МФТИ

Л. Н. Знаменская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Л. Н. Знаменская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2024

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
З72

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей и прикладной математики Сибирского федерального университета *С. Г. Мысливец*

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета) *А. С. Бортаковский*

Знаменская, Людмила Николаевна

З72 Математический анализ. Предел. Непрерывность. Дифференциальное исчисление. Неопределенный интеграл : учеб. пособие / Л. Н. Знаменская ; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ, Физтех, 2024. – 296 с.

ISBN 978-5-7417-0838-5

Учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором для студентов физтех-школы радиотехники и компьютерных технологий Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) по дисциплине «Введение в математический анализ». Содержит изложение фундаментальных понятий анализа: предел последовательности и предел функции в точке, непрерывность функции в точке, производная, дифференциал, неопределенный интеграл. Приведено большое количество примеров и контрпримеров, позволяющих наиболее полно понять изложенный материал.

Предназначено для студентов математических, физических и инженерных специальностей.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (*национального исследовательского университета*)

ISBN 978-5-7417-0838-5

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие написано на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читала в рамках дисциплины «Введение в математический анализ» для студентов физтех-школы радиотехники и компьютерных технологий Московского физико-технического института (национального исследовательского университета).

Курс математического анализа очень объемный и читается в течение четырех семестров. Логика изложения материала, большое количество определений и утверждений очень непривычны студентам, которые в школе не обучались в математических классах. Поэтому одной из главных целей этого учебного пособия является формирование у студентов системного подхода к изучению математических дисциплин и, в частности, математического анализа.

Для этого в пособии приводятся не только словесные формулировки, но и дается их формализация с помощью символов, что делает определения и утверждения более компактными и обозримыми. Это приучает студентов и в других математических дисциплинах формализовать утверждения, отличать условия от следствий, четко понимать достаточность, необходимость тех или иных условий, формулировать отрицание как в формулировках определений, так и отрицание следствий в утверждениях, поскольку одним из широко применяемых методов доказательства является метод доказательства от противного.

Автор отдает себе отчет в том, что по математическому анализу написано большое количество учебников (см., например, [**1**], [**4**] — [**6**], [**9**] — [**12**], [**14**], [**15**]). Поэтому, как правило, рекомендовала студентам для изучения ряд известных учебников. Однако они отличаются различными подходами к изложению тех или иных тем.

Студентам приходится делать довольно сложную аналитическую работу при изучении дисциплины по нескольким учебникам.

Такой процесс очень полезен для образования студентов-математиков, однако для студентов, специализирующихся в области прикладных математики и физики, также для студентов, обучающихся по инженерно-техническим специальностям, это, несомненно, усложняет процесс обучения.

По этим причинам и возникла необходимость издания учебного пособия, которое в полной мере соответствовало бы стилю изложения и содержанию курса автора.

Введение

0.1. Символика. Всюду в тексте прописными латинскими буквами A, B, C, …, Z обозначены множества, а строчными латинскими буквами a, b, c, …, z — элементы множеств. Математические высказывания обозначаются готическими буквами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, …, $\mathfrak{Z}$. Используются следующие сокращения для математических высказываний:

$a \in A$	a принадлежит множеству A;
$a \notin A$	a не принадлежит множеству A;
$A \cup B$	объединение множеств A и B;
$A \cap B$	пересечение множеств A и B;
$A \setminus B$	разность множеств A и B;
$A \subset B$	A является подмножеством B;
$\forall$	квантор всеобщности; «для любого»;
$\exists$	квантор существования; «существует»;
$\Longrightarrow$	импликация; «следует», «тогда», «то»;
$\Longleftrightarrow$	эквивалентность; «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда»;
$\vee$	дизъюнкция; «или»;
$\&$	конъюнкция; «и»;
$\neg$	отрицание; «не»;
$\longmapsto$	«выполняется»;
$\overset{\mathrm{def}}{=}$	«по определению»;
$:$	«такой, что…».

Общепринятыми являются обозначения числовых множеств:
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Замечание 0.1. Для числовых множеств справедливы следующие включения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ и т. д.

В некоторых случаях элементы числовых множеств будем обозначать греческими буквами: α, β, γ, $\ldots$, ω.

Конец доказательства в тексте будем отмечать значком $\triangle$.

0.2. Примеры использования символики. Примеры, приведенные ниже, показывают, как используется символика для сокращения записи математических высказываний.

Пример 0.1. Множество A является подмножеством множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B:

$$\big[A \subset B\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \big[(\forall x\colon\ x \in A) \longmapsto (x \in B)\big]. \tag{0.1}$$

Пример 0.2. Множества A и B называются *равными*, если A является подмножеством B и B является подмножеством A:

$$\big[A = B\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \big[A \subset B\big] \,\&\, \big[B \subset A\big].$$

Определение равенства множеств можно сформулировать и по-другому, применяя (0.1): множества A и B называются *равными*, если любой элемент множества A является элементом множества B, и наоборот. Это высказывание можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\big[A = B\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad &\big[(\forall x\colon\ x \in A) \longmapsto (x \in B)\big] \,\&\\ &\&\, \big[(\forall x\colon\ x \in B) \longmapsto (x \in A)\big].\end{aligned} \tag{0.2}$$

Выражение (0.2) используют для доказательства теоретико-множественных равенств.

Пример 0.3. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого есть элемент множества A или элемент множества B:

$$A \cup B = \big\{\, x\colon\ \big[x \in A\big] \vee \big[x \in B\big] \,\big\}$$

или

$$\big[x \in (A \cup B)\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \big[x \in A\big] \vee \big[x \in B\big].$$

Пример 0.4. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого есть элемент множества A и элемент множества B:

$$A \cap B = \left\{ x \colon \left[x \in A\right] \,\&\, \left[x \in B\right] \right\}$$

или

$$\left[x \in (A \cap B)\right] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \left[x \in A\right] \,\&\, \left[x \in B\right].$$

Пример 0.5. *Разностью* множеств A и B называется такое множество $A \setminus B$, каждый элемент которого есть элемент множества A и не является элементом множества B:

$$A \setminus B = \left\{ x \colon \left[x \in A\right] \,\&\, \left[x \notin B\right] \right\}$$

или

$$\left[x \in (A \setminus B)\right] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \left[x \in A\right] \,\&\, \left[x \notin B\right].$$

Приведем примеры, показывающие, как формулируются отрицания высказываний, содержащих кванторы.

Пример 0.6. Выпишем отрицание следующего высказывания: $\mathfrak{A} = \left[A \subset B\right]$, которое определяется выражением (0.1). Формулировка высказывания: существует элемент x множества A такой, что x не принадлежит B. Запишем высказывание $\neg\mathfrak{A} = \left[A \not\subset B\right]$ с помощью символов:

$$\neg\mathfrak{A} = \left[\exists\, x \in A \colon\, x \notin B\right].$$

Пример 0.7. Для всех элементов x множества X выполняется неравенство $|x| < \alpha$. Это высказывание запишем следующим образом:

$$\mathfrak{B} = \left[\forall x \in X \longmapsto |x| < \alpha\right].$$

Отрицанием высказывания $\mathfrak{B}$ является высказывание: существует элемент x множества X такой, что $|x| \geqslant \alpha$:

$$\neg\mathfrak{B} = \left[\exists\, x \in X \colon\, |x| \geqslant \alpha\right].$$

Пример 0.8. Существует положительное число α такое, что для любого элемента x множества X выполняется неравенство $|x| < \alpha$:

$$\mathfrak{C} = \left[\exists\, \alpha > 0 \colon\, \forall x \in X \longmapsto |x| < \alpha\right].$$

Отрицание этого высказывания: для любого положительного числа α найдется элемент x_α множества X такой, что $|x_\alpha| \geqslant \alpha$:

$$\neg\mathfrak{C} = \bigl[\forall \alpha > 0 \;\exists\, x_\alpha \in X\colon\; |x_\alpha| \geqslant \alpha\bigr].$$

Индекс α у элемента x_α множества X означает, что для каждого числа α найдется свой элемент множества X, т. е. этот элемент зависит от α.

ГЛАВА 1

Теория действительного числа

§ 1. Рациональные числа, их свойства

Предполагается, что понятие рационального числа, сложение и умножение рациональных чисел, а также основные свойства рациональных чисел известны из курса средней школы. Тем не менее кратко систематизируем все сведения о рациональных числах.

Определение 1.1. *Рациональным числом* называется дробь p/q, где p — целое число, а q — натуральное.

1.1. Сравнение рациональных чисел. Пусть[1.1] $a = p/q$ и $b = r/s$, тогда можно определить равенство $a = b$ и неравенство $a > b$ двух рациональных чисел a и b следующим образом: $a = b$, если $ps = qr$; аналогично, $a > b$, если $ps > qr$, здесь ps, $qr \in \mathbb{Z}$.

Упорядоченность множества $\mathbb{Q}$. *Для любых двух рациональных чисел имеет место одно и только одно из соотношений: «$a = b$», «$a > b$», «$b > a$».*

Для введенных правил сравнения рациональных чисел справедливо свойство.

1°. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. (*Транзитивность знаков «$=$» и «$>$».*)

Замечание 1.1. Если a — фиксированное число, то все множество $\mathbb{Q}$ распадается на два множества A_* и A^*, каждое из которых содержит бесконечно много элементов. Множество A_* содержит все те числа b, для которых выполнено неравенство $a > b$, а множество A^* содержит все числа c, для которых верно $c > a$. Само

[1.1] Всюду в этой главе рациональные числа будем обозначать латинскими буквами, а действительные числа — греческими.

число a может быть отнесено как к множеству A_*, в этом случае множество A_* имеет наибольшее число, так и ко множеству A^* — множество A^* имеет наименьшее число. В обоих случаях множество $\mathbb{Q}$ есть объединение двух множеств A_* и A^* таких, что каждое число множества A^* больше каждого числа множества A_*.

1.2. Сложение рациональных чисел. *Суммой* двух рациональных чисел $a = p/q$ и $b = r/s$ назовем такое рациональное число $c = a + b$, что $c = (ps + rq)/(qs)$. Операция нахождения суммы называется *сложением*. Введенная операция обладает следующими свойствами:

2°. $a + b = b + a$. (*Коммутативность сложения.*)

3°. $(a + b) + c = a + (b + c)$. (*Ассоциативность сложения.*)

4°. Существует число 0 такое, что $a + 0 = a$. (*Особая роль нуля.*)

5°. Для любого числа a существует *противоположное* ему число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$.

Замечание 1.2. Разность рациональных чисел определяется с помощью понятия *суммы*. *Разностью* рациональных чисел a и b называется такое рациональное число $c = a - b$, что $a = b + c$. Операция нахождения разности называется *вычитанием*.

1.3. Умножение рациональных чисел. *Произведением* рациональных чисел $a = p/q$ и $b = r/s$ назовем такое рациональное число $c = a \cdot b$, что $c = (p \cdot r)/(q \cdot s)$. Операция нахождения произведения называется *умножением*. Перечислим основные свойства, которыми обладает введенная операция:

6°. $a \cdot b = b \cdot a$. (*Коммутативность умножения.*)

7°. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (*Ассоциативность умножения.*)

8°. Существует число 1 такое, что $a \cdot 1 = a$. (*Особая роль единицы.*)

9°. Для любого числа a, отличного от 0, существует *обратное* ему число $1/a$ такое, что $a \cdot 1/a = 1$.

Замечание 1.3. Частное рациональных чисел определяется с помощью понятия *произведения*. *Частным* рациональных чисел a и $b \neq 0$ называется такое рациональное число $c = a/b$, что $a = b \cdot c$. Операция нахождения частного называется *делением*.

1.4. Другие свойства. Сформулируем свойства, которые связывают две основные операции (сложение и умножение) и правило сравнения рациональных чисел:

10°. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. (*Дистрибутивность сложения относительно умножения.*)

11°. Если $a > b$, то для произвольного числа c справедливо неравенство $a+c > b+c$.

12°. Если $a > b$, то для произвольного числа $c > 0$ справедливо неравенство $a\cdot c > b\cdot c$.

13°. Каково бы ни было число $a > 0$, можно найти натуральное число n такое, что $n > a$. (*Аксиома Архимеда.*)

Свойства **1°–13°** позволяют доказать любые другие, не входящие в этот список, свойства арифметических операций и сравнения рациональных чисел. В частности, можно доказать следующее важное свойство множества рациональных чисел.

Плотность множества $\mathbb{Q}$. Если $a > b$, то найдется число c такое, что $a > c > b$.

1.5. Геометрическая интерпретация рациональных чисел. Упорядоченность множества рациональных чисел (пункт 1.1) напоминает взаимное расположение точек прямой линии $\mathscr{L}$, на которой отмечена начальная (нулевая) точка O, выбран масштабный отрезок OE, длина которого равна единице, и положительное направление — от O к E. Такую прямую линию $\mathscr{L}$ называют *числовой прямой*.

При помощи масштабного отрезка OE каждому рациональному числу $a > 0$ можно поставить в соответствие такую точку $A \in \mathscr{L}$, что полученный отрезок OA имеет длину, равную a. Этот факт запишем следующим образом: $|OA| = a$ [1.2].

Для рационального числа $a < 0$ соответствующая точка A числовой прямой лежит слева от точки O.

Если двум числам a и b соответствуют точки A и B числовой прямой $\mathscr{L}$ (определенные указанным выше способом), при этом $a > b$, то точка A лежит на числовой прямой правее точки B.

[1.2] Из курса средней школы известно, как построить такой отрезок OQ, что $|OQ| = 1/q$ (теорема Фалеса). После этого легко построить отрезок OA такой, что $|OA| = p|OQ| = p/q = a$, здесь p, $q \in \mathbb{N}$.

1.6. «Непрерывность» числовой прямой. Обратим внимание на такой важный факт, что на числовой прямой $\mathscr{L}$ есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу.

Если точка $A \in \mathscr{L}$ соответствует рациональному числу $a = p/q$, $a > 0$, то длина отрезка OA *соизмерима* с длиной отрезка OE, а именно, существует отрезок OQ, длина которого есть общая мера длин отрезков OA и OE, т. е. $|OA| = p|OQ|$ и $|OE| = q|OQ|$.

В греческой античной математике знали и доказали тот факт, что существуют отрезки, длины которых несоизмеримы. Например, диагональ квадрата и его сторона. Если нанести такой отрезок от точки O на прямую $\mathscr{L}$, то получим конечную точку C, которой не соответствует никакое рациональное число, и таких точек на $\mathscr{L}$ бесконечно много.

Этот факт показывает, что множество рациональных чисел можно и нужно расширить таким образом, чтобы можно было установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого расширенного числового множества и точками числовой прямой.

§ 2. Сечения и иррациональные числа

2.1. Определение сечения множества $\mathbb{Q}$. При расширении множества рациональных чисел будем использовать понятие *сечения* множества рациональных чисел, введенное Р. Дедекиндом. В замечании 1.1 мы уже использовали эту идею. Сейчас сформулируем строгое определение.

Определение 1.2. Назовем *сечением множества рациональных чисел* разбиение этого множества на два непустых множества A_* и A^*, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $\mathbb{Q} = A_* \cup A^*$;
b) $A_* \cap A^* = \varnothing$;
c) для всех чисел $x \in A_*$ и $y \in A^*$ выполняется $y > x$.

Множество A_* называется *нижним классом* сечения, а множество A^* называется *верхним классом* сечения.

Обозначение. Сечение обозначим (A_*, A^*).

2.2. Примеры сечений. Как уже отмечалось в замечании 1.1, любое рациональное число порождает два существенно не отличающихся друг от друга сечения: либо в нижнем классе сечения есть наибольшее число, либо в верхнем классе сечения есть наименьшее число.

