Т.к. ф-я одной пер. F имеет $k+1$ произв. на $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, то по одномерной ф. Тейлора с ост чл в ф. Лагр при $t\in(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ сущ $\xi\in(0,t)$ т, что.

$$F(t)=F(0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{F^{(j)}(0)}{j!}t^j+\frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1}$$

При $t=1$ получим

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{d^jf(x_0,y_0)}{j!}+\frac{d^{k+1}f(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y)}{(k+1)!},$$

где $\xi\in(0,1)$. ■

$\boxed{\text{Т.2}}$ (ост. чл. в ф. Пеано)

Пусть при нек $\delta>0$ ф. n перем. $f\in C^k(U_\delta(x_1^0,\dots,x_n^0))$, где $k=1,2,\dots$

Тогда

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\sum_{j=1}^{k}\frac{d^jf(x_1^0,\dots,x_n^0)}{j!}+o(\rho^k),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\dots+(\Delta x_n)^2}$; $o(\rho^k)=\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot\rho^k$, причем предел ф-и $\alpha(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ равен 0 при $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$

▲ Из Т.1 след, что для ф-и f можно записать ф. Тейл с ост. чл. в ф. Лагр пор. $k-1$, т.е при всех $(x_1,\dots,x_n)\in U_\delta(x_1^0,\dots,x_n^0)$ имеет место рав-во

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1^0,\dots,x_n^0)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d^jf(x_1^0,\dots,x_n^0)}{j!}+\frac{d^kf(x_1^0+\xi\Delta x_1,\dots,x_n^0+\xi\Delta x_n)}{k!}$$

$\xi\in(0,1)$

Поэтому достат. доказать, что

$$d^kf(x_1^0+\xi\Delta x_1,\dots,x_n^0+\xi\Delta x_n)=d^kf(x_1^0,\dots,x_n^0)+o(\rho^k)\quad\text{при } (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$$

Проведем док-во для $n=2$ (при $n>2$ аналог)

$$d^kf(x,y)=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(\Delta x)^j(\Delta y)^{k-j}.$$

Если $x=x_0+\xi\Delta x$, $y=y_0+\xi\Delta y$, где $\xi=(\Delta x,\Delta y)$, $\xi\in(0,1)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}x(\Delta x,\Delta y)=x_0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}y(\Delta x,\Delta y)=y_0$$

Т.к $x(0,0)=x_0$, $y(0,0)=y_0$, то ф. $x(\Delta x,\Delta y)$ и $y(\Delta x,\Delta y)$ непр в $(0,0)$

Т.к при фикс. j ф-я $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}$ непр. в любой т. $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$, то по след-ю из теор. о суперпоз непр. отобр (стр 26-27 Петр) ф-я $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0+\xi(\Delta x,\Delta y)\Delta x, y_0+\xi(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y)$ от двух пер. Δx и Δy непр. в $(0,0)$ и $\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y)=\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}(x_0,y_0)+\alpha_j(\Delta x,\Delta y)$, где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_j(\Delta x,\Delta y)=0$

Поэтому

$$|d^k f(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y) - d^k f(x_0,y_0)| = \left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j \alpha_j(\Delta x,\Delta y)\cdot(\Delta x)^j(\Delta y)^{k-j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, |\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|\cdot \rho^j \rho^{k-j} = \rho^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j |\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|$$

Т.к все ф-и $|\alpha_j(\Delta x,\Delta y)|$, $j=0,1,\dots,k$ – б/м при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, то таковой же явл. и их лин. комбин., поэтому

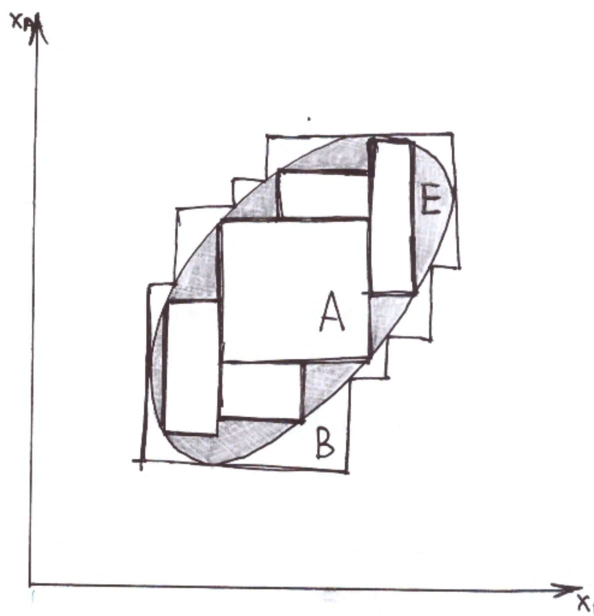
$d^k f(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y) = d^k f(x_0,y_0) + o(\rho^k)$, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ■

5.1 Определение измеримости по Жордану множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Клеткой в $\mathbb{R}^n$ будем наз. замкнутый прямоугольный пар-д
$\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, \ldots, n\}$,
где числа a_k, b_k $(a_k \leq b_k)$, $k = 1, \ldots, n$ задают клетку $\Pi \subset \mathbb{R}^n$.
Мерой $\mu(\Pi)$ клетки Π наз. число $\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \ldots (b_k - a_k)$

Опр. Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. клеточным множеством, если оно представимо в виде конечного набора клеток $\Pi_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, I$, не имеющих общих внутр. точек:
$A = \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Pi_i$; $(\mathrm{int}\,\Pi_i) \cap (\mathrm{int}\,\Pi_s) = \varnothing$ при $i \neq s$.
Мерой клеточного множества A наз. сумма мер составляющих его клеток:
$\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{I} \mu(\Pi_i)$
(Пустое мн-во по опр. счит клет ; $\mu(\varnothing) = 0$)

Св-во 1 Мера клет. мн-ва не зависит от способа разб. на клетки
Св-во 2 Если A, B — клет. мн, то мн. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus (\mathrm{int}\, B)$ явл. клет.
(мн-во $A \setminus B$, вообще гов, незамкн, след-но, не явл. клет)
Св-во 3 (Аддит-ть)
Если A, B — клет. мн., не имеющие общих внут. т, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
Если сущ. внут. т. A и B, то $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$
Св-во 4 (Монот-ть)
Если A, B — клет. мн и $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$



Опр Нижней мерой Жордана $\mu_*(E)$ мн. $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. точная верхняя грань мер клет. мн. A, содерж-ся в E.
Верхней мерой Жордана $\mu^*(E)$ мн. $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. точная нижняя грань мер клет. мн. B, содержащих E:

$$\mu_*(E) = \sup_{A - \text{кл.мн}, A \subset E} \mu(A)$$

$$\mu^*(E) = \inf_{B - \text{кл.мн}, B \supset E} \mu(B)$$

Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. измеримым по Жордану, если $\mu_*(E) = \mu^*(E) \in \mathbb{R}$
Число $\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)$ наз. мерой множества E

5.2 Критерий измеримости

Л.1 Мн-во $E\subset\mathbb{R}^n$ изм. по Ж $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ кл.мн. A_ε и B_ε : $A_\varepsilon\subset E\subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть E изм., т.е $\mu_*(E)=\mu^*(E)$

По опр. точн. верхн. гр. $\mu_*(E)=\sup\limits_{A-\text{кл}, A\subset E}\mu(A)$,

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ кл.мн $A_\varepsilon\subset E$: $\mu_*(E)-\mu(A_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$

Аналог. по опр. inf

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ кл.мн $B_\varepsilon\supset E$: $\mu(B_\varepsilon)-\mu^*(E)<\frac{\varepsilon}{2}$

