④ Уравнения Пуассона и Лапласа.

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ $\Rightarrow$ уравнение Пуассона для потенциала поля
$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -4\pi\rho$ или $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, где $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

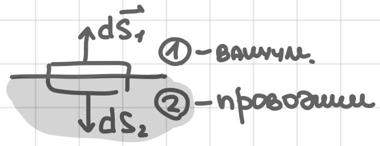
в области пространства, свободной от зарядов ($\rho = 0$), уравнение Пуассона сводится к уравнению Лапласа:

уравнение Лапласа
$$\Delta\varphi = 0$$

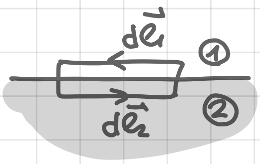
Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника

definition
проводники – вещества, обладающие малым сопротивлением. в них имеются свободные заряды (электроны), которые могут перемещаться под действием сколь угодно слабых полей.

в состоянии равновесия
1. поле в объёме вещества $\vec{E}^{(i)} = 0$ (нет токов)
2. $\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{E}^{(i)} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow$ свободные заряды могут располагаться только на поверхности.



по th Гаусса:
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi q$$
$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{n} = 4\pi\sigma$$
в проводнике поле ($\vec{E}_2$) равно 0:
$$E_{1n} = 4\pi\sigma$$



по th о циркуляции:
$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$
$$\vec{E}_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$E_{1\tau} = 0$$

Единственность решения электростатической задачи

основная задача электростатики:
найти поле в каждой точке внутри некоторой замкнутой поверхности (конечной или бесконечной) при этом задаются некоторые граничные условия

граничные условия:
- задан потенциал в разных точках поверхности (условие Дирихле)
- задан заряд на этой поверхности, т.е. нормальная производная потенциала (условие Неймана)

решение $\exists$ и !

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho \\ \varphi|_{\text{гр.}} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{гр}} = \psi_0(\vec{r}) \end{cases}$$

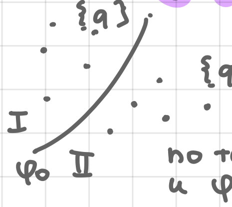
theorem
если D – открытая обл-ть пространства, а Γ – её граница, то решение краевой задачи для уравнения Лапласа $\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \ \vec{r} \in D \\ \varphi|_{\vec{r}\in\Gamma} = 0 \end{cases}$ единственно

$\triangleright$ от противного:
$\exists$ где-то в области D функция $\varphi \neq 0$. т.к. всюду на границе области $\varphi = 0$, то где-то внутри D достигается экстремум.
для определённости $\exists$ это будет максимумом.
тогда в этой точке
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} < 0 \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} < 0 \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} < 0$$
значит, в точке максимума $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} < 0$
но всюду в D должно выполняться $\Delta\varphi = 0$. противоречие. $\square$

theorem
решение краевой задачи для уравнения Пуассона $\begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho, \ \vec{r} \in D \\ \varphi|_{\vec{r}\in\Gamma} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases}$ единственно

$\triangleright$ $\exists$ есть два решения: $\varphi_1(\vec{r})$ и $\varphi_2(\vec{r})$
$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho \\ \varphi_1|_{\vec{r}\in\Gamma} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho \\ \varphi_2|_{\vec{r}\in\Gamma} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases}$$
$\exists\, \xi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r}) \Rightarrow \xi(\vec{r})$ удовлетворяет задаче $\begin{cases} \Delta\xi = 0, \ \vec{r} \in D \\ \xi|_{\vec{r}\in\Gamma} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ по предыдущей th $\xi = 0 \Rightarrow$ всюду в D $\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r})$ $\square$

Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере



∃ имеется система зарядов $\{q\} + \{q'\}$

проведём эквипотенциальную поверхность $S(\varphi = \varphi_0)$, разделяющую пространство на области I и II

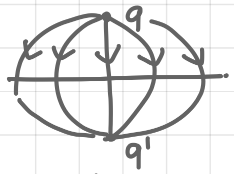
по теореме о единственности поле в I однозначно определяется зарядами $\{q\}$ и $\varphi = \varphi_0$ на границе областей.

иными словами поле в этой области не изменится, если $\{q'\} \to \{q''\}$, если эта новая система совместно с $\{q\}$ создаёт на поверхности тот же потенциал $\varphi = \varphi_0$

для расчёта поля в I можно заменить $\{q'\}$ проводящей поверхностью, имеющей потенциал $\varphi = \varphi_0$

обратно, если имеется $\{q\}$ и проводящая пов-ть с потенциалом $\varphi = \varphi_0$, то для расчёта поля можно заменить эту поверхность такой группой зарядов $\{q'\}$, которая совместно с $\{q\}$ создаёт в точках S требуемый потенциал $\varphi = \varphi_0$

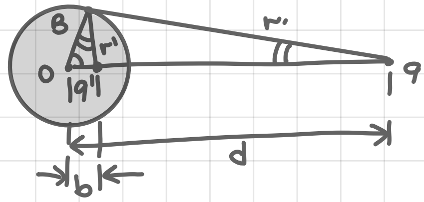
definition:
фиктивные заряды $\{q'\}$ в этом случае называются изображениями зарядов $\{q\}$



изображение q: $q' = -q$, расп. симметрично относительно плоскости

в точках плоскости:
$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{(-q)}{r} = 0$$

в объёме металла напряжённость поля $= 0$, а вне металла совпадает с полем диполя $\{q, q'\}$



а) ∃ сфера заземлена ($\varphi = 0$)

расположим изображение q' на расстоянии $b = \frac{R^2}{d}$ от центра сферы.
(для подобия)

$\Delta OBq \sim \Delta Bq'O \Rightarrow \frac{r'}{R} = \frac{r}{d}$

тогда в точках сферы потенциал равен $\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} = \frac{q}{r} + q'\frac{d}{Rr}$

если $q' = -q\frac{R}{d}$, то $\varphi = 0$ во всех точках сферы.

б) если сфера изолирована и несёт заряд q_0, то её потенциал $\neq 0$.
изображение образуется двумя зарядами: первый находится на расстоянии $b = \frac{R^2}{d}$ от центра сферы и имеет заряд $q' = -q\frac{R}{d}$ (аналогично случаю заземлённой сферы).
кроме того, добавляется второй заряд q'' в центр сферы; $q'' = q_0 - q' = q_0 + q\frac{R}{d}$
этот заряд оставляет сферическую поверхность эквипотенциальной, но делает суммарный заряд в сфере равным $q_0 = q'' + q'$.
потенциал сферы оказывается равным $\varphi = \frac{q''}{R}$