Пример 1.1. Пусть сечение (A_*, A^*) определено множествами

$$A_* = \{\, a \in \mathbb{Q}\colon\ 1/10^3 > a \,\}, \quad A^* = \{a \in \mathbb{Q}\colon\ a \geqslant 1/10^3 \,\}.$$

Верхний класс сечения имеет наименьшее число $a^* = 1/10^3$, а нижний класс сечения не имеет наибольшего числа.

Пусть сечение (A_*, A^*) таково, что

$$A_* = \{\, a \in \mathbb{Q}\colon\ 1/10^3 \geqslant a \,\}, \quad A^* = \{a \in \mathbb{Q}\colon\ a > 1/10^3 \,\}.$$

Нижний класс сечения имеет наибольшее число $a_* = 1/10^3$, а верхний класс сечения не имеет наименьшего числа.

В этом случае будем говорить, что *сечение* (A_*, A^*) *производится рациональным числом* $1/10^3$.

Рассмотрим пример сечения, существенно отличающегося от приведенных в предыдущем примере сечений.

Пример 1.2. Пусть b и c — целые положительные числа и

$$b^2 < c < (b+1)^2, \tag{1.1}$$

т. е. c не является квадратом целого числа. Положим

$$A_* = \Big\{\, a \in \mathbb{Q}\colon\ \big[a \leqslant 0\big] \vee \big[\,[a > 0]\,\&\,[a^2 \leqslant c]\,\big] \,\Big\},$$
$$A^* = \Big\{\, a \in \mathbb{Q}\colon\ \big[a > 0\big]\ \&\ \big[a^2 > c\big] \,\Big\}.$$

Очевидно, что разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких множества A_* и A^* является сечением, для него выполнены все условия определения 1.2[1.3].

Предложение. *Сечение* (A_*, A^*)*, определяемое в примере* 1.2*, не производится никаким рациональным числом. Нижний класс* A_* *сечения не имеет наибольшего числа, а верхний класс* A^* *сечения не имеет наименьшего числа.*

[1.3]Этот пример и дальнейшие доказательства, связанные с указнным сечением, принадлежат Р. Дедекинду (см [**3**])).

Доказательство. I. *Докажем, что нет никакого рационального числа, квадрат которого равен c.*

Будем доказывать методом от противного: пусть существует рациональное число $r = p/q$ такое, что

$$p^2 - cq^2 = 0. \tag{1.2}$$

Здесь p и q — целые положительные числа, q — наименьшее число, удовлетворяющее равенству (1.2).

Число p не является кратным q, ибо, если $p = kq$, то $c = k^2$. Это противоречит условию, что c не является квадратом целого числа.

Из (1.1) и (1.2) следует, что $bq < p < (b+1)q$. Положим $q_1 = p - bq$, $p_1 = cq - bp$. Число q_1 — целое положительное число и $q > q_1$. Число p_1 также является целым положительным числом, поскольку $p_1 q = cq^2 - bpq = p(p - bq) > 0$. Но $p_1^2 - cq_1^2 = (b^2 - c)(p^2 - cq^2) = 0$.

Таким образом, получили противоречие с допущением относительно числа q — наименьшее число, удовлетворяющее равенству (1.2).

Для всякого положительного рационального числа a выполняется одно из неравенств: $a^2 > c$ либо $c > a^2$.

II. *Докажем, что множество A_* не имеет наибольшего числа, а множество A^* не имеет наименьшего числа.*

Введем рациональное число y:

$$y = \frac{x(x^2 + 3c)}{3x^2 + c}, \quad y - x = \frac{2x(c - x^2)}{3x^2 + c}, \quad y^2 - c = \frac{(x^2 - c)^3}{(3x^2 + c)^2}.$$

Для любого числа $x > 0$, принадлежащего множеству A_*, т. е. $c > x^2$, выполняется $y > x$ и $c > y^2$. Для отрицательных чисел, принадлежащих множеству A_*, любое положительное число, принадлежащее A_*, является наибольшим. Поэтому доказано, что для любого числа x множества A_* найдется число y этого множества такое, что $y > x$, т. е. это множество не имеет наибольшего числа.

Аналогично, для любого числа $x > 0$ множества A^*, т. е. $x^2 > c$, найдется число $y < x$ такое, что $y^2 > c$. Тем самым доказано, что множество A^* не имеет наименьшего числа. $\triangle$

Предложение. *Не может существовать сечение (A_*, A^*), для которого одновременно нижний класс A_* имеет наибольшее число, а верхний класс A^* имеет наименьшее число.*

Доказательство. Предположим, что такое сечение существует и $a_* \in A_*$ — наибольшее число множества A_*, а $a^* \in A^*$ — наименьшее число множества A^*. В силу пункта **c** определения 1.2 выполняется неравенство: $a^* > a_*$.

Воспользуемся плотностью множества $\mathbb{Q}$: существует рациональное число c такое, что $a^* > c > a_*$. Число c не может принадлежать множеству A_* (в нем число a_* — наибольшее) и не может принадлежать множеству A^* (в нем a^* — наименьшее число). Получили противоречие с пунктом **a** определения 1.2. $\triangle$

2.3. Иррациональные числа. Сечения (A_*, A^*) множества рациональных чисел могут быть только трех видов.

- **A.** В нижнем классе A_* нет наибольшего числа, а в верхнем классе A^* есть наименьшее число $a \in \mathbb{Q}$.
- **B.** В нижнем классе A_* есть наибольшее число $a \in \mathbb{Q}$, а в верхнем классе A^* нет наименьшего числа.
- **C.** В нижнем классе A_* нет наибольшего числа и в верхнем классе A^* нет наименьшего числа.

В первых двух случаях сечение осуществляется рациональным числом a. По сути, можно сказать, что эти сечения определяют рациональное число a. Для определенности будем говорить, что сечение вида **A** определяет рациональное число a. Сечения вида **B** не рассматриваются.

Сечение вида **C** не может быть произведено никаким рациональным числом, т. е. оно не определяет никакого рационального числа. Введем новый объект — иррациональное число.

Определение 1.3. *Иррациональным числом* α назовем сечение (A_*, A^*) вида **C**.

Обозначение. $\alpha = (A_*, A^*)$. Множество иррациональных чисел обозначают $\mathbb{J}$.

Это иррациональное число α есть недостающее «пограничное» число в сечении (A_*, A^*) вида **C**.

Первое сечение в примере 1.1 определяет рациональное число $1/10^3$. В примере 1.2 сечение определяет иррациональное число $\sqrt{c}$; хотя этот символ пока строго не определен.

Определение 1.4. *Действительным числом* назовем любое сечение вида **A** или **C**.

Обозначение. $\alpha = (A_*, A^*)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$.

§ 3. Действительные числа. Упорядоченность, плотность и непрерывность

3.1. Сравнение действительных чисел. Определим, что означает равенство двух действительных чисел $\alpha = (A_*, A^*)$ и $\beta = (B_*, B^*)$.

Сначала заметим, что сечение (A_*, A^*) вполне определено, если мы знаем один из двух классов, например нижний — A_*. Важным является тот факт, что мы рассматриваем сечения вида **A** и не рассматриваем сечения вида **B**. Нижний класс не имеет наибольшего числа. Это соображение и положим в основу определения равенства двух действительных чисел.

Определение 1.5. Два действительных числа $\alpha = (A_*, A^*)$ и $\beta = (B_*, B^*)$ называются *равными*, если равны их множества[1.4] A_* и B_*:

$$\big[\alpha = \beta\big] \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \big[A_* = B_*\big].$$

Определение 1.6. Действительные числа $\alpha = (A_*, A^*)$ и $\beta = (B_*, B^*)$ *не равны*, если не равны их множества A_* и B_*:

$$\big[\alpha \neq \beta\big] \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \big[A_* \neq B_*\big].$$

Предложение. *Пусть два действительных числа $\alpha = (A_*, A^*)$ и $\beta = (B_*, B^*)$ не равны. Тогда возможны два случая*[1.5]: $A_* \subset B_*$ *или* $B_* \subset A_*$.

Доказательство. От противного: $A_* \not\subset B_*$ и $B_* \not\subset A_*$. Оба эти высказывания означают (см. пример 0.6), что существует рациональное число $a \in A_*$ такое, что $a \notin B_*$, т. е. $a \in B^*$ (см. свойство **a)** определения 1.2); и существует рациональное число $b \in B_*$ такое, что $b \notin A_*$, т. е. $b \in A^*$.

Равенство $a = b$ не может быть, поскольку $A_* \cap A^* = \varnothing$ (свойство **b)** определения 1.2).

[1.4] Равенство множеств определено в примере 0.2 с помощью, например, выражения (0.2).

[1.5] Определение $A \subset B$ дано в примере 0.1.

Для чисел $a \in A_*$ и $b \in A^*$ (свойство **c)** определения 1.2) выполняется $b > a$. С другой стороны, $b \in B_*$ и $a \in B^*$, следовательно $a > b$. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение было неверно. $\triangle$

Определение 1.7. Будем говорить, что действительное число $\alpha = (A_*, A^*)$ *больше* действительного числа $\beta = (B_*, B^*)$, если множество A_* целиком содержит в себе множество B_*, не совпадая с ним:

$$\big[\alpha > \beta\big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\big[B_* \subset A_*\big] \,\&\, \big[B_* \neq A_*\big]\Big].$$

Из определений 1.5 и 1.7, а также доказанного предложения вытекает следующее утверждение.

Упорядоченность множества $\mathbb{R}$. *Для любых двух действительных чисел α и β имеет место одно и только одно из соотношений: «$\alpha = \beta$», «$\alpha > \beta$», «$\beta > \alpha$».*

Для введенных правил сравнения действительных чисел справедливо свойство.

1°. Если $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$. (*Транзитивность знаков «=» и «>».*)

Доказательство. *Докажем транзитивность знака «>».* Пусть $\alpha = (A_*, A^*)$, $\beta = (B_*, B^*)$ и $\gamma = (C_*, C^*)$. Поскольку $C_* \subset B_*$, а $B_* \subset A_*$; $C_* \neq B_*$ и $B_* \neq A_*$, то $C_* \subset A_*$ и $C_* \neq A_*$. $\triangle$

3.2. Основные леммы. Леммы (вспомогательные утверждения), как правило, являются «инструментами» доказательства более важных и основополагающих утверждений теории — теорем. Для того чтобы сделать более прозрачным доказательство теоремы, из него выделяют громоздкие части, они формулируются в виде утверждений — лемм, на которые делают ссылки в тексте. В некоторых случаях сами леммы имеют важное, самостоятельное значение для теории.

Лемма 1.1. *Для любых двух действительных чисел α и β таких, что $\alpha > \beta$, найдется р а ц и о н а л ь н о е число c такое, что $\alpha > c > \beta$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (A_*, A^*)$ и $\beta = (B_*, B^*)$. Поскольку $\alpha > \beta$, то $B_* \subset A_*$ и $B_* \neq A_*$. Существует рациональное число такое, что $c \in A_*$ и $c \notin B_*$. Следовательно, c лежит в верхнем классе B^*. Для этого числа выполняются неравенства: $\alpha > c \geqslant \beta$. Равенство может иметь место, если β — рациональное число.

Нижний класс A_* не имеет наибольшего числа, поэтому, чтобы избежать равенства в случае рационального числа β, увеличим число c. Тем самым получаем требуемые неравенства. △

Похожее свойство для рациональных чисел мы назвали плотностью множества рациональных чисел. Но утверждение леммы 1.1 более тонкое. Утверждается, что для любых действительных чисел найдется не просто действительное число, а именно рациональное число. Таким образом, имеет место плотность множества рациональных чисел во множестве действительных.

Замечание 1.4. Следует отметить, что рациональных чисел c, удовлетворяющих неравенствам $\alpha > c > \beta$, найдется бесконечно много. Достаточно рассмотреть новое неравенство $\alpha > c$ и для него искать промежуточное рациональное число.

Лемма 1.2. *Пусть заданы два действительных числа α и β. Если для любого наперед заданного рационального положительного числа e найдутся два таких рациональных числа a и b, $a > b$ и $a - b < e$, что $a \geqslant \alpha \geqslant b$ и $a \geqslant \beta \geqslant b$, то числа α и β равны.*

Доказательство. Будем доказывать методом от противного: пусть, например, $\alpha > \beta$. Тогда, в силу леммы 1.1 и замечания 1.4, найдутся рациональные числа c и d такие, что $\alpha > c > d > \beta$. Поскольку числа α и β содержатся между числами a и b, то выполняются следующие неравенства: $a > c > d > b$. Из этих неравенств следует $a - b > c - d > 0$. Очевидно, что разница $a - b$, вопреки условиям леммы, не может быть меньше числа e, если в качестве числа e возьмем число $c - d > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. △

3.3. Непрерывность множества действительных чисел. Отсутствие «пограничных» чисел в сечениях вида **C** послужило основанием ввести иррациональные числа и определить множество действительных чисел. Естественно встает вопрос: если на множестве действительных чисел ввести понятие сечения, то появятся ли сечения, в которых также будут отсутствовать «пограничные» числа? Ответу на заданный вопрос и посвящен этот раздел параграфа.

Определение 1.8. Назовем *сечением множества действительных чисел* разбиение этого множества на два непустых множества $\mathscr{A}_*$ и $\mathscr{A}^*$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $\mathbb{R} = \mathscr{A}_* \cup \mathscr{A}^*$;
b) $\mathscr{A}_* \cap \mathscr{A}^* = \varnothing$;
c) для всех чисел $x \in \mathscr{A}_*$ и $y \in \mathscr{A}^*$ выполняется $y > x$.

Множество $\mathscr{A}_*$ называется *нижним классом* сечения, а множество $\mathscr{A}^*$ называется *верхним классом* сечения.

Обозначение. Сечение множества действительных чисел обозначим $(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}^*)$.

Теорема 1.3. (Дедекинд.) *Для произвольного сечения множества действительных чисел $(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}^*)$ найдется действительное число α, которое будет либо наибольшим числом в нижнем классе $\mathscr{A}_*$, либо наименьшим числом в верхнем классе $\mathscr{A}^*$.*

Доказательство. Обозначим A_* — множество рациональных чисел, принадлежащих $\mathscr{A}_*$, и A^* — множество рациональных чисел, принадлежащих $\mathscr{A}^*$. Множества A_* и A^* образуют сечение (A_*, A^*) множества рациональных чисел. Это легко доказать, используя определения 1.8.

Полученное сечение (A_*, A^*) определяет некоторое действительное число α, которое принадлежит либо множеству $\mathscr{A}_*$, либо множеству $\mathscr{A}^*$, согласно пункту **a)** определения 1.8 сечения множества действительных чисел и не может одновременно принадлежать обоим множествам (пункт **b)** определения 1.8).

Если $\alpha \in \mathscr{A}_*$, то α — наибольшее число.

Докажем от противного: пусть существует действительное число $\beta \in \mathscr{A}_*$ такое, что $\beta > \alpha$. Тогда по лемме 1.1 найдется рациональное число $c \in \mathscr{A}_*$, которое также принадлежит A_*, удовлетворяющее неравенствам $\beta > c > \alpha$. Итак, найдено рациональное число c, лежащее в нижнем классе сечения (A_*, A^*), определяющего число α, и $c > \alpha$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Если $\alpha \in \mathscr{A}^*$, то α — наименьшее число.