След-но, $\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ кл.мн A_ε и B_ε : $A_\varepsilon\subset E\subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$

Поскольку $\mu_*(E)=\sup\limits_{A\,\text{кл}, A\subset E}\mu(A)\geq\mu(A_\varepsilon)$

$$\mu^*(E)=\inf\limits_{B-\text{кл}, B\supset E}\mu(B)\leq\mu(B_\varepsilon)\text{ , то}$$

$$\mu^*(E)-\mu_*(E)\leq\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$$

Т.к число $\mu^*(E)-\mu_*(E)$ не зав. от выбора $\varepsilon>0$, то $\mu^*(E)-\mu_*(E)\leq 0$,

т.е $\mu^*(E)\leq\mu_*(E)$

Поскольку нер-во $\mu^*(E)\geq\mu_*(E)$ вып. всегда, то $\mu^*(E)=\mu_*(E)$ ■

Через $U_\delta(E)$ обозначим δ-окр. мн. E:

$U_\delta(E)=\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x,E)<\delta\}$, где $\rho(x,E)=\inf\limits_{y\in E}|x-y|$ – р-е от x до мн. E.

Л.2 Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ – измер мн. Тогда

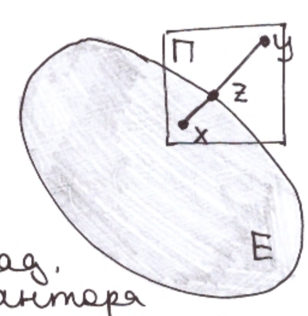
$\mu^*(U_\delta(E))\to\mu(E)$ при $\delta\to 0$

<u>Следствие</u>

Если E – мн. меры 0 в $\mathbb{R}^n$, то

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ клет. мн. $C_\varepsilon\subset\mathbb{R}^n$ т., что $\mu(C_\varepsilon)<\varepsilon$ и $E\subset\operatorname{int}C_\varepsilon$.

Л.3 Пусть клетка $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ содержит как т. из мн. E, так и т. не из мн. E. Тогда ~~клетка~~ Π имеет общую т с границей E



▲ Пусть $x\in\Pi\cap E$, $y\in\Pi\setminus E$. Тогда отрезок $[x,y]\subset\Pi$ обладает тем св-вом, что один из его концов лежит в E, др- вне E. Примен к $[x,y]$ процесс дел пополам и отбирая каждый раз ту полов, кот облад. указ. св-вом, получ. стяг. сист. отр, кот. по т Кантора имеет общ. т z. Всякая окр т z содер. т.как из E, так и не из E $\Rightarrow z\in\partial E$ ■

$\boxed{\text{Т.1}}$ (Крит. измеримости)

Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ измер $\Leftrightarrow$ E огр и $\mu(\partial E)=0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть мн. E изм.

Всякое измеримое мн-во ограничено

(Иначе, в случ. неогр. мн-ва, не сущ. клеточного мн-ва B (т.е мн-ва из конечного набора клеток), т.ч. $E \subset B$)

Покажем, что $\mu(\partial E)=0$.

В силу $\boxed{\text{Л.1}}$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists$ кл.мн A_ε и B_ε: $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$

Из св-ва 2 след, что мн-во $C_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon)$ явл. клет.

Поскольку клет. мн. A_ε и C_ε не имеют общ. внут. т, то в силу св-ва 3 $\mu(A_\varepsilon)+\mu(C_\varepsilon)=\mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon)=\mu(B_\varepsilon)$.

След-но, $\mu(C_\varepsilon)=\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$. (1)

Поскольку $E \subset B_\varepsilon$, то $\overline{E} \subset \overline{B}_\varepsilon = B_\varepsilon$.

Т.к $A_\varepsilon \subset E$, то $\operatorname{int} A_\varepsilon \subset \operatorname{int} E$, поэтому $\partial E = \overline{E} \setminus (\operatorname{int} E) \subset B_\varepsilon \setminus (\operatorname{int} A_\varepsilon) = C_\varepsilon$

Отсюда и из (1) след, что

$\mu^*(\partial E) \leq \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$

В силу произ-ти ε, $\mu^*(\partial E)=0$

Т.к всегда $0 \leq \mu_*(\partial E) \leq \mu^*(\partial E)$ $\Rightarrow$ $\mu_*(\partial E)=\mu^*(\partial E)=0$, т.е $\mu(\partial E)=0$

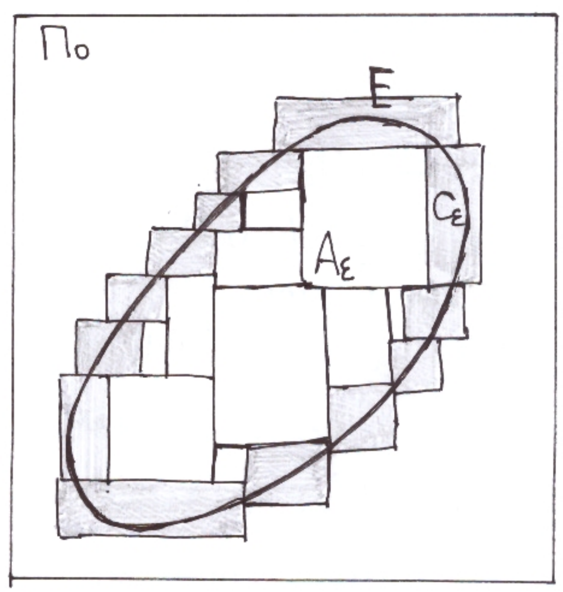
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть E огр и $\mu(\partial E)=0$

Покажем, что E измеримо.

Зафикс $\forall \varepsilon>0$

В силу след. из $\boxed{\text{Л.2}}$ $\exists$ клет. мн. C_ε : $\partial E \subset \operatorname{int} C_\varepsilon$ и $\mu(C_\varepsilon)<\varepsilon$

В силу огр-ти мн-в E и C_ε сущ. клетка Π_0, содерж. мн-ва E и C_ε



Из св-ва 2 след, что мн-во $D_\varepsilon = \Pi_0 \setminus \operatorname{int} C_\varepsilon$ явл. клеточным, т.е м/б представлено как объедин. клет. Π_i^ε, $i=1,\dots,I$, не имеющих общих внут. т.

Определим кл. мн. A_ε как объедин. всех клеток Π_i^ε, $i=1,\dots,I$, кот. целиком содерж. во мн-ве E: $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{\Pi_i^\varepsilon \subset E} \Pi_i^\varepsilon$

Поскольку кл. Π_i^ε не имеют общ. т с ∂E, то из $\boxed{\text{Л.3}}$ след, что либо клетка Π_i^ε целиком содер. в E, либо не имеет общ. т. с E.

Поэтому $E \subset A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$

Определим кл. мн $B_\varepsilon = A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$, получим $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$. Поскольку мн. C_ε и D_ε не им. общ. внут. т., то мн. C_ε и $A_\varepsilon \subset D_\varepsilon$ облад. тем же св-вом.

Отсюда по св-ву 3 $\mu(B_\varepsilon)=\mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon)=\mu(A_\varepsilon)+\mu(C_\varepsilon)<\mu(A_\varepsilon)+\varepsilon$.

Поэтому $\mu(B_\varepsilon)-\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$. Из $\boxed{\text{Л.1}}$ след, что E измеримо ∎

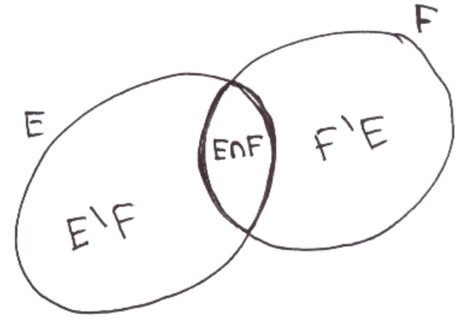
$\boxed{5.3}$ Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств.

