1.1 Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пр-ве

Опр. Пространством $\mathbb{R}^n$ (точечным n-мерным евклидовым пр-вом), $n\in\mathbb{N}$, наз. множество всевозможных упорядоч. наборов из n дейст. чисел $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Два таких набора $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ наз. равными, если $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_n=\beta_n$.

Расстоянием между x и y наз. число $\rho(x,y)=\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)^2}$

Опр. Гов., что последовательность точек x_k из $\mathbb{R}^n$ сходится к т $x_0\in\mathbb{R}^n$ (об. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x_0$), если $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k,x_0)=0$, т.е

$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0: \forall k\geq k_0 \longrightarrow \rho(x_k,x_0)<\varepsilon$

Л.1 Последов-ть т $x_k=(\alpha_1^{(k)},\ldots\alpha_n^{(k)})\in\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots$, сход. к т $x_0=(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_n^{(0)}) \Longleftrightarrow$ при всех $i=1,2,\ldots,n$ вып. рав-во $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}$

(сх-ть в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоор. сх-ти)

Δ $\boxed{\Rightarrow}$ Т.к $\rho(x_k,x_0)=\sqrt{(\alpha_1^{(k)}-\alpha_1^{(0)})^2+\ldots+(\alpha_n^{(k)}-\alpha_n^{(0)})^2}$, то

$|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|\leq\rho(x_k,x_0)\quad\forall i=1,2,\ldots,n.$

Поэтому если $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0: \forall k\geq k_0\longrightarrow\rho(x_k,x_0)<\varepsilon$, то и подавно $|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|<\varepsilon$ при $\forall i=1,2,\ldots,n$.

Значит, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}\quad\forall i=1,2,\ldots,n.$

$\boxed{\Leftarrow}$ Т.к $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(0)}$ при $\forall i=1,2,\ldots,n$, то

$\forall\varepsilon>0\ \exists k_i: \forall k\geq k_i\longrightarrow|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Тогда при $k\geq k_0=\max(k_1,\ldots,k_n)$ вып.

$\rho(x_k,x_0)<\sqrt{n\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$ ∎

1.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности

Опр ε-окрестностью т. $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>0$, наз. мн-во

$U_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n: \rho(x,x_0)<\varepsilon\}$

Проколотой ε-окрестностью т. $x_0\in\mathbb{R}^n$, где $\varepsilon>0$, наз. мн-во

$\mathring{U}_\varepsilon(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}^n: 0<\rho(x,x_0)<\varepsilon\}$

При $n=1$ для т $x,y\in\mathbb{R}$ рас-е $\rho(x,y)=|x-y|$; понятие ε-окр совп. с прив. ранее.

При $n=2$ ($n=3$) ε-окр. т x_0 иначе наз. открытым кругом (шаром) рад ε с ц в т x_0, поэтому в общем сл. $U_\varepsilon(x_0)$ наз. открытым n-мерным шаром рад ε с ц в т. x_0.

Опр Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. **ограниченным**, если оно целиком принадл. нек. окр-ти т. $O=(0,0,\ldots,0)$, т.е $\exists C>0: X \subset U_C(O)$

Посл-ть x_k наз. **ограниченной**, если мн-во её знач. огранич.

$\boxed{T.1}$ (**Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$**)

Если посл-ть т. x_k из $\mathbb{R}^n$ огр, то сущ. сход-я подпосл. x_{k_m} $(k_1<k_2<\ldots<k_m<\ldots;\ k_m \in \mathbb{N})$

$\triangle$ Док-во для $\mathbb{R}^2$ (в случ. произв. n аналогично)

Пусть $x_k = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)})$

Т.к $\forall k=1,2,\ldots$ вып. $\sqrt{(d_1^{(k)})^2+(d_2^{(k)})^2} \le C$, то $|d_1^{(k)}| \le C$, $|d_2^{(k)}| \le C$

Посл-ть $\{d_1^{(k)}\}$ огр $\underset{Б-В}{\Longrightarrow} \exists \{d_1^{(k_\ell)}\}: \lim\limits_{\ell\to\infty} d_1^{(k_\ell)} = d_1^{(0)}$

Т.к $\{d_2^{(k_\ell)}\}$ огр $\underset{Б-В}{\Longrightarrow} \exists \{d_2^{(k_{\ell_m})}\}: \lim\limits_{m\to\infty} d_2^{(k_{\ell_m})} = d_2^{(0)}$

Но $\lim\limits_{m\to\infty} d_1^{(k_{\ell_m})} = d_1^{(0)}$ (предел п/п сх п)

$\underset{Л.1\ п.\boxed{1.1}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{m\to\infty} x_{k_{\ell_m}} = (d_1^{(0)}, d_2^{(0)})$; $x_{k_{\ell_m}}$ – п/п посл-ти т. x_k ■

$\boxed{T.2}$ (**Кр. Коши сх-ти посл-ти т $\mathbb{R}^n$**)

Послед-ть x_k т $\mathbb{R}^n$ сх-ся $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists k_0: \forall k,m \ge k_0 \mapsto \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists k_0:$ $\begin{cases} \forall k \ge k_0 \mapsto \rho(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m \ge k_0 \mapsto \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Тогда $\forall k \ge k_0$ и $\forall m \ge k_0$

$\rho(x_k, x_m) \le \rho(x_k, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $x_k = (d_1^{(k)}, \ldots, d_n^{(k)})$.

Тогда $\forall k,m \ge k_0$

$\rho(x_k, x_m) = \sqrt{(d_1^{(k)} - d_1^{(m)})^2 + \ldots + (d_n^{(k)} - d_n^{(m)})^2} < \varepsilon$

При фикс. $i=1,2,\ldots,n$ и подавно

$|d_i^{(k)} - d_i^{(m)}| \le \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Значит при фикс i $\{d_i^{(k)}\}$ фунд $\overset{кр.К.}{\Longrightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} d_i^{(k)} = d_i^{(0)}$

$\underset{Л.1\ п.\boxed{1.1}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 = (d_1^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)})$ ■

$\boxed{1.3}$ Внутренние, предельные, изолированные точки множества.

Опр. Точка x_0 наз. <u>внутренней точкой</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$, если она принадлежит X вместе с некоторой окрестностью.

Опр. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>предельной точкой</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$, если сущ. посл-ть точек x_k из X такая, что $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

Опр. Точка x_0 мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. <u>изолированной</u>, если найдется её проколотая окрестность, не имеющая общих т. с X. $(\exists \varepsilon > 0 : \mathring{U}_\varepsilon(x_0) \cap X = \varnothing)$

Опр. <u>Точками прикосновения</u> мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. все его предельные и изолированные точки.

$\boxed{Л.1}$ Если т. $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ не явл. изол., то она явл. предельной т X.

$\triangle$ Если т x_0 не явл. изол:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда найдётся посл-ть т. $x_k \in X : 0 < \rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \\ x_k \neq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 - \text{пред. т } X. \quad \blacksquare$$

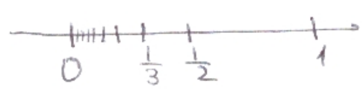
<u>Примеры:</u> 1) $X = [0,1] \cup \{2\}$

внут: $(0,1)$
пред: $[0,1]$
изол: $\{2\}$
прикос: $[0,1] \cup \{2\}$

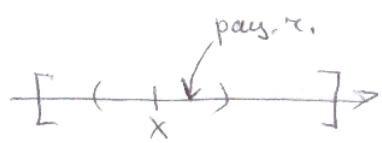
(для $X = (0,1) \cup \{2\}$ то же)

2) $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^1$.

0 – пред. т $(\notin X)$



3) $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$



внут: нет
пред: $[0,1]$
изол: нет
т. прик: $[0,1]$

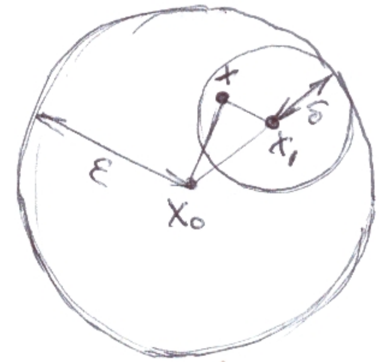
Опр (ИВ) Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ наз. <u>точкой прикосновения</u> мн $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Опр. <u>Дополнение</u> мн-ва X в $\mathbb{R}^n$ будем обозн. $\hat{X}$, т.е $\hat{X} = \mathbb{R}^n \setminus X$.

