Лекция 8. Диагонализируемость линейных преобразований

(31 марта 2020).

Прежде чем перейти к следующему параграфу, отметим связь коэффициентов характеристического многочлена с характеристическими корнями.

Утверждение 4. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_n$ - корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)=\det(A_\varphi-\lambda E)$ матрицы $A=A_\varphi$, тогда $\lambda_1+...+\lambda_n=a_{11}+...+a_{nn}=trA$ - след матрицы A, $\lambda_1\cdot...\cdot\lambda_n=\det A$.

Доказательство. Это утверждение – частный случай теоремы Виета. По условию,

$$\chi(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\cdot...\cdot(\lambda_n-\lambda)=(-\lambda)^n+(\sum_{i=1}^n\lambda_i)(-\lambda)^{n-1}+\cdots+\prod_{i=1}^n\lambda_i.$$

Сравнив эти формулы с выведенными в (5) выражениями, получим требуемое.

Формулы из утверждения 4 часто применяются.

§ 8. Диагонализируемость линейных преобразований.

Определение. Линейное преобразование $\varphi: L\to L$ будем называть диагонализипуемым, если в L существует базис, в котором матрица A_φ диагональна.

Напомним определение собственного подпространства $L_\lambda:=\{x\in L:\varphi(x)=\lambda x\}$ преобразования φ.

Лемма 1. $\dim L_\lambda=n-rg(A_\varphi-\lambda E)$.

Доказательство. Координатные столбцы собственных векторов – решения системы линейных уравнений $(A_\varphi-\lambda E)X=0$, а количество линейно независимых решений системы как раз и равно $n-rg(A_\varphi-\lambda E)$.

Лемма 2. Пусть λ_0 - характеристический корень кратности k матрицы A_φ, тогда имеет место неравенство $\dim L_{\lambda_0}\le k$ (1).

Замечание. Размерность собственного подпространства $\dim L_{\lambda_0}$ часто называют геометрической кратностью корня λ_0, в то время как k – его алгебраическая кратность. В этих терминах неравенство (1) формулируется так: геометрическая кратность характеристического корня не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть $\dim L_{\lambda_0}=m\ge 1$. Выберем базис $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ в собственном подпространстве и дополним его до базиса $e=\{e_1,e_2,...,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\}$ в L. В этом базисе матрица преобразования φ приобретет блочно-треугольный вид

$A_{\varphi;e} = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_0 E & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$ с диагональными блоками порядков m и n – m соответственно.

Вычислим характеристический многочлен матрицы преобразования φ (учтем, что он не зависит от выбора базиса):

$\chi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} (\lambda_0 - \lambda)E_m & B \\ 0 & A_2 - \lambda E_{n-m} \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^m \left| A_2 - \lambda E_{n-m} \right|$. Видим, что λ_0 - характеристический корень кратности по меньшей мере m, но он может быть еще корнем многочлена $\left| A_2 - \lambda E_{n-m} \right|$, так что полная кратность k больше или равна m. Ч.т.д.

Лемма 3. Если $L_{\lambda_1},...,L_{\lambda_r}$ - собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениям, то их сумма – прямая сумма: $L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$.

Доказательство. Это следствие линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Пусть $e_{i1},...,e_{i,m_i}\ (m_i = \dim L_{\lambda_i}), i = 1,...,r$ - базис подпространства L_{λ_i}. Покажем, что векторы $e_{11},...,e_{r,m_r}$ (объединение всех базисов) линейно независимы. Проведем индукцию по r. Для r=1 это верно по построению. Допустим, r >1 и $\sum_{i,j} c_{ij}e_{ij} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}e_{ij} = 0$. Если вектор $v_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}e_{ij} \neq 0$, то он собственный с собственным значением λ_i. В этом случае хотя бы один коэффициент в этой линейной комбинации отличен от 0, без ограничения общности, c_{i1}. Тогда $v_i = c_{i1}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{c_{i1}} e_{ij} = c_{i1}u_i$ и u_i тоже собственный. Таким образом, $\sum_{i:c_{i1}\neq 0}^{r} c_{i1}u_i = 0 \Rightarrow c_{i1} = 0,\ i = 1,...,r$, в силу линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям – противоречие. Значит, $v_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}e_{ij} = 0$, $\forall i = 1,...,r \Rightarrow c_{ij} = 0, \forall i,j$, так как базисные векторы каждого подпространства линейно независимы. Итак, все векторы $e_{11},...,e_{r,m_r}$ линейно независимы, что и означает, что сумма собственных подпространств – прямая. Ч.т.д.

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия диагонализируемости матрицы линейного проеобразования.