$\boxed{\text{Л.1}}$ Для любых мн. $E, F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения:

а) $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$

б) $\partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F$

в) $\partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F$



▲ Докажем а) (б) и в) аналог)

Пусть $x \in \partial(E \cup F) = \overline{E \cup F} \setminus (\operatorname{int}(E \cup F))$

Тогда $x \in \overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

След-но, $x \in \overline{E}$ или $x \in \overline{F}$.

Т.к $\operatorname{int} E \cup \operatorname{int} F \subset \operatorname{int}(E \cup F)$ и $x \notin \operatorname{int}(E \cup F)$, то $x \notin \operatorname{int} E \cup \operatorname{int} F$.

Поэтому $x \in \overline{E} \setminus \operatorname{int} E = \partial E$

или $x \in \overline{F} \setminus \operatorname{int} F = \partial F$

В любом случае, $x \in \partial E \cup \partial F$ ■

<u>Следствие</u> Если мн. E и F измеримы, то мн. $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ измер.

▲ След. из крит. измер-ти $\boxed{\text{Т.1}}$ из $\boxed{5.2}$ и <u>Л.1</u>. ■

$\boxed{5.4}$ Свойство аддитивности меры Жордана

$\boxed{\text{Т.1}}$ Если мн-ва E_1 и E_2 измер. по Жордану и не имеют общ. внутр. точек, то

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

▲ По опр. меры Жорд.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клет. мн. $A_i^\varepsilon, B_i^\varepsilon$ $(i = 1, 2)$ такие, что $A_i^\varepsilon \subset E_i \subset B_i^\varepsilon$ и

$$\left.\begin{aligned} &\mu(A_i^\varepsilon) \geq \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\mu(B_i^\varepsilon) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2)$$

След-но,

$$\left.\begin{aligned} &\mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) \geq \mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon \\ &\mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Поскольку $A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon \subset E_1 \cup E_2 \subset B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon$ и кл. мн. A_1^ε и A_2^ε не имеют общ. внут. т, то

$$\mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) = \mu(A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon) \leq \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon) \leq \mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon)$$

Отсюда и из (1) след.

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon \leq \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon,$$

что в силу произв-ти $\varepsilon > 0$ дает рав-во

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$ ■

$\boxed{5.5}$ Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$-мерном пространстве.

$\boxed{\text{Т.1}}$ Если мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то цилиндр $G = E \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ явл. измер. мн-вом и
$\mu(G) = (b-a)\,\mu(E)$

▲ Т.к E измеримо, то
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$ кл. мн. $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$: $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$; $\mu(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$; $\mu(B_\varepsilon) - \mu(E) < \varepsilon$

Рассм. кл. мн-ва
$\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \times [a,b]$; $\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \times [a,b]$

Тогда $\tilde{A}_\varepsilon \subset G \subset \tilde{B}_\varepsilon$

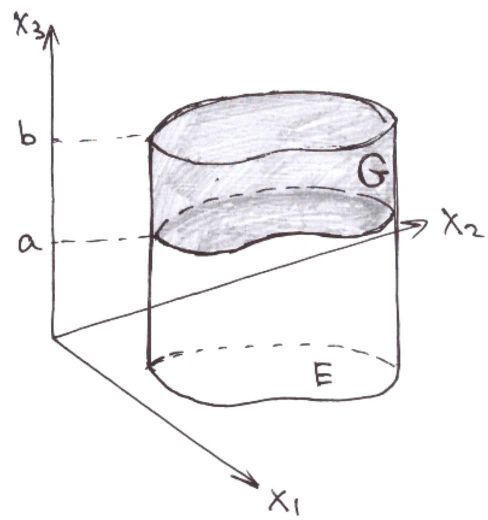
След-но, $\mu_*(G) \geq \mu(\tilde{A}_\varepsilon) = (b-a)\,\mu(A_\varepsilon) > (b-a)(\mu(E) - \varepsilon)$

В силу произв-ти $\varepsilon > 0$ получаем
$\mu_*(G) \geq (b-a)\,\mu(E)$

Аналогично,
$\mu^*(G) \leq \mu(\tilde{B}_\varepsilon) = (b-a)\,\mu(B_\varepsilon) < (b-a)(\mu(E) + \varepsilon)$
$\mu^*(G) \leq (b-a)\,\mu(E) \leq \mu_*(G)$

Поэтому сущ. $\mu(G) = (b-a)\,\mu(E)$ ■

<u>Замеч</u> В случае $\mathbb{R}^2$ цилиндр $G = E \times [a,b] \subset \mathbb{R}^3$ можно представить так:



$\boxed{6.2}$ Верхние и нижние суммы Дарбу, свойства сумм Дарбу.

Определим нек. опер. с $+\infty$ и $-\infty$:

$+\infty+(+\infty)=+\infty$

$-\infty+(-\infty)=-\infty$

если $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\pm\infty+\lambda=\pm\infty$

если $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, то $\lambda\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$

если $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda<0$, то $\lambda\cdot(\pm\infty)=\mp\infty$

Опр. Разбиением отрезка $[a,b]$ наз. конечный набор точек $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ таких, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_I=b$

Отр. $[x_{i-1},x_i]$ наз отрезками разбиения T.

Опр. Пусть на $[a,b]$ опр. ф-я $f(x)$ и задано разбиение $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$. Определим

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$s(f,T)=\sum_{i=1,\ldots,I}(x_i-x_{i-1})m_i$$

$$S(f,T)=\sum_{i=1,\ldots,I}(x_i-x_{i-1})M_i$$

Сумма $s(f,T)$ наз нижней суммой Дарбу, а $S(f,T)$ — верхней суммой Дарбу для ф-и f разб T.

Лемма 1

1) Если ф. f огр снизу на $[a,b]$, то $s(f,T)\in\mathbb{R}$ $\forall$ разб T.
Если ф. f неогр снизу на $[a,b]$, то $s(f,T)=-\infty$ $\forall$ разб T.

2) Если ф. f огр сверху на $[a,b]$, то $S(f,T)\in\mathbb{R}$ $\forall$ разб T
Если ф f неогр сверху на $[a,b]$, то $S(f,T)=+\infty$ $\forall$ разб T

$\square$ 1) Пусть $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ — разб. отр $[a,b]$

Если f огр снизу, то $\forall i\in\{1,\ldots,I\}\ \mapsto m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow s(f,T)\in\mathbb{R}$.

Если f неогр снизу, то она неогр снизу на нек $[x_{j-1},x_j]$.