1.4 Открытые и замкнутые множества, их св-ва.

Опр. Мн-во $G\subset\mathbb{R}^n$ наз. открытым, если все его точки внутренние, т.е.
$\forall x_0\in G\ \ \exists\varepsilon>0:\ U_\varepsilon(x_0)\subset G$

Л.1 $U_\varepsilon(x_0)$ — откр. мн-во ($x_0\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$)



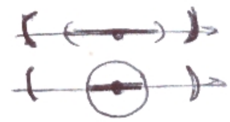
▲ Пусть $x_1\in U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $\rho(x_1,x_0)<\varepsilon$.
Обозн. $\delta=\varepsilon-\rho(x_1,x_0)>0$
Тогда $\forall x\in U_\delta(x_1)$:

$$\rho(x,x_0)\le\underbrace{\rho(x,x_1)}_{<\delta}+\underbrace{\rho(x_1,x_0)}_{<\varepsilon-\delta}<\delta+\varepsilon-\delta=\varepsilon$$

$\Rightarrow x\in U_\varepsilon(x_0)$

$\Rightarrow U_\delta(x_1)\subset U_\varepsilon(x_0)$, т.к. x_1 — произв. т. $U_\varepsilon(x_0)$, то $U_\varepsilon(x_0)$ — откр. мн ■

Пример: Интервал $(a;b)$ — конечн/беск
а) в $\mathbb{R}^1$ — откр мн
б) в $\mathbb{R}^2$ — не явл откр. мн



Опр. Мн-во $F\subset\mathbb{R}^n$ наз. замкнутым, если оно содержит все свои пред. т.

Замеч: $\varnothing$ по опр. и отк., и замкн.

Т.1 1) Если G_α, $\alpha\in A$, — какой-то набор (возм, несчет) откр. мн-в, то мн-во $G=\bigcup_\alpha G_\alpha$ — открыто
2) Если G_i, $i=1,\dots,k$ — откр. мн-ва, то мн-во $G=\bigcap_{i=1}^k G_i$ откр.

▲ 1) Пусть $x_0\in G$. Тогда $\exists\alpha:\ x_0\in G_\alpha$. Т.к G_α откр, то $\exists\delta>0: U_\delta(x_0)\subset G_\alpha$
$\Rightarrow U_\delta(x_0)\subset G\Rightarrow G$ — откр.
2) Пусть $x_0\in G$. Тогда $\forall i=1,\dots,k\mapsto\exists\delta_i>0: U_{\delta_i}(x_0)\subset G_i$
Рассм $\delta=\min\limits_{i=1,\dots,k}\delta_i>0$.
Ясно, что $U_\delta(x_0)\subset U_{\delta_i}(x_0)\subset G_i$ $\forall i=1,\dots,k$ $\Rightarrow U_\delta(x_0)\subset G\Rightarrow G$ — откр ■

Т.2 G — откр $\Leftrightarrow\hat G$ — замкн; ($\hat G$ — откр $\Leftrightarrow G$ — замкн.)

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть x_0 — пред. т. $\hat G$. Если $x_0\notin\hat G$, то $x_0\in G$. Т.к G откр, то $\exists\delta>0: U_\delta(x_0)\subset G$, т.е $U_\delta(x_0)\cap\hat G=\varnothing$.
Значит, в $U_\delta(x_0)$ нет точек $\hat G$, это прот. тому, что x_0 — пред. т.
Поэтому $x_0\in\hat G\Rightarrow\hat G$ замкн.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $x_0\in G$. Докажем, что $\exists\delta>0: U_\delta(x_0)\subset G$. Если это не так, то $\forall\delta>0\ \exists x\in U_\delta(x_0): x\in\hat G$. Возьмем $\delta=\frac{1}{k}$, $k=1,2,\dots$. Тогда $\forall k\ \exists x_k\in U_{1/k}(x_0): x_k\in\hat G$.
Но $x_k\ne x_0$, т.к $x_0\in G$. Т.к $\rho(x_k,x_0)<\frac{1}{k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k,x_0)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$
Значит, x_0 — пред. т $\hat G$, и $x_0\notin\hat G$ $\Rightarrow$ прот-е замкн. $\hat G$
Тогда $\exists\delta>0: U_\delta(x_0)\subset G$, и G откр. ■

$\boxed{1.5}$ Внутренность, замыкание и граница множества.

Опр. Мн-во всех внутренних точек мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. внутренностью множества X и обозн. $\operatorname{int} X$.

Легко проверить, что
1) $\operatorname{int} X$ – откр.
2) $\operatorname{int} X \subset X$
3) $\operatorname{int} X = X \Leftrightarrow X$ откр.

Опр. Для мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыканием наз. мн-во $\widehat{\operatorname{int}\hat{X}}$ и обозн $\bar{X}$.

Легко проверить, что
1) $\bar{X}$ – замк
2) $\bar{X} \supset X$
3) X – замк $\Leftrightarrow \hat{X}$ откр. $\Leftrightarrow \operatorname{int}\hat{X} = \hat{X}$.

Замыкание обычно опред-ся как мн-во точек прикосновения.
Докажем эквив-ть этих двух опред.
Для начала лемма:

$\boxed{Л.1}$ x_0 – т. прикосн. мн $X \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \rightarrow U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Если $x_0 \in X$, то $U_\delta(x_0) \cap X$ – непустое мн-во, так как содержит тx_0

Если x_0 – пред. т. X, то $\exists \{x_k\} \subset X$: $x_k \neq x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Тогда $\forall \delta > 0 \ \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow 0 < \rho(x_k, x_0) < \delta$

Значит, $\forall \delta > 0 \rightarrow U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall \delta > 0 \rightarrow U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Если $x_0 \in X$, то x_0 – т. прикосн. X.

Если $x_0 \notin X$, то $\forall \delta > 0 \rightarrow \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$

Возьмем $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

Тогда $\forall k \ \exists x_k \neq x_0$, $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$

Т.к $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и x_0 – пред т. ■

$\boxed{Т.1}$ Для любого мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его замыкание $\bar{X}$ совпадает с мн. точек прикосн. X.

▲ x_0 – т. прикосн. $X \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \rightarrow U_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists x \in U_\delta(x_0) : x \notin \hat{X} \Leftrightarrow x_0$ не явл внут. т. $\hat{X} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_0 \notin \operatorname{int}\hat{X} \Leftrightarrow x_0 \in \bar{X}$ ■

Опр. Для мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$ его границей ∂X наз. мн-во $\bar{X} \setminus \operatorname{int} X$

$\boxed{1.6}$ Компакты.

Опр. Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ наз. компактом, если из любой посл-ти $\{x_k\} \subset X$ можно выделить п/п, сход. к некот. элем. из X.

$\boxed{Т.1}$ (Кр. точки прикосн)

$x_0 \in \overline{X} \iff \exists \{x_k\} \subset X : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

$\boxed{Т.2}$ (Кр. компактности мн-ва)

Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ явл. компактом $\iff$ X огр. и замкн.

$\triangle$

1) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – огр, замк. мн-во.

Покажем, что X – компакт.

Пусть $\{x_k\}$ – произв. послед. элем. мн. X.

Т.к $\{x_k\}$ огр, то по т. Б–В. можно выдел. п/п $\{x_{k_j}\}$, сход. к некот. $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Поскольку $\{x_{k_j}\} \subset X$ и $x_0 = \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j}$, то по <u>теор. 1</u> $x_0 \in \overline{X}$

В силу замкн. X $x_0 \in X$.

2) Пусть X – компакт.

Док-во того, что мн. X огр. и замк., проведем методом от прот.

а) Предпол, что X неогр.

Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x_k \in X : |x_k| > k$.

Поскольку для любой п/п $\{x_{k_j}\}$ п-ти $\{x_k\}$ ~~нельз~~ вып. $\lim\limits_{j\to\infty} |x_{k_j}| = +\infty$, то из посл-ти $\{x_k\}$ нельзя выдел. п/п, сход. к нек. элем. мн X.