Это утверждение также будем доказывать методом от противного: пусть существует действительное число $\beta \in \mathscr{A}_*$ такое, что $\alpha > \beta$. Найдется рациональное число $c \in \mathscr{A}^*$, принадлежащее также A^* и удовлетворяющее неравенствам $\alpha > c > \beta$ (лемма 1.1). Найденное рациональное число c лежит в верхнем классе сечения (A_*, A^*), определяющего число α, и $\alpha > c$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. $\triangle$

Предложение. *Не может существовать сечение множества действительных чисел* $(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}^*)$, *для которого нижний класс* $\mathscr{A}_*$ *имеет наибольшее число, а верхний класс* $\mathscr{A}^*$ *имеет наименьшее число.*

Доказательство предложения подобно доказательству аналогичного предложения для сечений множества рациональных чисел, при этом используется лемма 1.1 и определение 1.8.

Теорема Дедекинда описывает важное свойство множества действительных чисел, которое называют *непрерывностью* или *полнотой*. Именно это свойство отличает множество действительных чисел от множества рациональных чисел — среди сечений множества рациональных чисел существовали сечения вида **C**, а среди сечений множества действительных чисел таких сечений нет.

§ 4. Числовые множества и их грани

В этом параграфе докажем важные свойства подмножеств множества действительных чисел, которые вытекают из свойства непрерывности множества $\mathbb{R}$.

В дальнейшем будем предполагать, что множество $X \subset \mathbb{R}$ не является пустым.

4.1. Ограниченные множества. Приведем несколько определений.

Определение 1.9. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число α, что для всех чисел χ множества X выполняется неравенство $\alpha \geqslant \chi$. Это число α называется *верхней гранью множества* X.

С помощью символов это определение и его отрицание можно записать более кратко:

$$\big[X \text{ ограниченное сверху}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\colon\ \forall \chi \in X \longmapsto \alpha \geqslant \chi\big];$$

$$\big[X \text{ неограниченное сверху}\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists\, \chi_\alpha \in X\colon\ \chi_\alpha > \alpha\big]. \quad (1.3)$$

Если множество $X \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху, то для обозначения его верхней грани введем символ $+\infty$. Каково бы ни было действительное число $\chi \in X$, для него выполняется неравенство $\chi < +\infty$.

Замечание 1.5. Если $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху и действительное число α — его верхняя грань, то любое действительное число $\alpha' > \alpha$ также является верхней гранью множества X. Таким образом, существует бесконечно много верхних граней ограниченного сверху множества X.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос: есть ли среди верхних граней наименьшая? Наименьшую верхнюю грань множества X назовем точной верхней гранью. Определим это понятие строго.

Определение 1.10. Число $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* $X \subset \mathbb{R}$, если

1) α_0 — верхняя грань множества X;
2) для любого действительного числа $\alpha < \alpha_0$ найдется число $\chi_\alpha \in X$ такое, что $\chi_\alpha > \alpha$.

Обозначение. $\alpha_0 = \sup X$.

В введенном символе используется сокращение от латинского слова supremum — наивысшее.

Перепишем определение 1.10 с помощью символов:

$$\big[\alpha_0 = \sup X\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall \chi \in X \longmapsto \alpha_0 \geqslant \chi\big] \,\&\, \big[\forall \alpha < \alpha_0\ \exists\, \chi_\alpha \in X\colon\ \chi_\alpha > \alpha\big].$$

Заметим, что у нас остался без ответа вопрос о существовании точной верхней грани множества.

Рассмотрим еще один класс подмножеств множества действительных чисел.

Определение 1.11. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число β, что для всех чисел χ множества X выполняется неравенство $\chi \geqslant \beta$. Число β называется *нижней гранью множества* X.

Запишем с помощью символов определение множества, ограниченного снизу, и множества, неограниченного снизу:

$$\big[X,\ \text{ограниченное снизу}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \beta \in \mathbb{R}\colon\ \forall \chi \in X \longmapsto \chi \geqslant \beta\big];$$

$$\big[X,\ \text{неограниченное снизу}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall \beta \in \mathbb{R}\ \exists\, \chi_\beta \in X\colon\ \beta > \chi_\beta\big]. \quad (1.4)$$

Если множество $X \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу, то за его нижнюю грань принимают символ $-\infty$, таким образом, для всех чисел $\chi \in X$ выполняется $\chi > -\infty$.

Замечание 1.6. Если действительное число β — нижняя грань ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$, то любое действительное число $\beta' < \beta$ есть нижняя грань X.

Среди всех нижних граней ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$ нас будет интересовать наибольшая нижняя грань.

Определение 1.12. Число $\beta_0 \in \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

1) β_0 — нижняя грань множества X;
2) для любого действительного числа $\beta > \beta_0$ найдется число $\chi_\beta \in X$ такое, что $\beta > \chi_\beta$.

Обозначение. $\beta_0 = \inf X$.

В этом символе используется сокращение от латинского слова infinum — наинизшее.

Перепишем определение 1.12 с помощью символов:

$$\left[\beta_0 = \inf X\right] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \left[\forall \chi \in X \longmapsto \chi \geqslant \beta_0\right] \& \left[\forall \beta > \beta_0\ \exists\, \chi_\beta \in X\colon\ \beta > \chi_\beta\right].$$

Предложение. *Если непустое множества $X \subset \mathbb{R}$ обладает точной верхней (нижней) гранью, то эта грань единственна.*

Доказательство. Докажем утверждение для точной верхней грани. Для нижней грани рассуждения аналогичны.

Исходим от противного: пусть $\alpha_0 = \sup X$ и $\alpha_0' = \sup X$ и пусть, например, $\alpha_0 > \alpha_0'$. По определению 1.10 точной верхней грани α_0 множества X найдется число $\chi \in X$ такое, что $\chi > \alpha_0'$. Таким образом, число α_0' не может быть точной верхней гранью множества X. $\triangle$

Определение 1.13. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Если взять определения 1.9 и 1.11, то *ограниченное* множество $X \subset \mathbb{R}$ — это множество, для которого найдутся действительные числа α и β такие, что для всех $\chi \in X$ выполняются неравенства $\beta \leqslant \chi \leqslant \alpha$. С помощью символов это записывается следующим образом:

$$\left[X \text{ ограниченное }\right] \overset{\text{def}}{=} \left[\exists\, \beta, \alpha \in \mathbb{R}\colon\ \forall \chi \in X \longmapsto \beta \leqslant \chi \leqslant \alpha\right].$$

4.2. Теорема о существовании точных граней. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1.4. *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ непустое и ограниченное сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Доказательство проведем для множества, ограниченного сверху. Для ограниченного снизу множества рассуждения аналогичные.

Множество X ограничено сверху. Рассмотрим два возможных случая.

I. *Множество X имеет наибольшее число χ_0*. Тогда для любого числа $\chi \in X$ выполняется $\chi_0 \geqslant \chi$. Число χ_0 является верхней гранью множества X. Поскольку χ_0 принадлежит множеству X, то для любой верхней грани α множества X выполняется $\alpha \geqslant \chi_0$. Таким образом, χ_0 — наименьшая из всех верхних граней, т. е. $\chi_0 = \sup X$.

II. *Множество X не имеет наибольшего числа.* Построим сечение множества действительных чисел. В качестве множества $\mathscr{A}^*$ — верхнего класса сечения — возьмем множество всех верхних граней X. Множество $\mathscr{A}^*$ не пусто, поскольку X ограничено сверху. Множество $\mathscr{A}_*$ — все остальные действительные числа, оно также не пусто, так как $X \subset \mathscr{A}_*$ и $X \neq \varnothing$.

Множества $\mathscr{A}_*$ и $\mathscr{A}^*$ действительно образуют сечение множества действительных чисел. По построению верно $\mathscr{A}_* \cup \mathscr{A}^* = \mathbb{R}$; в X нет наибольшего числа, таким образом, $\mathscr{A}_* \cap \mathscr{A}^* = \varnothing$; для всех $x \in \mathscr{A}_*$ и $y \in \mathscr{A}^*$ выполняется неравенство $y > x$, поскольку в противном случае число x будет верхней гранью, а поэтому число x должно принадлежать $\mathscr{A}^*$.

По теореме Дедекинда существует действительное число α_0, которое производит сечение $(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}^*)$, причем множество $\mathscr{A}_*$ не имеет наибольшего числа. Если бы это было не так, т. е. $\alpha_0 \in \mathscr{A}_*$, то для чисел множества X число α_0 было бы верхней гранью, а поэтому $\alpha_0 \in \mathscr{A}^*$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что в сечении $(\mathscr{A}_*, \mathscr{A}^*)$ множество $\mathscr{A}^*$ имеет наименьшее число α_0, оно и есть точная верхняя грань множества X. $\triangle$

Докажем важное следствие из теоремы 1.4. Поскольку оно будет неоднократно использоваться в дальнейшем изложении, то назовем это следствие теоремой об отделимости множеств.

Теорема 1.5. (Отделимость множеств.) *Если множества A и B непустые подмножества множества $\mathbb{R}$ и для всех чисел $\alpha \in A$ и $\beta \in B$ выполняется неравенство $\beta \geqslant \alpha$, то существуют точная верхняя грань α_0 множества A и точная нижняя грань β_0 множества B, которые удовлетворяют следующему неравенству: $\beta_0 \geqslant \alpha_0$.*

Доказательство. Существование указанных чисел α_0 и β_0 вытекает из теоремы 1.4.

Действительно, так как каждое число $\beta \in B$ является верхней гранью множества A, то это множество ограничено сверху, а поэтому оно имеет точную верхнюю грань, которую мы обозначим $\alpha_0 = \sup A$. Аналогично, любое число $\alpha \in A$ является нижней гранью множества B (множество ограничено снизу), поэтому существует точная нижняя грань множества B — число $\beta_0 = \inf B$.

Осталось доказать, что $\beta_0 = \inf B \geqslant \alpha_0 = \sup A$. Каждое число $\beta \in B$ является верхней гранью множества A, при этом число $\alpha_0 = \sup A$ — наименьшая из верхних граней, следовательно, выполняется неравенство $\beta \geqslant \alpha_0$.

Из полученного неравенства следует, что число α_0 есть нижняя грань множества B. Поскольку число $\beta_0 = \inf B$ — наибольшая из всех нижних граней, то справедливо $\beta_0 \geqslant \alpha_0$. $\triangle$

Замечание 1.7. Будем полагать по определению

$$\big[X \text{ неограниченное сверху}\big] \Longrightarrow \big[\sup X = +\infty\big];$$
$$\big[X \text{ неограниченное снизу}\big] \Longrightarrow \big[\inf X = -\infty\big].$$

Часто в математике используют утверждения, которые не являются основополагающими для теории как теоремы. Это, как правило, некоторые частные утверждения. Такие утверждения будем называть предложениями.

Предложение. *Если все числа χ непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $\alpha \geqslant \chi$, то $\alpha \geqslant \alpha_0 = \sup X$.*

Если все числа χ непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $\chi \geqslant \beta$, то $\beta_0 = \inf X \geqslant \beta$.

Доказательство. Докажем это свойство для точной верхней грани множества X. Для точной нижней грани доказательство аналогично.

Число α — верхняя грань множества X. Это множество непусто и ограничено сверху, поэтому имеет точную верхнюю грань, ее обозначим $\alpha_0 = \sup X$. Число α_0 является наименьшей из всех верхних граней, а поэтому $\alpha \geqslant \alpha_0$. $\triangle$

4.3. Примеры числовых множеств. Приведем несколько примеров числовых множеств.

Пример 1.3. Множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ имеет наименьшее число 1, которое является, например, его нижней гранью, и множество $\mathbb{N}$ ограничено снизу. Кроме того, это число является точной нижней гранью множества $\mathbb{N}$. Однако это множество не ограничено сверху.

Пример 1.4. Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{100} X_n$, где множества X_n имеют следующий вид: $X_n = \{\, \chi \in \mathbb{R}\colon\ 1 - 1/n \geqslant \chi \geqslant 0 \,\}$.

Докажем, что множество X имеет наименьшее число $\beta = 0$ и наибольшее число $\alpha = 99/100$.

Очевидно, что для $n > 1$ выполняется: $X_{n-1} \subset X_n$, поэтому для всех n таких, что $100 \geqslant n \geqslant 1$, имеет место следующее включение: $X_n \subset X_{100}$. Следовательно, для множества X справедливо $X = X_{100} = \{\, \chi \in \mathbb{R}\colon\ 99/100 \geqslant \chi \geqslant 0 \,\}$.

Числа $\beta = 0$ и $\alpha = 99/100$ есть точная нижняя и точная верхняя грани: $\inf X = 0$ и $\sup X = 99/100$.

Пример 1.5. Пусть $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, где множества X_n имеют вид: $X_n = \{\, \chi \in \mathbb{R}\colon\ 1 - 1/n \geqslant \chi \geqslant 0 \,\}$.

Докажем, что $\beta = 0$ — наименьшее число X и $\inf X = 0$.

Для любого числа $\chi \in X$, по определению объединения множеств, найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\chi \in X_n$. Следовательно, $\chi \geqslant 0$ и $0 \in X$.

Докажем, что множество X ограничено сверху, не имеет наибольшего числа и $\sup X = 1$.

Для любого числа $\chi \in X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\chi \in X_n$, поэтому $1 > 1 - 1/n \geqslant \chi$. Итак, $\alpha = 1$ — верхняя грань множества X и $1 \notin X$.

Для любого положительного действительного числа ε, $1 > \varepsilon$, по лемме 1.1 найдется рациональное число c такое, что $1 > c > \varepsilon$. Из аксиомы Архимеда следует, что существует такое натуральное число n, для которого выполняется неравенство $n > 1/(1-c)$. Поэтому справедливо $1 - 1/n > c$, т. е. $c \in X_n$. Таким образом, в силу определения 1.10, $\sup X = 1$.

Пример 1.6. Пусть X — множество положительных правильных дробей, т. е. $X = \{\, p/q\colon\ p, q \in \mathbb{N},\ q > p \,\}$.

Для каждой такой дроби выполняются неравенства $p/q > 0$ и $p/q < 1$, следовательно, можно утверждать, что 0 — нижняя грань, а 1 — верхняя грань множества X. Однако ни 0, ни 1 не принадлежат этому множеству. Множество X не имеет ни наибольшего, ни наименьшего числа. Итак, множество X — множество всех рациональных чисел a, удовлетворяющих неравенствам $1 > a > 0$.

Докажем, что $\inf X = 0$. Поскольку множество X ограниченное, то будем рассматривать все положительные действительные числа ε такие, что $1 > \varepsilon > 0$. Тогда, в силу неравенства $\varepsilon > 0$ и леммы 1.1, найдется рациональное число c, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon > c > 0$. При этом $1 > c > 0$, т. е. $c \in X$. Итак, по определению 1.12, получаем, что $\inf X = 0$.

Докажем, что $\sup X = 1$. Для любого положительного действительного числа ε такого, что $1 > \varepsilon > 0$, из неравенства $1 > \varepsilon$ и леммы 1.1 находим рациональное число d, удовлетворяющее неравенствам $1 > d > \varepsilon$. Поскольку $1 > d > 0$, то d принадлежит X. Из определения 1.10 следует, что $\sup X = 1$.

§ 5. Бесконечные десятичные дроби

5.1. Представление действительного числа бесконечной десятичной дробью. Сейчас мы будем неоднократно обращаться к геометрической интерпретации рационального числа как некоторой точки на числовой прямой $\mathscr{L}$ (см. разделы 1.5 и 1.6).

Пусть $\alpha = (A_*, A^*)$ — положительное действительное число, не представимое конечной десятичной дробью. Найдутся целые положительные числа a_0 и $a_0 + 1$ такие, что $a_0 \in A_*$, $a_0 + 1 \in A^*$ и $a_0 + 1 > \alpha > a_0$. Этим целым числам на числовой прямой $\mathscr{L}$ соответствуют точки A_1 и B_1, получается отрезок A_1B_1 единичной длины.

