть системы (11.50) и функцию $H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)$ в окрестности положения равновесия $\mathbf{y}_0(\mathbf{c}_0)$ в ряд Тейлора по степеням $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, получим

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0) = \mathbf{P}\mathbf{z} + O(|\mathbf{z}|^2), \quad H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{H}\mathbf{z} + O(|\mathbf{z}|^3), \quad (11.51)$$

а линеаризованные уравнения системы (11.50) запишутся в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\mathbf{z}. \quad (11.52)$$

Используя разложение (11.51) и учитывая, что $H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)$ – первый интеграл системы (11.50), будем иметь

$$\frac{\partial H(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0)}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{c}_0) \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{z}^T \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{z} + O(|\mathbf{z}|^3) \equiv 0. \quad (11.53)$$

Из тождества (11.53) следует $\mathbf{z}^T \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{z} = 0 \forall \mathbf{z}$, т.е. $\mathbf{H}\mathbf{P}$ – кососимметрическая матрица. При этом из условий (11.48) и (11.49) следует $\det(\mathbf{H}\mathbf{P}) \neq 0$. Но, как известно, детерминант любой кососимметрической матрицы либо равен нулю (при нечетной размерности матрицы), либо больше или равен нулю (при четной размерности матрицы). Поэтому из условий теоремы следует, что матрицы \mathbf{H} и \mathbf{P} имеют четную размерность, $\det(\mathbf{H}\mathbf{P}) > 0$, а из условий (11.48) и (11.49) получаем $\det \mathbf{P} < 0$.

Характеристический полином системы (11.52) записывается в виде $f(\lambda) = \det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{E})$, где \mathbf{E} – единичная матрица. Проанализируем поведение функции $f(\lambda)$, рассматривая вещественные значения λ на интервале $(0, +\infty)$. Имеем $f(0) = \det \mathbf{P} < 0$, а в силу четной размерности матриц \mathbf{P} и \mathbf{E} $f(+\infty) > 0$. Отсюда следует, что график функции $f(\lambda)$ пересекает ось $f = 0$ при некотором $\lambda > 0$, т.е. характеристический полином системы (11.52) имеет положительный

вещественный корень, вследствие чего по теореме Ляпунова 7.8 положение равновесия неустойчиво. *Теорема доказана.*

Замечание 11.3. Утверждение теоремы 11.5 о неустойчивости остается в силе и для случая, когда $H(\mathbf{x})$ – невозрастающая вдоль решений системы (11.35) функция.

Достаточные условия частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости определяет нижеследующая теорема.

Теорема 11.6. Пусть $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ – невырожденная стационарная точка функции $H(\mathbf{x})$ на фиксированном многообразии $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0$, определяемом первыми интегралами (11.37) системы (11.35), причем в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ выполняются условия:

$$\text{A)} \quad \dot{H} \Big|_{(11.35)} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (11.54)$$

В) Множество X^0 точек \mathbf{x} , на которых $\dot{H} \Big|_{(11.35)} = 0$, не содержит целых траекторий системы (11.35), кроме положений равновесия $\mathbf{x}_0(\mathbf{c})$.

Тогда, если в точке $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ функция $H(\mathbf{x})$ имеет строгий условный минимум, то $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ – устойчивое положение равновесия, причем любое возмущенное движение, достаточно близкое к $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$, стремится при $t \rightarrow +\infty$ к положению равновесия $\mathbf{x}_0(\mathbf{c})$, соответствующему возмущенным значениям первых интегралов $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. Если же в точке $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ функция $H(\mathbf{x})$ не имеет условного минимума, включая нестрогий, то $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}_0)$ – неустойчивое положение равновесия.

Доказательство теоремы 11.6 почти дословно повторяет доказательство теоремы Барбашина–Красовского 7.5 (раздел 7.2).

Отметим, что в рассматриваемых задачах положения равновесия $\mathbf{x}_0(\mathbf{c})$ не являются изолированными, а образуют m -параметрическое семейство. Поэтому теорему 11.6 можно рассматривать как обобщение теоремы Барбашина–Красовского 7.5 на случай неизолированных положений равновесия.

Пример. Стационарные движения волчка Эйлера. В случае Эйлера динамические уравнения вращательного движения твердого тела отделяются от кинематических и образуют замкнутую систему:

$$A\dot{p} = (B - C)qr, \quad B\dot{q} = (C - A)pr, \quad C\dot{r} = (A - B)pq. \quad (11.55)$$

Здесь p, q, r – проекции угловой скорости на главные оси инерции тела, A, B, C – главные моменты инерции тела.

При этом уравнения (11.35) допускают стационарные решения

$$p = q = 0, r = r_0; \quad q = r = 0, p = p_0; \quad r = p = 0, q = q_0, \quad (11.56)$$

соответствующие вращениям тела вокруг одной из главных осей инерции с постоянной угловой скоростью.

Система (11.55) имеет два первых интеграла, одним из которых является интеграл энергии

$$H = (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)/2 = h, \quad (11.57)$$

а вторым – интеграл квадрата кинетического момента

$$U = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2. \quad (11.58)$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемой задаче *все* стационарные движения (11.56) соответствуют стационарным точкам функции (11.57) на многообразии (11.58). Действительно, выражая из уравнения (11.58), например, r^2 , получим функцию двух независимых переменных:

$$H = \left(A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2 + K^2 \right) / 2C. \quad (11.59)$$

Стационарными точками этой функции по переменным p, q являются решения, совпадающие с первой группой решений (11.56):

$$p = q = 0, \quad r = K/C. \quad (11.60)$$

Аналогичным образом показывается, что остальные стационарные решения (11.56) соответствуют стационарным точкам функции (11.57) на многообразии (11.58).

Из формулы (11.59) следует, что если C – наибольший или наименьший из моментов инерции тела, то функция H принимает на решениях (11.60) минимальное или максимальное значение соответственно. Следовательно, по теореме 11.4 *вращения тела вокруг оси наибольшего или наименьшего момента инерции устойчивы.*

Для анализа устойчивости вращений тела вокруг оси среднего по величине момента инерции (при $A > C > B$) используем теорему 11.5. При $r_0 \neq 0$ для матрицы \mathbf{P} линеаризованной системы и матрицы \mathbf{H} вторых производных функции (11.59) имеем $\text{rank } \mathbf{P} = 2$, $\det \mathbf{H} < 0$. Следовательно, по теореме 11.5 *вращения тела вокруг оси среднего по величине момента инерции неустойчивы*.

Замечание. Устойчивость вращений тела вокруг оси наименьшего момента инерции, где полная энергия принимает не минимальные, а максимальные значения, можно объяснить только гироскопическими силами (кориолисовыми силами инерции), рассматривая движение тела относительно некоторой вращающейся системы отсчета. Такая устойчивость, как известно, разрушается диссипативными силами, которые неизбежно возникают, если объект (например, космический аппарат) имеет подвижные массы. Эти внутренние силы не меняют кинетического момента системы, но монотонно уменьшают ее энергию до тех пор, пока объект не придет в режим стационарного вращения. В подобных случаях из-за наличия диссипативных сил по теореме 11.6 вращения тела вокруг оси наименьшего момента инерции будут неустойчивыми, а гарантированно устойчивыми будут только вращения вокруг оси наибольшего момента инерции, причем эта устойчивость будет асимптотической.