След-но, X не компакт.

Мы получили противоречие.

Значит, X – огр.

б) Предпол, что X незамкн.

Тогда $\exists x_0 \in \overline{X} \setminus X$

Т.к $x_0 \in \overline{X}$, то по <u>теор 1</u> $\exists \{x_k\} \subset X : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Т.к любая п/п $\{x_{k_j}\}$ сх. к $x_0 \notin X$, то из п-ти $\{x_k\}$ нельзя выдел. п/п, сх. к нек. элем. мн. X.

След-но, мн-во X не явл. компактом.

След-но, X – замкн. $\blacksquare$

2.1 Предел числовой функции нескольких переменных.

Опр. Функцией нескольких переменных наз. функция, обл. опр. кот. $\mathcal{D}(f)\subset\mathbb{R}^n$, а мн-во знач. $E(f)\subset\mathbb{R}$

Аргумент такой ф-и — т. n-мерного евклид. пр-ва $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$, т.е $f(\bar{x})=f(x_1,\dots,x_n)$

Опр (Коши) Гов., что $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=\beta$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\bar{x}\in\mathring{U}_\delta(\bar{a})\mapsto f(\bar{x})\in U_\varepsilon(\beta)$$

Опр (Гейне) Пусть ф-я f опр. в нек. прок. окр. т $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$.
Тогда гов, что $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=\beta$, если

$$\forall\{\bar{x}_k\}:\lim_{k\to\infty}\bar{x}_k=\bar{a}\ \text{ и }\ \bar{x}_k\neq\bar{a}\mapsto\lim_{k\to\infty}f(\bar{x}_k)=\beta$$

В опр. выше β – один из 6СПС (т.е $a, a+0, a-0, +\infty, -\infty, \infty$)

<u>Замечание</u> Несмотря на общность опред. и сохр. теорем для случая ф-и 1-ой перем (список теор на стр 17 (Петр)), для ф-й многих перем. исследование предела принципиально сложнее. Напр, на м-ти понятие одностор. предела не имеет смысла

Опр. Предел функции двух переменных наз. двойным пределом и об.
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\quad\text{или}\quad\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

Опр (Коши) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\beta$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(x,y):\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\mapsto f(x,y)\in U_\varepsilon(\beta)$$

Опр (Гейне) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\beta$, если f опр в нек. прок. окр т (x_0,y_0) и

$$\forall\{(x_k,y_k)\}:\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(x_0,y_0),\text{ но }(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)\mapsto\lim_{k\to\infty}f(x_k,y_k)=\beta$$

Попытаемся свести двойной предел к пределу ф-и одной перем.

I. Повторные пределы

Опр. Пусть зад. ф-я $f(x,y)$ и т. $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Для любого фикс. y. обозн. через $\varphi(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, если он сущ.
Тогда $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(x)=\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)\right)$ наз. повторным пределом f в т (x_0,y_0)

Предел $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$ также наз. повторным пределом.

<u>Замечание</u> Из сущ-я повт. пр. не след. сущ. двойного предела (см. след. пример)

Пример

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\quad,\quad x^2+y^2>0$$

$\forall x\neq 0\quad \exists \varphi(x)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y))=1$

$\forall y\neq 0\quad \exists \psi(y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=1\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y))=1$

Предполож, что $\exists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=b$

Тогда (опр. Гейне) $\forall\{(x_k,y_k)\};\ (x_k,y_k)\neq(0,0):\ \lim\limits_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(0,0)\hookrightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k,y_k)=b$

Пусть $x_k\neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$. Тогда

$\left.\begin{array}{l} f(x_k,x_k)=2;\\ f(x_k,-x_k)=0\end{array}\right\}\Rightarrow b=2\neq 0\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$

II. Пределы по направлениям.

Опр. Пусть $\vec{e}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ — единич. вект.
Если ф-я двух перем. f опр. в нек. прокол. окр. т (x_0,y_0), то её пределом при $x\to x_0, y\to y_0$ по направлению $\vec{e}$ (или по напр, опр. углом φ) наз предел ф-и одной перем. ρ:

$\lim\limits_{\rho\to+0}f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)$

$\boxed{\text{Л.1}}$ Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\beta$, то пред. по любому напр. при $x\to x_0, y\to y_0$ равен β.

▲ Рассм. произв. $\{\rho_k\}$ полож. чисел: $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=0$

Тогда послед. точек $(x_k,y_k)=(x_0+\rho_k\cos\varphi,\ y_0+\rho_k\sin\varphi)\longrightarrow(x_0,y_0)$, причем $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$.

Значит,

$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_0+\rho_k\cos\varphi,\ y_0+\rho_k\sin\varphi)=\beta$

$\Rightarrow \lim\limits_{\rho\to+0}f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)=\beta$ ■

Следствие Если пред ф по двум разл. напр. не совп. в т, то двойного пред в этой т. не сущ.

Пример.

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \quad \text{в т} (0,0)$$

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=\frac{(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=(\cos\varphi+\sin\varphi)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{При } \varphi=\frac{\pi}{4} \quad f=2\\ \text{При } \varphi=-\frac{\pi}{4} \quad f=0\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

Замечание Обратное неверно: если по любому напр. ф-я в т. имеет один и тот же пред в, то это ещё не гарантирует налич. двойного пред.

Пример

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}, \; x^2+y^2>0 \; ; \; (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}$$

Если $\sin\varphi=0$, то $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=0 \quad \forall\rho$

Если $\sin\varphi\neq 0$, то всё равно $\lim\limits_{\rho\to+0} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=0$

Итак, по любому напр. пред. ф-и при $x\to 0$ и $y\to 0$ равен 0.

Докажем, что двойного пред не сущ.

Пусть $x_k\neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$

$$\left.\begin{array}{l}f(x_k,0)=0\\ f(x_k,x_k^2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

Таким образом, понятие двойного пред. нельзя свести исключит. к пред. ф-и одной перем.

$\boxed{\text{Л.2}}$ (достат. усл. сущ-я конеч. двойного пр)

Пусть $\exists\rho_0>0: \forall\rho\in(0;\rho_0) \hookrightarrow |f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)-b|\leq F(\rho)$, где $\lim\limits_{\rho\to+0} F(\rho)=0$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$.

(В данном случ. $F(\rho)$ есть „равномерная оценка", не зав. от φ.)

▲ Из усл. след, что

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \forall\rho\in(0,\delta) \hookrightarrow F(\rho)<\varepsilon$

Для произв. точки (x,y) определим числа ρ и φ так, что

$x=x_0+\rho\cos\varphi$

$y=y_0+\rho\sin\varphi$

Тогда

$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Поэтому для $\forall (x,y): \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_1 \equiv \min(\rho_0, \delta)$, выполн.

$|f(x,y)-b| = |f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)-b| \leq F(\rho) < \varepsilon$

След-но, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$ ■

Пример

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \ x^2+y^2>0$

$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \rho\cos^2\varphi\sin\varphi$

$|f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| \leq \rho \to 0$, и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

$\boxed{2.2}$ Предел функции по множеству.

Опр (Коши) Пусть $\bar{a}$ – пред. т. мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда гов, что $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x}) = \beta$, если

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \ \forall \bar{x} \in \mathring{U}_\delta(\bar{a}) \cap X \hookrightarrow f(\bar{x}) \in U_\varepsilon(\beta)$

Опр (Гейне) Пусть $\bar{a}$ – пред. т. мн-ва $X \subset \mathbb{R}^n$, причем при нек $\delta>0$ ф-я f опр в $\mathring{U}_\delta(\bar{a}) \cap X$.

Тогда гов, что $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x})$, если

$\forall \{\bar{x}_k\}: \bar{x}_k \in X, \bar{x}_k \neq \bar{a}, \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{a} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(\bar{x}_k) = \beta$

Замечание Пред т. может как принадл. мн-ву, так и не принад. Пред по мн-ву в изолир. т не определяется.

$\boxed{2.3}$ Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству.