Отрезок A_1B_1 разделим на 10 равных частей точками C_1^1, C_2^1, $\ldots$, C_9^1. Найдутся рациональные числа, соответствующие этим точкам разбиения: $a_0.1$, $a_0.2$, $\ldots$, $a_0.9$.

Из рациональных чисел возьмем два $a_0.a_1$ и $a_0.(a_1 + 1)$, для которых выполняются неравенства $a_0.(a_1 + 1) > \alpha > a_0.a_1$, таким образом, $a_0.a_1 \in A_*$ и $a_0.(a_1 + 1) \in A^*$.[1.6]

Отрезок A_2B_2, концы которого соответствуют найденным рациональным числам, снова разделим на 10 равных частей точками

[1.6] Если $a_1 = 9$, то число $a_0.(a_1 + 1)$ превратится в число $a_0 + 1$. Это же справедливо для других десятичных разрядов.

C_1^2, C_2^2, ..., C_9^2. Этим точкам соответствуют рациональные числа $a_0{.}a_1 1$, $a_0{.}a_1 2$, ..., $a_0{.}a_1 9$. Из полученных чисел возьмем два последовательных рациональных числа, для которых выполнены неравенства $a_0{.}a_1(a_2+1) > \alpha > a_0{.}a_1 a_2$. Справедливы следующие включения: $a_0{.}a_1 a_2 \in A_*$ и $a_0{.}a_1(a_2+1) \in A^*$.

Продолжая описанный процесс, на n-м шаге получим рациональные приближения действительного положительного числа α: $a_0{.}a_1 a_2 \ldots (a_n+1) > \alpha > a_0{.}a_1 a_2 \ldots a_n$. Для удобства обозначим $a_0{.}a_1 a_2 \ldots a_n \in A_*$ через $(a_n)_*$, это рациональное приближение действительного числа α с недостатком, а $a_0{.}a_1 a_2 \ldots (a_n+1) \in A^*$ через $(a_n)^*$, это рациональное приближение действительного числа α с избытком. Рациональные приближения числа α можно записать следующим образом:

$$(a_n)_* = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \quad (a_n)^* = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}.$$

Следовательно:

$$a_0{.}a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} > \alpha > a_0{.}a_1 \ldots a_n. \tag{1.5}$$

Поскольку α — действительное положительное число, которое не представимо конечной десятичной дробью, то описанный процесс никогда не оборвется и мы получаем бесконечную десятичную дробь $a_0{.}a_1 a_2 \ldots$ Эта дробь будет периодической для рационального числа α и непериодической для иррационального числа.

Пример 1.7. Обратимся к сечению, рассмотренному в примере 1.2, при $c = 2$. Оно определяет иррациональное число, которое мы обозначили символом $\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ имеет следующие рациональные приближения:

$$2 > \sqrt{2} > 1, \qquad 1.5 > \sqrt{2} > 1.4, \qquad 1.42 > \sqrt{2} > 1.41,$$
$$1.415 > \sqrt{2} > 1.414, \qquad 1.4143 > \sqrt{2} > 1.4142,$$
$$1.41422 > \sqrt{2} > 1.41421, \qquad 1.414214 > \sqrt{2} > 1.414213,$$
$$1.4142136 > \sqrt{2} > 1.4142135, \quad 1.41421357 > \sqrt{2} > 1.41421356,$$
$$1.414213563 > \sqrt{2} > 1.414213562, \ldots$$

Итак, получаем

$$
\begin{aligned}
(a_0)_* = 1, \quad (a_0)^* &= 2, \qquad a_0 = 1;\\
(a_1)_* = 1.4, \quad (a_1)^* &= 1.5, \qquad a_1 = 4;\\
(a_2)_* = 1.41, \quad (a_2)^* &= 1.42, \qquad a_2 = 1;\\
(a_3)_* = 1.414, \quad (a_3)^* &= 1.415, \qquad a_3 = 4;\\
(a_4)_* = 1.4142, \quad (a_4)^* &= 1.4143, \qquad a_4 = 2; \ \ldots
\end{aligned}
$$

Представлением этого действительного числа является бесконечная десятичная дробь: $1.414213562\ldots$

Когда число α является конечной десятичной дробью или, в частном случае, целым числом ($n = 0$), то неравенства (1.5) примут следующий вид:

$$a_0.a_1\ldots a_n + \frac{1}{10^n} \geqslant \alpha \geqslant a_0.a_1\ldots a_n, \tag{1.6}$$

поскольку число α на определенном шаге совпадет с одним из концов отрезка разбиения (по нашему желанию), в который мы его заключаем. Начиная с этого шага, слева или справа в (1.6) будут равенства. Если это правый конец отрезка, тогда все последующие цифры в десятичном представлении окажутся нулями, если левый конец — все следующие цифры представления будут девятки.

Итак, любое рациональное число α, которое представимо конечной десятичной дробью, можно записать в виде бесконечной десятичной дроби двояко.

Пример 1.8. Пусть $\alpha = \dfrac{11}{8} = 1.375$.

$$
\begin{gathered}
2 > \alpha > 1, \quad 1.4 > \alpha > 1.3, \quad 1.38 > \alpha > 1.37,\\
1.376 > \alpha = 1.375, \quad 1.3751 > \alpha = 1.3750,\\
1.37511 > \alpha = 1.37500, \ldots
\end{gathered}
$$

Тогда $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $\ldots$

Аналогично

$$
\begin{gathered}
2 > \alpha > 1, \quad 1.4 > \alpha > 1.3, \quad 1.38 > \alpha > 1.37,\\
1.375 = \alpha > 1.374, \quad 1.3750 = \alpha > 1.3749,\\
1.37500 = \alpha > 1.37499, \ \ldots
\end{gathered}
$$

Тогда $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 9$, $\ldots$

Представление числа α в виде бесконечной десятичной дроби: $\alpha = 1.375000\ldots = 1.374999\ldots$

Замечание 1.8. Отметим тот факт, что двойственная природа представления некоторых рациональных чисел возникает не в первый раз, сравните сечения типа **A** и **B**. Мы рассматривали только сечения типа **A**.

Замечание 1.9. В дальнейшем представления бесконечной десятичной дробью $a_0.a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, где $a_n \neq 0$, действительного числа α и $a_0.a_1a_2\ldots(a_n-1)999\ldots$ будем отождествлять.

5.2. Основная лемма. Докажем лемму, которой будем неоднократно пользоваться при введении операций на множестве действительных чисел.

Лемма 1.6. *Для любого действительного числа α и для любого положительного рационального числа e найдутся рациональные числа a_1 и a_2 такие, что $a_2 > \alpha > a_1$ и $a_2 - a_1 < e$.*

Доказательство. 1. Пусть $\alpha = a$ — рациональное число. Тогда в качестве чисел a_1 и a_2 возьмем числа $a_1 = a - e/4$ и $a_2 = a + e/4$. Очевидно, что числа a_1 и a_2 удовлетворяют условиям леммы.

2. Пусть α — иррациональное число. Тогда для любого положительного рационального числа e, в силу аксиомы Архимеда, найдется натуральное число n такое, что выполняется неравенство $n > 1/e$. В качестве чисел a_1 и a_2 возьмем рациональные приближения α по недостатку — $(a_n)_*$ и по избытку — $(a_n)^*$ с найденным номером n. Эти числа удовлетворяют всем условиям леммы в силу неравенств (1.5):

$$(a_n)^* > \alpha > (a_n)_*, \qquad (a_n)^* - (a_n)_* < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < e.$$

Здесь использовано неравенство $10^n > n$, которое справедливо для всех натуральных n. $\triangle$

5.3. Взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных десятичных дробей и $\mathbb{R}$. Введем важное для дальнейшего изложения определение.

Определение 1.14. Говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если

1) любому элементу a множества A соответствует единственный элемент b множества B;
2) любому элементу b множества B соответствует некоторый элемент a множества A;
3) разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B.

Обозначение. $A \longleftrightarrow B$, $a \longleftrightarrow b$.

Теорема 1.7. *Между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей можно установить взаимно однозначное соответствие. При этом используется отождествление, отмеченное в замечании* 1.9.

Доказательство. В пункте 5.1 было доказано, что каждому действительному числу соответствует единственная бесконечная десятичная дробь, при этом учитывается отождествление, указанное в замечании 1.9.

Докажем, что каждой бесконечной десятичной дроби соответствует единственное действительное число, для которого данная дробь является представлением. Пусть задана бесконечная десятичная дробь: $a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ Рассмотрим отрезки дроби

$$(a_n)_* = a_0.a_1a_2\ldots a_n, \qquad (a_n)^* = a_0.a_1a_2\ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Покажем, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $(a_n)^* > (a_m)_*$. Очевидно, что для всех m, удовлетворяющих неравенству $n \geqslant m$, справедливо выражение $(a_n)^* > (a_n)_* \geqslant (a_m)_*$. Если же $m > n$, то

$$(a_n)^* - (a_m)_* = \frac{1}{10^n} - \Big[(a_m)_* - (a_n)_*\Big].$$

Теперь надо оценить разность $(a_m)_* - (a_n)_*$[1.7]:

$$(a_m)_* - (a_n)_* = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{9}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{m-n-1}}\right) = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n}.$$

[1.7] Учтем, что a_i принадлежит множеству $\{\,0,\,1,\,\ldots,\,9\,\}$.

Из полученной оценки находим

$$(a_n)^* - (a_m)_* = \frac{1}{10^n} - \Big[(a_m)_* - (a_n)_*\Big] > 0.$$

Рассмотрим следующие два множества: $A_* = \{\,(a_n)_*,\ n \in \mathbb{N}\,\}$ и $A^* = \{\,(a_n)^*,\ n \in \mathbb{N}\,\}$. Поскольку $(a_n)^* > (a_m)_*$ для всех $m,\ n \in \mathbb{N}$, то по теореме 1.5 существует точная верхняя грань множества A_* — число $\alpha = \sup A_*$ — и точная нижняя грань множества A^* — число $\beta = \inf A^*$ — такие, что $\beta \geqslant \alpha$.

Возьмем любое положительное рациональное число e. По аксиоме Архимеда найдется натуральное число n такое, что верно $n > 1/e$. Следовательно, для данного числа n выполняются следующие неравенства: $(a_n)^* - (a_n)_* = \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{n} < e$. Так как $(a_n)^* \geqslant \beta \geqslant \alpha \geqslant (a_n)_*$, то по лемме 1.2 α и β равны.

Итак, нашли число α, для которого выполнены неравенства (1.6), т. е. наша бесконечная десятичная дробь является представлением числа α.

Число α единственно. Докажем методом от противного: пусть существует число α', для которого бесконечная десятичная дробь $a_0{.}a_1a_2\ldots a_n\ldots$ также является представлением, т. е. для числа α' выполняются неравенства (1.6). Эти же неравенства выполняются и для числа α. Еще раз используя лемму 1.2, находим, что $\alpha = \alpha'$. $\triangle$

Замечание 1.10. Для числа $\alpha = a_0{.}a_1a_2\ldots a_n\ldots$ будем использовать символ $[\alpha]$ — целая часть числа α — наибольшее целое число, не превосходящее α. Для числа $\alpha \geqslant 0$ его целая часть $[\alpha]$ равна a_0, а для $\alpha < 0$ его целая $[\alpha]$ часть равна $a_0 - 1$.

§ 6. Арифметические операции с действительными числами

Необходимо таким образом определить арифметические операции над действительными числами в целом, чтобы эти определения относились как к рациональным числам, так и к иррациональным числам, и чтобы, совершая действия над рациональными числами в новых определениях, всегда получали прежние результаты.

6.1. Сумма действительных чисел. Для действительных чисел α и β рассмотрим всевозможные рациональные числа a_*, b_*, a^*, b^* такие, что

$$a^* > \alpha > a_*, \qquad b^* > \beta > b_*. \tag{1.7}$$

Определение 1.15. *Суммой* действительных чисел α и β назовем такое действительное число γ, что для всех рациональных чисел, a_*, b_*, a^*, b^*, удовлетворяющих неравенствам (1.7), выполняются неравенства[1.8]

$$a^* + b^* > \gamma > a_* + b_*. \tag{1.8}$$

Обозначение. $\gamma = \alpha + \beta$.

Операция нахождения суммы действительных чисел называется *сложением*. Докажем, что введенная операция корректна, т. е. сумма действительных чисел существует и единственна.

Теорема 1.8. *Для любых действительных чисел α и β их сумма $\gamma = \alpha + \beta$ существует и единственна.*

Доказательство. Существование. Рассмотрим множество $C_* = \{\, a_* + b_* \,\}$, где рациональные числа a_* и b_* из неравенств (1.7). Это множество ограничено сверху, его верхней гранью является любое число $a^* + b^*$ из неравенств (1.7). По теореме 1.4 существует точная верхняя грань множества C_*, которую обозначим $\gamma = \sup C_*$.

Для найденного числа γ верны неравенства

$$a^* + b^* \geqslant \gamma \geqslant a_* + b_*.$$

Докажем, что это число удовлетворяет неравенствам (1.8). Исходим от противного: пусть $\gamma = a_* + b_*$, тогда из неравенств (1.7) по лемме 1.1 найдутся рациональные числа $\bar{a}_*$ и $\bar{b}_*$ такие, что $\alpha > \bar{a}_* > a_*$ и $\beta > \bar{b}_* > b_*$. Следовательно, для числа $\bar{a}_* + \bar{b}_*$, принадлежащего множеству C_*, выполняется

$$\bar{a}_* + \bar{b}_* > a_* + b_* = \gamma = \sup C_*,$$

что противоречит определению точной верхней грани множества. Аналогично доказывается, что для числа γ не может выполняться равенство $\gamma = a^* + b^*$.

[1.8] Пользуемся следующим свойством рациональных чисел: *если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.*

Таким образом, для числа γ справедливы неравенства (1.8), и поэтому сумма действительных чисел α и β существует.

Единственность. От противного: пусть существует два числа γ и γ', удовлетворяющих неравенствам (1.8). Тогда, в силу леммы 1.6, для любого положительного рационального числа e найдутся такие рациональные числа a_*, a^*, b_*, b^*, удовлетворяющие (1.7), что для них имеют место неравенства $a^* - a_* < e/2$ и $b^* - b_* < e/2$. Поэтому

$$(a^* + b^*) - (a_* + b_*) = (a^* - a_*) + (b^* - b_*) < e/2 + e/2 = e.$$

Из леммы 1.2 вытекает, что $\gamma = \gamma'$, т. е. сумма двух действительных чисел единственна. $\triangle$

Замечание 1.11. Если оба числа α и β рациональны, то для их суммы $\gamma = \alpha + \beta$ верны неравенства (1.8), т. е. определение 1.15 суммы действительных чисел не противоречит определению суммы рациональных чисел.

Пример 1.9. Следующий пример показывает, что сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Предположим, что числа α и β представимы бесконечными десятичными непериодическими дробями: $\alpha = 2.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ и $\beta = -0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$, т. е. $\alpha,\ \beta \in \mathbb{J}$.

Покажем, что $\alpha + \beta = 2.0\ldots 0\ldots = 1.9\ldots 9\ldots$ (см. замечание 1.9).

Действительно, $3 > \alpha > 2$ и $0 > \beta > -1$. Следовательно, из (1.8) получаем $3 > \alpha + \beta > 1$.