$\Rightarrow m_j=-\infty \Rightarrow$

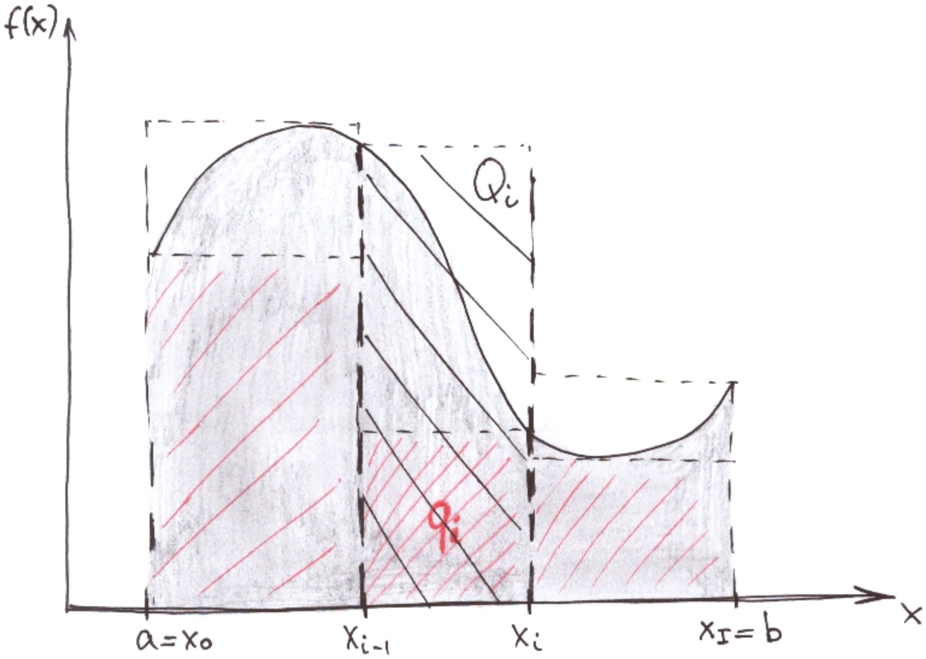
$s(f,T)=-\infty$

2) Аналогично ■

Геом. смысл сумм Дарбу.

Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф. $f: \forall x \in [a,b] \hookrightarrow f(x) \geq 0$

Мн-во $G = \{(x,y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ наз. криволинейной трапецией



Для заданного разб $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ опред. прямоуг-ки:

$q_i = \{(x,y): x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq m_i\}$

$Q_i = \{(x,y): x_{i-1} \leq x < x_i, 0 \leq y \leq M_i\}$

Мн-во $q(f,T) = \bigcup_{i=1}^{I} q_i$ наз внутренним, а мн-во $Q(f,T) = \bigcup_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми мн-вами для криволинейной трапеции G.

Заметим, что $q(f,T) \subset G \subset Q(f,T)$

Поскольку площ. прям-ков q_i и Q_i равны соот

$\mu(q_i) = (x_i - x_{i-1})m_i$ и $\mu(Q_i) = (x_i - x_{i-1})M_i$, то площ. внут. и вн. ступ. мн-в равны соот

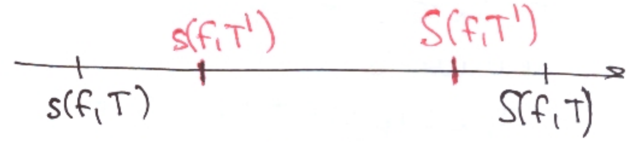
$\mu(q(f,T)) = s(f,T)$, $\mu(Q(f,T)) = S(f,T)$.

В этом состоит геом. смысл сумм Дарбу

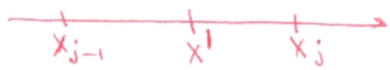
Опр. Мелкостью разбиения $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ наз число
$$\ell(T)=\max_{i=1,..,I}(x_i-x_{i-1})$$

Опр. Буд. гов, что разбиение T' отр $[a,b]$ явл. измельчением разбиения T отр $[a,b]$, если разб T' содержит все точки T: $T\subset T'$.

Лемма 2 Если разб. T' $[a,b]$ явл. измельч. разб T, то $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ имеют место нер-ва
$$s(f,T')\geq s(f,T) \quad \text{и} \quad S(f,T')\leq S(f,T)$$



□ Рассм. случай, когда разб T' получ. из $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ добавл. одной точки $x'\in(x_{j-1},x_j)$



Тогда:
$$s(f,T')-s(f,T)=(x_j-x')\inf_{x\in[x',x_j]}f(x)+(x'-x_{j-1})\inf_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)-(x_j-x_{j-1})\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)=$$
$$=(x_j-x')\left(\inf_{x\in[x',x_j]}f(x)-\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\right)+(x'-x_{j-1})\left(\inf_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)-\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)\right)\geq 0,$$

т.к $\inf\limits_{x\in[x',x_j]}f(x)\geq\inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)$ и

$\inf\limits_{x\in[x_{j-1},x']}f(x)\geq\inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)$

Нер-во $S(f,T')\leq S(f,T)$ док. аналог.
Если T' получ. из T добавл несколь. точек, то, добавляя на каждом шаге по одной точке, получаем требуемое ■

Лемма 3 Для $\forall T_1,T_2$ — разб. $[a,b]$ и $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ справ. нер-во
$$s(f,T_1)\leq S(f,T_2)$$

□ Рассм. разб $T=T_1\cup T_2$, сост. из т. разб T_1 и т разб T_2.
Поскольку T — измельч. T_1, T — измельч. T_2, то по лемме 2
$s(f,T_1)\leq s(f,T)$ и $S(f,T)\leq S(f,T_2)$
Поскольку для разб $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ справ. соот.
$$s(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\leq\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=S(f,T),$$

то $s(f,T_1)\leq s(f,T)\leq S(f,T)\leq S(f,T_2)$ ■

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана ф. f. Определим

$J_* = \sup\limits_T s(f,T)$, $J^* = \inf\limits_T S(f,T)$,

где супремум и инфимум берутся по всевозможным разб T отр $[a,b]$.

Величины J_* и J^* наз соот нижним и верхним интегралами Дарбу.

Лемма 4 $\forall T$ — разб $[a,b]$ и $\forall f: [a,b] \to \mathbb{R}^*$ справ. нер-ва

$s(f,T) \leq J_* \leq J^* \leq S(f,T)$

$\square$ Из леммы 3:

$\forall T_2: \quad J_* = \sup\limits_{T_1} s(f,T_1) \leq S(f,T_2)$

$\Rightarrow J_* \leq \inf S(f,T_2) = J^*$

Поэтому $s(f,T) \leq \sup\limits_T s(f,T) = J_* \leq J^* = \inf S(f,T) \leq S(f,T)$ $\blacksquare$

6.1 Определенный интеграл Римана

Опр. Число J наз определенным интегралом Римана ф-и f на $[a,b]$ и обозн. $J = \int\limits_a^b f(x)dx$, если

$\lim\limits_{l(T)\to 0} s(f,T) = \lim\limits_{l(T)\to 0} S(f,T) = J$, т.е

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T: l(T) \leq \delta \mapsto |s(f,T) - J| \leq \varepsilon$ и $|S(f,T) - J| \leq \varepsilon$

ф-я f наз. интегрируемой по Риману на $[a,b]$, если сущ. инт. Римана ф-и f на $[a,b]$

Геом. смысл.

Для неотриц. ф. f

$\exists \int\limits_a^b f(x)dx \iff \exists$ площадь кривол. тр. G

$\int\limits_a^b f(x)dx = \Pi_G$

Лемма 1 (Необход. усл. инт-ти)

Если ф. f инт. на $[a,b]$, то f огр на $[a,b]$

$\square$ Если ф. f неогр снизу на $[a,b]$, то в силу леммы 1 $\boxed{6.2}$ $\lim\limits_{l(T)\to 0} s(f,T) = -\infty$

$\Rightarrow \nexists$ конечн. пред. $s(f,T)$ при $l(T) \to 0$

$\Rightarrow f$ не инт на $[a,b]$

Аналогично, если f неогр сверху, то она тоже неинт. $\blacksquare$

Замеч. Обр. неверно: f огр на $[a,b]$ $\cancel{\Rightarrow}$ f инт на $[a,b]$

пример: ф. Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\forall T \hookrightarrow s(f,T)=0$; $S(f,T)=b-a$

При $l(T)\to 0$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ стрем к разл. пределам $\Rightarrow$ f не инт по Р.