Опр. Ф-я f наз. непрерывной в т. $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, если она опред. в нек. окр. т $\bar{a}$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

Опр. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in X$ и ф-я f опр. в $U_\delta(\bar{a}) \cap X$ при нек $\delta>0$. Тогда

1) если $\bar{a}$ – пред. т. мн. X, то ф-я f наз. непр. в т. $\bar{a}$ по мн-ву X, если $\lim\limits_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{x}\in X}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

2) если $\bar{a}$ – изол. т. мн X, то ф-я f по опред. счит. непр в т $\bar{a}$ по мн X.

Опред-я непр. в т. можно сформ. на языке Коши и Гейне (без оговорки $\bar{x}_k \neq \bar{a}$ и с примен $U_\delta(\bar{a})$ вместо $\mathring{U}_\delta(\bar{a})$).

Опр. Ф-я f наз. непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, если она непр. в любой т. $\bar{a} \in X$ по множ-ву X.

2.4 Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней.

Опр. Замкнутое ограниченное мн-во в $\mathbb{R}^n$ наз. компактом.

Т.1 (Обобщ. т. Вей-са)

Если ф-я f непр на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то:

1) f огр на F;

2) $\exists x_1, x_2 \in F: f(x_1) = \sup\limits_F f(x),\ f(x_2) = \inf\limits_F f(x)$

▲ Док-во аналог. одном. случаю

1) Пусть ф-я f неогр. на F

Тогда $\forall E > 0\ \exists x \in F: |f(x)| > E$

Рассм. $E = k,\ k \in \mathbb{N}$

Тогда $\forall k\ \exists x_k \in F: |f(x_k)| > k$

Т.к F – огр. мн-во, то $\{x_k\}$ огр.

По т. Б-В (в $\mathbb{R}^n$) сущ. сх-ся п/п $\{x_{k_m}\}$; $\lim\limits_{m \to \infty} x_{k_m} = x_0$

Если при $m \geq m_0$ все $x_{k_m} = x_0$, то $x_0 \in F$;
если нет, то x_0 – пред. т F, и в силу замкн. F, всё равно $x_0 \in F$.
Т.к ф-я f непр в т x_0 по мн. F, то $\lim\limits_{m \to \infty} f(x_{k_m}) = f(x_0)$.

С др. стор., т.к при всех m вып.

$|f(x_{k_m})| > k_m$, то

$\lim\limits_{m \to \infty} f(x_{k_m}) = \infty$ – прот-е.

Значит, f огр на F

2) Аналог. одном. случ. с теми же измен, что и в п. 1) ■

2.5 Равномерная непрерывность (теорема Кантора)

Опр. Ф-я f наз равномерно непрерывной на мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in X: \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (1)

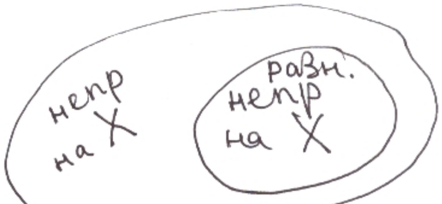
Опр. Коши непр-ти ф-и f на мн-ве X:

$\forall x' \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x'' \in X: \rho(x', x'') < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (2)

(т.е $\forall x' \in X \mapsto \lim\limits_{\substack{x'' \to x' \\ x'' \in X}} f(x'') = f(x')$

<u>Замеч</u> В (1) $\delta = \delta(\varepsilon)$, в (2) $\delta = \delta(\varepsilon, x')$

Т.к зав-ть только от ε явл. частн. случ. зав-ти от ε и от x', то р.н ф-я на мн-ве явл непр на нем



$\boxed{\text{Т.1}}$ (Кантора)

Если ф-я непр. на компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то она р.н. на нём.

▲ Пусть ф. f не явл р.н на F.

Тогда

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in F, \ \rho(x', x'') < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$

Возьмем $\delta = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots$

Тогда можно построить две посл-ти x_k' и x_k'' точек F т, ч. $\rho(x_k', x_k'') < \frac{1}{k}$, но $|f(x_k') - f(x_k'')| \geq \varepsilon$

Т.к F — огр. мн, то по т. Б–В из $\{x_k'\}$ можно выдел. сх п/п $\{x_{k_m}'\}$; $\lim\limits_{m \to \infty} x_{k_m}' = x_0$.

Если при $m \geq m_0$ все $x_{k_m}' = x_0$, то $x_0 \in F$,

если нет, то x_0 — пред. т F и в силу замкн. F всё равно $x_0 \in F$.

Далее,

$$\rho(x_{k_m}'', x_0) \leq \rho(x_{k_m}'', x_{k_m}') + \rho(x_{k_m}', x_0) < \frac{1}{k_m} + \rho(x_{k_m}', x_0)$$

Т.к $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$, то $k_m \geq m$, и $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{k_m} = 0$

Также $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x_{k_m}', x_0) = 0$, т.е $\lim\limits_{m \to \infty} x_{k_m}'' = x_0$

Но ф-я f непр. в т x_0 по мн. F, поэтому

$$\lim_{m \to \infty} f(x_{k_m}') = \lim_{m \to \infty} f(x_{k_m}'') = f(x_0)$$

и

$$\lim_{m \to \infty} |f(x_{k_m}') - f(x_{k_m}'')| = 0,$$ что противоречит нер-ву

$|f(x_{k_m}') - f(x_{k_m}'')| \geq \varepsilon$, вып. $\forall m = 1, 2, \ldots$ ■

<u>Замеч</u> Если ф-я непр на произв. мн-ве, отсюда не след. р. неп-ть.

<u>Пример</u> $f(x) = \sin x^2$ на $X = (0, +\infty)$

Докажем, что $f(x)$ не явл р.н.

Положим $x_1 = \sqrt{2\pi n}$, $x_2 = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ($n \in \mathbb{N}$ выберем позже)

Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$

Предпол, что $f(x)$ р.н., и для $\varepsilon = 1$ найдем соот. $\delta > 0$ из опред.

Подберем $n \in \mathbb{N}$ т, что $|x_1 - x_2| < \delta$

(Это возможно, т.к $|x_1 - x_2| = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 + x_2} = \dfrac{\pi}{2(\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}})}$)

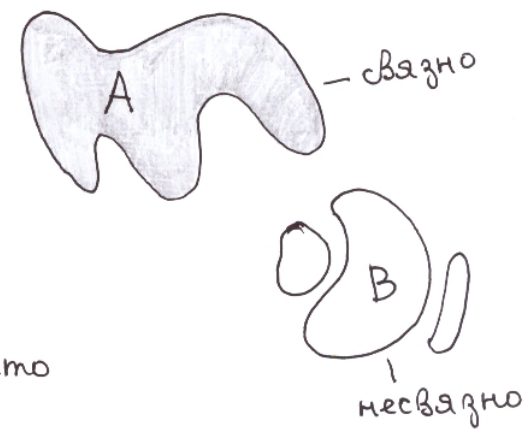
Тогда по опр. р. н. должно быть

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon = 1$

Но $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Прот-е.

2.6 Связные множества

Опр. Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. несвязным, если сущ. непустые открытые в E мн-ва E_1 и E_2 такие, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 = E$, т.е E представимо в виде объединения двух непустых непересек. откр. мн.
Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз связным, если оно не является несвязным.



Замеч Мн-во S несвязно $\Leftrightarrow$ найдутся две непересекающихся откр. в $\mathbb{R}^n$ мн-ва U и V, что $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$ и $S \cap U \neq \varnothing$, $S \cap V \neq \varnothing$

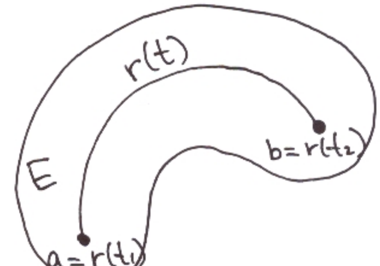
Пример $\varnothing$, $\{a\}$ — связные мн-ва.