Далее, $2.a_1 + 1 > \alpha > 2.a_1$ и $-0.a_1 > \beta > -0.a_1 + 1$. Поэтому $2.1 > \alpha + \beta > 1.9$.

Аналогично,

$$2.a_1(a_2+1) > \alpha > 2.a_1a_2, \quad -0.a_1a_2 > \beta > -0.a_1(a_2+1).$$

Тогда $2.01 > \alpha + \beta > 1.99$.

На $n+1$ шаге получаем

$$2.a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n+1) > \alpha > 2.a_1a_2\ldots a_n,$$
$$-0.a_1a_2\ldots a_n > \beta > -0.a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n+1).$$

Следовательно,

$$2.\underbrace{0\ldots 0}_{n-1}1 > \alpha + \beta > 1.\underbrace{9\ldots 9}_{n}.$$

Продолжая этот бесконечный процесс, находим, что единственное число γ, удовлетворяющее неравенствам (1.8), есть число $\gamma = \alpha + \beta = 2.0\ldots0\ldots = 1.9\ldots9\ldots$

6.2. Свойства сложения. Введенная операция сложения действительных чисел обладает теми же свойствами, которыми обладала операция сложения рациональных чисел[1.9]:

2°. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. (*Коммутативность сложения.*)

Доказательство. Для рациональных чисел a_*, a^*, b_*, b^* в условиях (1.7) выполняется

$$a^* + b^* > \alpha + \beta > a_* + b_*, \qquad b^* + a^* > \beta + \alpha > b_* + a_*.$$

Для рациональных чисел есть свойство коммутативности сложения, поэтому

$$a^* + b^* = b^* + a^* = c^*, \qquad a_* + b_* = b_* + a_* = c_*.$$

К числам $\alpha + \beta$ и $\beta + \alpha$, заключенным между рациональными числами c^* и c_*, применим леммы 1.6 и 1.2.

Из леммы 1.6 следует, что для любого положительного рационального числа e найдутся такие рациональные числа a^*, a_*, b^*, b_*, что выполнены неравенства $a^* - a_* < e/2$ и $b^* - b_* < e/2$. Поэтому для рациональных чисел c^* и c_* справедливо

$$c^* > \alpha + \beta > c_*, \quad c^* > \beta + \alpha > c_*, \qquad c^* - c_* < e.$$

Из леммы 1.2 получаем, что $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. $\triangle$

3°. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. (*Ассоциативность сложения.*)

Доказательство. Пусть рациональные числа a_*, a^*, b_*, b^*, c_*, c^* удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a^* > \alpha > a_*, \quad b^* > \beta > b_*, \quad c^* > \gamma > c_*. \tag{1.9}$$

Тогда выполняются неравенства

$$(a^* + b^*) + c^* > (\alpha + \beta) + \gamma > (a_* + b_*) + c_*,$$
$$a^* + (b^* + c^*) > \alpha + (\beta + \gamma) > a_* + (b_* + c_*).$$

Для рациональных чисел справедливо свойство ассоциативности сложения. Поэтому выполняется $(a^* + b^*) + c^* = a^* + (b^* + c^*)$ и $(a_* + b_*) + c_* = a_* + (b_* + c_*)$. Применение лемм 1.6 и 1.2 заканчивает доказательство. $\triangle$

[1.9] Здесь сохранена нумерация свойств § 1.

4°. $\alpha + 0 = \alpha$. (*Особая роль нуля.*)

Доказательство. Возьмем рациональные числа a_*, a^*, b_*, b^* такие, что $a^* > \alpha > a_*$ и $b^* > 0 > b_*$. Тогда верны неравенства: $a^* + b^* > \alpha + 0 > a_* + b_*$ и $a^* + b^* > a^* > \alpha > a_* > a_* + b_*$. Таким образом, число α удовлетворяет тем же неравенствам, что и число $\alpha + 0$. Из лемм 1.6 и 1.2 находим, что $\alpha = \alpha + 0$. $\triangle$

5°. Для любого действительного числа α существует *противоположное* ему число $-\alpha$ такое, что $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (A_*, A^*)$. Определим число $-\alpha$ следующим образом: $-\alpha = (\bar{A}_*, \bar{A}^*)$, в нижний класс $\bar{A}_*$ входят все числа $-a$, где $a \in A^*$, а верхний класс $\bar{A}^*$ включает в себя все числа $-a$ такие, что $a \in A_*$.

По определению числа $-\alpha$ верно:

$$\text{если} \quad a^* > \alpha > a_*, \quad \text{то} \quad -a_* > -\alpha > -a^*. \tag{1.10}$$

Поэтому верно $a^* - a_* > \alpha + (-\alpha) > a_* - a^*$. Нетрудно видеть, что $a^* - a_* > 0 > a_* - a^*$. В силу лемм 1.6 и 1.2, получаем требуемое равенство.

Докажем, что такое число единственно. Исходим от противного: пусть существуют два числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha + \alpha_1 = 0$ и $\alpha + \alpha_2 = 0$. Тогда, используя свойства **2°**–**4°**, находим $\alpha_1 = \alpha_1 + (\alpha + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha) + \alpha_2 = \alpha_2$. Противоречие доказывает, что наше предположение было неверно. $\triangle$

6.3. Произведение действительных чисел. Пусть α и β — положительные действительные числа ($\alpha > 0$ и $\beta > 0$) и положительные рациональные числа a_*, a^*, b_*, b^* таковы, что справедливы неравенства (1.7).

Определение 1.16. *Произведением* двух положительных действительных чисел α и β назовем такое действительное число γ, что для него выполняются следующие неравенства:

$$a^* b^* > \gamma > a_* b_*. \tag{1.11}$$

Обозначение. $\gamma = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$.

Операция нахождения произведения действительных чисел называется *умножением*. Надо доказать корректность введенного определения.

Теорема 1.9. *Для любых положительных действительных чисел α и β их произведение $\gamma = \alpha\beta$ существует и единственно.*

Доказательство. Существование. Введем множество $C_* = \{\, a_* b_* \,\}$ для всех чисел a_* и b_*, удовлетворяющих неравенствам (1.7). Для чисел a^* и b^* из (1.7) каждое число $a^* b^*$ является верхней гранью множества C_*, тогда по теореме 1.4 существует точная верхняя грань этого множества, которую обозначим $\gamma = \sup C_*$. Полученное число γ удовлетворяет неравенствам $a^* b^* \geqslant \gamma \geqslant a_* b_*$. Затем так же, как в теореме 1.8, доказывается, что для числа γ выполняются неравенства (1.11).

Единственность. Исходим от противного: пусть существуют два действительных числа γ и γ', удовлетворяющих неравенствам (1.11). По лемме 1.6 для любого положительного рационального числа e найдутся такие рациональные числа a_*, a^*, b_*, b^*, что для них выполняются следующие неравенства[1.10]:

$$a' > a^*, \qquad b' > b^*,$$
$$a^* - a_* < \frac{e}{2(a'+b')}, \qquad b^* - b_* < \frac{e}{2(a'+b')}. \quad (1.12)$$

Тогда

$$a^* b^* - a_* b_* = a^*(b^* - b_*) + b_*(a^* - a_*) <$$
$$< (a'+b')\left(\frac{e}{2(a'+b')} + \frac{e}{2(a'+b')}\right) = e. \quad (1.13)$$

Из леммы 1.2 следует, что числа γ и γ' равны. △

Замечание 1.12. Если числа α и β положительны и рациональны, то для их произведения $\gamma = \alpha\beta$ верны неравенства (1.11). Таким образом, определение 1.16 произведения положительных действительных чисел не противоречит определению произведения рациональных чисел.

Осталось определить произведение любых (не обязательно положительных) действительных чисел. Для этого введем понятие *модуля действительного числа.*

[1.10] Здесь числа a' и b' фиксированы.

Определение 1.17. *Модулем* действительного числа α называется число $|\alpha|$, равное α, если $\alpha \geqslant 0$, и равное $-\alpha$, если $\alpha < 0$.

Соглашение. Условимся, что для любого действительного числа α выполняется $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

Если оба числа α и β отличны от нуля, то[1.11]

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \text{если числа } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака;}$$
$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \quad \text{если числа } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков.}$$

Замечание 1.13. Для любого натурального числа n можно определить α^n как произведение n чисел α, т. е. $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n}$, при этом последовательно применяется соглашение и определение 1.16. Определена целая положительная степень n числа α.

Для введенной операции умножения, как и в случае рациональных чисел, остаются справедливыми следующие свойства.

6°. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. (*Коммутативность умножения.*)

Доказательство. Сначала рассмотрим случай положительных действительных чисел α и β. Для любых рациональных чисел a_*, a^*, b_*, b^* из неравенств (1.7) выполняется $a^*b^* > \alpha\beta > a_*b_*$ и $b^*a^* > \beta\alpha > b_*a_*$.

Для рациональных чисел известно свойство коммутативности умножения, поэтому справедливы равенства: $a^*b^* = b^*a^* = c^*$ и $a_*b_* = b_*a_* = c_*$.

В силу леммы 1.6 для любого положительного рационального числа e найдутся такие рациональные числа a^*, a_*, b^*, b_*, что для них выполняются неравенства (1.12) и (1.13). Тогда для рациональных чисел c^* и c_* верно

$$c^* > \alpha\beta > c_*, \quad c^* > \beta\alpha > c_*, \qquad c^* - c_* < e.$$

Из леммы 1.2 следует, что $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Случай действительных чисел произвольных знаков рассматривается по определению 6.3. Если одно из чисел равно нулю, то и оба произведения равны нулю. $\triangle$

7°. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. (*Ассоциативность умножения.*)

[1.11] Предполагаем, что произведение положительных действительных чисел известно.

Доказательство. Пусть действительные числа α, β и γ положительны. Рациональные числа a^*, a_*, b^*, b_*, c^*, c_* удовлетворяют неравенствам (1.9). Тогда

$$(a^* \cdot b^*) \cdot c^* > (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma > (a_* \cdot b_*) \cdot c_*,$$
$$a^* \cdot (b^* \cdot c^*) > \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) > a_* \cdot (b_* \cdot c_*).$$

В силу ассоциативности умножения рациональных чисел находим, что числа $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ и $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ заключены между одинаковыми числами.

Применим лемму 1.6: для любого положительного рационального числа e найдутся рациональные числа a^*, a_*, b^*, b_*, c^*, c_* такие, что

$$\bar{a} > a^*, \quad \bar{b} > b^*, \quad \bar{c} > c^*,$$
$$a^* - a_* < \frac{e}{3(\bar{b} \cdot \bar{c})}, \quad b^* - b_* < \frac{e}{3(\bar{a} \cdot \bar{c})}, \quad c^* - c_* < \frac{e}{3(\bar{a} \cdot \bar{b})}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^* - d_* &= (a^* \cdot b^*) \cdot c^* - (a_* \cdot b_*) \cdot c_* = \\ &= a^* \cdot b^* \cdot (c^* - c_*) + a^* \cdot c_* \cdot (b^* - b_*) + b_* \cdot c_* \cdot (a^* - a_*) < \\ &< \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \frac{e}{3(\bar{a} \cdot \bar{b})} + \bar{a} \cdot c \cdot \frac{e}{3(\bar{a} \cdot \bar{c})} + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \frac{e}{3(\bar{b} \cdot \bar{c})} = e. \end{aligned}$$

Итак, справедливо

$$d^* > (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma > d_*, \quad d^* > \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) > d_*, \qquad d^* - d_* < e.$$

Из леммы 1.2 получим необходимое равенство.

Все остальные случаи (действительные числа разных знаков или равенство нулю) рассматриваются по определению 6.3. $\triangle$

8°. $\alpha \cdot 1 = \alpha$. (*Особая роль единицы.*)

Доказательство. Предположим, что $\alpha > 0$ и $a^* > \alpha > a_*$. Тогда $a^*/a_* > 1 > a_*/a^*$ и $a^* \cdot a^*/a_* > \alpha \cdot 1 > a_* \cdot a_*/a^*$. Для числа α справедливы неравенства

$$a^* \cdot a^*/a_* > a^* > \alpha > a_* > a_* \cdot a_*/a^*.$$

Таким образом, числа $\alpha \cdot 1$ и α заключены между одними и теми же числами. Применение лемм 1.6 и 1.2 заканчивает доказательство.

Для $\alpha \leqslant 0$ используем определение 6.3. $\triangle$

9°. Для любого действительного числа α, отличного от 0, существует *обратное* ему число $1/\alpha$ такое, что справедливо равенство $\alpha \cdot 1/\alpha = 1$.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha = (A_*, A^*)$. Введем число $1/\alpha = (\bar{A}_*, \bar{A}^*)$. Нижний класс $\bar{A}_*$ сечения содержит все отрицательные числа и нуль, а также все числа $1/a$, где $a \in A^*$. Верхний класс $\bar{A}^*$ содержит числа $1/a$, где a — любое положительное число из A_*.

По определению числа $1/\alpha$, если $a^* > \alpha > a_*$, то верны неравенства $1/a_* > 1/\alpha > 1/a^*$, т. е. для произведения $\alpha \cdot 1/\alpha$ справедливы неравенства $a^*/a_* > \alpha \cdot 1/\alpha > a_*/a^*$. Для числа 1 также выполняются эти неравенства $a^*/a_* > 1 > a_*/a^*$. Из лемм 1.6 и 1.2 следует необходимое равенство.

Обратное число единственно. Исходим от противного: пусть существуют два числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\alpha \cdot \alpha_1 = 1$, $\alpha \cdot \alpha_2 = 1$. Тогда, используя свойства **6°–8°**, получаем равенство

$$\alpha_1 = \alpha_1 \cdot (\alpha \cdot \alpha_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha) \cdot \alpha_2 = \alpha_2.$$

Пришли к противоречию, следовательно, наше предположение было неверно.

В случае, если $\alpha < 0$, полагаем $1/\alpha = -1/|\alpha|$ и тогда выполняется $\alpha \cdot 1/\alpha = |\alpha| \cdot 1/|\alpha| = 1$. $\triangle$

Замечание 1.14. Для числа $1/\alpha$, обратного числу $\alpha \neq 0$, будем также использовать обозначение $\alpha^{-1} = 1/\alpha$.

Определим целую отрицательную степень действительного числа $\alpha \neq 0$ следующим образом: $\alpha^{-n} = (\alpha^n)^{-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

6.4. Другие свойства и операции. Осталось показать, что для введенных операций сложения, умножения и правила сравнения действительных чисел выполнены свойства, которые связывают их вместе, т. е. для действительных чисел имеет место свойство дистрибутивности сложения относительно операции умножения.

