Лекция 13. Линейные преобразования евклидовых пространств – продолжение

Прежде чем перейти к ортогональным преобразованиям, отметим, что верно обратное к основной теореме

Утверждение. Если линейное преобразование евклидова пространства имеет ортонормированный базис из собственных векторов, то оно самосопряженное.

В самом деле, если в ортонормированном базисе матрица линейного преобразования диагональная. то и симметричная, что гарантирует самосопряженность.

3. Ортогональные преобразования

Пусть E – евклидово пространство, $\varphi : E \to E$ - линейное преобразование.

Определение 1. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ называется сопряженным к φ, если для любых векторов $x, y \in E$: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ (1)

т.е. оно сохраняет скалярное произведение.

Достаточно было бы потребовать, что φ сохраняет длины векторов:

$$(\varphi(x+y), \varphi(x+y)) = (x+y, x+y) \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(x),\varphi(x)) + 2(\varphi(x),\varphi(y)) + (\varphi(y),\varphi(y)) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \Leftrightarrow (\varphi(x),\varphi(y)) = (x,y)$$

На основе ортогональных преобразований можно было бы строить всю евклидову геометрию.

Утверждение 1. Если φ ортогональное преобразование, то φ обратимо, и обратное также ортогональное, и $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Доказательство. По определению,

$$\forall x, y \in E: \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, (\varphi^* \varphi)(y)) = (x, y)$$

$$\Rightarrow (x, (\varphi^* \varphi)(y) - y) = 0 \Rightarrow (\varphi^* \varphi)(y) - y \in E^{\perp} = 0$$

значит, $\varphi^* \varphi = E = id$, чтд.

Выведем условие ортогональности в матричном виде.

Запишем равенство (1) в координатах:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (A_\varphi X)^T G (A_\varphi Y) = X^T (A_\varphi{}^T G A_\varphi) Y = (x, y) = X^T G Y, \ X, Y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow .$$

$\Rightarrow \ A_\varphi{}^T G A_\varphi = G$ (2). В ортонормированном базисе условие (2) выглядит особенно просто:

$A_\varphi{}^T A = E$. Итак, доказано

Утверждение 2. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ ортогонально тогда и только тогда, когда в ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Установим основные свойства ортогональных преобразований.

Теорема 1. Пусть $\varphi : E \to E$ - ортогональное преобразование. Тогда

1) Собственные значения векторы преобразования φ равны ±1, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.;
2) Характеристические корни по модулю равны 1.
3) Если U – инвариантное подпространство: $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$ (отметим, что в обоих случаях имеет место равенство, т.к. φ обратимо.

Доказательство. 1) Пусть

$$\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1, \ \varphi(x_2) = \lambda_2 x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \lambda_1 \lambda_2 (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \ (\lambda_1 \lambda_2 - 1)(x_1, x_2) = 0$$

Но для $x_1 = x_2$, $(\varphi(x_1), \varphi(x_1)) = \lambda_1{}^2 (x_1, x_1) = (x_1, x_1) \Rightarrow \ (\lambda_1{}^2 - 1)(x_1, x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1{}^2 = 1$

Тогда $(\lambda_1 \lambda_2 - 1)(x_1, x_2) = 0, \ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$

2) Применим тот же прием, как при доказательстве существования двумерного инвариантного пространства для линейного преобразования вещественного линейного пространства. Доказывать будем в матричном виде. Пусть в ортонормированном базисе преобразование φ имеет матрицу

$A_\varphi, A_\varphi{}^T A = E$. Научим φ преобразовывать векторы пространства $\mathbb{C}^n$ по формуле $\varphi(Z) = A_\varphi Z,\ \forall Z = (z_1,...,z_n)^T$. Кроме этого, введем в $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение по формуле $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k\ \ \forall x = (x_1,...,x_n)^T, y = (y_1,...,y_n)^T \in \mathbb{C}^n$. (Вторые сомножители необходимо брать комплексно сопряженные, чтобы обеспечить положительную определенность: $(x,x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0\ if\ \ x \neq 0$). Благодаря тому, что матрица A_φ вещественная, φ по-прежнему сохраняет скалярное произведение. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. В комплексном пространстве обязательно
$\exists Z = (z_1,...,z_n)^T \neq 0 : \varphi(z) = A_\varphi Z = \lambda z \Rightarrow (\varphi(z), \varphi(z)) = (\lambda z, \lambda z) = \lambda\overline{\lambda}(z,z) = (z,z) \Rightarrow |\lambda| = 1$, чтд.

3) Пусть $x \in U, y \in U^\perp \Rightarrow (x, \varphi(y)) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (\varphi^{-1}(x)), y) = 0$, т.к. $\varphi^{-1}(x) \in U$. Чтд.

Выведем теперь основную теорему об ортогональных преобразованиях. Её можно рассматривать как аналог основной теоремы о самосопряженных преобразованиях.

Теорема 2. Для любого ортогонального преобразования существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид

$$A' = \begin{Vmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_r \end{Vmatrix}, \Phi_j = \begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{Vmatrix}, j = 1,...,s,\ s,m,r \geq 0, 2s + m + r = n.$$

Доказательство. Обозначим через L_1, L_{-1} - собственные подпространства, отвечающие собственным значениям 1, -1 (если хотя бы одно из них ненулевое). Подпространство $U = L_1 \oplus L_{-1}$ инвариантно, и $V = U^\perp$ инвариантно. Ограничение $\varphi_{|U}$ одновременно является самосопряженным, поэтому в U существует ортонормированный базис, в котором матрица $\varphi_{|U}$ диагональна, и на диагонали стоят 1 и -1 (если они есть). На V ограничение $\varphi_{|V}$ не имеет вещественных характеристических корней (в противном случае получилось бы $U \cap V \neq 0$), и индукцией по s можно доказать, что V – прямая сумма попарно ортогональных двумерных инвариантных подпространств: $V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$, и матрица $A_{\varphi_{V_j}} = \Phi_j = \begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{Vmatrix}$, чтд.