Пример. Стационарные движения китайского волчка. Рассмотрим простую модель китайского волчка, в которой тяжелый шар массы m и радиуса R безотрывно движется по неподвижной горизонтальной плоскости. Предполагается, что центр масс шара C смещен от геометрического центра O на расстояние $a < R$, шар динамически симметричен относительно центра масс, а точка O лежит на оси динамической симметрии (рис. 11.1).

Введем следующие обозначения: \mathbf{i}_3 – единичный вектор восходящей вертикали, \mathbf{e}_3 – единичный вектор оси симметрии шара, θ – угол между вертикалью и осью \mathbf{e}_3 , \mathbf{V} – вектор скорости центра масс шара, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости шара, $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – тензор инерции шара для центра масс шара, $\mathbf{r} = \overline{CP}$ – вектор, соединяющий центр масс шара с текущей точкой P касания шара с плоскостью.

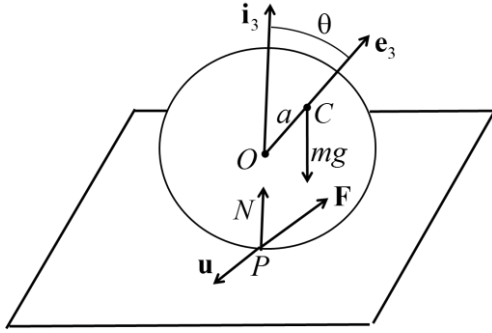


Рис. 11.1

Предполагается, что при скольжении шара по плоскости на него действует сила трения $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, направленная против скорости \mathbf{u} точки P , т.е. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} < 0$ при $\mathbf{u} \neq 0$.

Движение шара описывается системой уравнений

$$m\dot{\mathbf{V}} = (N - mg)\mathbf{i}_3 + \mathbf{F}, \quad (11.61)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times (N\mathbf{i}_3 + \mathbf{F}), \quad (11.62)$$

$$(\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{V}^T \mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3) = 0. \quad (11.63)$$

Здесь N – нормальная реакция в точке контакта.

Уравнение (11.61) выражает закон изменения импульса шара, уравнение (11.62) – закон изменения кинетического момента шара $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, вычисляемого относительно центра масс, а уравнение (11.63) – условие безотрывности шара от плоскости.

Уравнения (11.61) – (11.63) имеют следующий первый интеграл, называемый *интегралом Желле*:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{r} = c; \quad \mathbf{r} = -(R\mathbf{i}_3 + a\mathbf{e}_3). \quad (11.64)$$

Наличие этого первого интеграла устанавливается непосредственной проверкой. Вычисляя производную по времени от функции (11.64) в силу уравнений движения, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} - a\mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = 0.$$

Первое слагаемое в правой части полученного выражения равно нулю в силу уравнения (11.62), а второе равно нулю, поскольку для динамически симметричного тела векторы \mathbf{K} , $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{e}_3 компланарны.

Полная энергия волчка выражается формулой

$$H = \frac{m}{2} V^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + m g a \cos \theta \quad (11.65)$$

и является невозрастающей функцией, поскольку $\dot{H} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \leq 0$.

Исследуем стационарные движения волчка, соответствующие стационарным точкам функции (11.65) на многообразии, определяемом интегралом Желле (11.64) и соотношением (11.63).

Используя функцию Лагранжа

$$\Lambda = H + \lambda \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{r} + \mu (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}_3, \quad (11.66)$$

где λ и μ – множители Лагранжа, запишем сначала условие стационарности функции (11.65) по скоростям \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$ при фиксированном \mathbf{r} . Получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} = m \mathbf{V} + \mu \mathbf{i}_3 = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda \mathbf{J} \mathbf{r} + \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3) = 0. \quad (11.67)$$

Подставляя вытекающие из этих уравнений решения

$$m \mathbf{V} = -\mu \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = -\lambda \mathbf{r} - \mu \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3) \quad (11.68)$$

в уравнения (11.63) и (11.64), найдем выражения для множителей

$$-\mu \left(1 + (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3)^T \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3) \right) = 0 \Rightarrow \mu = 0. \quad (11.69)$$

$$-\lambda \mathbf{r}^T \mathbf{J} \mathbf{r} = c \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{\mathbf{r}^T \mathbf{J} \mathbf{r}}. \quad (11.70)$$

Подставляя эти выражения в формулы (11.68), получим

$$\mathbf{V} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{c \mathbf{r}}{\mathbf{r}^T \mathbf{J} \mathbf{r}} = \frac{k (\mathbf{i}_3 + \varepsilon \mathbf{e}_3)}{A \sin^2 \theta + C (\cos \theta + \varepsilon)^2}; \quad k = \frac{c}{R}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}. \quad (11.71)$$

Из решений (11.71) и формулы $\mathbf{V}_p = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ следует, что на стационарных движениях центр масс волчка неподвижен, а $\mathbf{V}_p = 0$, т.е. эти движения характеризуются отсутствием проскальзывания.

Полученное решение (11.71) единственно и на этом решении функция (11.65) достигает строгого условного минимума по скоростям \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$. Подставляя это решение в формулу (11.65), получим следующую функцию, называемую *эффективным потенциалом*:

$$W = \min_{\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}} H = \frac{k^2}{2(A \sin^2 \theta + C(\cos \theta + \varepsilon)^2)} + mga \cos \theta. \quad (11.72)$$

Согласно теореме 11.3 стационарным движениям волчка будут соответствовать стационарные точки функции (11.72), определяемые решениями уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = k^2 \frac{C(\cos \theta + \varepsilon) - A \cos \theta}{(A \sin^2 \theta + C(\cos \theta + \varepsilon)^2)^2} \sin \theta - mga \sin \theta = 0. \quad (11.73)$$

При этом, поскольку на всех этих решениях функция H имеет строгий минимум по скоростям \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$, то характер устойчивости решений будет полностью зависеть от знака второй производной функции (11.72) по углу θ . Согласно теоремам 11.4 и 11.5 положительным значениям второй производной будут соответствовать устойчивые, а отрицательным – неустойчивые стационарные движения волчка.

Уравнение (11.73) имеет очевидные решения $\sin \theta = 0$ ($\theta = 0, \pi$), соответствующие стационарным вращениям волчка вокруг вертикали. На этих решениях вторая производная функции (11.72) выражается формулой

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right|_{\sin \theta = 0} = k^2 \frac{C(\cos \theta + \varepsilon) - A \cos \theta}{C^2(\cos \theta + \varepsilon)^4} \cos \theta - mga \cos \theta. \quad (11.74)$$

Из формулы (11.74) при учете формулы (11.71) получаем

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = k^2 \frac{C(1 + \varepsilon) - A}{C^2(1 + \varepsilon)^4} - mga = \omega^2 \frac{C(1 + \varepsilon) - A}{(1 + \varepsilon)^2} - mga. \quad (11.75)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\pi} = k^2 \frac{C(1-\varepsilon) - A}{C^2(1-\varepsilon)^4} + mga = \omega^2 \frac{C(1-\varepsilon) - A}{(1-\varepsilon)^2} + mga. \quad (11.76)$$

