(10) Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био-Савара.

магнитное поле – силовое поле, действующее на движущиеся заряды, токи и тела, обладающие магнитным моментом.

источники магнитного поля – токи; движущиеся заряды

магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$, определяющим силу, действующую на движущийся заряд.

сила Лоренца – сила, действ. на движущийся заряд q со стороны магнитного поля, где вектор магнитной индукции $\vec{B}$ не зависит от величины заряда и характеризует поле.

$$\vec{F}_л = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

полная сила, действ. на заряд: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)$

сила Ампера – сила, действующая на ток со стороны магнитного поля

сила, действующая на объёмный элемент тока $\vec{j}dV$, равна

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\,dV$$

на линейный элемент тока $Jd\vec{\ell}$:

$$d\vec{F} = \frac{J}{c}d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

закон Ампера

эквивалентность: $d\vec{\ell} = \vec{n}d\ell \quad \Rightarrow \vec{j} = \frac{J}{S}\vec{n}$

$\vec{j}dV = \left(\frac{J}{S}\right)\vec{n}(Sd\ell) = Jd\vec{\ell}$ □

связь силы Лоренца и силы Ампера: $d\vec{F} = \frac{dq}{c}\vec{v}\times\vec{B}$; $dq = \rho dV$; $\rho\vec{v} = \vec{j}$ $\Rightarrow d\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\,dV$ □

закон Био-Савара (экспериментальный)

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения по отношению к рассматриваемому элементу тока. поле, создаваемое объёмным эл-том тока в этой точке:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$$

поле линейного элемента тока $Jd\vec{\ell}$:

$$d\vec{B} = \frac{J}{c}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля.

$\exists\ \vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; $\vec{r}_1$ – радиус-вектор объёмного элемента тока, создающего магнитное поле.

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)\times(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}dV_1$$

$$\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)\right]$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{dV_1}{c}\vec{j}(\vec{r}_1)\times\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)$$

$$[\vec{a}\times\nabla\varphi = -\mathrm{rot}(\vec{a}\varphi)]$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{dV_1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dV_1$$

обозн. $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dV_1 \Rightarrow \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, где $\vec{A}$ – векторный потенциал

$\vec{E}\to\varphi$

$\vec{B}\to\vec{A}$

иначе

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{J}{c}\int\frac{d\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

покажем, что $\mathrm{div}\vec{A} = 0$

$\exists\ \vec{r}_2 = \vec{r}-\vec{r}_1$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2|}dV_2$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2|}dV_2$$

для стационарных токов в силу ур-ния непрерывности $\mathrm{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{A} = 0$

Теорема Гаусса для магнитного поля

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0 \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$\Downarrow$

в дифференц. форме

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{B}\,dV = 0$$

в интегральной форме

$$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

Нет свободных магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться или кончаться силовые линии индукции магнитного поля

Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A}$$

$[\operatorname{div}\vec{A} = 0]$

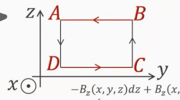
по аналогии:

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,dV_1 \rightarrow \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,dV_1 \rightarrow \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

в диф. форме

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$



$$\oint(\vec{B}, d\vec{l}) = ?$$

$$-B_z(x,y,z)dz + B_z(x,y+dy,z)dz = dz\big(B_z(x,y+dy,z) - B_z(x,y,z)\big) = \frac{\partial B_z}{\partial y}\underbrace{dydz}_{dS}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}dS \Rightarrow \oint(\vec{B}, d\vec{l}) = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)dS$$

$$\oint(\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c}\int(\vec{j}, d\vec{S}) = \frac{4\pi}{c}\int j_x dS$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c}j_x\\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c}j_y\\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{4\pi}{c}j_z\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \begin{aligned} rot\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}\\ rot\vec{B} &= [\nabla, \vec{B}]\end{aligned}$$

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{B}\,d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\,d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}J$$

|| ф-ла Стокса

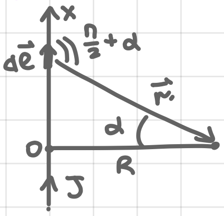
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l}$$

$\Downarrow$

в интегральной форме

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}J$$

Магнитное поле прямого провода,



$$d\vec{B} = \frac{J}{cr^3}\,d\vec{l}\times\vec{r}$$

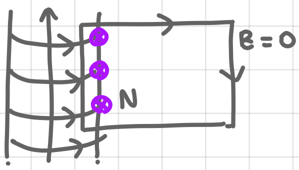
$$dB = \frac{J}{cr^3}\,dx\,r\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow dx = \frac{R\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow dB = \frac{J}{cr^2}\cdot\frac{R\,d\alpha}{\cos\alpha} = \left[r = \frac{R}{\cos\alpha}\right] = \frac{J}{cR}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$B = \frac{J}{cR}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{2J}{cR}$$

соленоида, (беск. длинного)



по th о циркуляции:

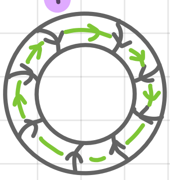
$$Bl = \frac{4\pi}{c}NJ$$

$$B = \frac{4\pi}{c}nJ$$

← плотность намотки

$$B = \frac{4\pi}{c}i, \quad i = \frac{NJ}{l}$$ – линейная плотность тока

тороидальной катушки



по th о циркуляции:

$$B\cdot 2\pi R = \frac{4\pi NJ}{c} \Rightarrow B = \frac{2NJ}{cR}$$