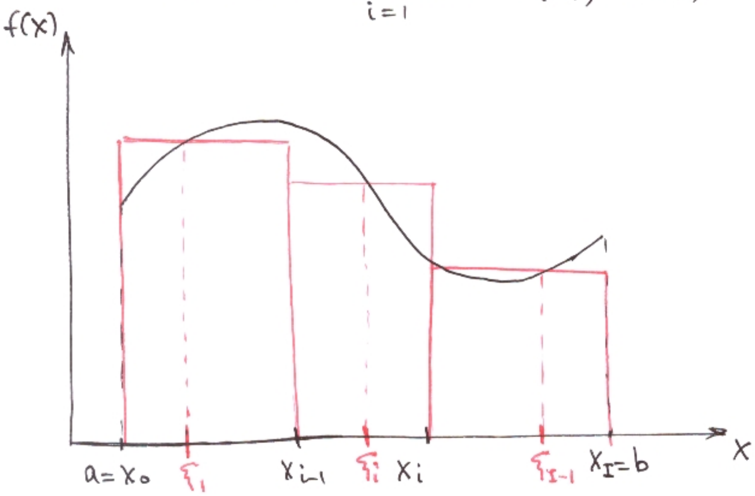
Рассмотрим определение интеграла через интегральные суммы Римана.

Опр. Пусть задано разбиение $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,b]$.

Выборкой, соотв. разб T, наз. набор точек $\xi_T=\{\xi_i\}_{i=1}^{I}$ таких, что $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Интегральной суммой (Римана) для ф-и f, разб. T и выборки ξ_T наз

$$\sigma(f,T,\xi_T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$$



$\boxed{\text{Лемма 2}}$ Пусть на $[a,b]$ опр. ф. $f(x)$ и задано разб $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$

Тогда $s(f,T)=\inf\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$ и $S(f,T)=\sup\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$, где супремум и инфимум берутся по всем выборкам ξ_T, соот. разб T.

$\square$ $$s(f,T)=\sum_{i=1,\dots,I}(x_i-x_{i-1})\inf_{\xi_i\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi_i)=$$

$$=\inf_{\xi_1\in[x_0,x_1]}\dots\inf_{\xi_I\in[x_{I-1},x_I]}\sum_{i=1,\dots,I}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)=\inf_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$$

Аналогично, $S(f,T)=\sup\limits_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T)$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Опр инт. через инт. суммы Римана)

Число J равно $\int\limits_a^b f(x)dx$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{l(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi_T) = J, \text{ т.е}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T : l(T) \leq \delta \ \ \forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f, T, \xi_T) - J| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

$\square$ Рассм. отдельно условие:

$$\forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f, T, \xi_T) - J| \leq \varepsilon$$

это усл. можно переписать в виде

$$\forall \xi_T \hookrightarrow J - \varepsilon \leq \sigma(f, T, \xi_T) \leq J + \varepsilon \qquad (2)$$

Условие $\forall \xi_T \hookrightarrow \sigma(f, T, \xi_T) \leq J + \varepsilon$ означает, что число $J+\varepsilon$ явл. нек. верхней гранью знач. $\sigma(f, T, \xi_T)$ по выборкам ξ_T.

В силу св-в верхних граней это усл. экв-но нер-ву

$$\sup_{\xi_T} \sigma(f, T, \xi_T) \leq J + \varepsilon.$$

Из леммы 2.: $S(f, T) \leq J + \varepsilon$

Аналогично условие $\forall \xi_T \hookrightarrow J - \varepsilon \leq \sigma(f, T, \xi_T)$ экв-но нер-ву $J - \varepsilon \leq s(f, T)$

Имеем: $S(f, T) \leq J + \varepsilon$
$s(f, T) \geq J - \varepsilon$

Поскольку всегда $s(f, T) \leq S(f, T)$, то

$$(2) \iff J - \varepsilon \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq J + \varepsilon \iff |s(f, T) - J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f, T) - J| \leq \varepsilon$$

След-но,

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T : l(T) \leq \delta \hookrightarrow |s(f, T) - J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f, T) - J| \leq \varepsilon,$$

что по опр. означ.

$$J = \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

~~Замеч. Обр. неверно: f огр на $[a,b] \not\Rightarrow f$ инт на $[a,b]$~~
~~Пример: ф. Дирихле~~
~~$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin \mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$~~
~~$\forall T \hookrightarrow s(f,T)=0;\ S(f,T)=b-a$~~
~~При $l(T)\to 0$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ стрем к различным пред.~~
~~$\Rightarrow f$ неинт по Риману~~

$\boxed{6.3}$ Критерии интегрируемости

Опр. Разность верхней и нижней суммы Дарбу для ф-и f и разб T будем обозн. через $\Delta(f,T)$:

$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Крит. инт)

ф. f инт на $[a,b] \iff \lim\limits_{l(T)\to 0}\Delta(f,T)=0$, т.е

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow \Delta(f,T)\le\varepsilon$ (1)

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Если f инт на $[a,b]$, то по опр

$\exists J\in\mathbb{R}: \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow \left(|s(f,T)-J|\le\frac{\varepsilon}{2}\right.$ и $\left.|S(f,T)-J|\le\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Поэтому при $l(T)\le\delta$

$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)\le|S(f,T)-J|+|s(f,T)-J|\le\varepsilon$

$\Rightarrow$ усл (1) вып

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып усл (1)

Тогда из леммы 1 $\boxed{6.2}$ след, что f огр, т.к иначе либо $s(f,T)=-\infty$, либо $S(f,T)=+\infty$ и в любом случ.

$\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)=+\infty \Rightarrow$ против. (1).

Поскольку f огр, то $\forall T$ $s(f,T)$ и $S(f,T)$ конечны.

Отсюда и из нер-ва $s(f,T)\le J_*\le J^*\le S(f,T)$ след, что J_* и J^* – конечные числа.

Из усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists T: S(f,T)-s(f,T)=\Delta(f,T)\le\varepsilon$

Отсюда и из леммы 4 $\boxed{6.2}$:

$\forall\varepsilon>0 \hookrightarrow J^*-J_*\le S(f,T)-s(f,T)\le\varepsilon$

$\Rightarrow J^*-J_*\le 0$

Т.к $J_*\le J^*$, то $J^*=J_*$

Определим $J=J_*=J^*$. Из нер-ва $s(f,T)\le J\le S(f,T)$ и усл (1) след, что

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T: l(T)\le\delta \hookrightarrow |s(f,T)-J|\le\varepsilon$ и $|S(f,T)-J|\le\varepsilon$

$\Rightarrow \exists\int\limits_a^b f(x)dx=J$ ∎

6.4 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана ф-я f и определено разбиение $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$.

Колебанием функции f на отр $[x_{i-1},x_i]$ наз.

$$\omega_i(f)=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')-f(x'')|$$

Лемма 1 Для $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\forall T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ - разб отр $[a,b]$ спр. р-во

$$\Delta(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\omega_i(f)$$

□ Заметим, что

$$\omega_i(f)=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}(f(x')-f(x''))=\sup_{x'\in[x_{i-1},x_i]}f(x')+\sup_{x''\in[x_{i-1},x_i]}(-f(x''))=$$

$$=\sup_{x'\in[x_{i-1},x_i]}f(x')-\inf_{x''\in[x_{i-1},x_i]}f(x'')=M_i-m_i,$$

где $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$

след-но, $\Delta(f,T)=S(f,T)-s(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})(M_i-m_i)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\omega_i(f)$ ■

Теорема 1 (инт-ть непр ф-и)

Если ф-я непр на отрезке, то она инт-ма на нем.

