Лекция 12. Линейные преобразования евклидовых пространств

Наличие в линейном (вещественном) пространстве создает определенную специфику при рассмотрении линейных преобразований. Дадим определение трёх типов линейных преобразований.

Пусть E – евклидово пространство, $\varphi: E \to E$ - линейное преобразование.

1. **Сопряженные преобразования.**

Определение 1. Линейное преобразование $\varphi^*: E \to E$ называется сопряженным к φ, если для любых векторов $x, y \in E$: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$. (1)

Мотив такого определения будет объяснен чуть ниже.

Прежде всего выясним, как найти матрицу сопряженного преобразования, зная матрицу $A_{\varphi;e} = A_\varphi$ данного преобразования в некотором базисе ***e*** и матрицу Грама $G = G_e$. Запишем равенство (1) в координатах:

$(\varphi(x), y) = (A_\varphi X)^T GY = X^T (A_\varphi{}^T G)Y = (x, \varphi^*(y)) = X^T G(A_{\varphi^*} Y) = X^T (GA_{\varphi^*})Y, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Короче, $X^T (A_\varphi{}^T G)Y = X^T (GA_{\varphi^*})Y,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (*).

Отсюда (как и для билинейных форм, беря в качестве X, Y любые пары единичных столбцов) получаем: $A_\varphi{}^T G = GA_{\varphi^*}$, $A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi{}^T G$ (**). В ортонормированном базисе условие (**) выглядит особенно просто: $A_{\varphi^*} = A_\varphi{}^T$. В частности, доказано

Утверждение 1. Любое линейное преобразование $\varphi: E \to E$ имеет единственное сопряженное.

Установим основные взаимоотношения между преобразованиями и их сопряженными.

Теорема 1. Пусть $\varphi, \psi: E \to E$ - линейные преобразования. Тогда

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2) $(\varphi\psi)^* = \psi^* \varphi^*$;
3) Если U – инвариантное подпространство: $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$;
4) $\operatorname{Im}\varphi = (Ker\varphi^*)^\perp$;
5) $Ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^*)^\perp$.

Доказательство. 1), 2) докажем в ортонормированном базисе.

$A_{\varphi^*} = A_\varphi{}^T \Rightarrow A_{(\varphi^*)^*} = (A_\varphi{}^T)^T = A_\varphi$ и $A_{(\varphi\psi)^*} = (A_{\varphi\psi})^T = A_\psi{}^T A_\varphi{}^T = A_{\psi^*} A_{\varphi^*}$.

3) Пусть $x \in U, y \in U^\perp \Rightarrow (x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0$, т.к. $\varphi(x) \in U$.

4) Если

$z \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists x \in E: z = \varphi(x) \Rightarrow \forall y \in Ker\varphi^*, (z, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = 0 \Rightarrow z \in (Ker\varphi^*)^\perp$.

Таким образом, $\operatorname{Im}\varphi \subseteq (Ker\varphi^*)^\perp$. Чтобы доказать равенство, сравним размерности этих подпространств: $\dim \operatorname{Im}\varphi = rgA_\varphi$, $Ker\varphi^* = \{Y: A_\varphi{}^T Y = 0\} = n - rgA_\varphi{}^T = n - rgA_\varphi \Rightarrow \dim(Ker\varphi^*)^\perp = rgA_\varphi$, чтд.

5)равносильно 4): $\operatorname{Im}\varphi = (Ker\varphi^*)^\perp \Leftrightarrow (\operatorname{Im}\varphi)^\perp = Ker\varphi^*$. Заменяя здесь φ на φ^* и φ^* на $\varphi = (\varphi^*)^*$, получаем требуемое.

Замечание 1. Равенство пункта 4 дает геометрическую интерпретацию и новое доказательство (правда, для систем с квадратной матрицей) теоремы Фредгольма.

Замечание 2. В общем случае сопряженное преобразование – это преобразование сопряженного пространства E*. А именно, $\varphi^*: E \to E$ определяется равенством

$\varphi^*(f)(x) := f(\varphi(x)), \forall f \in E^*, x \in E$. Но скалярное произведение позволяет отождествить E и E^*.

Для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a, x)$,если базис ортонормированный, то $f \leftrightarrow a = (a_1, ..., a_n)$.

2. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов

Определение 2. Линейное преобразование $\varphi : E \to E$ евклидова пространства E называется самосопряженным, если $\varphi^* = \varphi$, т.е. $\forall x, y \in E:\ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$.
Пусть φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E. Из теоремы 1 следуют
Утв.1. Если U – подпространство в E, инвариантное относительно φ (короче, φ - инвариантное подпространство) (т.е. $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$), то ортогональное дополнение $U^{\perp}$ также φ -инвариантно.
Утв. 2. В ортонормированном базисе матрица A самосопряженного преобразования φ является симметрической: $A^T = A$.
Замечание. Ограничение самосопряженного преобразования на инвариантное подпространство является самосопряженным, если на подпространстве рассматривать скалярное произведение, заданное во всем пространстве.
Утв.3. Собственные векторы самосопряженного преобразования φ, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.
Доказательство. Если $\begin{array}{l}\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1,\ \varphi(x_2) = \lambda_2 x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq), \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)),\\ \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow\ (x_1, x_2) = 0\end{array}$ □

