Лекция 10. (14 апреля 20) Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Определение. Квадратичная функция $k(x)$ на линейном пространстве L называется положительно определенной, если $\forall x \in L, x \neq 0,\ k(x) > 0$ (краткое обозначение этого свойства: $k > 0$);
отрицательно определенной, если $\forall x \in L, x \neq 0,\ k(x) < 0$ (краткое обозначение : $k < 0$);
неотрицательно определенной, если $\forall x \in L,\ k(x) \geq 0$ (краткое обозначение : $k \geq 0$);
неположительно определенной, если $\forall x \in L,\ k(x) \leq 0$ (краткое обозначение : $k \leq 0$);
неопределенной, если $\exists x \in L:\ k(x) > 0,\ \exists y \in L:\ k(y) < 0$ (краткое обозначение : $k >< 0$).

Пусть в некотором базисе квадратичная функция записана в виде квадратичной формы

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + ... + b_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_i x_j \quad (1)$$

с матрицей $B = (b_{ij}) = B^T$

Лемма. Квадратичная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она приводится к диагональному виду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2,\ \alpha_i > 0, i = 1,...,n \quad (2)$$

$\Leftrightarrow$

к каноническому виду $k(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. (3)

(*Замечание*. От вида (2) к каноническому виду (3) можно перейти в результате замены $y_i = \sqrt{\alpha_i} z_i, i = 1,...,n$).

Доказательство леммы. То, что диагональная форма со всеми положительными коэффициентами или каноническая форма $k(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ является положительно определенной, ясно.

Обратно, допустим, что данная положительно определенная квадратичная форма $k(x)$ имеет канонический вид $k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$. Если, вопреки доказываемому, $p < n \Rightarrow k(0,...,0,1) \leq 0$, что противоречит положительной определенности. □

Примечание. Критерии всех случаев знака квадратичной формы в терминах инвариантов p, q таковы:
$k > 0 \Leftrightarrow p = n, q = 0$; $k < 0 \Leftrightarrow p = 0, q = n$); $k \geq 0 \Leftrightarrow p = r, q = 0$; $k \leq 0 \Leftrightarrow p = 0, q = r$;
$k >< 0 \Leftrightarrow p > 0, q > 0$).

В то же время желательно уметь исследовать знакоопределенность квадратичной формы непосредственно по её матрице, без приведения к каноническому виду.

Теорема (Критерий Сильвестра).
Для положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ в R^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы B, имеющие вид

$$\Delta_m = \det \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{Vmatrix} \quad , \; m = 1, \dots n \quad (b_{ij} = b_{ji}, \; \forall i, j),$$

были положительными.

Доказательство критерия Сильвестра.

Достаточность.

Дано, что все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, надо доказать, что она является положительно определенной.

Воспользуемся методом математической индукции и леммой.

Для $n = 1$ достаточность очевидна.

Допустим, что $n > 1$ и из положительности главных миноров матрицы квадратичной формы порядка до $n-1$ включительно следует возможность приведения квадратичной формы от $n-1$ переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ к виду $k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Покажем, что в этом случае достаточность будет иметь место и для квадратичной формы, зависящей от *n* переменных.

В выражении для квадратичной формы, зависящей от *n* переменных $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, выделим слагаемые, содержащие x_n:

$$k(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ji} x_j x_i + 2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} x_j x_n + b_{nn} x_n^2 .$$

Двойная сумма $\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ji} x_j x_i = k^*(x_1, \dots, x_{n-1})$ в правой части этого равенства есть квадратичная форма $k^*(x)$, зависящая от $n-1$ переменной, причем её матрица – подматрица порядка $n-1$ матрицы формы $k(x)$, расположенная в левом верхнем углу, так что главные миноры её матрицы совпадают с главными минорами матрицы $k(x)$ до порядка $n-1$ включительно, которые, по условию, положительны. Отсюда следует, по предположению индукции, что квадратичная форма $k^*(x)$ положительно определенная и для неё существует невырожденная замена переменных

$$x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ji} y_i \quad ; \quad j = 1, \dots, n-1,$$

приводящая её к каноническому виду: $k^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$.

Запишем квадратичную форму $k(x)$ в новых переменных (x_n пока не заменяли):

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b'_{in} y_i x_n + b_{nn} x_n^2$$

и выделим полные квадраты по $y_1, \dots, y_{n-1}$:

$$k=\sum_{i=1}^{n-1}(y_i^2+2b'_{in}y_ix_n+b'^2_{in}x_n^2)+(b_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}b'^2_{in})x_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}z_i^2+b''_{nn}x_n^2,$$

где $b''_{nn}=b_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}b'^2_{in}$; $z_i=y_i+b'_{in}x_n$; $i=1,\ldots n-1$.

В матричном виде эту замену переменных можно записать как

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix}$$

и поскольку определитель ее матрицы отличен от нуля, то эта замена невырожденная.

Наконец, вспомним, что определитель матрицы квадратичной формы сохраняет знак при замене базиса. Определитель матрицы B квадратичной функции в исходном базисе положительный, поскольку этот определитель является главным минором порядка *n*. Но из выражения для $k(x)$ в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичной формы k равен b''_{nn}. Поэтому $b''_{nn}>0$ и можно ввести переменную $z_n=\sqrt{b''_{nn}}x_n$, в результате чего получаем канонический вид квадратичной формы

$$k=\sum_{i=1}^{n}z_i^2 .$$

Следовательно, квадратичная функция $k(x)$ положительно определённа.
Достаточность доказана.

Необходимость.
Дано, что квадратичная функция положительно определенна, и надо доказать положительность главных миноров ее матрицы. Снова применим индукцию по числу переменных n.
Для $n=1$ это ясно.
Пусть $n>1$ и для форм от меньшего числа переменных утверждение теоремы верно.
Поскольку квадратичная форма $k^*(x)$ из доказательства достаточности также является положительно определенной (ее значения – это значения $k(x)$ при $x_n=0$), то по предположению индукции ее главные миноры, совпадающие с главными минорами матрицы B до порядка $n-1$, положительны. А определитель самой матрицы B, который является главным минором порядка *n*, положителен, поскольку $k(x)$ приводится к каноническому виду $k=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$, и определитель матрицы полученной при этом квадратичной формы равен 1 и имеет такой же знак, как и определитель матрицы B.
Теорема полностью доказана. □

Следствие. (Критерий отрицательной определенности). **Для отрицательной определенности квадратичной формы $k(x)$ в R^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы B имели чередующиеся знаки, начиная с минуса, т.е.** $(-1)^m\Delta_m>0, m=1,...,n$.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $-k(x)>0$ с матрицей $B'=-B=(-b_{ij})$: для нее, по критерию Сильвестра,

$$\Delta'_m = \det \begin{Vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1m} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mm} \end{Vmatrix} = (-1)^m \Delta_m > 0 \quad , \ m = 1, \dots n \quad \textbf{, ч.т.д.}$$

Примечание. Знакоопределенность квадратичной формы понадобится для проверки достаточного условия экстремума функции нескольких переменных. А именно, пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в окрестности точки $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ частные производные второго порядка по всем переменным. Если $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ - точка локального экстремума для $f(x)$, то все ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке. Далее можно рассмотреть квадратичную форму второго дифференциала в этой точке:
$d^2 f(x_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$. Если она является положительно определенной, то $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум, а если отрицательно определенной, то локальный максимум. Чаще всего применяют критерий Сильвестра к матрице $\left\| \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ из вторых частных производных в этой точке.