□ Пусть ф-я f непр на $[a,b]$.

По т. Кантора она равн. непр. на $[a,b]$, т.е

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_\varepsilon>0:\ \forall x',x''\in[a,b]:\ |x'-x''|<\delta\ \mapsto\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}\qquad(1)$$

Пусть $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ - произ. разб. $[a,b]$ такое, что $l(T)=\max_{1\le i\le I}\Delta x_i<\delta$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

По т. Вей-са $\exists\xi_i',\xi_i''\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ такие, что $f(\xi_i')=m_i$, $f(\xi_i'')=M_i$,

где $m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x)$, $M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x)$, $i=\overline{1,I}$

Из (1) след., что $\omega_i=M_i-m_i=f(\xi_i'')-f(\xi_i')<\frac{\varepsilon}{b-a}$, т.к

$|\xi_i''-\xi_i'|\le\Delta x_i\le l(T)<\delta$

След-но, $\sum_{i=1}^{I}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{I}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_\varepsilon>0:\ \forall T:\ l(T)<\delta\ \mapsto\ S(f,T)-s(f,T)<\varepsilon$

По кр. инт-ти ф-я f инт на $[a,b]$ ■

Теорема 2 (инт-ть монот. ф-и)

Если ф-я монотонна на отрезке, то она инт-ма на нем.

□ Пусть ф. f не убывает на $[a,b]$ и пусть задано разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,b]$.

Тогда $\omega_i(f)=\sup\limits_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(x')| \underset{\text{т.к мон}}{=} f(x_i)-f(x_{i-1})$

След-но,

$$\Delta(f,T)=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\,\omega_i(f)\le l(T)\sum_{i=1}^{I}\omega_i(f)=l(T)\sum_{i=1}^{I}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)=$$

$$=l(T)\big(f(b)-f(a)\big)\longrightarrow 0 \text{ при } l(T)\to 0$$

В силу кр. инт-ти ф. f инт. на $[a,b]$ ■

__Замеч__ Из непр или мон-ти ф. на (a,b) не след инт-ть на $[a,b]$

Напр, ф. $f(x)=\frac{1}{x}$ непр. и убыв на $(0,1)$, но она неогран. и, след-но, неинт. на $[0,1]$

Можно доказать след. две теор:

Теорема 3 Если ф-я f инт. на $[a,c]$ и инт. на $[c,b]$, $a<c<b$, то она инт. на $[a,b]$

__Замеч__: Т.3 распростр. на конечное число отр. по индукции

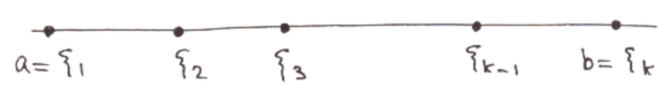
Теорема 4 Если ф-я f огр на $[a,b]$, ~~то она~~ и для любого $a'\in(a,b)$ инт на $[a',b]$, то она инт и на $[a,b]$

Теорема 5 (инт-ть огр. ф-и с конечным чис. т. разр)

Если ф-я f огр на $[a,b]$ и имеет конечное число точек разрыва, на $[a,b]$, то она инт на $[a,b]$.

□ Обозн. т. разр. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ $(a\le\xi_1<\xi_2<\dots<\xi_k\le b)$

Отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число отр, на каждом из кот. ф. f имеет един. т. разр. в одном из концов



В силу замеч. к Т.3. достат. доказать, что f инт. на каждом из таких отр.

Пусть для отр. f огр. на $[\xi,b]$ и непр на $(\xi,b]$

Тогда для любого $\xi'\in(\xi,b)$ f непр (след, инт) на $[\xi',b]$

По Т.4 f инт на $[\xi,b]$ ■

$\boxed{6.5}$ Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Аддит. инт. по отр)

Пусть ф-я f инт. на $[a,b]$ и $[b,c]$. Тогда f инт на $[a,c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

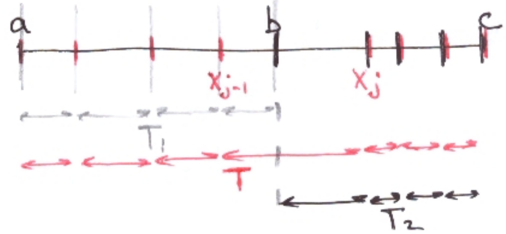
$\square$ Поскольку f инт на $[a,b]$ и $[b,c]$, то f огр на них, и, след-но, f огр на $[a,c]$, т.е

$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,c] \longrightarrow |f(x)| \le M$

Пусть задано разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a,c]$ и пусть $b \in [x_{j-1}, x_j]$

Рассм. разб. $T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, b\}$ отр $[a,b]$

и $T_2 = \{b, x_j, \dots, x_I\}$ отр $[b,c]$



Для верхних сумм Дарбу:

$$S(f,T) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$S(f,T_1) = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + (b - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},b]} f(x),$$

$$S(f,T_2) = (x_j - b) \sup_{x\in[b,x_j]} f(x) + \sum_{i=j}^{I} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

имеют место соотн.:

$$|S(f,T) - S(f,T_1) - S(f,T_2)| = \Big| (x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - (b - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},b]} f(x) - $$

$$ - (x_j - b) \sup_{x\in[b,x_j]} f(x) \Big| \le$$

$$\le 2M(x_j - x_{j-1}) \le 2M\, \ell(T) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \to 0.$$

Поскольку $\ell(T_1) \le \ell(T)$ и $\ell(T_2) \le \ell(T)$,

$$\lim_{\ell(T_1)\to 0} S(f,T_1) = J_1 = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\lim_{\ell(T_2)\to 0} S(f,T_2) = J_2 = \int_b^c f(x)\,dx, \quad \text{то}$$

$$\lim_{\ell(T)\to 0} S(f,T) = J_1 + J_2$$

Аналогично $\lim\limits_{\ell(T)\to 0} s(f,T) = J_1 + J_2$

По опр инт. получаем требуемое ∎

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (линейность опр. инт)

Если ф-и f и g инт на $[a,b]$, а α и β – нек числа, то ф-я $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ инт на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

$\square$ Заметим, что инт. суммы Римана обладают св-вом линейности:

$$\forall T = \{x_i\}_{i=0}^{I} \ \forall \xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^{I} \mapsto \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi_T) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) =$$

$$= \alpha \sigma(f, T, \xi_T) + \beta \sigma(f, T, \xi_T)$$

В силу опр инт через инт. суммы (Т.1 $\boxed{6.1}$) сущ. пределы

$$\lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi_T) = \int_a^b f(x)\, dx, \quad \lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(g, T, \xi_T) = \int_a^b g(x)\, dx$$

Следно, сущ. предел

$$\lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi_T) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

В силу Т.1 $\boxed{6.1}$ получаем требуемое ■

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (Инт-ть произведения инт. ф)

Если ф-и $f(x)$ и $g(x)$ инт на $[a,b]$, то их произв. $f(x)g(x)$ явл. инт на $[a,b]$ ф-ей.