Из формулы (11.75) следует, что устойчивые вращения волчка вокруг вертикали с наивысшим расположением центра масс ($\theta = 0$) существуют только в случае, когда параметры волчка удовлетворяют условию $A/C < 1 + \varepsilon$. При этом устойчивыми будут только такие из этих движений, для которых угловая скорость вращения волчка подчиняется неравенству

$$\omega^2 > \omega_+^2 = \frac{mga(1+\varepsilon)^2}{C(1+\varepsilon) - A}. \quad (11.77)$$

В свою очередь, из формулы (11.76) следует, что вращения волчка вокруг вертикали с наименьшим расположением центра масс ($\theta = \pi$) будут устойчивы при любых значениях угловой скорости, если $A/C \leq 1 - \varepsilon$. Если же параметры волчка удовлетворяют условию

$$1 - \varepsilon < A/C < 1 + \varepsilon, \quad (11.78)$$

то решения $\theta = \pi$ будут устойчивы только при угловых скоростях, ограниченных неравенством

$$\omega^2 < \omega_-^2 = \frac{mga(1-\varepsilon)^2}{A - C(1-\varepsilon)}. \quad (11.79)$$

Таким образом, если параметры волчка удовлетворяют условиям (11.78), а угловая скорость превышает значения (11.77) и (11.79), то вращения волчка вокруг вертикально расположенной оси симметрии с наименьшим расположением центра масс неустойчивы, а устойчивыми являются вращения волчка вокруг вертикали с наивысшим расположением центра масс. Этим и объясняется переворот на 180° китайского волчка, раскрученного с большой угловой скоростью вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наименьшем в начальный момент времени расположении центра масс.

Рассмотрим теперь стационарные вращения волчка, соответствующие решениям уравнения (11.73), для которых $\sin \theta \neq 0$. Эти решения (регулярные прецессии) описываются уравнением

$$k^2 = \frac{mga \left(A \sin^2 \theta + C(\cos \theta + \varepsilon)^2 \right)^2}{(C - A) \cos \theta + C\varepsilon}. \quad (11.80)$$

Решения (11.80) отвечают от решений $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ в точках (11.77) и (11.79) соответственно.

Из уравнения (11.80) следует, что в области (11.78) значений параметров волчка регулярные прецессии существуют для любого значения $\theta \in (0, \pi)$. При $A/C > 1 + \varepsilon$ существующие регулярные прецессии волчка ограничены диапазоном $\cos \theta < C\varepsilon/(A - C)$, а при $A/C < 1 - \varepsilon$ – диапазоном $\cos \theta > C\varepsilon/(A - C)$.

Заметим, что согласно (11.71) на стационарных движениях центр масс волчка неподвижен. Поэтому для регулярных прецессий точка касания описывает на плоскости окружность радиуса $a \sin \theta$.

Выписывая вторую производную функции (11.72) и учитывая уравнение (11.80), получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = mga \left(\frac{4(C\varepsilon + (C - A) \cos \theta)}{A \sin^2 \theta + C(\cos \theta + \varepsilon)^2} - \frac{C - A}{C\varepsilon + (C - A) \cos \theta} \right) \sin^2 \theta. \quad (11.81)$$

Значениям угла θ , для которых функция (11.81) принимает положительные значения, будут соответствовать устойчивые, а при отрицательных значениях функции (11.81) – неустойчивые регулярные прецессии волчка.

Задача определения знака функции (11.81) в зависимости от значений параметров волчка и угла θ сводится, как нетрудно видеть, к анализу корней квадратного уравнения относительно $\cos \theta$ и поэтому принципиальных затруднений не вызывает.

Как было установлено, для любого стационарного движения волчок катится по плоскости без проскальзывания. Поэтому все полученные выше результаты о существовании и устойчивости стационарных движений волчка справедливы для любой модели трения.

Метод осреднения. Теоремы Боголюбова

Во многих задачах движения механических систем описывается нелинейными неавтономными дифференциальными уравнениями, для которых построить точное аналитическое решение не представляется возможным. Для анализа решений таких систем разработаны приближенные методы. Здесь мы рассмотрим основы метода осреднения, применимого для анализа систем, близких к интегрируемым.

Пусть исследуемая неавтономная система описывается векторным уравнением

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{z}, t, \varepsilon). \quad (12.1)$$

Предполагается, что $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а при $\varepsilon = 0$ *невозмущенная система* $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t)$ имеет точное общее решение

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{C}, t), \quad (12.2)$$

где \mathbf{C} – вектор произвольных постоянных. Таким образом, рассматриваемая система (12.1) является *близкой к интегрируемой*.

Ставится задача построить такую приближенную автономную систему, решение которой с некоторой гарантированной точностью описывало бы решение исходной *возмущенной* системы (12.1).

Такой подход к исследованию решений неавтономных систем оправдан тем, что анализ решений автономных систем представляет собой, как правило, более простую задачу, чем анализ решений неавтономных систем. Кроме того, в некоторых случаях построенные таким способом приближенные автономные системы имеют асимптотически устойчивые положения равновесия и из этого свойства при определенных условиях гарантируется наличие асимптотически устойчивых периодических решений точных неавтономных систем.

Для решения поставленной задачи система (12.1) сначала приводится к так называемой *стандартной форме*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad (12.3)$$

в которой малый параметр ε является множителем при всей правой части уравнения, и поэтому все переменные \mathbf{x} медленно меняются с течением времени.

Для приведения системы (12.1) к стандартной форме (12.3) используется метод вариации произвольных постоянных, в котором решение возмущенной системы (12.1) ищется в виде $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{g}(\mathbf{C}, t)$ – общее решение невозмущенной системы. Подставляя эту функцию в уравнение (12.1), получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{g}, t) + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{g}, t, \varepsilon). \quad (12.4)$$

Поскольку $\mathbf{g}(\mathbf{C}, t)$ является решением невозмущенной системы, то $\partial \mathbf{g} / \partial t = \mathbf{f}(\mathbf{g}, t)$, а уравнение (12.4) принимает искомую *стандартную форму*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t, \varepsilon) = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon). \quad (12.5)$$

Далее будем рассматривать случай, когда функция $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ в правой части системы (12.3) периодична по t с периодом T . Запишем эту функцию в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \varepsilon) + \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t, \varepsilon); \quad \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) dt. \quad (12.6)$$

Здесь $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \varepsilon)$ – среднее по времени за период, а $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ – *дополнение к среднему*, т.е. зависящее от времени слагаемое с нулевым средним, которое в сумме с $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \varepsilon)$ дает $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$.

Автономная система, получаемая осреднением правой части системы (12.3) по времени, описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{u}} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{u}, \varepsilon) \quad (12.7)$$

и называется *осредненной системой* по отношению к (12.3).

В нижеследующей теореме, доказательство которой приведено в книгах [9, 10], дается оценка близости решений $\mathbf{x}(t)$ точной системы (12.3) и $\mathbf{u}(t)$ осредненной системы (12.7) с одинаковыми начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}(0) = \mathbf{x}_0$.

Теорема 12.1 (Н. Н. Боголюбов). Пусть в некоторой области D фазового пространства системы (12.3) можно указать такие положительные постоянные M и λ , что для любых $t > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех точек из области D выполняются неравенства

$$\|\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)\| \leq M, \quad \|\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) - \mathbf{X}(\mathbf{x}', t, \varepsilon)\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad (12.8)$$

а решение $\mathbf{u}(t)$ осредненной системы (12.7) принадлежит области D вместе с некоторой своей ρ -окрестностью. Тогда для любого наперед заданного $L > 0$ можно найти такие $B > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любых $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале времени $0 \leq t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)\| \leq B\varepsilon. \quad (12.9)$$

Решение $\mathbf{u}(t)$ осредненной системы (12.7) называется *первым приближением* для системы (12.3).