Замечание. У ортогональной матрицы 2-го порядка второго рода $\begin{Vmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & -\cos\alpha_j \end{Vmatrix}$ собственные значения равны ±1, поэтому она не может встретиться среди $\Phi_j, 1 \leq j \leq s$.

Матрица вида $\begin{Vmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_r \end{Vmatrix}$ называется канонической для ортогонального преобразования φ, соответствующий ортонормированный базис – каноничским.

Разберем численный пример.

Пример. Пусть линейное преобразование φ в ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Привести матрицу к каноническому виду, найти канонический базис.

Решение. Прежде всего, легко проверить, что матрица ортогональная.

Нам нужно найти подобную матрицу $A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm 1$ с ортогональной матрицей перехода S. Следы матриц A, A' равны, так что

$trA' = 2\cos\alpha + 1 = trA = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определители матриц также равны, поэтому $\det A' = \lambda = \det A$. Вычислим

$$\det A = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)+2(1) \\ (3)+2(1) \end{matrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 = \lambda .$$

Найдем собственный вектор для $\lambda = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim_{(3)+(1)+(2)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim ((2)-(1)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1)+(2) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h_3 = (1,1,1)^T$$

с точностью до множителя.

Далее, наше преобразование представляет собой поворот на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ вокруг прямой $U \parallel h_3$ в плоскости $V \perp h_3$, т.е. плоскости с уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и ортогональным базисом $h_1=(1,-1,0)^T, h_2=(1,1,-2)^T$. Чтобы определить направление поворота, проверим, правый это базис или левый. Вычислим

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (I)+(II)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0$. Значит, базис правый. Теперь найдем образ первого вектора:

$\varphi(h_1)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и скалярное произведение $(\varphi(h_1),h_2)=3>0$,

поворот против часовой стрелки , $A'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе

$h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, h_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T, h_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

4. **Произвольные линейные преобразования. Полярное разложение.**

В этом параграфе мы будем предполагать, что преобразование φ невырожденно, т.е. $\det A_\varphi \neq 0$, и выведем теорему, обобщающую теорему 1 семестра о разложении аффинного преобразования в произведении ортогонального преобразования и двух сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым.

Теорема. Любое невырожденное линейное преобразование $\varphi: E\to E$ евклидова пространства E может быть представлено в виде произведения $\varphi=\kappa\cdot\gamma$, где κ - ортогональное преобразование, а γ - самосопряженное преобразование с положительными собственными значениями. Такое разложение единственно.

(Замечание. Имеет место и разложение в другом порядке: $\varphi=\gamma'\cdot\kappa'$, γ',κ' имеют аналогичный смысл.)

Мы будем доказывать в основном матричную формулировку теоремы:

Для любой невырожденной вещественной матрицы А порядка n существуют единственные матрицы $Q, C\,(Q^T=Q^{-1}, C^T=C, \lambda_i>0)$: $A=Q\cdot C$.**(1)**

Доказательство.

Покажем, прежде всего, что все собственные значения самосопряженного преобразования $\varphi^*\varphi$ положительны: пусть f – собственный вектор для $\varphi^*\varphi$,

$(\varphi^*\varphi)(f)=\lambda f\ (f\neq 0)\Rightarrow ((\varphi^*\varphi)(f),f)=\lambda(f,f)=(\varphi(f),\varphi(f))>0\Rightarrow \lambda>0$, поскольку $\varphi(f)\neq 0$, так как φ невырожденно.

Теперь будем искать разложение матрицы $A=Q\cdot C$; транспонируем и перемножим:

$A=Q\cdot C,\ A^T=C^TQ^T=CQ^{-1}\Rightarrow A^TA=C(Q^{-1}Q)C=C^2$. Матрица C^2 симметричная с положительными собственными значениями. Следовательно, для нее существует ортогональная матрица S: $S^{-1}C^2S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ $(\lambda_i > 0, i = 1,...,n)$, $\Rightarrow C^2 = SDS^{-1} = SDS^T$

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$ $(\mu_i = \sqrt{\lambda}_i > 0, i = 1,...,n)$,тогда получим $\Rightarrow C = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^T$. Осталось найти $Q = AC^{-1}$. Проверим, что матрица Q ортогональна: $Q = AC^{-1}$, $Q^T = (C^{-1})^T A^T = C^{-1}A^T \Rightarrow Q^T \cdot Q = (C^{-1}A^T)(AC^{-1}) = C^{-1}C^2C^{-1} = E$, чтд.

Единственность. Допустим, $A = Q \cdot C = \tilde{Q} \cdot \tilde{C}$, тогда $A^T A = C^2 = \tilde{C}^2$. По построению, $C, \tilde{C}$ имеют общий собственный базис и потому коммутируют, поэтому $C^2 - \tilde{C}^2 = (C - \tilde{C})(C + \tilde{C}) = 0$. Так как $C, \tilde{C}$ имеют положительные собственные значения в общем базисе, то у $C + \tilde{C}$ положительные собственные значения, значит, $\exists\ (C + \tilde{C})^{-1}$ и потому $C = \tilde{C} \Rightarrow Q = \tilde{Q}$. Ч.т.д.

Запишем разложение $A = Q \cdot C$ с учетом построения C: $A = Q \cdot S\Lambda S^T = (Q \cdot S)\Lambda S^T = U\Lambda V$ (2), где U, V ортогональные матрицы, Λ - диагональная матрица с положительными диагональными элементами.

Разложение (2) называется ***сингулярным разложением.***