$\square$ Поскольку ф-и f и g инт на $[a,b]$, то они огр, т.е

$$M_f = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}, \quad M_g = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \in \mathbb{R}$$

След-но,

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| \le$$

$$\le |f(x)g(x) - f(x')g(x)| + |f(x')g(x) - f(x')g(x')| \le$$

$$\le M_g |f(x) - f(x')| + M_f |g(x) - g(x')|$$

Пусть задано разб $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$. Тогда

$$\omega_i(fg) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \le M_g \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(x')| + M_f \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x) - g(x')| =$$

$$= M_g\, \omega_i(f) + M_f\, \omega_i(g)$$

Поэтому разность сумм Дарбу ф-и $f(x)g(x)$

$$\Delta(fg, T) = \sum_{i=1}^{I} (x_i - x_{i-1})\, \omega_i(fg) \le M_g \Delta(f, T) + M_f \Delta(g, T)$$

В силу кр. инт. из инт-ти ф. g и f след, что $\Delta(f,T) \to 0$ и $\Delta(g,T) \to 0$ при $\ell(T) \to 0$.

След-но, $\Delta(fg, T) \to 0$ при $\ell(T) \to 0 \Rightarrow f(x)g(x)$ инт на $[a,b]$ ■

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (инт-ть модуля)

Если ф-я $f(x)$ инт. ~~на~~ $[a,b]$, то ф-я $|f(x)|$ также инт. на $[a,b]$ и справ. нер-во:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (1)$$

$\square$ В силу нер-ва треугольника имеет место нер-во

$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leqslant |f(x') - f(x'')|$

Поэтому для разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$ колеб. ф-й f и $|f|$ связаны нер-вом

$$\omega_i(|f|) = \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leqslant \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')| = \omega_i(f)$$

Отсюда, исп. кр. инт., получаем

$$0 \leqslant \Delta(|f|,T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(|f|) \leqslant \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f) = \Delta(f,T) \xrightarrow[\text{при } \ell(T)\to 0]{} 0$$

След-но, $\Delta(|f|,T) \to 0$ при $\ell(T)\to 0$

$\xRightarrow{\text{кр. инт}}$ $|f|$ инт на $[a,b]$

Поскольку для инт. сумм имеет место нер-во

$\sigma(f,T,\xi_T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})|f(\xi_i)| = \sigma(|f|,T,\xi_T)$, то,

переходя к пределу ~~в нер~~ при $\ell(T)\to 0$, получаем (1) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (инт-е неравенств)

Если ф-и f и g инт на $[a,b]$ и $\forall x\in[a,b] \mapsto f(x)\leqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

$\square$ Поскольку для инт. сумм имеет место нер-во

$\sigma(f,T,\xi_T) \leqslant \sigma(g,T,\xi_T)$ $\forall T$, $\forall \xi_T$, то, переходя к пред при $\ell(T)\to 0$,

по опр инт. через инт. суммы (т. 1 $\boxed{6.1}$) получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(f,T,\xi_T) \leqslant \lim_{\ell(T)\to 0} \sigma(g,T,\xi_T) = \int_a^b g(x)dx \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Теорема 6}}$ (О среднем)

Если ф-и f и g инт на $[a,b]$, причем $g(x)$ сохр. знак (т.е. $g(x)\geq 0$ на $[a,b]$ или $g(x)\leq 0$ на $[a,b]$), то:

1) $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$, где $\mu\in[m,M]$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$;

2) если при этом ф. f непр на $[a,b]$, то
$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx$, где $\xi\in[a,b]$

$\square$ 1) Пусть без огр. общности $g(x)\geq 0$ на $[a,b]$

Т.к для $\forall x\in[a,b] \hookrightarrow m\leq f(x)\leq M$, то $m\,g(x)\leq f(x)\,g(x)\leq M g(x)$

Прим. Т.5, получаем

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int\limits_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$. Нужное нер-во верно $\forall\mu$.

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то разделим (1) на $\int\limits_a^b g(x)\,dx$

$$m\leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}\leq M,\quad \text{т.е}\quad \mu=\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}\in[m,M]$$

2) Если f непр на $[a,b]$, то для $\mu\in[m,M]$ сущ. т. $\xi\in[a,b]$ такая, что $f(\xi)=\mu$ (теор. о пром. знач. непр ф-и) $\blacksquare$

<u>Замеч</u> Если g меняет знак, то т. о среднем теряет силу.

пример: $f(x)=g(x)=x$ на $[-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx > 0\\ \int\limits_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = 0\end{array}\right. \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \neq \mu\int\limits_{-1}^{1} g(x)\,dx \quad \forall\mu$$

$\boxed{6.6}$ Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Непр инт. как ф-и верхнего пред)

Пусть на $[a,b]$ задана инт. по Риману ф. $f(x)$.

Тогда ф-я $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ непр на $[a,b]$.

$\square$ Т.к $f(x)$ инт на $[a,b]$, то $f(x)$ огр на $[a,b]$, т.е

$\exists C\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\leq C$.

Пусть $x_1,x_2\in[a,b]$. В силу адд-ти инт относ. отр. инт-я

$F(x_2)-F(x_1)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$

По т. о инт нер-в

$$|F(x_2)-F(x_1)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} C\,dt \right| = C|x_2-x_1|$$

След-но,

$\forall x_0 \in [a,b]\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0|<\delta \hookrightarrow |F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$,

т.е ф. $F(x)$ непр на $[a,b]$ ∎

Опр. Ф-я $F(x)$ наз. первообразной ф-и $f(x)$ на $[a,b]$, если $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow F'(x) = f(x)$, а на концах $[a,b]$ знач. ф. f равны одн. пр. F:

$$f(a) = F'_+(a) = \lim_{x\to a+0} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}; \quad f(b) = F'_-(b) = \lim_{x\to b-0} \frac{F(x)-F(b)}{x-b}.$$

Теорема 2

Если ф-я f непр на $[a,b]$, то ф-я $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ явл. первообр. $f(x)$ на $[a,b]$

□ Пусть $x, x_0 \in [a,b]$, $x \neq x_0$.

Тогда $F(x)-F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x-x_0)f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,dt$

След-но,

$$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,dt \right| \leq \frac{1}{|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,dt$$

В силу непр f на $[a,b]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t \in [a,b] : |t-x_0| \leq \delta \hookrightarrow |f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$

Поэтому

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0| \leq \delta \hookrightarrow \int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,dt \leq |x-x_0|\varepsilon$

След-но,

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in [a,b] : |x-x_0| \leq \delta \hookrightarrow \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$,

т.е $\forall x_0 \in [a,b] \hookrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, где при $x_0 = a$ и $x_0 = b$ им. в виду од. пр.

Это означает, что

$F'_+(a) = f(a)$

$F'_-(b) = f(b)$

$\forall x_0 \in (a,b) \hookrightarrow F'(x_0) = f(x_0)$

$\Rightarrow F$ – перв. ф f на $[a,b]$ ∎

$\boxed{6.7}$ Формула Ньютона – Лейбница

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Если ф-я f непр на $[a,b]$, то ф. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ явл первообр. ф $f(x)$ на $[a,b]$

$\square$ Док-во см в $\boxed{6.6}$ $\blacksquare$

Следствие 1 Любая первообр. непр на $[a,b]$ ф-и f имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \text{ где } C \in \mathbb{R} \text{ – произ. константа}$$

$\square$ След. из теор. о стр. мн. первообр $\blacksquare$

Следствие 2 (Форм. Ньютона – Лейбница)

Если F – перв. непр на $[a,b]$ ф-и f, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{опр}}{=\!=\!=} F(b) - F(a)$$

$\square$ Восп. сл. 1 и заметим, что

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \blacksquare$$

$\boxed{6.8}$ Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ (Замена перем)

Пусть ф-я $x = \varphi(t)$ имеет непр. произв. на отр $[a,b]$, а ф-я f непр на отр. $\varphi([a,b])$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

$\square$ Поскольку ф-я f непр на $\varphi([a,b])$, то по т. 2 $\boxed{6.6}$ сущ. первооб. F для ф-и f: $\forall x \in \varphi([a,b]) \hookrightarrow F'(x) = f(x)$