Можно построить и осредненные уравнения более высоких порядков. Необходимость построения высших приближений возникает в случаях, когда по первому приближению не удастся установить некоторые свойства системы, например, свойства устойчивости установившихся движений.

Опишем процедуру построения второго приближения для системы (12.3). Согласно принятым выше обозначениям эта система записывается в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t, \varepsilon). \quad (12.10)$$

Осредненная система первого приближения (12.7) получается отбрасыванием второго слагаемого в правой части уравнения (12.10).

Для получения осредненной системы второго приближения используется близкая к тождественной замена переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{S}(\mathbf{y}, t), \quad (12.11)$$

приводящая систему (12.10) к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{y}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t, \varepsilon). \quad (12.12)$$

Здесь через $\varepsilon^2 \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t, \varepsilon)$ обозначена совокупность членов второго порядка и выше по ε .

Подставляя преобразование (2.11) в уравнение (2.10), получим

$$\dot{\mathbf{y}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{X}_0((\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{S}), \varepsilon) + \varepsilon \tilde{\mathbf{X}}((\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{S}), t, \varepsilon).$$

Отсюда видно, что система примет форму (12.12), если функцию \mathbf{S} определить формулой

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, t, \varepsilon) \Rightarrow \mathbf{S} = \int_0^t \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \tau, \varepsilon) d\tau. \quad (12.13)$$

При этом функция $\mathbf{Y}(\mathbf{y}, t, \varepsilon)$ в уравнении (12.12) будет определяться формулой

$$\mathbf{Y}(\mathbf{y}, t, \varepsilon) = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{X}_0(\mathbf{y}, \varepsilon) + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{y}, \varepsilon, t)}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{S} + O(\varepsilon).$$

Применяя к системе (2.12) процедуру осреднения, получим осредненную систему второго приближения в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{y}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{X}_1(\mathbf{y}, \varepsilon); \quad \mathbf{X}_1(\mathbf{y}, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t, \varepsilon) dt. \quad (12.14)$$

Решение уравнения (2.14) после подстановки в (12.11) дает решение исходного уравнения (12.3) с оценкой вида

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)\| \leq B\varepsilon^2, \quad 0 \leq t < L/\varepsilon,$$

т.е. на порядок точнее, чем первое приближение.

Аналогичной процедурой по индукции для системы (12.3) можно построить осредненную систему любого порядка n . Однако, построение высших приближений сопряжено с большим объемом вычислительных процедур, причем этот объем «нелинейно» возрастает с ростом n . Поэтому в большинстве задач удастся построить только несколько приближений.

Следующей теоремой устанавливается соответствие между стационарными решениями (положениями равновесия) осредненной системы и периодическими движениями исходной системы [9].

Теорема 12.2 (Н. Н. Боголюбов). Пусть $\mathbf{u}_0 = \text{const}$ – невырожденное стационарное решение осредненной системы (12.7), т.е.

$$\mathbf{X}_0(\mathbf{u}_0, \varepsilon) = 0, \quad \det \mathbf{D} \neq 0; \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\mathbf{u}_0}.$$

Тогда для всех достаточно малых ε у системы (12.3) имеется периодическое решение с периодом T , которое стремится к \mathbf{u}_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если, кроме того, все собственные числа матрицы \mathbf{D} имеют отрицательные вещественные части, то это периодическое решение асимптотически устойчиво.

Заметим, что под устойчивостью периодических решений подразумевается не устойчивость в смысле Ляпунова, где сравниваются возмущенные и невозмущенные решения системы в одинаковые моменты времени, а *орбитальная устойчивость*, определение которой приводится ниже.

Пусть периодическому движению соответствует замкнутая кривая γ в фазовом пространстве системы. ε -окрестностью этой кривой называется множество $U_\varepsilon(\gamma)$ точек \mathbf{x} , для каждой из которых найдется $\mathbf{y} \in \gamma$, такая, что $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon$.

Определение. Периодическое движение $\gamma(t)$ называется орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) \in U_\delta(\gamma)$ при всех $t \geq 0$ лежит в окрестности $U_\varepsilon(\gamma)$.

Периодическое движение $\gamma(t)$ называется асимптотически орбитально устойчивым, если оно орбитально устойчиво и любое решение с начальным условием из некоторой окрестности $U_\Delta(\gamma)$ стремится к кривой γ при $t \rightarrow +\infty$.

Пример. Маятник с вибрирующей точкой подвеса. Рассмотрим плоский математический маятник массы m и длины l , точка подвеса которого совершает прямолинейные гармонические колебания под углом β к горизонтали по закону

$$x = a \cos \beta \sin \omega t, \quad y = a \sin \beta \sin \omega t. \quad (12.15)$$

Здесь a – амплитуда, а ω – частота колебаний точки подвеса.

В качестве обобщенной координаты возьмем угол θ отклонения маятника от нисходящей вертикали. Тогда функция Лагранжа с точностью до аддитивной функции времени выразится формулой

$$L = \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2la\omega \dot{\theta} \cos(\theta - \beta) \cos \omega t \right) + mgl \cos \theta. \quad (12.16)$$

Будем считать, что действующий в оси подвеса маятника момент диссипативных сил пропорционален его угловой скорости, т.е. $Q_\theta = -\tilde{\lambda} \dot{\theta}$, где $\tilde{\lambda}$ – коэффициент вязкого трения. Используя обозначения

$$\varepsilon = \frac{a}{l}, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{ml^2}, \quad (12.17)$$

где ω_0 – частота малых колебаний маятника при отсутствии вибрации и диссипации, получим уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta - \varepsilon \omega^2 \cos(\theta - \beta) \sin \omega t = 0. \quad (12.18)$$

Переходя к безразмерному времени $\tau = \omega t$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \theta - \varepsilon \cos(\theta - \beta) \sin \tau = 0. \quad (12.19)$$

Далее полагаем, что амплитуда колебаний точки подвеса много меньше длины маятника, т.е. $\varepsilon \ll 1$, а частота колебаний точки подвеса много больше ω_0 , т.е. $\omega \gg \omega_0$, причем $\omega_0 = \varepsilon k \omega$, где k – не зависящая от ε ограниченная безразмерная величина. В этих обозначениях уравнение (12.19) перепишется в виде

$$\theta'' + \varepsilon \mu \theta' + \varepsilon^2 k^2 \sin \theta - \varepsilon \cos(\theta - \beta) \sin \tau = 0; \quad \mu = \lambda k / \omega_0. \quad (12.20)$$

Здесь и далее производные по τ обозначаются штрихом.