Т.1 Мн-во $I \subset \mathbb{R}$ связно $\Leftrightarrow$ I — промежуток

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Если I не явл. промеж., то для нек. т. $x, y \in I$ $(x<y)$ отрезок $[x,y]$ не содерж. в I.
Тогда между x и y $\exists z \notin I$.
Рассм. $(-\infty, z) \cap I$ и $(z, +\infty) \cap I$.
Это непустые (содерж. x и y), откр. в I мн-ва, объедин. кот. совп. с I.
значит, I несвязно

$\boxed{\Leftarrow}$ Предпол, что I не явл. связ. мн.
Тогда найдутся непустые неперес. откр. в $\mathbb{R}$ мн-ва U и V, что $I = (I \cap U) \cup (I \cap V)$ и $I \cap U \neq \varnothing$, $I \cap V \neq \varnothing$
Пусть $x \in I \cap U$ и $y \in I \cap V$. Без огр. общ. $x<y$.
Т.к I — промеж, то $[x,y] \subset I$.
Разделим $[x,y]$ пополам и через $[x_1, y_1]$ обозн. ту половину, левый конец кот. лежит в U, а правый в V.
Снова разделим $[x_1, y_1]$ пополам и т.д.
По индукции построим послед-ть стягив. отр. $\{[x_k, y_k]\}$ такую, что $x_k \in U$, $y_k \in V$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Пусть z — общая точка этих отр.
Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, то z явл. граничной т. как для U, так и для V, а т.к U и V откр, то $z \notin U$ и $z \notin V$, что противореч. усл. $z \in I \subset U \cup V$ ■

Опр Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. линейно-связным, если любые две т. a и b мн-ва E можно соед. кривой Γ, леж. в E, т.е $\forall a, b \in E$ сущ. вект-ф-я $r(t)$, непрер. на нек. отр. $[t_1, t_2]$ и такая, что $r(t_1) = a$, $r(t_2) = b$ и $\forall t \in [a,b] \hookrightarrow r(t) \in E$



2.7 Свойства функций, непрерывных на связном множестве.

Т.1 (крит. непрер)

Ф-я $f: E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ непр на E $\Leftrightarrow$ для каждого откр. мн. V из $\mathbb{R}^m$ мн-во $f^{-1}(V)$ откр в E.

Т.2 Если ф-я $f: S\to\mathbb{R}^m$ непр. на связном мн $S\subset\mathbb{R}^n$, то мн. $f(S)$ связно в $\mathbb{R}^m$.

▲ Если мн-во $f(S)$ несвязно, то сущ. откр. в $\mathbb{R}^m$ мн. U и V, что $f(S)=(f(S)\cap U)\cup(f(S)\cap V)$ и $f(S)\cap U\neq\varnothing$, $f(S)\cap V\neq\varnothing$

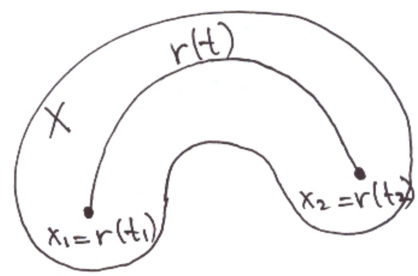
Тогда мн-ва $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ откр. в S (по Т.1), непусты и не пересек. (т.к U, V непусты и не пересек) и $S=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$, что невозм, т.к S связно ■

Следствие (теор. о пром. знач)

Если ф-я $f: S\to\mathbb{R}$ непр на связ. мн $S\subset\mathbb{R}^n$, то f приним все промеж. знач. (т.е если $u, v\in f(S)$, $u<v$, то $[u,v]\subset f(S)$)

2.7' Свойства функций, непрерывных на связном множестве

Опр. Мн-во $X\subset\mathbb{R}^n$ наз. линейно-связным, если любые две точки x_1 и x_2 мн X можно соединить кривой Γ, лежащей в X, т.е $\forall x_1, x_2\in X$ $\exists r(t)$ — вект-ф, непр на нек. $[t_1,t_2]$: $r(t_1)=x_1$; $r(t_2)=x_2$ и $\forall t\in[t_1,t_2] \hookrightarrow r(t)\in X$.



Т.1 (о промеж. знач.)

Пусть скалярная ф-я $f(x)$ непр на лин-связ. мн. $X\subset\mathbb{R}^n$ и принимает на X знач. y_1 и y_2. Тогда $f(x)$ принимает на X все знач, лежащие между y_1 и y_2

▲ Пусть ф-я $f(x)$ принимает знач. y_1 и y_2 в т. x_1 и $x_2\in X$: $f(x_1)=y_1$; $f(x_2)=y_2$.

В силу лин-св. мн X сущ непр на $[t_1,t_2]$ в-ф $r: [t_1,t_2]\to X$ такая, что $r(t_1)=x_1$, $r(t_2)=x_2$.

Т.к сложная ф-я $\varphi(t)=f(r(t))$ непр на $[t_1,t_2]$, то по теор. о пром. зн. для ф-и одной пер $\forall y_0$, лежащего между y_1 и y_2, сущ. $t_0\in[t_1,t_2]$: $\varphi(t_0)=y_0$

След-но, $x_0=r(t_0)\in X$ и $f(x_0)=y_0$ ■

$\boxed{3.1}$ Частные производные функции нескольких переменных.

Опр. Частной производной по x ф-и двух перем. $f(x,y)$ в т (x_0,y_0) наз. произв. ф. $f(x,y_0)$ одной пер. x в т x_0 (обозн. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ или $f'_x(x_0,y_0)$); при этом предполаг., что ф. $f(x,y_0)$ опред в нек. окр. т x_0 и её произв. конечна

Аналог. опред. ч.п по y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

В общем случае частная производная ф-и $f(x_1,\dots,x_n)$ по перем x_i в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ опред-ся как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^0,\dots,x_n^0)=\frac{d}{dx_i}f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)\Big|_{x_i=x_i^0}$$

Замеч В отлич. от ф-и 1-ой пер, из сущ. в т. ч.пр. по всем перем. не след. непр-ть в т.

Пример
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 1, & x=y=0\end{cases}$$

$f(x,y)$ не явл непр. в т $(0,0)$, т.к не сущ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ (см. пр из $\boxed{2.1}$)

Но $f(x,0)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}(f(x,0))\Big|_{x=0}=0$$

Аналог. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$\boxed{3.2}$ Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Опр. Ф-я n перем. f наз. дифференцируемой в т. $(x_1^0,\dots,x_n^0)$, если её приращ. в этой т. представимо в виде

$$\Delta f(x_1^0,\dots,x_n^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n^0)=$$

$$=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\times\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}, \qquad (1)$$

где $A_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, а предел ф-и n перем. $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ рав. 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$

При этом лин. часть приращения $A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ наз. дифференциалом функции f в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и об. $df(x_1^0,\dots,x_n^0)$

Иначе (1) можно запис. так:

$$\Delta f(x_1^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+o(\rho) \quad \text{при} \quad (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$

Для ф-и двух перем. (1) запис. так:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right), \text{ т.е}$$

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+o(\rho), \text{ при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

$\boxed{3.3}$ Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия диференцируемости функции нескольких переменных

$\boxed{\text{Т.1}}$ (НУ диф-ти)

Если ф-я n перем f диф-ма в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$, то

1) f непр в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$
2) при $i=1,2,\dots,n$ сущ конечные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_n^0)$, соот. равные коэф A_i в (1)

▲ 1) Т.к.

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n+\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2},$$

где $\Delta x_i=x_i-x_i^0$, $i=1,\dots,n$,

а предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$,

то предел ф-и $f(x_1,\dots,x_n)$ при $(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)$ равен $f(x_1^0,\dots,x_n^0)$,

т.е ф-я непр в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

2) Провед. док-во для $i=1$ (для др. аналог.)