10°. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. (*Дистрибутивность сложения относительно умножения.*)

Доказательство. Предположим, что все действительные числа α, β и γ положительны. Тогда для рациональных чисел a^*, a_*,

b^*, b_*, c^*, c_* из неравенств (1.9) выполняется (по определениям 1.15 и 1.16):

$$(a^* + b^*) \cdot c^* > (\alpha + \beta) \cdot \gamma > (a_* + b_*) \cdot c_*,$$
$$a^* \cdot c^* + b^* \cdot c^* > \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma > a_* \cdot c_* + b_* \cdot c_*.$$

Для рациональных чисел свойство дистрибутивности сложения относительно умножения верно. Поэтому

$$(a^* + b^*) \cdot c^* = a^* \cdot c^* + b^* \cdot c^* = d^*,$$
$$(a_* + b_*) \cdot c_* = a_* \cdot c_* + b_* \cdot c_* = d_*.$$

Из леммы 1.6 получаем: для любого положительного рационального числа e найдутся рациональные числа a^*, a_*, b^*, b_*, c^*, c_* такие, что $\bar{a} > a^*$, $\bar{b} > b^*$, $\bar{c} > c^*$,

$$a^* - a_* < \frac{e}{4 \cdot \bar{c}}, \quad b^* - b_* < \frac{e}{4 \cdot \bar{c}}, \quad c^* - c_* < \frac{e}{2(\bar{a} + \bar{b})}.$$

Тогда

$$d^* - d_* = a^* \cdot c^* + b^* \cdot c^* - a_* \cdot c_* - b. * c_* =$$
$$= c^* \cdot (a^* - a_*) + c^* \cdot (b^* - b_*) + (a_* + b_*) \cdot (c^* - c_*) <$$
$$< \bar{c} \cdot \frac{e}{4 \cdot \bar{c}} + \bar{c} \cdot \frac{e}{4 \cdot \bar{c}} + (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \frac{e}{2(\bar{a} + \bar{b})} = e.$$

Таким образом, для любого положительного рационального числа e найдены рациональные числа d^* и d_* такие, что

$$d^* > (\alpha + \beta) \cdot \gamma > d_*, \quad d^* > \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma > d_*, \qquad d^* - d_* < e.$$

Из леммы 1.2 следует требуемое равенство.

В случае произвольных действительных чисел α, β и γ необходимо использовать определение 6.3 для произведения действительных чисел и выражение (1.10) для противоположных чисел.

Рассмотрим случай $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$, причем для чисел α и β выполняется $\alpha + \beta > 0$. Таким образом, надо доказать равенство $\big(\alpha + (-|\beta|)\big) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + (-|\beta|) \cdot \gamma$.

Для рациональных чисел a^*, a_*, b^*, b_*, c^*, c_* таких, что

$$a^* > \alpha > a_*, \quad b^* > |\beta| > b_*, \quad c^* > \gamma > c_*,$$

выполняется $-b_* > -|\beta| > -b^*$. Поэтому, в силу определений 1.15 и 1.16, выполняются неравенства

$$\big(a^* + (-b_*)\big) \cdot c^* > \big(\alpha + (-|\beta)\big) \cdot \gamma > \big(a_* + (-b^*)\big) \cdot c_*,$$
$$a^* \cdot c^* + (-b_*) \cdot c^* > \alpha \cdot \gamma + (-|\beta|) \cdot \gamma > a_* \cdot c_* + (-b^*) \cdot c_*.$$

Для рациональных чисел имеют место равенства

$$\big(a^* + (-b_*)\big) \cdot c^* = a^* \cdot c^* + (-b_*) \cdot c^*,$$
$$\big(a_* + (-b^*)\big) \cdot c_* = a_* \cdot c_* + (-b^*) \cdot c_*.$$

Применение лемм 1.6 и 1.2 завершает доказательство. $\triangle$

11°. Если $\alpha > \beta$, то для произвольного действительного числа γ справедливо неравенство $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Доказательство. Поскольку $\alpha > \beta$, то из леммы 1.1 и замечания 1.4 найдутся рациональные числа a_* и b^* такие, что[1.12] $\alpha > a_* > b^* > \beta$. Для положительного числа $a_* - b^*$ найдутся рациональные числа c_* и c^* такие, что $c^* > \gamma > c_*$ и $c^* - c_* < a_* - b^*$ (лемма 1.6). Следовательно, $b^* + c^* < a_* + c_*$.

По определению суммы $\alpha + \gamma > a_* + c_*$ и $b^* + c^* > \beta + \gamma$. Из неравенств $\alpha + \gamma > a_* + c_* > b^* + c^* > \beta + \gamma$ следует, что нижний класс сечения числа $\alpha + \gamma$ содержит нижний класс сечения числа $\beta + \gamma$ и эти классы не совпадают, т. е. $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. $\triangle$

12 °. Если $\alpha > \beta$, то для произвольного действительного числа $\gamma > 0$ справедливо неравенство $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Доказательство. Из свойств **11 °** и **5 °** получаем следующее неравенство: $\alpha + (-\beta) > \beta + (-\beta) = 0$. По определению 6.3 для произведения действительных чисел находим $\big(\alpha + (-\beta)\big) \cdot \gamma > 0$. Поскольку верны свойства **10 °** и **11 °**, то $\alpha \cdot \gamma + (-\beta) \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$. Применение свойств **10 °** и **5 °** заканчивает доказательство. $\triangle$

13 °. Каково бы ни было действительное положительное число α, можно найти натуральное число n такое, что $n > \alpha$. (*Аксиома Архимеда.*)

[1.12] Вообще говоря, таких пар чисел бесконечно много.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha = (A_*, A^*)$. Возьмем рациональное число $a^* \in A^*$, для выбранного числа справедлива аксиома Архимеда: найдется натуральное число n такое, что выполняется неравенство $n > a^* > \alpha$. $\triangle$

Для произвольных действительных чисел справедливы все основные свойства операций сложения, умножения и правила сравнения, которые были сформулированы для рациональных чисел в § 1.

Операции вычитания и деления определяются через операции сложения и умножения соответственно.

Определение 1.18. *Разностью* двух действительных чисел α и β называется такое действительное число γ, что справедливо равенство $\alpha = \gamma+\beta$. Операция нахождения разности действительных чисел называется *вычитанием.*

Обозначение. $\gamma = \alpha - \beta$.

Замечание 1.15. Из определения 1.18 следует важное равенство, связывающее понятия разности и противоположного числа:

1) $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$.

Доказательство. Если $\gamma = \alpha - \beta$, то $\alpha = \gamma + \beta$ и верно равенство $\alpha + (-\beta) = \gamma + \beta + (-\beta) = \gamma$. $\triangle$

В частности, имеет место равенство

2) $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$.

Определение 1.19. *Частным* двух действительных чисел α и $\beta \neq 0$ называется такое действительное число γ, что справедливо равенство $\alpha = \gamma\beta$. Операция нахождения частного действительных чисел называется *делением.*

Обозначение. $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha/\beta$.

Замечание 1.16. Для частного справедливы следующие соотношения.

3) Если $\alpha > \beta > 0$, то $1/\beta > 1/\alpha$.

Доказательство. По определению частного α_1 чисел 1 и α и частного β_1 чисел 1 и β получаем: $\alpha \cdot \alpha_1 = 1$, $\beta \cdot \beta_1 = 1$. Дважды воспользуемся свойством **12°** и свойствами **6°–7°**. Тогда $1 = \alpha \cdot$

$\alpha_1 > \beta \cdot \alpha_1 = \alpha_1 \cdot \beta$ и $\beta_1 > (\alpha_1 \cdot \beta) \cdot \beta_1 = \alpha_1 \cdot (\beta \cdot \beta_1) = \alpha_1$. Таким образом, $\beta_1 = 1/\beta > \alpha_1 = 1/\alpha$. $\triangle$

4) Если $0 > \alpha > \beta$, то $1/\beta > 1/\alpha$.

Поскольку понятия *разности* и *частного действительных чисел* определяются с помощью понятий *суммы* и *произведения действительных чисел*, то их существование и единственность вытекают из существования и единственности суммы и произведения действительных чисел соответственно.

Сохраняется преемственность введенных операций для множества рациональных чисел.

Замечание 1.17. Используя доказанные свойства **1°–13°** и введенные операции, можно доказать любое другое свойство. Например, верны следующие соотношения:

5) Если $\alpha > \beta$ и $\gamma > \delta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

6) Если $\alpha > \beta$, то $-\beta > -\alpha$.

7) Для любого α справедливо $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$.

8) Если $\beta \geqslant 0$ и $-\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta$, то $|\alpha| \leqslant \beta$.

6.5. Арифметический корень. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности арифметического корня степени n из произвольного действительного положительного числа α.

Определение 1.20. Положительное число χ называется *арифметическим корнем степени n* из действительного положительного числа α, если выполнено следующее равенство[1.13]: $\chi^n = \alpha$.

Обозначение. $\chi = \sqrt[n]{\alpha}$.

Предложение. *Арифметический корень степени n из действительного положительного числа α существует и он единственный.*

Доказательство. На множестве рациональных чисел построим сечение (X_*, X^*), где

$$X_* = \left\{ x \in \mathbb{Q}\colon \left[x \leqslant 0\right] \vee \left[[x > 0] \,\&\, [x^n < \alpha] \right] \right\}$$

[1.13] В замечании 1.13 была определена целая положительная степень действительного числа.

и

$$X^* = \{\, x \in \mathbb{Q}\colon\ [x > 0]\ \&\ [x^n > \alpha] \,\}.$$

Пусть теперь $\chi = (X_*, X^*)$ — число, определяемое этим сечением. Если $x_0 > x^* > \chi > x_* > 0$, то справедливы неравенства: $(x^*)^n > \chi^n > (x_*)^n$. Поскольку $x_* \in X_*$ и $x^* \in X^*$, то выполнено $(x^*)^n > \alpha > (x_*)^n$.

По лемме 1.6 для любого рационального числа e найдутся такие рациональные числа x_* и x^*, что для них справедливы неравенства $x_0 > x^* > \chi > x_* > 0$ и $x^* - x_* < e/(nx_0^{n-1})$. Тогда

$$\begin{aligned}(x^*)^n - (x_*)^n &= \\ &= (x^* - x_*)\bigl((x^*)^{n-1} + x_* \cdot (x^*)^{n-2} + \dots + (x_*)^{n-1}\bigr) < \\ &< \frac{e}{nx_0^{n-1}} \cdot \bigl(nx_0^{n-1}\bigr) = e.\end{aligned}$$

Из леммы 1.2 следует, что $\chi^n = \alpha$.

Единственность числа $\chi = \sqrt[n]{\alpha}$ следует из того факта, что если $\chi_1 > \chi > 0$, то и $\chi_1^n > \chi^n$. $\triangle$

§ 7. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел

7.1. Действительные числа и точки числовой прямой. Подобно тому как было установлено взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных десятичных дробей и множеством действительных чисел (теорема 1.7), можно установить такое же соответствие между действительными числами и точками числовой прямой L.

Каждой точке A числовой прямой L можно поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь, являющуюся результатом измерения отрезка OA по недостатку.

Рассмотрим процесс измерения отрезка по недостатку. Предположим, что точка A лежит правее точки O (рис. 1.1). Для измерения берем отрезок единичной длины OE.

Пусть отрезок OE помещается в отрезке OA целое число a_0 раз с остатком в виде отрезка A_0A, длина которого меньше длины отрезка OE. Тогда полученное целое число a_0 и есть результат измерения отрезка OA по недостатку с точностью до единицы.

Однако может получиться так, что отрезок OE помещается целое число $a_0 + 1$ раз в отрезке OA без остатка. В этом случае результатом измерения отрезка OA по недостатку с точностью до единицы будет целое число a_0.

Итак, найден отрезок A_0A, длина которого меньше или равна длине отрезка OE (см. рис. 1.1).

Теперь отрезок OE разделим на десять частей, возьмем отрезок OE_1, длина которого составляет 1/10 длины отрезка OE. Отрезок A_0A будем измерять с помощью отрезка OE_1 по недостатку предложенным выше способом.

Получим, что отрезок OE_1 помещается в отрезок A_0A целое число a_1 раз. Найдем отрезок A_1A, длина которого меньше или равна длине отрезка OE_1 (см. рис. 1.1).

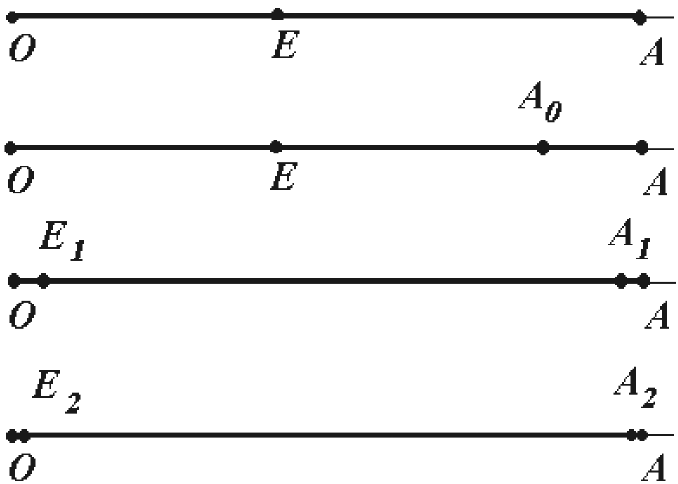

Рис. 1.1

Результатом измерения по недостатку длины отрезка OA будет десятичная дробь $a_0.a_1$, которая есть рациональное число.

Далее будем делить отрезок OE_1 на десять частей и возьмем отрезок OE_2, длина которого равна 1/10 длины отрезка OE_1. Найдем, что отрезок OE_2 помещается в отрезке A_1A целое число a_2

раз, а остаток — отрезок A_2A — имеет длину меньше или равную длине отрезка OE_2 (см. рис. 1.1). Итогом измерений на этом этапе будет десятичная дробь $a_0.a_1a_2$.

Повторяя приведенные рассуждения, на n-м шаге получим результат измерения $a_0.a_1a_2\ldots a_n$ — конечная десятичная дробь, т.е. рациональное число.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим бесконечную десятичную дробь $a_0.a_1a_2\ldots$, приближениями которой и являются найденные числа: a_0; $a_0.a_1$; $a_0.a_1a_2$; $\ldots$, $a_0.a_1a_2\ldots a_n$; $\ldots$

Таким образом, каждой точке числовой прямой ставится в соответствие единственная бесконечная десятичная дробь. Причем разным точкам A и B (например, точка B лежит справа от точки A) числовой прямой будут соответствовать разные бесконечные десятичные дроби: к результату измерения отрезка OA добавится результат измерения отрезка AB, длина которого отлична от нуля.

С другой стороны, каждой бесконечной десятичной дроби $\pm a_0.a_1\ldots a_n\ldots$ соответствует некоторая точка числовой прямой. Будем последовательно откладывать от начальной точки влево или вправо отрезки, длины которых соответствуют десятичным разрядам дроби: отрезок OE отложим a_0 раз, получим точку A_1; от точки A_1 отрезок OE_1 отложим a_1 раз и т. д. В результате этого процесса найдем точку A числовой прямой, которой соответствует данная бесконечная десятичная дробь.

Замечание 1.18. В результате измерения отрезка по недостатку мы никогда не получим бесконечную десятичную дробь вида $a_0.a_1\ldots a_n00\ldots0\ldots$ Вместо них будут возникать дроби вида $a_0.a_1\ldots(a_n-1)99\ldots9\ldots$

Из приведенных рассуждений и теоремы 1.7 следует

Теорема 1.10. *Между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой можно установить взаимно однозначное соответствие.*

В дальнейшем будем рассматривать действительное число и как точку, а множества чисел как множества точек на числовой прямой.

7.2. Некоторые числовые множества и неравенства. Введем обозначения множеств, которые будем использовать.

1. Отрезок $[\alpha,\ \beta] = \{\,\chi\colon\ \alpha \leqslant \chi \leqslant \beta\,\}$.

2. Интервал $(\alpha,\ \beta) = \{\,\chi\colon\ \alpha < \chi < \beta\,\}$.