Выберем ε в качестве малого параметра и приведем уравнение (12.20) к системе в стандартной форме. Зададим преобразование к новым фазовым переменным φ и Ω формулами

$$\theta = \varphi - \varepsilon \sin \tau \cos(\varphi - \beta), \quad \theta' = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \cos(\varphi - \beta). \quad (12.21)$$

Дифференцируя первую из этих формул по τ и сопоставляя со второй, получим первое уравнение:

$$[1 + \varepsilon \sin \tau \sin(\varphi - \beta)] \varphi' = \varepsilon \Omega. \quad (12.22)$$

Дифференцируя вторую из формул (12.21) по τ и подставляя полученное выражение в (12.20), получим второе уравнение:

$$\begin{aligned} \varepsilon\Omega' + \varepsilon \sin \tau \cos(\varphi - \beta) + \varepsilon\varphi' \cos \tau \sin(\varphi - \beta) = \\ = -\varepsilon\mu\theta' - \varepsilon^2 k^2 \sin \theta + \varepsilon \cos(\theta - \beta) \sin \tau. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Из формул преобразования (12.21) следует, что $\sin \theta = \sin \varphi + O(\varepsilon)$,

$$\cos(\theta - \beta) = \cos(\varphi - \beta) + \varepsilon \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta) \sin \tau + O(\varepsilon^2),$$

При учете этих соотношений уравнения (12.22) и (12.23) записываются в искомой стандартной форме:

$$\varphi' = \varepsilon\Omega + O(\varepsilon^2), \quad (12.24)$$

$$\begin{aligned} \Omega' = -\varepsilon\Omega \cos \tau \sin(\varphi - \beta) - \varepsilon\mu[\Omega - \cos \tau \cos(\varphi - \beta)] - \\ - \varepsilon k^2 \sin \varphi + \varepsilon \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta) \sin^2 \tau + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (12.25)$$

Здесь $O(\varepsilon^2)$ – члены второго порядка и выше по ε .

Осредняя правые части полученной системы по времени и оставляя только члены первого порядка по ε , получим следующую осредненную систему первого приближения:

$$\varphi' = \varepsilon\Omega, \quad \Omega' = -\varepsilon\mu\Omega - \frac{\varepsilon}{2}(2k^2 \sin \varphi - \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)). \quad (12.26)$$

По теореме Боголюбова 12.2 стационарные решения (положения равновесия) осредненной системы (12.26) соответствуют периодическим колебаниям маятника. Для анализа этих решений удобно записать систему (12.26) одним уравнением второго порядка:

$$\varphi'' + \varepsilon\mu\varphi' + \frac{\varepsilon^2}{2}(2k^2 \sin \varphi - \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)) = 0. \quad (12.27)$$

Подробный анализ стационарных решений уравнения (12.27) проведем для двух случаев. Сначала рассмотрим случай $\beta = 0$, т.е. когда точка подвеса совершает горизонтальные колебания. В этом случае уравнение (12.27) принимает вид

$$\varphi'' + \varepsilon\mu\varphi' + \varepsilon^2 f(\varphi)/2 = 0, \quad f(\varphi) = 2k^2 \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi. \quad (12.28)$$

Положениям равновесия, определяемым из уравнения $f(\varphi) = 0$, для этого случая соответствуют следующие значения угла φ :

$$\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi, \quad (12.29)$$

$$\cos \varphi = 2k^2; \quad k^2 \leq 1/2. \quad (12.30)$$

Характер устойчивости положений равновесия определяется знаком производной:

$$\partial f / \partial \varphi = 2k^2 \cos \varphi - \cos 2\varphi. \quad (12.31)$$

При этом, если $\partial f / \partial \varphi > 0$, решение асимптотически устойчиво, а если $\partial f / \partial \varphi < 0$, то неустойчиво.

Для решений $\varphi = 0$ имеем $\partial f / \partial \varphi = 2k^2 - 1$. Отсюда следует, что колебания маятника в окрестности наинизшего положения асимптотически устойчивы при $2k^2 > 1$ и неустойчивы при $2k^2 < 1$.

Для решений $\varphi = \pi$ получаем $\partial f / \partial \varphi = -2k^2 - 1 < 0$, т.е. колебания маятника в окрестности наивысшего положения неустойчивы при любой частоте колебаний точки подвеса.

Для решений (12.30), соответствующих отклоненным от вертикали положениям маятника, $\partial f / \partial \varphi = 1 - 4k^4$. Эти решения отвечают от решений $\varphi = 0$ в точке $k^2 = 1/2$ и асимптотически устойчивы на всем интервале значений k , где они существуют.

Отметим, что в рассмотренном примере бифуркационная диаграмма стационарных решений аналогична бифуркационной диаграмме равновесий маятника относительно плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta = \pi/2$, т.е. точка подвеса совершает вертикальные колебания. В этом случае уравнение (12.27) принимает вид

$$\varphi'' + \varepsilon \mu \varphi' + \varepsilon^2 f(\varphi)/2 = 0, \quad f(\varphi) = 2k^2 \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi, \quad (12.32)$$

а производная $\partial f / \partial \varphi$ выражается формулой

$$\partial f / \partial \varphi = 2k^2 \cos \varphi + \cos 2\varphi. \quad (12.33)$$

В рассматриваемом случае осредненная система имеет следующие положения равновесия:

$$\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi, \quad (12.34)$$

$$\cos \varphi = -2k^2; \quad k^2 \leq 1/2. \quad (12.35)$$

Для решений $\varphi = 0$ имеем $\partial f / \partial \varphi = 2k^2 + 1 > 0$, т.е. колебания маятника в окрестности наинизшего положения асимптотически устойчивы при любой частоте колебаний точки подвеса.

Для решений $\varphi = \pi$ получаем $\partial f / \partial \varphi = 1 - 2k^2$, т.е. колебания маятника в окрестности наивысшего положения асимптотически устойчивы при $2k^2 < 1$ и неустойчивы при $2k^2 > 1$.

Таким образом, если частота вертикальных колебаний точки подвеса удовлетворяет неравенству $\omega > \sqrt{2} \omega_0 / \varepsilon = \sqrt{2} \omega_0 l / a$, то из неустойчивого при отсутствии вибрации точки подвеса верхнего положения равновесия маятника «рождается» асимптотически устойчивое периодическое колебание.

Решения (12.35), соответствующие отклоненным от вертикали положениям маятника, ответвляются от решений $\varphi = \pi$ в точке $k^2 = 1/2$ и неустойчивы на всем интервале значений k , где они существуют.

Можно показать [9], что для маятника с вибрирующей точкой подвеса, помимо рассмотренных выше асимптотически устойчивых колебаний в окрестности неизменного направления, существуют также асимптотически устойчивые ротационные движения (резонансные вращения) вида $s : n$, где s и n – целые числа, на которых маятник совершает ровно s оборотов вокруг точки подвеса за n колебаний точки подвеса. Для исследования таких движений необходимо использовать осредненные уравнения второго и более высоких приближений, построение которых сопряжено с весьма громоздкими вычислительными процедурами.

Приложение 1

Элементы матричного анализа

В этом разделе излагаются правила дифференцирования векторных функций по векторному аргументу и приводится *теорема об условиях интегрируемости (условиях потенциальности векторного поля)*, используемая в различных разделах аналитической механики.

Векторы в n -мерном пространстве задаются своими компонентами в некотором базисе этого пространства и записываются либо в виде вектора-столбца, либо в виде вектора-строки следующим образом:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^T = (f_1 \cdots f_n).$$

Здесь и всюду далее символ « T » означает знак транспонирования.

Для скалярного произведения двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} одинаковой размерности будем использовать обозначения: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$.

Векторное произведение в трехмерном пространстве будем обозначать через $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Всюду далее, рассматривая различные векторные функции векторных аргументов, будем предполагать, что эти функции достаточно гладкие, так что все вычисляемые производные существуют и непрерывны.

