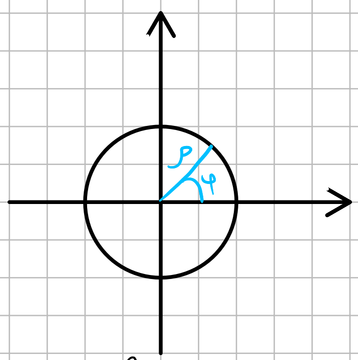
ДЗ 1.18, 1.25, 1.31, Т1

№1.18

Дано $\bar{r} = \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$



$|d\bar{r}_\varphi| = \rho\, d\varphi \qquad H_\varphi = \rho$

$|d\bar{r}_\rho| = d\rho \qquad H_\rho = 1$

$(\bar{w}, \bar{e}_\varphi) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,\dot\varphi} - \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,\varphi}\right)$

$v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 \Rightarrow (\bar{w}, \bar{e}_\varphi) = \frac{1}{\rho}\left((\rho^2\dot\varphi)^{\cdot}\right) = 0,$ $\quad \rho^2\dot\varphi = const \Rightarrow (\rho^2\dot\varphi)^{\cdot} = 0$

$\Rightarrow \bar{w} \perp \bar{e}_\varphi \Rightarrow \bar{w} \parallel \bar{e}_\rho$ ■

№1.25

1.25. При движении точки ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$, $a = \mathrm{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

$\bar{w} = a(\bar{v} \times \bar{r}), \quad a = const > 0$ $\qquad$ S – нат. параметр

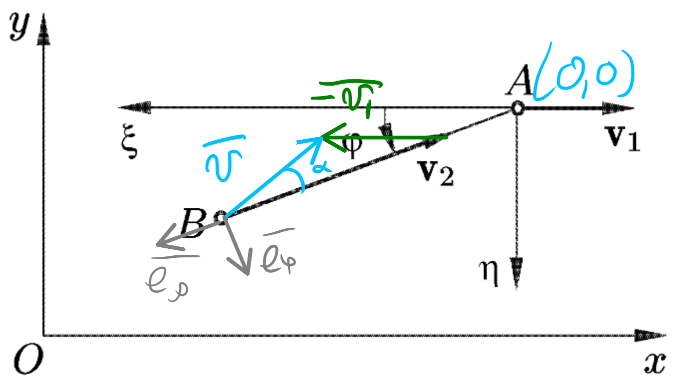
$K = \frac{|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}|}{|\dot{\bar{r}}|^3} = \frac{|\bar{v} \cdot \bar{w}|}{|\bar{v}|^3} = \frac{|\bar{v} \cdot a(\bar{v} \times \bar{r})|}{|\bar{v}|^3}$

$\dddot{\bar{r}} = a \cdot (\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})$

$\rho = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{v} \cdot a(\bar{v} \times \bar{r})|}$

№1.31

1.31. В задаче преследования убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по AB. Найти уравнение траектории сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если $\varphi_0 \neq 0$. (См. рисунок к задаче 1.29.)



К задаче 1.29

$\bar v_1,\ \bar v_2 = v_2(\bar r_A - \bar r_B)$

$AB = \bar r(\varphi) = ?$

$$\begin{cases} v_\rho = \dfrac{d\rho}{dt} = -v_2 + v_1\cos\varphi \\ v_\varphi = \dfrac{d\varphi}{dt} = \rho\dfrac{d\varphi}{dt} = v_1\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{v_1\cos\varphi - v_2}{v_1\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{v_1\cos\varphi - v_2}{v_1\sin\varphi}\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{ctg}\,\varphi\,d\varphi - \frac{v_2}{v_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \quad *$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{ctg}\,\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \ln\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \overset{t=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{=} \int_{\mathrm{tg}\frac{\varphi_0}{2}}\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \int_{\mathrm{tg}\frac{\varphi_0}{2}}^{\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}\frac{dt}{t} = \ln\frac{\mathrm{tg}\,\varphi/2}{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}$$

$$* \quad \ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} - \frac{v_2}{v_1}\ln\frac{\mathrm{tg}\,\varphi/2}{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\cdot\left(\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}{\mathrm{tg}\,\varphi/2}\right)^{v_2/v_1}$$

T 1

T1. Используя сферические координаты (r, λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара (Рис. 1). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.

