Вариант 21

1. ② $|\vec{r}'| = 3$, $|\vec{r}'' \times r'| = \sqrt{5}$, $k = \frac{\sqrt{5}}{27}$.

2. ③

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(3x^2+4x-1)8^n \cos\left(8x - 10 + \frac{\pi n}{2}\right) +$$
$$+ n(3x+2)8^{n-1}\cos\left(8x-10+\frac{\pi}{2}(n-1)\right) +$$
$$+\frac{3n(n-1)}{2}8^{n-2}\cos\left(8x-10+\frac{\pi}{2}(n-2)\right).$$

3. ⑤ $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)' = \dfrac{1}{x^2+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}),\ x\to 0.$

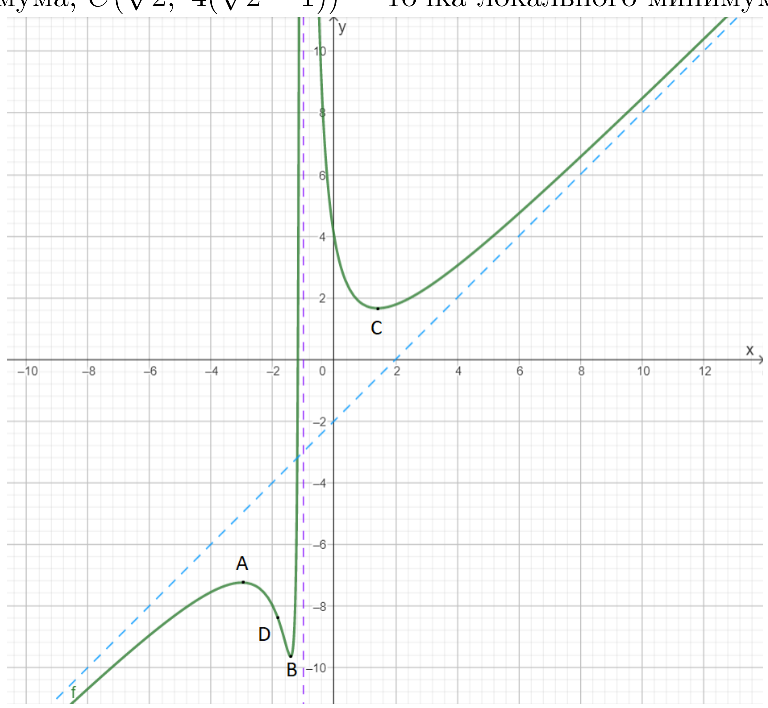
$$f(x) = -5\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 5x - x^2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} x^{2k+1}\left(\frac{5(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right) + o(x^{2n+1}),\ x\to 0.$$

4. ④ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{48}x^3 + o\left(x^3\right)}{8x^3 + o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{384}.$

5. ⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{-x^3/3+o(x^3)}} = e^{-12}$

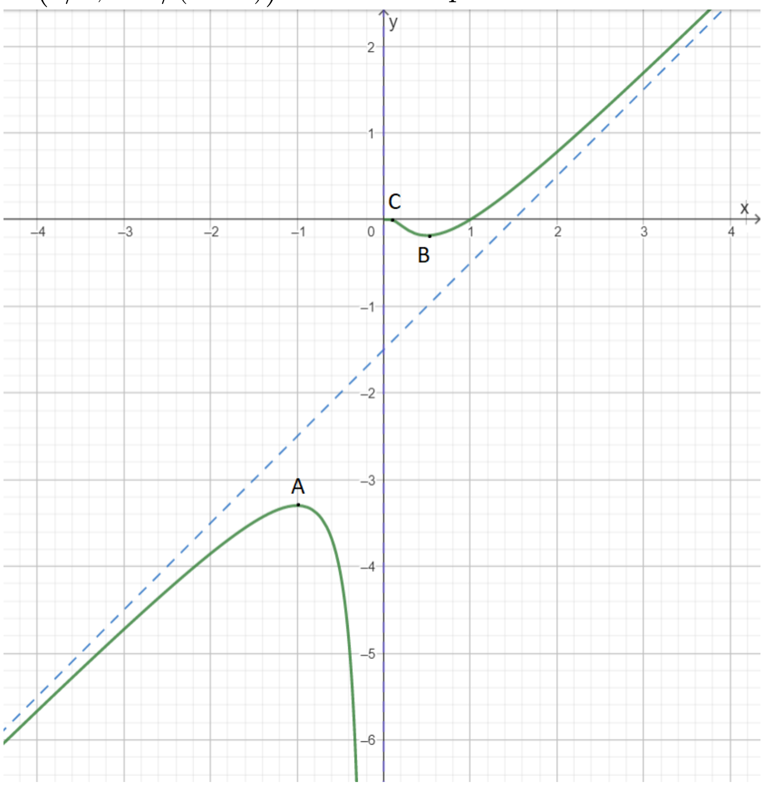
6. ④ Асимптоты: $y = x-2$ при $x\to\infty$; $\qquad x = -1$.
$y' = \dfrac{x^3+3x^2-2x-6}{(x+1)^3}$; $\quad y'' = \dfrac{2(5x+8)}{(x+1)^4}$.

$A(-3,\ -29/4)$ — точка локального максимума; $B(-\sqrt{2},\ -4(1+\sqrt{2}))$ — точка локального минимума; $C(\sqrt{2},\ 4(\sqrt{2}-1))$ — точка локального минимума; $D(-8/5,\ -412/45)$ — точка перегиба.



Вариант 21

7. 6 Асимптоты: $y = x - 3/2$ при $x \to \infty$; $\quad x = 0$ при $x \to 0 - 0$.
$y' = e^{-1/2x}\dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2}$; $\quad y'' = e^{-1/2x}\dfrac{5x - 1}{4x^4}$.
$A\,(-1,\ -2\sqrt{e})$ — точка локального максимума,
$B\,(1/2,\ -1/(2e))$ — точка локального минимума,
$C\,\big(1/5,\ -4/(5e^{5/2})\big)$ — точка перегиба.



8. 4 $\frac{\sin x}{x}$ равномерно непрерывна, т.к. она непрерывна и $\exists \lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$.
Для функции $g(x) = \sin x^3$ можно подобрать последовательности $x'_n = \sqrt[3]{2\pi n}$, $x''_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$:

$$|x'_n - x''_n| \to 0 \Leftrightarrow \forall\delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x'_n - x''_n| < \delta,$$

$$|g(x'_n) - g(x''_n)| \to 1 \Rightarrow \exists\varepsilon = 0.5; \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |g(x'_n) - g(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\exists\varepsilon = 0.5 : \forall\delta > 0 \exists n_2 = max(n_0; n_1) : |x'_{n_2} - x''_{n_2}| < \delta; |g(x'_{n_2}) - g(x''_{n_2})| \geq \varepsilon,$$

следовательно, $g(x)$ – не равномерно непрерывна на E.

Ответ. Функция не равномерно непрерывна как сумма равномерно непрерывной и не равномерно непрерывной функций.

9. 4
$$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= -\frac{\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)}{x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x} + C = \qquad \left(\text{через замену } x = \frac{1}{t}\right)$$
$$= -\frac{\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C, \quad x > 1 \qquad \left(\text{через замену } t = \sqrt{x^2-1}\right)$$