Положим в (1) $\Delta x_2=\dots=\Delta x_n=0$. Тогда

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)\cdot|\Delta x_1|$$

Но если предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ рав. 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$, то и $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)=0$

Тогда если $\beta(\Delta x_1)=\alpha(\Delta x_1,0,\dots,0)\cdot\operatorname{sign}\Delta x_1$, то $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\beta(\Delta x_1)=0$, и, т.к

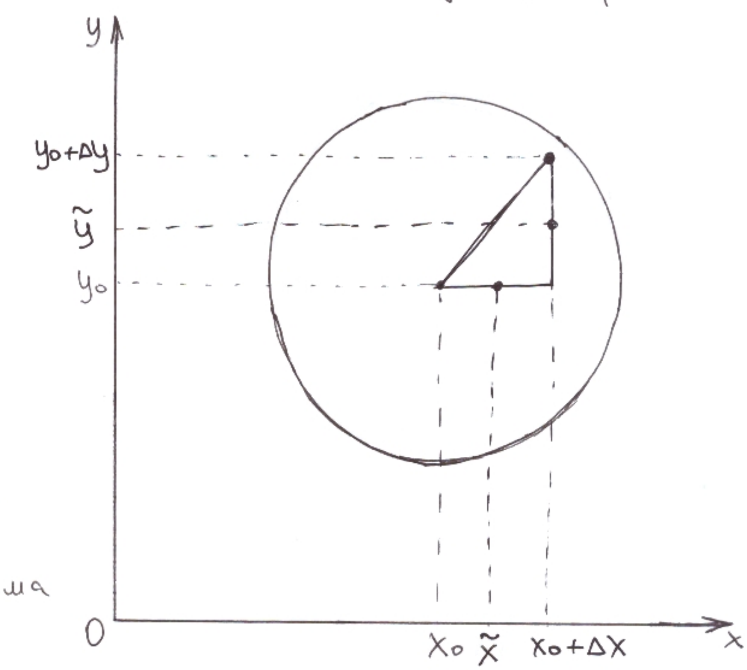
$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1\Delta x_1+\beta(\Delta x_1)\cdot\Delta x_1$, то ф-я $f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)$ как ф-я одной пер x_1 диф. в т x_1^0, и её произв. по x_1 в этой т. равна A_1, т.е сущ. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1$ ■

Таким обр., диф-ал диф-мой ф-и запис. в виде
$df(x_1^0,\dots,x_n^0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_n^0)\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,\dots,x_n^0)\Delta x_n$.

Дифференциалами независимых переменных $x_1,\dots,x_n$ наз. их прираш:
$dx_1=\Delta x_1,\dots,dx_n=\Delta x_n$, поэтому
$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

$\boxed{\text{Т.2}}$ (ДУ диф-ти)
Если ф-я n перем. f имеет ч. пр. по всем пер. $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$, непрерыв. в т $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ (как ф-и n перем), то ф. f диф. в этой точке.

▲ Провед. док-во для $n=2$ (в общем сл. аналог)
Т.к f'_x и f'_y непр. в т (x_0,y_0), то $\exists\delta>0$: f'_x и f'_y (след-но, и ф. f) опред в $U_\delta(x_0,y_0)$.

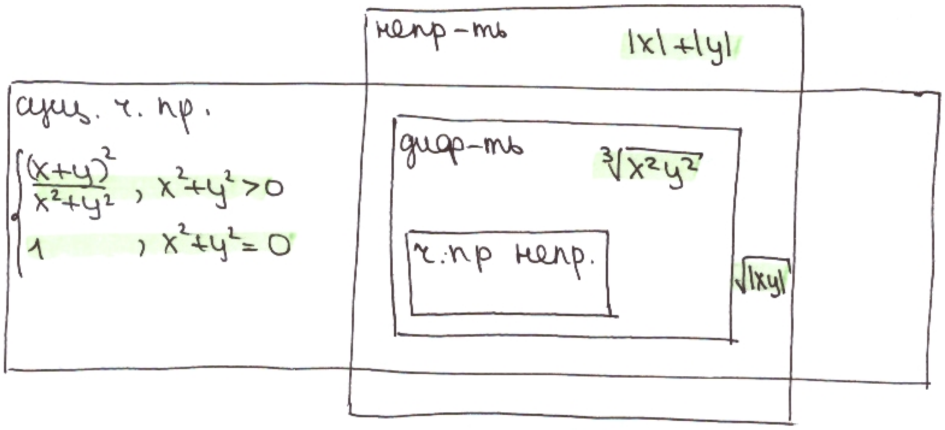


Пусть $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$; $\Delta x=x-x_0$
$\Delta y=y-y_0$. Тогда $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta$.
Рассм. прираш. ф-и в т (x_0,y_0):
$\Delta f(x_0,y_0)\equiv f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$
$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+$
$+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=$
$=f'_y(x_0+\Delta x,\tilde{y})\cdot\Delta y+f'_x(\tilde{x},y_0)\Delta x$

Здесь прим. т. Лагр. о ср. сначала к ф. одной пер $\varphi(y)=f(x_0+\Delta x,y)$
(т.к f'_y сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\varphi(y)$ диф-ма на $[y_0,y_0+\Delta y]$, $\tilde{y}\in(y_0,y_0+\Delta y)$),
затем к ф-и одной пер. $\psi(x)=f(x,y_0)$
(т.к f'_x сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$, то $\psi(x)$ диф-ма на $[x_0,x_0+\Delta x]$, $\tilde{x}\in(x_0,x_0+\Delta x)$)

Ясно, что $\tilde{x}=\tilde{x}(\Delta x,\Delta y)$, $\tilde{y}=\tilde{y}(\Delta x,\Delta y)$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\tilde{x}(\Delta x,\Delta y)=x_0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\tilde{y}(\Delta x,\Delta y)=y_0$

Если доопред. $\tilde{x}(0,0)=x_0$, $\tilde{y}(0,0)=y_0$, то ф-и $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ станут непр. в $(0,0)$
По следствию из теор. о суперпозиции непр. отобр. (см. стр 26-27 Пет) ф-и $f'_x(\tilde{x}(\Delta x,\Delta y),y_0)$ и $f'_y(x_0+\Delta x,\tilde{y}(\Delta x,\Delta y))$ как ф-и от Δx и Δy непр в т $(0,0)$ и
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}f'_x(\tilde{x},y_0)=f'_x(x_0,y_0)=A$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}f'_y(x_0+\Delta x,\tilde{y})=f'_y(x_0,y_0)=B$
Поэтому $f'_x(\tilde{x},y_0)=A+\alpha(\Delta x,\Delta y)$; $f'_y(x+\Delta x,\tilde{y})=B+\beta(\Delta x,\Delta y)$, где
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$
Тогда $\Delta f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$
Но $|\alpha\cdot\Delta x+\beta\Delta y|\le(|\alpha|+|\beta|)\rho=o(\rho)$ при $\Delta x\to0,\Delta y\to0$
След-но, ф-я f диф. в т (x_0,y_0) ■



Все контрпримеры в Петровиче

Алгоритм исслед-я ф-и (для опр-ти 2-ух пер) на дифф-ть в (x_0, y_0)

1) Если f'_x и f'_y заведомо непр. в т., то f дифф. в т.

2) Выяснить, сущ. ли $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Если хотя бы одна из них не сущ, то f не дифф. в т (x_0, y_0).

3) Если A и B сущ, проверить, равен ли 0 предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Если да, то f дифф в т (x_0, y_0). Если нет — не дифф.

3.4 Дифференцируемость сложной функции.

Т.1 Пусть ф-и k перем. $x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)$ дифф-мы в т $(t_1^0, \dots, t_k^0)$ а ф-я n перем. $f(x_1, \dots, x_n)$ дифф-ма в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, где $x_j^0 = x_j(t_1^0, \dots, t_k^0)$, $j = 1, \dots, n$.

Тогда сложная ф-я $f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$ дифф. в т. $(t_1^0, \dots, t_k^0)$, причем её ч.пр. в этой т. вычисл. по ф-лам

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

($\frac{\partial f}{\partial x_j}$ берутся в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, а $\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$ в т. $(t_1^0, \dots, t_k^0)$)

▲ Рассм. приращение

$$\Delta f = \Delta f(x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Т.к ф. f дифф. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, то

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \Delta x_j + \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \times \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}, \text{ где} \qquad (1)$$

$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $j = 1, \dots, n$, а предел ф-и $\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ при $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \to (0, \dots, 0)$ равен 0.

Можно доопред. $\alpha(0, \dots, 0) = 0$; тогда ф-я α непр. в т $(0, \dots, 0)$, и рав-во (1) сохр при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 0$

Пусть теперь

$$\Delta x_j = x_j(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) - x_j(t_1^0, \dots, t_k^0), \; j = 1, \dots, n.$$

Т.к ф-и x_j диф., то они и непр. в т $(t_1^0, \dots, t_k^0)$, и предел ф-и Δx_j равен 0 при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$, $j = 1, \dots, n$.