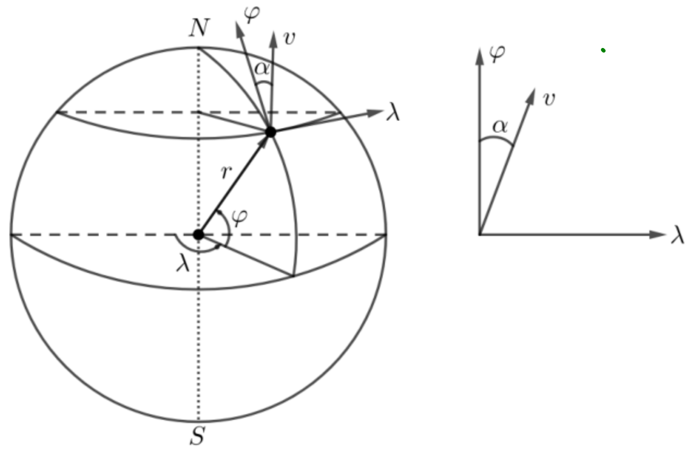


Рис. 1: К задаче Т1

$\bar r = \begin{vmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{vmatrix}$ $v = const$ $\angle(\bar e_\varphi, \bar v) = \alpha$ ур-е кривой - ?

w_k - ?, $k = \{r, \lambda, \varphi\}$

w - ?, ρ - ?

$v_i = w_i r_i$

$v_\varphi = v\cos\alpha = \frac{d\varphi}{dt} r$

$v_\lambda = v\sin\alpha = \frac{d\lambda}{dt} r\cos\varphi$ $\Rightarrow \begin{cases} \dot\varphi = \frac{v\cos\alpha}{r} \\ \dot\lambda = \frac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi} \end{cases} \Rightarrow \varphi_{,\lambda} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\varphi$

$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} d\lambda$ $\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})} \underset{u=\varphi+\frac{\pi}{2}}{=} \int_{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sin u} =$

$\underset{t=tg(u/2)}{=} \int_{tg(\varphi_0/2+\frac{\pi}{4})}^{tg(\varphi/2+\frac{\pi}{4})}\frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{tg(\varphi/2+\frac{\pi}{4})}{tg(\varphi_0/2+\frac{\pi}{4})}\right) = ctg\,\alpha(\lambda-\lambda_0)$

$tg(\varphi/2+\frac{\pi}{4}) = tg(\varphi_0/2+\frac{\pi}{4})\, e^{ctg\alpha\cdot(\lambda-\lambda_0)}$

ур-е кривой

из геометрии: $H_r = 1$ $H_\varphi = r$ $H_\lambda = r\cos\varphi$

$v_r = \dot r$ $v_\varphi = r\dot\varphi$ $v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda$ — ОНБ

$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot\lambda^2$

$w_r = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot r} - (v^2/2)_{,r} = \underset{0}{\ddot r} - r\dot\varphi^2 - r\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2 -$

$$= -r\frac{v^2\cos^2\alpha}{r^2} - r\frac{v^2\sin^2\alpha}{r^2\cos^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi = -\frac{v^2}{r}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\dot{\lambda}^2\cos\varphi\sin\varphi\right) =$$

$$= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\lambda}^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{v^2}{r^2}r\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= \frac{v^2\sin^2\alpha\,tg\varphi}{r}$$

$$w_\lambda = \frac{r^2}{r\cos\varphi}\left(\ddot{\lambda}\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\lambda}\right) = r\left(\ddot{\lambda}\cos\varphi - 2\sin\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\lambda}\right) =$$

$$= \cancel{r}\left(\cancel{\cos\varphi}\frac{v\sin\alpha}{\cancel{r}}\cdot\frac{v\cos\alpha}{r\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi - 2\sin\varphi\frac{v\cos\alpha}{\cancel{r}}\frac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2r}v^2 tg\varphi\sin 2\alpha - \frac{1}{r}v^2 tg\varphi\sin 2\alpha = -\frac{v^2 tg\varphi\sin 2\alpha}{2r}$$

$$w^2 = w_r^2 + w_\varphi^2 + w_\lambda^2$$

$$w = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} + \frac{v^4\sin^4\alpha\,tg^2\varphi}{r^2} + \frac{v^4 tg^2\varphi\sin^2 2\alpha}{4r^2}} =$$

$$= \frac{v^2}{r}\sqrt{1 + tg^2\varphi\sin^2\alpha}$$

$$v = const \Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = v^2\cdot\frac{r}{v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi\sin^2\alpha}}$$

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{1+tg^2\varphi\sin^2\alpha}}$$ — радиус кривизны