Теорема. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_r$ - характеристические корни матрицы линейного преобразования $\varphi: L \to L$ кратностей соответственно $k_1,...,k_r$ $(k_i \geq 1, i = 1,...,r)$ следующие условия равносильны:

1) В L существует базис $h = \{h_1,...,h_n\}$, в котором матрица преобразования φ диагональна.
2) В L существует базис из собственных векторов преобразования φ.
3) Все корни $\lambda_1,...,\lambda_r$ принадлежат основному полю K (если основное поле R – поле действительных чисел, то все характеристические корни должны быть действительными), и для любого $i = 1,...,r,\ k_i = \dim L_{\lambda_i}$.
4) $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) почти очевидна. Если матрица является диагональной: $A_{\varphi;h} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{Vmatrix}$ (диагональные числа могут повторяться), то все векторы базиса h собственные, причем $\varphi(h_j) = \lambda_j h_j,\ j = 1,...,n$.
Обратно, если $h = \{h_1,...,h_n\}$ - базис в L, причем $\varphi(h_j) = \lambda_j h_j,\ j = 1,...,n$, то матрица φ в этом базисе диагональна (как объяснялось в конце предыдущей лекции).
$1)\,(или\, 2) \Rightarrow 3), 4)$. Пусть h – базис, в котором матрица A_φ диагональна. Все диагональные элементы являются собственными значениями и корнями характеристического многочлена, т.е. он имеет n корней, и все они принадлежат основному полю (действительны). Все векторы базиса h - собственные для φ. Занумеруем их таким образом, чтобы сначала на диагонали стояло характеристическое число λ_1 (p_1 раз), затем λ_2 (p_2 раз), и т.д. λ_r (p_r раз). Тогда $h_1,...,h_{p_1} \in L_{\lambda_1}, h_{p_1+1},...,h_{p_1+p_2} \in L_{\lambda_2}$ и т.д., тем самым $\dim L_{\lambda i} \ge p_i, i = 1,...,r$.
Следовательно,
$\dim(\sum_{i=1}^{r} L_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} \dim L_{\lambda i} \ge \sum_{i=1}^{r} p_i = n$, поскольку сумма собственных подпространств прямая, по лемме 3. Таким образом, $L = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$ - доказано 4).
Кроме того, теперь ясно, что $\dim L_{\lambda i} = m_i = p_i, i = 1,...,r$. Если для некоторого $k_i > \dim L_{\lambda_i} \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{n} k_i > \sum_{i=1}^{n} m_i = n$ - противоречие. Доказано 3). Обратно, $4)\,(или\, 3) \Rightarrow 1)\,(или\, 2)$. Теперь дано, что все характеристические корни вещественные, и $i = 1,...,r,\ k_i = \dim L_{\lambda_i} \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^{r} L_{\lambda i}) = \sum_{i=1}^{r} \dim L_{\lambda i} = \sum_{i=1}^{r} k_i = n$, т.е. из 3) следует 4). А справедливость 4) означает, что объединение базисов собственных подпространств – базис из собственных векторов преобразования φ. Теорема доказана.

Утверждение 4. Если φ диагонализируемо, то $L = \operatorname{Im}\varphi \oplus Ker\varphi$.
Доказательство. Собственные базисные векторы можно занумеровать так, что $h_1,...,h_r$ отвечают ненулевым собственным значениям, остальные $h_{r+1},...,h_n$, тогда $\langle h_1,...,h_r \rangle = \operatorname{Im}\varphi,\ \langle h_{r+1},...,h_n \rangle = Ker\varphi$.
Покажем два применения приведения матриц линейных преобразований к диагональному виду.
Применение 1. Решение систем линейных уравнений $AX = b,\ |A| \ne 0$.
Матрицу A можно воспринимать как матрицу некоторого линейного преобразования φ. Допустим, что A, как матрица этого преобразования, приводится к диагональному виду. Это значит, что $\exists S:\ A' = S^{-1}AS$ (S – матрица

перехода к собственному базису) – диагональная матрица. Сделаем в системе замену $X = SY$, система примет вид $ASY = b \Leftrightarrow (S^{-1}AS)Y = S^{-1}b = b'$. Система привелась к виду $\begin{cases} \lambda_1 y_1 = b_1' \\ \ldots\ldots. \\ \lambda_n y_n = b_n' \end{cases}$, $Y = \begin{pmatrix} b_1'/\lambda_1 \\ \vdots \\ b_n'/\lambda_n \end{pmatrix}$, $X = S^{-1}Y$.

Применение 2. Пусть A – квадратная матрица порядка n, и

$\exists S:\ A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ диагональная матрица. Пусть требуется возвести A в натуральную степень m. Имеем

$$A = SA'S^{-1} \Rightarrow A^2 = (SA'S^{-1})(SA'S^{-1}) = S(A')^2 S^{-1}, \ldots,$$

$$A^m = S\begin{pmatrix} \lambda_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1} \qquad ,$$

по индукции.

Что делать, если матрица не приводится к диагональному виду, обсудим в следующем параграфе.