По ф. Н-Л: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Поскольку $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, то ф-я $F(\varphi(t))$ явл первооб. ф-и $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. След-но, по ф. Н-Л:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b dF(\varphi(t)) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad \square$$

Теорема 2 (инт-е по частям)

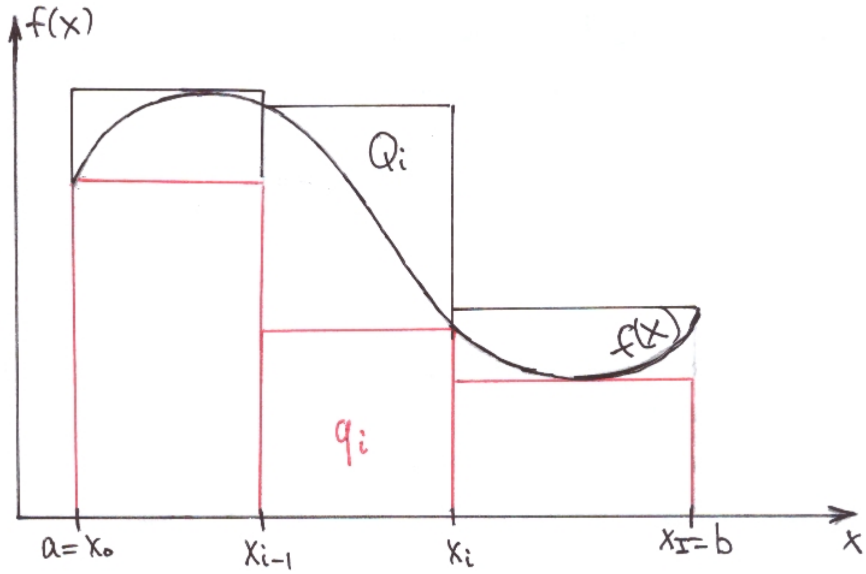
Если ф-и $u(x)$ и $v(x)$ непр. диф. на $[a,b]$, то
$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

□ Применим лин-ть инт. и ф. Н-Л:
$$\int_a^b u(x)\,dv(x) + \int_a^b v(x)\,du(x) = \int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$ ■

7.1 **Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, + 7.2 площадь поверхности вращения (без док-ва)**

1) Площадь криволин. трапеции

Опр. Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф-я f: $\forall x \in [a,b] \to f(x) \geq 0$. Мн-во $G = \{(x,y): a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ наз. криволинейной трапецией.



Для задан. разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ определим прямоуг-ки:

$q_i = \{(x,y): x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ 0 \leq y \leq m_i\}$,

$Q_i = \{(x,y): x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ 0 \leq y \leq M_i\}$.

Мн-во $q(f,T) = \bigcup_{i=1}^{I} q_i$ наз внутренним, а мн-во $Q(f,T) = \bigcup_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми мн-вами для криволин. трап. G. Заметим, что $q(f,T) \subset G \subset Q(f,T)$

Поскольку площ. q_i и Q_i равны соот. $\mu(q_i) = (x_i - x_{i-1})m_i$ и $\mu(Q_i) = (x_i - x_{i-1})M_i$, то площ. внут. и внеш. ст. мн-в равны соот нижней и верхней суммам Дарбу:

$\mu(q(f,T)) = s(f,T)$ и $\mu(Q(f,T)) = S(f,T)$

Если при измельчении разб. площ. внут. и внеш. ступ. мн-в стрем. к одному и тому же пределу $J \in \mathbb{R}$, то число J будем называть площадью криволинейной трапеции (а также интегралом ф-и f на $[a,b]$)

2) Объем тела вращения

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана неотриц. ф-я $f(x)$.

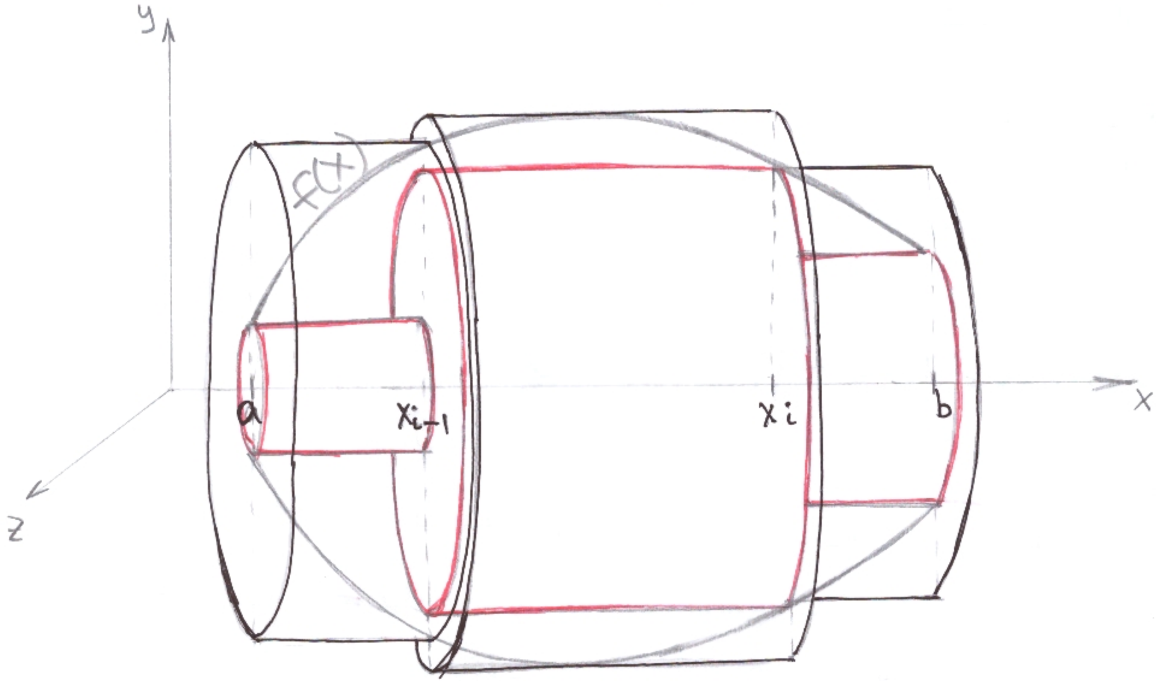
Мн-во $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[a,b], \sqrt{y^2+z^2}\leq f(x)\}$ наз. телом вращения вокруг оси Ox.

Пусть задано разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$.

Обозн. $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Определим цилиндры: $q_i=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[x_{i-1},x_i], \sqrt{y^2+z^2}\leq m_i\}$

$Q_i=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[x_{i-1},x_i], \sqrt{y^2+z^2}\leq M_i\}$



Мн-во $q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} q_i$ наз. внутренним, а мн-во $Q(f,T)=\bigcup\limits_{i=1}^{I} Q_i$ — внешним ступенчатыми ~~цилиндрами~~ телами для тела вращения G.

Заметим, что $\forall T \quad q(f,T)\subset G\subset Q(f,T)$

Поскольку объемы цилиндров q_i и Q_i равны $V(q_i)=(x_i-x_{i-1})\pi m_i^2$

$V(Q_i)=(x_i-x_{i-1})\pi M_i^2$,

то объемы внутр. и внеш. ступ. тел равны

$$V(q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})m_i^2,$$

$$V(Q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(Q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})M_i^2.$$

Опр. Число V наз. объемом тела вращения G, если

$$V=\lim_{l(T)\to 0} V(q(f,T))=\lim_{l(T)\to 0} V(Q(f,T))$$