3. Полуинтервалы

$$(\alpha,\ \beta] = \{\,\chi\colon\ \alpha < \chi \leqslant \beta\,\};\quad [\alpha,\ \beta) = \{\,\chi\colon\ \alpha \leqslant \chi < \beta\,\}.$$

4. Бесконечные интервалы

$$(\alpha,\ +\infty) = \{\,\chi\colon\ \chi > \alpha\,\};\quad (-\infty,\ \alpha) = \{\,\chi\colon\ \alpha > \chi\,\}.$$

5. Бесконечные полуинтервалы

$$[\alpha,\ +\infty) = \{\,\chi\colon\ \chi \geqslant \alpha\,\};\quad (-\infty,\ \alpha] = \{\,\chi\colon\ \alpha \geqslant \chi\,\}.$$

6. δ-окрестность точки α:

$$(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta) = \{\,\chi\colon\ |\chi-\alpha| < \delta\,\}.$$

7. Проколотая δ-окрестность точки α:

$$(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)\setminus\{\alpha\} = \{\,\chi\colon\ 0 < |\chi-\alpha| < \delta\,\}.$$

8. Правая полуокрестность точки α (правая δ-окрестность точки α): $[\alpha,\ \alpha+\delta)$.

9. Левая полуокрестность точки α (левая δ-окрестность точки α): $(\alpha-\delta,\ \alpha]$.

Докажем важные для дальнейшего изложения неравенства.

Предложение. *Для любых действительных чисел α и β справедливы неравенства, называемые неравенствами треугольника:*

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta| \tag{1.14}$$

и

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqslant |\alpha-\beta|. \tag{1.15}$$

Доказательство. Докажем (1.14). Из свойства 7) замечания 1.17 получаем

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|, \qquad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|.$$

По свойству 5) замечания 1.17 найденные неравенства можно складывать, воспользуемся свойством 2) замечания 1.15, находим $-(|\alpha|+|\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha|+|\beta|$. Применение свойства 8) замечания 1.17 заканчивает доказательство.

Для доказательства неравенства (1.15) применим очевидное равенство $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, следующее, в частности, из свойства 1) замечания 1.15, и доказанное неравенство (1.14): $|\alpha| \leqslant |\alpha - \beta| + |\beta|$. Откуда находим $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$.

Далее, из равенства $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ и неравенства (1.14) получаем $|\beta| \leqslant |\beta - \alpha| + |\alpha|$. Следовательно, выполнено неравенство $|\beta| - |\alpha| \leqslant |\beta - \alpha| = |\alpha - \beta|$. И из свойства 6) замечания 1.17 получаем $|\alpha| - |\beta| \geqslant -|\alpha - \beta|$.

Таким образом, $-|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$. Из свойства 8) замечания 1.17 следует доказываемое неравенство.

Замечание 1.19. Из неравенства (1.14) легко получить неравенство
$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \tag{1.16}$$
если использовать равенство 1) из замечания 1.15 и очевидное выражение $|-\beta| = |\beta|$.

§ 8. Счетные и несчетные множества

Определение 1.21. Множество A называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$[1.14].

Можно сказать, что все элементы счетного множества A занумерованы. Приведем несколько примеров счетных множеств.

Пример 1.10. Множество четных положительных чисел: $\{\,2,\,4,\,\ldots,\,2n,\,\ldots\,\}$. Очевидно, что это множество счетно, поскольку $2 \cdot n \longleftrightarrow n$.

Множество $\{2n/(2n+1),\ n \in \mathbb{N}\}$ — подмножество множества рациональных чисел — также является счетным.

Множество рациональных чисел вида $\{\,1/2^n,\ n \in \mathbb{N}\,\}$ счетно.

Отметим одно важное свойство счетных множеств.

Лемма 1.11. *Если множество A счетно, то любое бесконечное его подмножество $B \subset A$ будет счетным.*

Доказательство. Поскольку множество A счетно, то расположим все его элементы в порядке возрастания номеров, т. е. $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

[1.14] См. определение 1.14.

Из этой совокупности возьмем первый по порядку элемент a_{n_1}, который принадлежит множеству B, затем берем следующий по порядку элемент a_{n_2}, $n_2 > n_1$, принадлежащий B, и т. д. В результате получим выборку элементов $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ множества A, принадлежащих множеству B.

Следовательно, между элементами множества B и натуральными числами можно установить взаимно однозначное соответствие: $a_{n_k} \longleftrightarrow k$. $\triangle$

8.1. Счетность множества $\mathbb{Q}$. На первый взгляд может показаться, что множество рациональных положительных чисел не является счетным.

Действительно, если зафиксируем какое-нибудь положительное рациональное число p/q, то ему предшествует бесконечное множество других рациональных чисел. Например, $p/(2q)$, $p/(4q)$, $\ldots$, $p/(2nq)$, $\ldots$ И совсем непонятно, какому натуральному числу должно соответствовать рациональное число p/q.

Можно доказать, располагая соответствующим образом рациональные числа, что множество $\mathbb{Q}$ счетно.

Теорема 1.12. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

Доказательство. Сначала докажем, что множество положительных несократимых дробей p/q является счетным. Здесь p и q — натуральные числа.

Назовем число $H = p + q$ *высотой* рассматриваемой дроби p/q. Тогда каждой положительной несократимой дроби p/q соответствует конкретное положительное целое число H, и каждому целому положительному числу H соответствует конечное число положительных несократимых дробей.

Для того чтобы найти все такие дроби, решим уравнение $H = p+q$ в целых положительных числах. Возьмем значения p числителями, а значения q знаменателями дробей и отбросим те дроби, которые окажутся сократимыми. Например, дроби $\frac{1}{11}, \frac{5}{7}, \frac{7}{5}, \frac{11}{1}$ имеют высоту $H = 12$.

Распределим все положительные рациональные числа в классы по их высотам: 2, 3, 4, $\ldots$ Внутри классов расположим дроби по их возрастанию, а затем соединим все эти классы следующим образом:

$$\begin{array}{llllll}
\text{числа:} & \dfrac{1}{1}, & \underbrace{\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{1}\right]}, & \underbrace{\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{1}\right]}, & \underbrace{\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{1}\right]}, & \ldots \\
\text{высоты:} & 2, & \quad 3, & \quad 4, & \qquad 5, & \ldots
\end{array}$$

Расположенную таким образом совокупность рациональных чисел перенумеруем.

Следовательно, каждой положительной несократимой дроби будет соответствовать некоторое натуральное число, а каждому натуральному числу будет соответствовать единственная дробь.

Обозначим элементы занумерованного множества через a_n, $n \in \in \mathbb{N}$, тогда все элементы множества $\mathbb{Q}$[1.15] можем перенумеровать, если расположим их следующим образом:

$$0,\ a_1,\ -a_1,\ a_2,\ -a_2,\ \ldots,\ a_n,\ -a_n,\ \ldots$$

Множество $\mathbb{Q}$ является счетным. $\triangle$

8.2. Несчетность множества $\mathbb{R}$. Множество, не являющееся конечным или счетным, назовем *несчетным множеством.*

Теорема 1.13. *Множество $\mathbb{R}$ несчетно.*

Доказательство. Интервал $(0,\,1) \subset \mathbb{R}$ является несчетным множеством[1.16]. Рассуждаем от противного: пусть это множество счетно. Следовательно, все точки интервала $(0,\,1)$ пронумерованы: $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n, \ldots$ Каждая точка интервала $(0,\,1)$, в силу теоремы 1.7, представима бесконечной десятичной дробью $\alpha_n = = 0{.}a_1^n a_2^n \ldots a_m^n \ldots$ При этом если какая-то точка представима конечной десятичной дробью, то будем рассматривать только ее представление бесконечной десятичной дробью с нулями[1.17].

Рассмотрим точку $\gamma \in (0,\,1)$, представимую бесконечной десятичной дробью $0{.}c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$, где числа c_k таковы, что $c_k \neq a_k^k$ и $c_k \neq 9$, $k \in \mathbb{N}$. Число γ не равно ни одному из занумерованных чисел α_n, $n \in \mathbb{R}$, но оно принадлежит интервалу $(0,\,1)$. Полученное

[1.15] Мы рассматриваем только множество несократимых дробей, т. е. используем равенство $p/q = m/n$, если $m = k \cdot p$ и $n = k \cdot q$.

[1.16] Используем геометрическую интерпретацию множества действительных чисел — теорему 1.10.

[1.17] См. замечание 1.9.

противоречие доказывает, что интервал $(0,\ 1)$ является несчетным множеством.

Если бы множество действительных чисел было счетным, то и любое его подмножество по доказанной лемме 1.11 было бы счетно. Множество $(0,\ 1) \subset \mathbb{R}$ — несчетное множество. Следовательно, $\mathbb{R}$ несчетно. $\triangle$

ГЛАВА 2

Предел числовой последовательности

Предел — одно из основных понятий математического анализа. Введем это понятие и изучим свойства для одного весьма специфического объекта — числовой последовательности.

§ 1. Числовые последовательности

1.1. Определение и примеры. Дадим определение числовой последовательности.

Определение 2.1. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие некоторое действительное число x_n по определенному правилу. Полученное множество занумерованных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ назовем *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*. Число x_n называется *членом* последовательности.

Обозначение. $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2.1. Если обратиться к понятию *функции*, то можно сказать, что числовая последовательность — это функция f, областью определения которой является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$: $x_n = f(n)$. При этом множество значений функции f называется *множеством значений последовательности*.

Следует отличать множество значений последовательности, которое может быть как конечным, так и бесконечным множеством, от множества членов последовательности, которое всегда бесконечно, и разные члены последовательности отличаются своими номерами.

Приведем примеры числовых последовательностей и способы их задания.

Пример 2.1. Арифметическая $\{a_n\}$ и геометрическая $\{b_n\}$ прогрессии:

$$a_n = a + (n-1)\cdot d, \qquad \begin{array}{ccccc} \{a, & a+d, & \dots, & a+(n-1)\cdot d, & \dots\}, \\ 1 & 2 & \dots & n & \dots \end{array}$$

$$b_n = b \cdot q^{n-1}, \qquad \begin{array}{cccccc} \{b, & b\cdot q, & b\cdot q^2, & \dots, & b\cdot q^{n-1}, & \dots\}. \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \end{array}$$

В каждой из приведенных последовательностях известно выражение, по которому каждому номеру n ставится в соответствие некоторое действительное число. Пользуясь этим выражением, можно вычислить любой член последовательности по заданному номеру.

Множества значений обеих последовательностей бесконечны.

Пример 2.2. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, заданные формулами

$$1)\ x_n = (-1)^n + 1, \qquad 2)\ y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ n, & n = 2k. \end{cases}$$

Последовательность $\{x_n\} = \{0,\, 2,\, 0,\, 2,\, \dots\}$ имеет двухточечное множество значений: $\{0,\, 2\}$, бесконечное число членов последовательности принимает значение 0, и бесконечное число членов последовательности принимает значение 2.

Последовательность

$$\{y_n\} = \{0,\, 2,\, 0,\, 4,\, 0,\, \dots,\, 0,\, 2n,\, 0,\, \dots\}$$

имеет бесконечное множество значений. При этом значение 0 принимает бесконечное число членов последовательности.

Пример 2.3. Десятичное приближение по недостатку иррационального числа $\sqrt{2}$, приведенное в примере 1.7, представляет собой последовательность:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.41,\ x_4 = 1.414,\ x_5 = 1.4142,\ \dots$$

Нам неизвестно выражение для общего члена последовательности, однако, зная правило для приближенного вычисления корня квадратного, можем считать заданной всю последовательность десятичных приближений $\sqrt{2}$[2.1].

Пример 2.4. Последовательность типа последовательности Фибоначчи:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \qquad x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n, \qquad n \geqslant 1,$$

где α и β — заданные постоянные. Каждый член последовательности с номером, большим либо равным трем, вычисляется с помощью рекуррентной формулы, использующей значения двух предыдущих членов. Выражение для общего члена последовательности неизвестно, тем не менее можно вычислить значение любого члена последовательности с номером m, вычисляя последовательно все значения предыдущих $m-3$ членов последовательности.

Для произвольных заданных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно ввести арифметические операции.

1. *Суммой* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $z_n = x_n + y_n$.

2. *Разностью* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $z_n = x_n - y_n$.

3. *Произведением* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$ такая, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ справедливо $z_n = x_n \cdot y_n$.

4. *Частным* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $z_n = x_n / y_n$, при этом $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Ограниченные, неограниченные, бесконечно большие последовательности. Приведем определения.

Определение 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое действительное число α, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant \alpha$.

[2.1] В § 3, пример 2.27 будет доказано, что $\sqrt{c}$ вычисляется с помощью рекуррентного соотношения: $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{c}{x_n}\right)$.

Определение 2.2 в логических символах:

$$\big[\{x_n\} \text{ ограничена сверху}\big] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad x_n \leqslant \alpha\big].$$

Сформулируем отрицание определения 2.2.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной сверху*, если для любого действительного числа α найдется такой номер[2.2] $N = N(\alpha)$, что выполняется неравенство $x_N > \alpha$:

$$\big[\{x_n\} \text{ неограничена сверху}\big] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists\, N = N(\alpha): \quad x_N > \alpha\big]. \quad (2.1)$$

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое действительное число β, что для всех номеров n верно $x_n \geqslant \beta$.

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существуют такие действительные числа α и β, что для всех натуральных чисел n имеют место следующие неравенства: $\beta \leqslant x_n \leqslant \alpha$.

$$\big[\{x_n\} \text{ ограничена}\big] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad \beta \leqslant x_n \leqslant \alpha\big]. \quad (2.2)$$

Замечание 2.2. Можно сказать, что ограниченная последовательность — это последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно.

Приведем еще одно определение ограниченной числовой последовательности.

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое положительное действительное число γ, что для всех номеров n справедливо $|x_n| \leqslant \gamma$:

$$\big[\{x_n\} \text{ ограничена}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \gamma \in \mathbb{R} \quad \gamma > 0:$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad |x_n| \leqslant \gamma\big]. \quad (2.3)$$

[2.2] Для каждого числа α существует свой номер N, это и означает запись $N = N(\alpha)$.

Предложение. *Определения 2.4 и 2.5 эквивалентны.*

Доказательство. (2.2) $\Longrightarrow$ (2.3). Достаточно в качестве числа γ взять число[2.3] $\max\{\,|\alpha|,\,|\beta|\,\}$.

(2.3) $\Longrightarrow$ (2.2). Поскольку $-\gamma \leqslant x_n \leqslant \gamma$, то число α равно числу γ, а число β равно $-\gamma$. $\triangle$

Определение 2.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для каждого положительного действительного числа γ найдется такой номер $N = N(\gamma)$, что выполняется неравенство $|x_N| > \gamma$.

Запишем это определение в логических символах:

$$\big[\{x_n\} \text{ неограничена}\big] \quad \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \big[\forall\,\gamma \in \mathbb{R} \quad \gamma > 0 \quad \exists\, N = N(\gamma): \qquad |x_N| > \gamma\big]. \qquad (2.4)$$

Приведем примеры последовательностей, которые определили в этом разделе.

Пример 2.5. Последовательность $\{x_n\}$, общий член которой определяется формулой $x_n = n^{(-1)^n}$, запишем в следующем виде: $\{x_n\} = \left\{1,\,2,\,\dfrac{1}{3},\,4,\,\dfrac{1}{5},\,\ldots\right\}$. Эта последовательность ограничена снизу, поскольку $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но она неограниченная сверху, а поэтому не является ограниченной.

Докажем, что $\{x_n\}$ неограниченна сверху. Для любого положительного действительного числа α по аксиоме Архимеда найдется натуральное число n такое, что выполняется неравенство $n > \alpha/2$. Таким образом, элемент последовательности $x_{2n} = 2n$ оказывается больше действительного числа α.

Пример 2.6. Последовательность $x_n = 1/n$ ограничена, так как для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $0 < x_n \leqslant 1$.