В силу диф-ти ф-й x_j:

$$\Delta x_j = \sum_{i=1}^{k} B_{ij} \Delta t_i + \alpha_j (\Delta t_1, \dots, \Delta t_k) \times \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}, \text{ где} \qquad (2)$$

$B_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0, \dots, t_k^0)$, а пред. ф-й $\alpha_j(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k)$ при $(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k) \to (0, \dots, 0)$ равны 0; $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$.

Можно доопред. $\alpha_j(0, \dots, 0) = 0$, тогда ф-и α_j непр в т $(0, \dots, 0)$, и рав-во (2) сохр при $\Delta t_1 = \dots = \Delta t_k = 0$.

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \left(\sum_{i=1}^{k} B_{ij} \Delta t_i + \alpha_j (\Delta t_1, \dots, \Delta t_k) \times \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2} \right) +$$
$$+ \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \cdot \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} \qquad (3)$$

Обозн. $\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2} = \rho$.

Т.к $|\Delta t_i| \le \rho$ при $i = 1, \dots, k$. и $\exists \delta > 0$ т, ч. при $\sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2} < \delta$ выполн. нер-ва

$|\alpha_j(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k)| < 1$,

то $|\Delta x_j| < M \cdot \sum_{i=1}^{k} |\Delta t_i| + \rho \le (Mk + 1)\rho$ при $\rho < \delta$, $j = 1, \dots, n$.

(здесь M — наиб. из $|B_{ij}|$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$)

Тогда $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} < (Mk+1)\sqrt{n}\,\rho \equiv C\rho$ при $\rho < \delta$.

Из (3) имеем теперь

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} A_j B_{ij} \right) \Delta t_i + \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \alpha_j (\Delta t_1, \dots, \Delta t_k) \right) \rho + \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \cdot \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} \qquad (4)$$

Т.к. $C_i = \sum_{j=1}^{n} A_j B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1^0, \dots, t_k^0)$, то для док-ва диф-ти слож. ф-и в т $(t_1^0, \dots, t_k^0)$ с ч. пр. C_i, $i = 1, \dots, k$, достат. проверить, что два из трёх слаг. в правой части (4) есть $o(\rho)$ при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$.

Но $\sum_{j=1}^{n} A_j \alpha_j (\Delta t_1, \dots, \Delta t_k)$ — б/м при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$ как лин. комб. б/м $\alpha_j(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k)$; значит., второе слаг. в правой части (4) $o(\rho)$.

Далее, из (2) след, что $\Delta x_j(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k)$ — непр. ф. от $\Delta t_1, \dots, \Delta t_k$ в т $(0, \dots, 0)$, ~~поэтому пред. этой ф-и при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$ равен 0~~.

По след. из теор. о непр. суперпоз. непр. отобр (стр 26-27 Пет)

$\alpha(\Delta x_1(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k), \dots, \Delta x_n(\Delta t_1, \dots, \Delta t_k))$ — непр. ф-и от $\Delta t_1, \dots, \Delta t_k$ в т $(0, \dots, 0)$,

поэтому предел этой ф-и при $\Delta t_1 \to 0, \dots, \Delta t_k \to 0$ равен 0.
Т.к $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2} < C\rho$ при $\rho < \delta$, то третье слаг. в прав. ч. также $o(\rho)$. ■

3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных.

1) Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — диф. ф-я n незав перем, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$, где dx_j – диф-алы незав. пер. (1)

2) Пусть $x_1 = x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = x_n(t_1, \dots, t_k)$ – диф. ф-и k перем.
Тогда для сложной ф-и k перем. $f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$

$$df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \Big) dt_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \Big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad (2)$$

где dx_j – диф-алы ф. неск. перем.

Рав-во (1) и (2) наз. инвар-тью формы диф-ла отн. зам. перем.

3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

Опр. Если ф-я n перем. f имеет в т. $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ч. пр. по всем. перем, причем $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = A_i$, $i = 1, \dots, n$, то вектор с коор ст $(A_1, \dots, A_n)^T$ наз. градиентом ф. f в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и обозн. $\operatorname{grad} f(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Таким обр, $df = (\operatorname{grad} f, \overrightarrow{\Delta x})$, где $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$

Опр. Пусть f – ф. n перем, а $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ – един. вект. $(e_1^2 + \dots + e_n^2 = 1)$
Рассм. ф. $\varphi(t) = f(x_1^0 + te_1, \dots, x_n^0 + te_n)$ одной пер. t.
Если сущ. конечная $\varphi'_+(0)$, то она наз. производной по направлению век. $\vec{e}$ ф. f в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и обозн $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_1^0, \dots, x_n^0)$

Т.1 Если ф. n перем f диф. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, то для любого един. в. $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ сущ. $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$ (все ч.пр бер в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$)

▲ Применим к ф-и $\varphi(t) = f(x_1^0 + te_1, \dots, x_n^0 + te_n)$ теор. о диф. сл. ф.
По этой теор. $\varphi(t)$ диф. в т. 0 (а не только $\exists \varphi'_+(0)$),
причем $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d}{dt}(x_1^0 + te_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d}{dt}(x_n^0 + te_n) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$$

(Пр. $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ бер. в т $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, пр. по t — в т 0) ■

$\boxed{4.1}$ Частные производные высших порядков

Опр Для ф-и двух перем $f(x,y)$ опред. частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

В т, где соот час. пр от час. пр сущ-т.

Для ф-й любого числа пер. можно определить ч. пр. любых порядков.
Напр, для ф-и 2-ух пер:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \; ; \; \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$$

3-ех пер:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right) \quad \text{и т.д.}$$

$\boxed{4.2}$ Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования

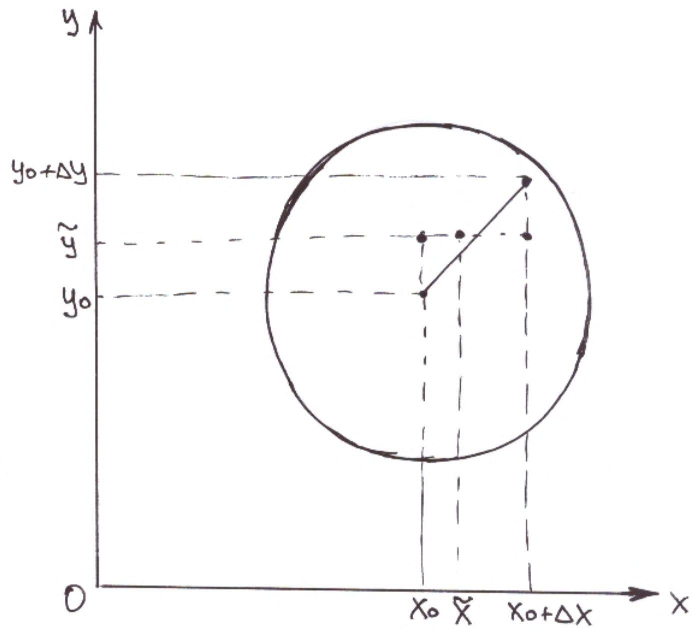
$\boxed{\text{Т.1}}$ Пусть ф. двух пер. f опр. в нек. δ-окр. т (x_0,y_0), $\delta>0$, вместе с $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем f''_{xy} и f''_{yx} непр в т (x_0,y_0).

Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

$\triangle$ Пусть $(x,y) = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) \in U_\delta(x_0,y_0)$

Рассм. выраж.

$W = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0) \equiv \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)$,



где ф-я одной пер.

$\varphi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$ диф. на $[y_0; y_0+\Delta y]$ (т.к f'_y сущ. в $U_\delta(x_0,y_0)$), причем $\varphi'(y) = f'_y(x_0+\Delta x, y) - f'_y(x_0, y)$

Примен. к ф-и $\varphi(y)$ теор Лагр. о сред.

$W = \varphi'(\tilde{y})\Delta y$,

где $\tilde{y} \in (y_0; y_0+\Delta y)$, т.е

$W = (f'_y(x_0+\Delta x, \tilde{y}) - f'_y(x_0, \tilde{y}))\Delta y$

Рассм. теперь ф-ю одной перем $\psi(x)$:

$\psi(x) = f'_y(x, \tilde{y})$

Т.к в $U_\delta(x_0,y_0)$ сущ. $f''_{yx} = (f'_y)'_x$, то ф-я ψ диф. на $[x_0, x_0+\Delta x]$.