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – n -мерная вектор-функция m -мерного вектора \mathbf{x} . Для таких функций вводятся две операции дифференцирования:

1°. Производная от вектора-столбца $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по вектору-строке \mathbf{x}^T , представляющая собой матрицу частных производных размера $n \times m$ (матрицу Якоби преобразования вектора \mathbf{x} в вектор \mathbf{f}):

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_m} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

2°. Производная от вектора-строки \mathbf{f}^T по вектору-столбцу \mathbf{x} – матрица частных производных размера $m \times n$, транспонированная к матрице (1):

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T. \quad (2)$$

Для скалярных функций производная (1) будет вектором-строкой, а производная (2) – вектором-столбцом.

Первый дифференциал функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно записать в виде вектора-столбца либо в виде вектора-строки следующим образом:

$$d\mathbf{f} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{f}^T = d\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3)$$

Формулами (3) выражаются дифференциалы функций через производные функций. Эти формулы можно также использовать для вычисления производных от функций по известным выражениям для дифференциалов функций.

Производные от сложных функций. Пусть задана вектор-функция $\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ и требуется вычислить производную $\partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{x}^T$. Записывая с помощью формул (3) первый дифференциал функции $\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, получим

$$d\mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^T} d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}^T}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{z}^T}{\partial \mathbf{y}}. \quad (4)$$

Вторая из формул (4) получается транспонированием первой.

Производные обратных функций. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ – прямая и обратная функции, где \mathbf{x} и \mathbf{y} – векторы одинаковой размерности. На основании формул (3) имеем

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T} d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x}.$$

Отсюда, обозначив через \mathbf{E} единичную матрицу, получим

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}^T} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

В случае, когда связь между переменными \mathbf{x} и \mathbf{y} задана уравнением неявного вида $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, матрица производных $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}^T$ находится из уравнения, получаемого дифференцированием тождества $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \equiv 0$ по переменной \mathbf{x} , и определяется формулой

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}^T} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}.$$

Отметим, что по *теореме о неявных функциях* уравнение $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ разрешимо относительно \mathbf{y} , если $\det(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}^T) \neq 0$.

Производные от линейных форм. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где \mathbf{A} – постоянная матрица (или не зависит от \mathbf{x}), число столбцов которой совпадает с размерностью вектора \mathbf{f} . Для этого случая получим

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T. \quad (6)$$

Для линейных функций $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ формулы (6) принимают вид

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T. \quad (6^*)$$

Производные от билинейных форм. Пусть $z = \mathbf{f}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}$, где \mathbf{A} – постоянная матрица, у которой число столбцов совпадает с размерностью вектора $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, а число строк – с размерностью вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Используя формулы (3) и учитывая, что $z(\mathbf{x})$ – скалярная функция, получим для ее первого дифференциала следующее выражение:

$$dz = d\mathbf{f}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi} + \mathbf{f}^T \mathbf{A} d\boldsymbol{\psi} = d\mathbf{x}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{f} \right).$$

Отсюда следует формула для производной билинейной формы:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{f}. \quad (7)$$

Для производной от квадратичной формы получим

$$\frac{\partial(\mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{f}, \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}, \quad (8)$$

а в случае, когда \mathbf{A} – симметрическая матрица, будем иметь

$$\frac{\partial(\mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{f}, \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (9)$$

Для скалярных функций $F(\mathbf{x})$ векторного аргумента определяются матрицы вторых производных следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^T} \right). \quad (10)$$

При этом известное из анализа свойство *симметричности* матрицы вторых производных функции $F(\mathbf{x})$ записывается в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}. \quad (11)$$

Для матрицы вторых производных от квадратичной формы $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ из определения (10) и формул (8), (6) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} ((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T. \quad (12)$$

Покажем теперь, что имеет место следующее тождество:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \right)^T = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}. \quad (13)$$

Справедливость тождества (13) доказывается непосредственным вычислением. Записывая выражение в скобках в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \boldsymbol{\Psi})_k,$$

где f_k – компоненты вектора \mathbf{f} , а $(\mathbf{A}\boldsymbol{\psi})_k$ – компоненты вектора $\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}$, получим для левой части формулы (13) следующее выражение:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial^2 f_k}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{A}\boldsymbol{\psi})_k.$$

Отсюда ввиду симметричности матрицы вторых производных от любой скалярной функции f_k следует тождество (13).

В нижеследующей теореме $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – векторная функция векторных переменных \mathbf{x} и \mathbf{y} , причем размерности векторов \mathbf{f} и \mathbf{x} одинаковы.

Теорема об условиях интегрируемости (об условиях потенциальности векторного поля). Для того чтобы существовала скалярная функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (14)$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}^T$ была симметрической, т.е.

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (15)$$

При условиях (15) решение уравнения (14) определяется с точностью до аддитивной функции $\varphi(\mathbf{y})$ формулой

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\theta \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\theta. \quad (16)$$

Необходимость условия (15) очевидна. Если функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ существует, то условие (15) следует из уравнения (14) и свойства (11) симметричности матрицы вторых производных функции $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по переменным \mathbf{x} .

Для доказательства достаточности подставим решение (16) в правую часть уравнения (14). Учитывая формулу (7), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_0^1 \left\{ \mathbf{f}(\theta \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\theta + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \theta \mathbf{x} d\theta \right\} = \\ &= \int_0^1 \left\{ d_\theta [\theta \mathbf{f}(\theta \mathbf{x}, \mathbf{y})] - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \theta \mathbf{x} d\theta + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \theta \mathbf{x} d\theta \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда при условиях (15) получаем тождество

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 d_\theta [\theta \mathbf{f}(\theta \mathbf{x}, \mathbf{y})] = \theta \mathbf{f}(\theta \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_0^1 \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

доказывающее достаточность условий теоремы.

Доказанная теорема содержательна тем, что она не только определяет условия существования решения, но и дает явную формулу для этого решения.

Для трехмерного векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, где \mathbf{r} – трехмерный вектор, а t – скалярная переменная (время), *кососимметрическая* матрица \mathbf{D} (15) ($\mathbf{D}^T = -\mathbf{D}$) выражается через компоненты d_1, d_2, d_3 трехмерного вектора $\mathbf{d} = \text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ формулой

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для трехмерного векторного поля условие потенциальности (15) может быть переписано в виде равенства нулю *ротора* векторного поля:

$$\text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T. \quad (18)$$

Приложение 2

Алгебра кватернионов

Кватернионы были введены в математику В. Р. Гамильтоном в 1843 году. Они представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа и записываются выражениями следующего вида:

$$\Lambda = \lambda_0 \mathbf{i}_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — произвольные действительные числа, называемые компонентами кватерниона Λ , а $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — кватернионные единицы.

Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры, т. е. при сложении двух кватернионов складываются их соответствующие компоненты:

$$\Lambda + \mathbf{M} = \sum_{k=0}^3 (\lambda_k + \mu_k) \mathbf{i}_k.$$

Кватернионное произведение обозначается знаком « \circ » и определяется так, что при умножении кватерниона на скаляр a умножаются на этот скаляр все его компоненты, т. е.

$$a \circ \Lambda = \Lambda \circ a = \sum_{k=0}^3 a \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad (2)$$

а правила умножения кватернионных единиц определяются следующей таблицей:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 \circ \mathbf{i}_0 &= \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{i}_0 \circ \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_k = -1; \quad k=1, 2, 3, \\ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1 &= -\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с этими правилами можно использовать такую интерпретацию кватернионов, при которой элемент \mathbf{i}_0 отождествляется с вещественной единицей, а элементы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — с единичными векторами, образующими в трехмерном пространстве правую орто-

гональную тройку. Тогда по аналогии с комплексными числами кватернион Λ можно представить в виде формальной суммы скалярной части λ_0 и векторной части λ :

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \lambda, \quad (4)$$

а правила (3) умножения базисных векторов определить через скалярное и векторное произведения следующей формулой:

$$\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_j = -(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_j) + \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_j, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (3^*)$$

Тогда, аксиоматизируя свойство дистрибутивности

$$\Lambda \circ (\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \Lambda \circ \mathbf{M} + \Lambda \circ \mathbf{N}, \quad (5)$$

получим для кватернионного произведения векторов λ и μ (кватернионов с нулевой скалярной частью) формулу

$$\lambda \circ \mu = -(\lambda \cdot \mu) + \lambda \times \mu, \quad (6)$$

а формула для произведения двух «полноценных» кватернионов $\Lambda = \lambda_0 + \lambda$ и $\mathbf{M} = \mu_0 + \mu$ запишется в следующем виде:

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = \lambda_0 \mu_0 - (\lambda \cdot \mu) + \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu. \quad (7)$$

Из приведенных правил сложения и умножения следует, что алгебра кватернионов включает в себя алгебру вещественных и комплексных чисел. При рассмотрении кватернионов с нулевыми векторными частями ($\Lambda = \lambda_0$) получаем алгебру вещественных чисел, а в случае, когда векторная часть кватернионов представлена одним измерением ($\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1$) — алгебру комплексных чисел.

Укажем основные свойства умножения кватернионов.

1. Умножение кватернионов обладает дистрибутивными по отношению к сложению свойствами (5).

2. Умножение кватернионов ассоциативно, т. е.

$$\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N} = \Lambda \circ (\mathbf{M} \circ \mathbf{N}) = (\Lambda \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N}. \quad (8)$$

3. Кватернионное умножение *не обладает свойством коммутативности*, т. е. $\Lambda \circ \mathbf{M} \neq \mathbf{M} \circ \Lambda$.

Некоммутативность кватернионного умножения является следствием некоммутативности векторного произведения $\lambda \times \mu$, входящего в формулу (7). Равенство $\Lambda \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} \circ \Lambda$ имеет место только в том случае, когда векторные части сомножителей коллинеарны, т. е. $\lambda \times \mu = 0$.

4. Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей, т. е.

$$sqal(\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N}) = sqal(\mathbf{N} \circ \Lambda \circ \mathbf{M}). \quad (9)$$

Свойство (8) устанавливается непосредственной проверкой с использованием аксиом сложения и умножения, а свойство (9) вытекает из свойства (8) и формулы (7), в силу которой скалярная часть произведения двух кватернионов не зависит от порядка сомножителей:

$$sqal[(\Lambda \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N}] = sqal[\mathbf{N} \circ (\Lambda \circ \mathbf{M})].$$

По аналогии с комплексными числами для кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \lambda$ определяется сопряженный кватернион $\overline{\Lambda}$:

$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda. \quad (10)$$

Нормой кватерниона Λ называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение $\overline{\Lambda}$:

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = \lambda_0^2 + (\lambda \cdot \lambda) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2. \quad (11)$$

Таким образом, норма кватерниона является скаляром и инвариантна по отношению к выбору базиса $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, в то время как компоненты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ векторной части кватерниона зависят от выбора базиса.

Кватернион Λ называется *нормированным*, если $\|\Lambda\| = 1$.

Правила вычисления сопряженного значения и нормы от произведения двух кватернионов легко устанавливаются с помощью формулы умножения (7). Так, для произведения двух кватернионов $\overline{\mathbf{M}} = \mu_0 - \mu$ и $\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda$ имеем

$$\overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_0 \mu_0 - (\lambda \cdot \mu) - (\lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu) = \overline{(\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M})}.$$

Отсюда следует, что сопряженное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$\overline{(\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M})} = \overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}. \quad (12)$$

Формула (12) позволяет, в свою очередь, найти выражение для нормы произведения двух кватернионов:

$$\|\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M}\| = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}} = \|\mathbf{\Lambda}\| \cdot \|\mathbf{M}\|, \quad (13)$$

т. е. норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей. Отсюда следует, что произведение нормированных кватернионов есть также нормированный кватернион.

Методом индукции легко показать, что правила (12) и (13) распространяются на случай произвольного числа сомножителей, т. е.

$$\overline{(\mathbf{\Lambda}_1 \circ \dots \circ \mathbf{\Lambda}_n)} = \overline{\mathbf{\Lambda}_n} \circ \dots \circ \overline{\mathbf{\Lambda}_1}, \quad (14)$$

$$\|\mathbf{\Lambda}_1 \circ \dots \circ \mathbf{\Lambda}_n\| = \|\mathbf{\Lambda}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{\Lambda}_n\|. \quad (15)$$

Важным свойством алгебры кватернионов является существование операции *деления*, которая определяется как операция умножения на *обратный* кватернион.

Кватернионом, *обратным* к $\mathbf{\Lambda}$, называется кватернион $\mathbf{\Lambda}^{-1}$, определяемый из условия

$$\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \circ \mathbf{\Lambda} = 1. \quad (16)$$

Выражение для обратного кватерниона можно найти непосредственно из этого определения, рассматривая его как уравнение относительно неизвестного $\mathbf{\Lambda}^{-1}$. Умножив обе части уравнения $\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} = 1$ на $\overline{\mathbf{\Lambda}}$ слева, получим формулу

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \overline{\mathbf{\Lambda}} / \|\mathbf{\Lambda}\|; \quad \|\mathbf{\Lambda}\| \neq 0. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для нормированного кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ обратным будет его сопряженное значение $\overline{\mathbf{\Lambda}}$.

Из правил (15) и (14) следует, что норма обратного кватерниона равна $\|\Lambda^{-1}\| = 1/\|\Lambda\|$, а кватернион, обратный произведению кватернионов, вычисляется по формуле

$$(\Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \dots \circ \Lambda_1^{-1}. \quad (18)$$

Обратим внимание, что свойства сложения и умножения кватернионов аналогичны свойствам сложения и умножения матриц. Как следствие этого, правила решения кватернионных уравнений аналогичны правилам решения матричных уравнений. Например, для линейных уравнений вида

$$a) \mathbf{X} \circ \Lambda = \mathbf{M}, \quad b) \Lambda \circ \mathbf{X} = \mathbf{M}$$

решения определяются формулами

$$a) \mathbf{X} = \mathbf{M} \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{M} \circ \bar{\Lambda} / \|\Lambda\|, \quad b) \mathbf{X} = \Lambda^{-1} \circ \mathbf{M} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{M} / \|\Lambda\|.$$

Кватернионное уравнение эквивалентно четырем скалярным уравнениям. Одно из них представляет собой равенство скалярных составляющих правой и левой частей уравнения, а остальные три – это равенства компонент векторных составляющих в некотором ортогональном базисе трехмерного пространства.

