27) Установившиеся колебания в цепи переменного тока. Комплексная форма представления колебаний. Векторные диаграммы. Комплексное сопротивление (импеданс)

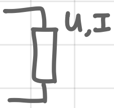
$U = U_0\cos(\Omega t+\varphi)$ $\quad [e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi]$

$\downarrow$

$U = U_0[\cos(\Omega t+\varphi) + i\sin(\Omega t+\varphi)] = U_0 e^{i(\Omega t+\varphi)}$

можно применять **метод комплексных амплитуд**, если Re и Im не смешиваются:

$\begin{cases} \cdot\,\mathbb{R} \\ + \text{ или } - \\ \frac{d}{dt} \quad \int\ldots dt \end{cases}$ $\quad t\in\mathbb{R}$



$U = U_0\cos(\Omega t+\varphi)$ $\Rightarrow$ $U = U_0 e^{i\varphi}e^{i\Omega t}$

$I = I_0\cos(\Omega t+\psi)$ $\quad I = I_0 e^{i\psi}e^{i\Omega t}$

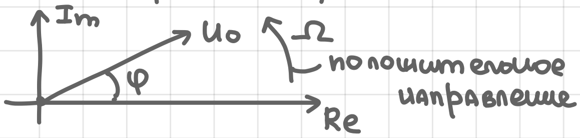
$U_0 e^{i\varphi}$, $I_0 e^{i\psi}$ — комплексная амплитуда

$$z = \frac{U_0 e^{i\varphi}}{I_0 e^{i\psi}} = \frac{U_0}{I_0}e^{i(\varphi-\psi)} \text{ — импеданс}$$

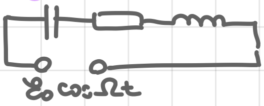
Re z — активное сопротивление

Im z — реактивное сопротивление

векторная диаграмма



Правила Кирхгофа для переменных токов.



$U_C + U_R + U_L = \mathcal{E}_0\cos\Omega t$

$U_C + U_R + U_L = \mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$

$I = I_0 e^{i\psi}e^{i\Omega t} \Rightarrow \hat{I} = I_0 e^{i\psi}$

$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int I\,dt = \frac{1}{i\Omega C}I_0 e^{i\psi}e^{i\Omega t} = \frac{1}{i\Omega C}I \Rightarrow z_C = \frac{1}{i\Omega C} = \frac{-i}{\Omega C}$

$U_R = IR \Rightarrow z_R = R$

$U_L = L\dot{I} = i\Omega L I_0 e^{i\psi}e^{i\Omega t} = i\Omega L\cdot I \Rightarrow z_L = i\Omega L$

перепишем правило Кирхгофа с новыми обозначениями:

$\mathcal{E}_0 e^{i\Omega t} = z_C\hat{I}e^{i\Omega t} + z_R\hat{I}e^{i\Omega t} + z_L\hat{I}e^{i\Omega t}$

$\hat{\mathcal{E}}_0 = (z_C + z_R + z_L)\hat{I}$

I правило Кирхгофа

алгебраическая сумма токов, вх. в узел:

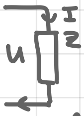
$\sum_k \hat{J}_k = 0$

II правило Кирхгофа

$\forall$ замкнутого контура в квазистационарной эл. цепи $\hookrightarrow$

$\sum \hat{J}_k z_k = \sum \hat{\mathcal{E}}_i$

Работа и мощность переменного тока



$I = I_0\cos(\Omega t+\psi)$ $\quad I = I_0 e^{i\psi}e^{i\Omega t} = \hat{I}e^{i\Omega t}$

$U = U_0\cos(\Omega t+\varphi)$ $\quad U = U_0 e^{i\varphi}e^{i\Omega t} = \hat{U}e^{i\Omega t}$

мгновенное зн. мощности:

$P = I_0U_0\cos(\Omega t+\psi)\cos(\Omega t+\varphi) = \frac{1}{2}I_0U_0\cos(\psi-\varphi) + \frac{1}{2}I_0U_0\cos(2\Omega t+\varphi+\psi)$

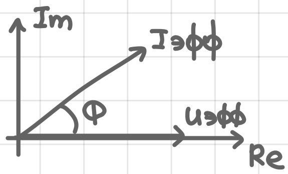
средняя мощность

$\langle P\rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P\,dt = \frac{1}{2}I_0U_0\cos(\psi-\varphi) = \frac{1}{2}I_0U_0\cos\Phi$

Φ — сдвиг фаз м/у током и напряжением

верный ответ можно также получить ч/з комплексные амплитуды:

$\langle P\rangle_T = \frac{1}{2}\hat{I}\cdot\hat{U}^* = \frac{1}{2}\hat{I}^*\hat{U}$



$I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ $\quad U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle P\rangle_T = I_{эфф}U_{эфф}\cos(\Phi)$

$\left[I_{эфф} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt \quad U_{эфф} = \frac{1}{T}\int_0^T U^2 dt\right]$