23) Энергия переменного электромагнитного поля. Поток электромагнитной энергии, теорема Пойнтинга.

получим ЗСЭ для случая, когда в области пространства присутствуют переменные поля.

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

$$du = \frac{1}{4\pi}\vec{E}d\vec{D} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}d\vec{B} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Downarrow (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\left(\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}\right] - \vec{j}\vec{E}$$

далее используем $\underbrace{\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})}_{=\vec{S}\cdot\frac{4\pi}{c}} = -\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} + \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}$

Теорема Пойнтинга в дифф. форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\vec{E},$$

где **вектор плотности** $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$ **потока энергии (вектор Пойнтинга)** ← определяет кол-во энергии поля, протекающее ч/з единичную площадку в единицу времени.

$$\int_V\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S}\right)dV = -\int_V \vec{j}\vec{E}\,dV$$

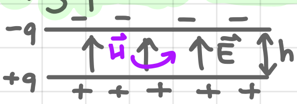
$$\downarrow \left[U = \int_V u\,dV + \text{т. Остр.-Гаусса}\right]$$

Теорема Пойнтинга в интегральной форме

$$\frac{dU}{dt} = -\oint_{\Pi(V)} \vec{S}\,d\vec{\Pi} - Q, \quad Q = \int_V \vec{j}\vec{E}\,dV$$

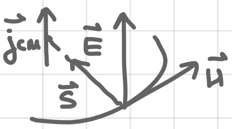
Примеры применения теоремы Пойнтинга.

1. зарядка конденсатора



$D = 4\pi\sigma = \dfrac{4\pi q}{\Pi}$, где $\Pi = \pi R^2$ — площадь пластин

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$



$$j_{см} = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\dot{q}}{\pi R^2}$$

$$\oint_\Gamma \vec{H}d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}J_{см}(r) \Rightarrow 2\pi r H(r) = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j_{см}(r)$$

Γ. окружность радиуса r с центром на оси конденсатора

$$\Downarrow$$

$$H(r) = \frac{2r}{cR^2}\dot{q}$$

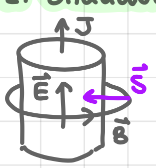
$\dot{q} > 0 \Rightarrow \vec{j}_{см}$ — от нижней пластины к верхней

на $r = R$: $S = \dfrac{c}{4\pi}EH = \dfrac{c}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{4\pi q}{\pi R^2}\right)\left(\dfrac{2\dot{q}}{cR}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{2q\dot{q}}{\pi R^3}$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}2\frac{q\dot{q}}{\pi R^3}2\pi R h = \frac{q\dot{q}}{C} \Rightarrow U = \frac{q^2}{2C}$$

$$\left[C = \frac{\varepsilon\pi R^2}{4\pi h}\right]$$

2. длинный провод R, ℓ



на вн. поверхности провода: $H = \dfrac{2J}{cR}$

$E = \dfrac{V}{\ell}$ ← напряжение на концах

$$S = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}\frac{V}{\ell}\frac{2J}{cR} = \frac{1}{2\pi\ell R}VJ$$

$\Pi = 2\pi R\ell \Rightarrow Q = S\Pi = VJ$ — поток энергии, втекающий в провод

с другой стороны, $VJ = \int \vec{j}\vec{E}\,dV$ — джоулевы потери в проводе