По теор. Лагр.

$W = (\psi(x_0+\Delta x) - \psi(x_0))\Delta y = \psi'(\tilde{x})\Delta x \cdot \Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x \cdot \Delta y$, где $\tilde{x} \in (x_0, x_0+\Delta x)$

Ясно, что $\tilde{x} = \tilde{x}(\Delta x, \Delta y)$; $\tilde{y} = \tilde{y}(\Delta x, \Delta y)$;

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{x}(\Delta x, \Delta y) = x_0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tilde{y}(\Delta x, \Delta y) = y_0$

Если доопред. $\tilde{x}(0,0) = x_0$, $\tilde{y}(0,0) = y_0$, то ф-и $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ станут непр. в т $(0,0)$.

По след-ю из теор. о суперпоз. непр. отобр. (стр 26-27 Петр) ф-я $f''_{yx}(\tilde{x}(\Delta x, \Delta y), \tilde{y}(\Delta x, \Delta y))$ как ф-я от $\Delta x, \Delta y$ непр. в т. $(0,0)$, и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Выраж. $\frac{W}{\Delta x \Delta y}$ как ф-я от Δx и Δy опред. при $\Delta x \Delta y \neq 0$, т.е на мн-ве, получ. удалением из пл-ти $\mathbb{R}^2_{\Delta x, \Delta y}$ коор. осей.

Отсюда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x \Delta y \neq 0}} \frac{W}{\Delta x \Delta y} = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Если же преобраз-е W начато с перем x (т.е $W = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, где $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ и т.д), то анало. можно доказ., что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x \Delta y \neq 0}} \frac{W}{\Delta x \Delta y} = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Значит, $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ■

Замеч Послед-но примен. Т.1, можно убедиться, что если смеш. частн. пр-ые любого пор. от ф-и любого числа перем. отлич. только поряд. диф-я и непр. в нек. точке, то они совпад. в этой т.

Например,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y}$$

4.3 Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных.

Опр. Ф-я n перем. f наз. k раз. непрерывно дифференцируемой, $(k = 1, 2, \ldots)$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$, если она имеет в любой т. этой обл. все ч.пр. пор. k, кот. непр. в G.
Мн-во таких ф-й обозн. $C^k(G)$.

Замеч. Из 4.2 след, что смеш. ч.пр таких ф-й пор $\leq k$ не зав. от пор. диф-я.

Опр Пусть ф-я n перем. $f \in C^k(G)$, где G — обл в $\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\dots$
Тогда её дифференциалом k-го порядка наз. ф-я $2n$ перем $x_1,\dots,x_n, dx_1,\dots,dx_n$

$$d^k f = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}} dx_{j_1}\dots dx_{j_k}$$
, опред при $(x_1,\dots,x_n) \in G$, $(x_1+dx_1,\dots,x_n+dx_n) \in G$.

Из непр-ти ч. пр. следует, что для $k=2$:

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Для ф-и двух перем $f(x,y) \in C^k(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} dx^j dy^{k-j}$$
(заметим сходство с ф. бинома Ньют)

Для $f(x,y) \in C^2(G)$:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Отсут. инвар-ти формы диф-ла пор $k \geq 2$ отн. зам. перем. разберем для случая $k=2, n=2$.

1) Пусть u, v — дважды непр. диф. ф-и произ. числа перем; f — дважды диф. ф-я двух перем. Тогда

$$d^2 f(u,v) = d(df(u,v)) = d(f'_u du + f'_v dv)$$

Т.к du и dv нельзя счит. пост, то

$$d^2 f(u,v) = du\, d(f'_u) + f'_u d(du) + dv\, d(f'_v) + f'_v \cdot d(dv) =$$
$$= du(f''_{uu} du + f''_{uv} dv) + f'_u d^2 u + dv(f''_{vu} du + f''_{vv} dv) + f'_v d^2 v =$$
$$= f''_{uu} du^2 + 2 f''_{uv} du dv + f''_{vv} dv^2 \underbrace{+ f'_u d^2 u + f'_v d^2 v}_{} \qquad (1)$$

2) Для u, v — незав. пер.

$$d^2 f(u,v) = f''_{uu} du^2 + 2 f''_{uv} du dv + f''_{vv} dv^2 \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), приходим к выводу об отсут. ин-ти формы 2-го диф-ла отн. зам. пер.

4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

Т.1 (ост. чл в ф. Лагр)

Пусть при нек $\delta>0$ ф-я n перем $f\in C^{k+1}(U_\delta(x_1^0,\ldots x_n^0))$, где $k=0,1,2,\ldots$ Тогда для любой точки $(x_1,\ldots,x_n)\in U_\delta(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ найдется число $\xi\in(0,1)$ такое, что

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1^0,\ldots,x_n^0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{d^jf(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{j!}+\frac{d^{k+1}f(x_1^0+\xi\Delta x_1,\ldots,x_n^0+\xi\Delta x_n)}{(k+1)!}$$

где $d^jf=\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^jf$, $j=1,\ldots,k+1$ — диф-ал j-го пор. ф. f в соот т.;

$\Delta x_i=x_i-x_i^0$, $i=1,\ldots,n$;

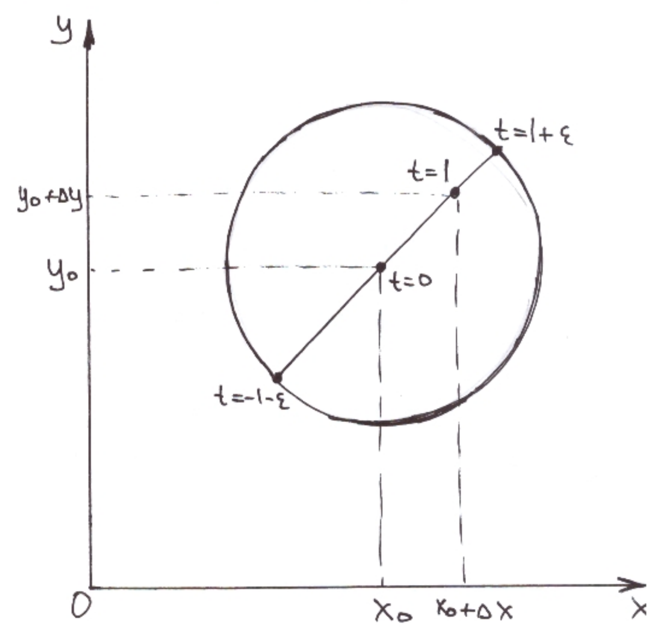
$\sqrt{(\Delta x_1)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}<\delta$

Док-во для $n=2$ (для $n>2$ аналог).

Пусть ф-я двух перем. $f\in C^{k+1}(U_\delta(x_0,y_0))$

Рассм. ф-ю одной перем. $F(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$, где $\Delta x,\Delta y$ т, ч. $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta$;

t — т., ч. $(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\in U_\delta(x_0,y_0)$, т.е $t\in(-1-\varepsilon;1+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ (точнее, $\varepsilon=\frac{\delta}{\rho}-1$)



По теор. о диф. сл. ф-и $\forall t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$\begin{aligned}F'(t)&=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+\\&+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y=\\&=df(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\end{aligned}$$

Покажем по инд., что при $1\le j\le k+1$ при всех $t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$F^{(j)}(t)=d^jf(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y).$$

В самом деле, при $j=1$ это верно. Если утв. верно при нек $j\le k$, то

$$F^{(j+1)}(t)=\frac{d}{dt}(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))$$

Но все ч. пр. ф. f пор. вплоть до $k+1$ непр, поэтому $d^jf(x,y)$ — непр. дифф. ф-я 2-ух пер. в $U_\delta(x_0,y_0)$, и по теор. о диф. сл. ф-и $\forall t\in(-1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ сущ.

$$\begin{aligned}F^{(j+1)}(t)&=(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))'_x\cdot\Delta x+(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y))'_y\,\Delta y=\\&=d(d^jf(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)).\end{aligned}$$

Внешний диф-л подразумевает диф-е по x и y при пост Δx и Δy

$d(d^jf(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y))=d^{j+1}f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$. Индукция завершена.