Тригонометрическая форма записи кватернионов. Пусть Λ – нормированный кватернион. Вводя новые переменные с помощью равенств $\lambda_0 = \cos \nu$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e} \sin \nu$, где \mathbf{e} – единичный вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{\lambda}$, получим тригонометрическую форму записи кватерниона:

$$\Lambda = \cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu. \quad (19)$$

Для ненормированного кватерниона будем иметь

$$\Lambda = |\Lambda| (\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu). \quad (20)$$

Здесь $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$ – модуль кватерниона Λ .

Форма кватерниона (20) аналогична тригонометрической записи комплексных чисел. Из нее следует, что любой кватернион однозначно определяется значением модуля $|\Lambda|$, единичным вектором \mathbf{e}

и углом ν . Выбор же \mathbf{e} и ν для заданного Λ является двухзначным, т. к. одновременная замена знака при \mathbf{e} и ν на обратный не изменяет кватерниона Λ . Заметим также, что если векторная часть λ кватерниона Λ равна нулю, то $\sin \nu = 0$, и тогда \mathbf{e} – любой единичный вектор из трехмерного пространства.

Используя тригонометрическую форму (20), получим формулу для произведения двух кватернионов с коллинеарными векторными частями. Пусть

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos \varphi_1 + \mathbf{e} \sin \varphi_1), \quad \Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos \varphi_2 + \mathbf{e} \sin \varphi_2).$$

Тогда будем иметь

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{e} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (21)$$

Для k -й степени кватерниона $\Lambda = |\Lambda|(\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu)$ на основании (21) получим формулу

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k (\cos k\nu + \mathbf{e} \sin k\nu), \quad (22)$$

которая аналогична формуле Муавра для комплексных чисел.

Последняя формула дает возможность легко находить решения степенных кватернионных уравнений вида

$$\mathbf{X}^k = \Lambda. \quad (23)$$

Представляя \mathbf{X} и Λ в тригонометрической форме

$$\mathbf{X} = |\mathbf{X}|(\cos x + \boldsymbol{\varepsilon} \sin x), \quad \Lambda = |\Lambda|(\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu),$$

получим в качестве (23) уравнение

$$|\mathbf{X}|^k (\cos kx + \boldsymbol{\varepsilon} \sin kx) = |\Lambda|(\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu). \quad (23^*)$$

Решения этого уравнения записываются в виде

$$|\mathbf{X}| = |\Lambda|^{1/k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}, \quad x = (\nu + 2\pi i)/k; \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (24)$$

Полученные формулы определяют k разных решений уравнения (23) в том случае, когда векторная часть кватерниона Λ отлична от нуля ($\sin \nu \neq 0$). Если же $\sin \nu = 0$, то каждому значению

$x_i = (v + 2\pi i)/k$, для которого $\sin x_i \neq 0$, будет соответствовать бесконечное множество решений

$$\mathbf{X}_i = |\Lambda|^{1/k} (\cos x_i + \mathbf{e} \sin x_i),$$

где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор из трехмерного пространства.

При $k = 2$ решение уравнения $\mathbf{X}^2 = \Lambda$ можно записать в алгебраической форме. Записывая кватернионы в виде $\mathbf{X} = x_0 + \mathbf{x}$, $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$, получим уравнение $x_0^2 - |\mathbf{x}|^2 + 2x_0\mathbf{x} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$, которое сводится к системе $2x_0^2 = |\Lambda| + \lambda_0$, $2x_0\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}$. Решение этой системы записывается в виде

$$\mathbf{X} = \Lambda^{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Lambda + |\Lambda|}{\sqrt{\lambda_0 + |\Lambda|}}, \text{ если } \lambda_0 + |\Lambda| > 0.$$

При $\lambda_0 + |\Lambda| = 0$, а это возможно только в случае $\Lambda = \lambda_0 \leq 0$, решение имеет вид $\Lambda^{1/2} = \mathbf{e} \sqrt{-\lambda_0}$, где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор.

Упражнения

1. Показать, что для скалярной и векторной частей кватернионного произведения векторов справедливы формулы:

$$sqal(\boldsymbol{\lambda}_1 \circ \boldsymbol{\lambda}_2 \circ \dots \circ \boldsymbol{\lambda}_n) = (-1)^n sqal(\boldsymbol{\lambda}_n \circ \boldsymbol{\lambda}_{n-1} \circ \dots \circ \boldsymbol{\lambda}_1);$$

$$vect(\boldsymbol{\lambda}_1 \circ \boldsymbol{\lambda}_2 \circ \dots \circ \boldsymbol{\lambda}_n) = (-1)^{n+1} vect(\boldsymbol{\lambda}_n \circ \boldsymbol{\lambda}_{n-1} \circ \dots \circ \boldsymbol{\lambda}_1).$$

2. Найти все решения \mathbf{X} кватернионных уравнений:

a) $\mathbf{X}^2 + \Lambda \circ \mathbf{X} + \mathbf{M} = 0.$

b) $\mathbf{X} \circ \Lambda - \Lambda \circ \mathbf{X} = \mathbf{M}.$

c) $\mathbf{X}^3 = 1; \quad \mathbf{X}^3 = -1; \quad \mathbf{X}^4 = 1; \quad \mathbf{X}^4 = -1.$

d) $\mathbf{X}^n \circ \Lambda - \Lambda \circ \mathbf{X}^m = \mathbf{M}$, где m и n – целые числа.

3. Показать, что преобразование $\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}$, где $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион, задает поворот в трехмерном пространстве вокруг оси $\boldsymbol{\lambda}$ на угол $\mathcal{G} = 2 \arccos \lambda_0$.

Список литературы

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – Москва : Физматлит, 2008. – 264 с.
2. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – Москва : Физматлит, 2008. – 304 с.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – Москва : Наука, 1990. – 416 с.
4. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кукушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. – Москва : Издательский центр «Академия», 2010. – 432с.
5. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела. – Москва : МФТИ, 2010. – 80 с.
6. *Амелькин Н.И.* Лагранжева и гамильтонова механика. – Москва : МФТИ, 2014. – 112 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – Москва : Наука, 2004. – 560 с.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – Москва : Наука, 1990. – 176 с.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
10. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. – Москва : Наука, 1988. – 328 с.

Учебное издание

Амелькин Николай Иванович

**КУРС
АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Редактор *И. А. Волкова*

Корректор *О. П. Котова*

Компьютерная верстка *В. А. Дружинина*

Дизайн обложка *Е. А. Казёнова*

Подписано в печать 25.07.2023. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 18,6.
Уч.-изд. л. 17,8. Тираж 400 экз. Заказ № 66.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский физико-
технический институт (национальный исследовательский университет)
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер, 9
Тел. +7 (495) 408 -58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригиналом-макетом
ООО «Печатный салон ШАНС» 127412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2
Тел. (495) 484-26-55

Для заметок



Амелькин Николай Иванович,
доктор физико-математических наук,
преподаватель кафедры теоретической
механики МФТИ, Заслуженный профес-
сор Московского физико-технического
института (национального исследова-
тельского университета)

Учебное пособие по дисциплине Аналитическая механика. На современном уровне дается строгое и компактное изложение основных задач и методов классической механики.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и преподавателей университетов, физико-технических и инженерно-технических вузов.

ISBN 978-5-7417-0827-9



9 785741 708279 >