В доказательстве свойства собственных значений понадобится
Лемма. Любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.
Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}:\ \varphi(x) = \lambda x, x \neq 0 \Rightarrow U = \langle x \rangle$. Если все характеристические корни мнимые, пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ один из них, тогда $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также является характеристическим корнем, т.к. $\det(A_\varphi - \lambda E)$ многочлен с действительными коэффициентами.
Рассмотрим φ как линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$ по формуле
$\varphi(Z) = A_\varphi Z,\ \forall Z = (z_1, ..., z_n)^T$, в таком случае
$\exists Z_1 = (z_1, ..., z_n)^T = X_1 + iY_1 \neq 0\,(X_1, Y \in \mathbb{R}^n)_1 : A_\varphi Z_1 = \lambda_1 Z_1 \Leftrightarrow$
$A_\varphi(X_1 + iY_1) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iY_1) = (\alpha X_1 - \beta Y_1) + i(\beta X_1 + \alpha Y_1) \Leftrightarrow$
$A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta Y_1, A_\varphi Y_1 = \beta X_1 + \alpha Y_1$
Это показывает, что $U = \langle X_1, Y_1 \rangle$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Утверждение 4. Все характеристические корни (корни характеристического уравнения) самосопряженного преобразования (или симметрической матрицы) действительные.
Доказательство проводится индукцией по n=dim E.
Случай n =1 очевиден. При n = 2 в ортонормированном базисе

$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=0$. Дискриминант этого уравнения $D=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}{}^2\ge 0$, следовательно, $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$.

При n > 2 сделаем индуктивное предположение о том, что у любой симметрической матрицы порядка <n все характеристические корни действительные. Допустим, что хотя бы один характеристический корень матрицы A мнимый. Согласно лемме, существует двумерное инвариантное подпространство U. По утверждению 1, $U^{\perp}$ также инвариантно.

В ортонормированном базисе, составленном из базисов подпространств U и $U^{\perp}$, матрица преобразования имеет блочный вид $A'=\begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$, где A_1 - симметрическая матрица 2 порядка , A_2 – симметрическая матрица порядка n-2, $\det(A-\lambda E)=\det\begin{Vmatrix} A_1-\lambda E & 0 \\ 0 & A_2-\lambda E \end{Vmatrix}=|A_1-\lambda E|\cdot|A_2-\lambda E|$. По предположению индукции, уравнение $|A_2-\lambda E|=0$ имеет все действительные корни, следовательно (с учетом случая 2), уравнение $|A-\lambda E|=0$ – тоже – противоречие, следовательно, утверждение 4 верно для всех n. □

Теорема 2. Для любого самосопряженного преобразования существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Матрица преобразования в этом базисе диагональна: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1,...,\lambda_n$ - собственные значения матрицы этого преобразования.

Доказательство теоремы 2 – индукция по n.

При n = 1 доказывать нечего. При n > 1 пусть λ_1 – какой-либо характеристический корень (действительный, по теореме 1), h_1 соответствующий собственный вектор (можно сразу взять $|h_1|=1$) и $U=\langle h_1\rangle$ – одномерное инвариантное подпространство. Согласно утв.1, $U^{\perp}$ инвариантно размерности n–1, и для ограничения преобразования на $U^{\perp}$, по предположению индукции, существует ортонормированный базис $h_2,...,h_n$ из собственных векторов. Тогда $h_1;h_2,...,h_n$ – искомый базис.

□**Пример**. В некотором о.н.б. в R^3 линейное преобразование φ задано матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти для φ ортонормированный базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования.

□

$$|A-\lambda E| = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

Собственные векторы: $\lambda_{1,2} = 1$, $A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Система уравнений для собственных векторов: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, так что имеются два линейно независимых собственных вектора . Можно взять $h_1 = (1,1,0)^T$. Второй линейно независимый собственный вектор ищем ортогональный к h_1, т.е. как решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$. Например, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_2 - x_1 = -2$, т.е. $h_2 = (1,-1,-2)^T$.

Собственный вектор для $\lambda_3 = 4$, по утв. 2, ортогонален к h_1, h_2, так что в трехмерном пространстве он единственный, с точностью до множителя, вектор из $<h_1, h_2>^{\perp}$. Читая уравнение $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ как скалярное произведение $((x_1, x_2, x_3), (1,-1,1)) = 0$, без вычислений находим $h_3 = (1,-1,1)^T$. (Разумеется, можно было решить характеристическую систему уравнений для $\lambda_3 = 4$ и получить то же самое.)

Окончательно, нормируя, получаем

$h_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), h_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), h_3' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. В этом базисе $A' = diag(1,1,4)$.□

Можно упомянуть 2 типичных примера самосопряженных преобразований.
Пусть E – n-мерное евклидово пространство, U – подпространство в E, 0 ≠ U ≠ V, тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = y + z, y \in U, z \in U^{\perp}$.

Пример 1. Ортогональное проектирование V на U: $P(x) := y$. Проверка самосопряженности: $x_{1,2} = y_{1,2} + z_{1,2}, y_{1,2} \in U, z_{1,2} \in U^{\perp} \Rightarrow (P(x_1), x_2) = (y_1, y_2) = (x_1, P(x_2))$. Ядром преобразования является U.

Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = 0$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U, U^{\perp}$, матрица преобразования равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{0,...,0}_{n-m})$, если $\dim U = m$.

Пример 2. Ортогональная симметрия (или зеркальное отражение) S пространства E относительно U: S(x) = y – z. Проверить самосопряженность можно аналогично.
Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = -1$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U^{\perp}$, матрица оператора равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{-1,...,-1}_{n-m})$.