Пример 2.7. Общий член последовательности определяется формулой: $x_n = (-1)^n n$, т. е. задана числовая последовательность $\{-1,\,2,\,-3,\,4,\,-5,\,\ldots\}$. Она неограниченная, поскольку $|x_n| = n$, а по аксиоме Архимеда для любого положительного числа α найдется натуральное число n такое, что справедливо неравенство $n > \alpha$.

[2.3] Здесь и в дальнейшем запись $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ означает наибольшее число из конечного множества чисел.

Определение 2.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* последовательностью, если для любого действительного положительного числа γ найдется такой номер N, зависящий от этого числа γ, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n| > \gamma$.

Замечание 2.3. Неравенство $|x_n| > \gamma$ для $n \geqslant N$ говорит о том, что все члены бесконечно большой последовательности, за исключением конечного $N-1$ числа членов, лежат вне любой γ-окрестности точки нуль[2.4]. Причем это число членов, конечно же, зависит от числа γ.

Отсюда следует тот факт, что последовательность продолжает оставаться бесконечно большой, если отбросить конечное число ее членов.

Используем логическую символику для записи этого определения:

$$\big[\{x_n\} \text{ бесконечно большая}\big] \stackrel{\text{def}}{=} \big[\forall\,\gamma \in \mathbb{R}\quad \gamma > 0 \quad \exists\, N = N(\gamma): \ \forall\, n \geqslant N \ \longmapsto \ |x_n| > \gamma\big]. \qquad (2.5)$$

Замечание 2.4. Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной последовательностью. Достаточно сравнить определения (2.4) и (2.5).

Не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Обратимся к примерам 2.5 и 2.7. В обоих примерах последовательности неограниченны, но последовательность примера 2.5 не является бесконечно большой. Поскольку для любого действительного числа $\gamma > 1$, неравенство $|x_n| > \gamma$ не будет выполняться для всех элементов последовательности с нечетными номерами. Последовательность примера 2.7 — бесконечно большая.

Пример 2.8. Пусть $x_n = q^n$ и $|q| > 1$, тогда последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая.

[2.4] Определение окрестности приведено в главе 1, раздел 7.2.

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся биномом Ньютона:

$$(1+\delta)^N = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} C_N^k \delta^k + \delta^N, \text{ где } C_N^k = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}. \tag{2.6}$$

Выражение (2.6), используя вид коэффициентов C_N^k, можно переписать следующим образом:

$$(1+\delta)^N = 1 + N\delta + \frac{N(N-1)}{2}\,\delta^2 + \cdots + N\delta^{N-1} + \delta^N.$$

Откуда для $\delta > 0$ следует очевидное неравенство:

$$(1+\delta)^N > N\delta. \tag{2.7}$$

Это неравенство называют *неравенством Бернулли.*

Обозначим $|q| = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Тогда, в силу (2.7), получаем $|q|^N > N\delta$. По аксиоме Архимеда для любого $\gamma > 0$ найдется такое натуральное число N, что выполняется $N > \gamma/\delta$. Следовательно, справедливо $|q|^N > \gamma$.

Так как $|q| > 1$, то $|q|^n \geqslant |q|^N$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому $|q|^n > \gamma$ для всех $n \geqslant N$. $\triangle$

1.3. Бесконечно малые последовательности. Введем еще один тип числовых последовательностей.

Определение 2.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого действительного положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Замечание 2.5. Если воспользоваться геометрической интерпретацией действительных чисел, то неравенство $|x_n| < \varepsilon$ для всех номеров $n \geqslant N$ означает, что вне ε-окрестности точки нуль лежит лишь конечное $N-1$ число членов бесконечно малой последовательности и это число зависит от ε.

Можно так же сказать, что отбрасывание конечного числа членов бесконечно малой последовательности не влияет на нее, она продолжает быть бесконечно малой.

Запишем это определение, используя логические символы:

$$\big[\{x_n\} \text{ бесконечно малая}\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \big[\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}$$
$$\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon):\ \forall\, n \geqslant N \ \longmapsto\ |x_n| < \varepsilon\big].$$

Отрицание этого определения в логических символах будет выглядеть следующим образом:

$$\big[\{x_n\} \text{ не является бесконечно малой}\big] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$$
$$\varepsilon_0 > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, N = N(n) \geqslant n: \quad |x_N| \geqslant \varepsilon_0\big].$$

Пример 2.9. Пусть $x_n = q^n$ и $0 < |q| < 1$, тогда последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая.

Доказательство. Обозначим $1/|q| = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Из неравенства (2.7) следует, что $\dfrac{1}{|q|^N} > N\delta$ или $|q|^N < \dfrac{1}{N\delta}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется свое число $N \in \mathbb{N}$ такое, что справедливо неравенство $N > \dfrac{1}{\delta\varepsilon}$ (аксиома Архимеда), т. е. верно $\dfrac{1}{N\delta} < \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $|q|^N < \varepsilon$.

Поскольку $|q| < 1$, то $|q|^n \leqslant |q|^N$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому $|q|^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. $\triangle$

Пример 2.10. Бесконечно малой будет последовательность $x_n = \dfrac{1}{n^m}$, здесь $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число.

Доказательство. Заметим, что $\dfrac{1}{n^m} \leqslant \dfrac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда по аксиоме Архимеда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, например, $N = [1/\varepsilon] + 1$. Следовательно, выполнено неравенство $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Для всех $n \geqslant N$ справедливо $\dfrac{1}{n^m} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. $\triangle$

Пример 2.11. Последовательность $x_n = n^k/a^n$, где $a > 1$ — фиксированное действительное число и k — фиксированное натуральное число, представляет собой бесконечно малую последовательность.

Доказательство. Будем рассматривать те номера n, которые больше $2k$. Пусть $a = 1 + \delta$, $\delta > 0$, тогда, используя бином Ньютона, получаем неравенство: $a^n = (1 + \delta)^n > C_n^{k+1}\delta^{k+1}$. Таким образом:

$$\frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\delta^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\delta^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} =$$
$$= \frac{(k+1)!}{\delta^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k}{n}\right)} \frac{1}{n} \leqslant \frac{2^k\,(k+1)!}{\delta^{k+1}} \frac{1}{n} = \frac{C}{n}.$$

Здесь применено очевидное неравенство: $1 - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{2}$ при $n > 2m$, где $m = 1, 2, \ldots, k$. Через C обозначили выражение, зависящее от k, это фиксированное число.

Для любого положительного числа ε по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число N, что справедливо неравенство $N > \dfrac{C}{\varepsilon}$. Например, в качестве номера N можно взять число $[C/\varepsilon] + 1$, при этом учтем, чтобы N было больше $k + 1$. Таким образом, имеет место неравенство $\dfrac{C}{N} < \varepsilon$. Для всех $n \geqslant N$ выполнено $\dfrac{C}{n} \leqslant \dfrac{C}{N} < \varepsilon$. Окончательно приходим к неравенству $\dfrac{n^k}{a^n} < \varepsilon$, которое справедливо для всех $n \geqslant N$. △

1.4. Свойства бесконечно малых числовых последовательностей. Определим и докажем свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 2.1. *Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно малые последовательности. По определению бесконечно малой последовательности получаем: для любого положительного числа ε найдется такой номер N_1, зависящий от ε, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется $|x_n| < \varepsilon/2$. Для этого же $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_2, зависящий от ε, что $|y_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N_2$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда в силу неравенств (1.14) и (1.16) для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется

$$|x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ являются бесконечно малыми. △

Следствие. *Сумма любого* к о н е ч н о г о *числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 2.2. *Бесконечно малая числовая последовательность ограничена.*

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon = 1$. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, следовательно, найдется такой номер n_1, что для всех номеров $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|x_n| < 1$.

Рассмотрим число $\gamma = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1\}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant \gamma$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. △

Теорема 2.3. *Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой последовательности есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ — ограниченная последовательность, причем для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|y_n| \leqslant \gamma$.

Для любого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|x_n| \leqslant \varepsilon/\gamma$. Тогда $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{\gamma} \cdot \gamma = \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$.

Следовательно, последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая числовая последовательность. △

Следствие. *Произведение любого* к о н е ч н о г о *числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство опирается на последовательное применение теорем 2.2 и 2.3.

Теорема 2.4. *Если все члены (или все члены, начиная с некоторого номера) бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу γ, то $\gamma = 0$.*

Доказательство. Пусть существует номер n_0 такой, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ выполняется $x_n = \gamma$.

Будем доказывать от противного: пусть $\gamma \neq 0$. Тогда для $\varepsilon = |\gamma|/2 > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) > n_0$, что для всех $n \geqslant N$ выполняется $|x_n| < \varepsilon$. Это неравенство означает, что $|\gamma| < |\gamma|/2$, т. е. $1 < 1/2$. Полученное противоречие означает, что наше предположение $\gamma \neq 0$ было неверно. $\triangle$

Докажем утверждение, связывающее бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Теорема 2.5. 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность $\{1/x_n\}$, которая представляет собой бесконечно малую последовательность.*

2. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая такая, что $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{1/x_n\}$ есть бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. 1. Отметим один важный факт для бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$: может существовать лишь конечное число членов бесконечно большой последовательности, равных нулю. Действительно, для $\gamma = 1$ найдется такой номер n_1, что для всех $n \geqslant n_1$ выполняется $|x_n| > 1$.

Пусть $|x_n| \neq 0$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) \geqslant n_0$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|x_n| > 1/\varepsilon$. Следовательно, $|1/x_n| < \varepsilon$. Последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно малая.

2. Для любого $\gamma > 0$ найдется такой номер $N = N(\gamma)$, что для всех $n \geqslant N$ выполняется $|x_n| < 1/\gamma$. Тогда для всех $n \geqslant N$ верно

неравенство $|1/x_n| > \gamma$. Последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно большая. $\triangle$

Следствие. 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность $\{x_n/y_n\}$, которая представляет собой бесконечно малую последовательность.*

2. *Если последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена снизу числом $C > 0$, а последовательность $\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность такая, что $y_n \neq 0$ для всех номеров n, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ есть бесконечно большая последовательность.*

Доказательство этого следствия следует непосредственно из теорем 2.3, 2.5 и определений 2.7 и 2.8 бесконечно большой и бесконечно малой последовательности соответственно.

Пример 2.12. Последовательность $x_n = 1/\sqrt[k]{n}$, $k \geqslant 2$, бесконечно малая.

Доказательство. Сначала докажем, что числовая последовательность $y_n = \sqrt[k]{n}$ бесконечно большая и воспользуемся утверждением 1 теоремы 2.5.

Для любого действительного положительного числа γ по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число N, что выполняется неравенство $N > \gamma^k$, которое равносильно неравенству $\sqrt[k]{N} > \gamma$. Тогда для всех $n \geqslant N$ справедливо $\sqrt[k]{n} \geqslant \sqrt[k]{N} > \gamma$.

Итак, последовательность $y_n = \sqrt[k]{n}$ бесконечно большая, тогда последовательность $x_n = 1/y_n$ бесконечно малая. $\triangle$

§ 2. Сходящиеся последовательности

2.1. Определения и примеры. Дадим несколько эквивалентных определений сходящейся последовательности.

Определение 2.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое действительное число α, что последовательность $\{x_n - \alpha\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность. Число α называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$[2.5].

[2.5] Еще говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к α.

Обозначение. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$; $x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Замечание 2.6. Бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Следующее утверждение непосредственно следует из определения 2.9.

Предложение. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу α, то любой член этой последовательности имеет вид $x_n = \alpha + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.*

Если воспользоваться определением 2.8 бесконечно малой последовательности, то можно определить сходящуюся последовательность следующим образом.

Определение 2.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует действительное число α, что для любого действительного положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. Число α называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Запишем определения сходящейся последовательности и предела последовательности в логических символах:

$$\big[\{x_n\} \text{ сходящаяся}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \ \forall\, n \geqslant N \ \longmapsto \ |x_n - \alpha| < \varepsilon\big]. \quad (2.8)$$

$$\big[\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, \varepsilon > 0 \\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \ \forall\, n \geqslant N \ \longmapsto \ |x_n - \alpha| < \varepsilon\big]. \quad (2.9)$$

Отрицание утверждения (2.8) и (2.9):

$$\big[\{x_n\} \text{ не является сходящейся}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\ \exists\, \varepsilon_\alpha > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_0 \geqslant n : \ |x_{n_0} - \alpha| \geqslant \varepsilon_\alpha\big]. \quad (2.10)$$

$$\big[\,\text{Число } \alpha \text{ не является пределом } \{x_n\}\big] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, \varepsilon_0 > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_0 \geqslant n: \ |x_{n_0} - \alpha| \geqslant \varepsilon_0\big]. \quad (2.11)$$

Приведем еще одно определение сходящейся последовательности. Обратимся к определению 2.10 и заметим, что неравенство $|x - \alpha| < \varepsilon$ определяет на числовой прямой множество, которое мы назвали ε-окрестностью точки α (см. гл. 1, раздел 7.2).

Определение 2.11. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое действительное число α, что в любой ε-окрестности числа α находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, зависящего от числа ε. Число α называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 2.7. Из определения 2.11 следует тот факт, что отбрасывание конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость и не меняет значение предела последовательности.

Приведем примеры сходящихся последовательностей.

Пример 2.13. Последовательность $x_n = \dfrac{n^2 + n - 1/2}{2n^2 - 2n + 1}$ сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 2$ (см. замечание 2.7), тогда

$$x_n - \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n - 1/2}{2n^2 - 2n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2n - 1}{2n^2 - 2n + 1} \leqslant \frac{1}{n - 1}.$$

Для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число N, что имеет место неравенство $N > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для найденного числа N выполняется $\dfrac{1}{N-1} < \varepsilon$.

Для всех $n \geqslant N$ справедливо $\dfrac{1}{n-1} \leqslant \dfrac{1}{N-1} < \varepsilon$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|x_n - 1/2| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. $\triangle$

Пример 2.14. Последовательность $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 1$, имеет предел, равный 1.

Доказательство. Поскольку $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$, введем обозначения: $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$. Покажем, что последовательность α_n бесконечно малая. Используем неравенство Бернулли (2.7): $a = (1+\alpha_n)^n > n\alpha_n$, следовательно, $\alpha_n < a/n$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число N, что $N > a/\varepsilon$. Таким образом, для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется $\alpha_n < \dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{a}{N} < \varepsilon$.

Каждый член последовательности $\{x_n\}$ имеет следующий вид: $x_n = \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ и $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Таким образом (см. предложение), последовательность x_n сходится к числу 1. $\triangle$

Пример 2.15. Последовательность $x_n = \sqrt[n]{n}$ сходится, а ее предел равен $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Доказательство. Обозначим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$ для любого $n > 1$. Докажем, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая. Из очевидного неравенства

$$(1+\alpha_n)^n > C_n^2\alpha_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2$$

для $n > 1$ получаем $n = (1+\alpha_n)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}\,\alpha_n^2$. Следовательно, $\alpha_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

Далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ находим натуральное число N такое, что выполнено неравенство $N > 1 + \dfrac{2}{\varepsilon^2}$ (аксиома Архимеда). Таким образом, для всех $n \geqslant N$ выполнено

$$\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{N-1}} < \varepsilon,$$

и последовательность $\{\alpha_n\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность. $\triangle$

Замечание 2.8. Если последовательность $\{x_n\}$ есть бесконечно большая последовательность и для достаточно больших номеров n все ее члены сохраняют знак, то, в соответствии со знаком, будем писать: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Обратим внимание, что $\pm\infty$ — это не числа, а символы, с которыми мы уже встречались в замечании 1.7.

Для бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ в общем случае выполняется $|x_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$.

2.2. Свойства сходящихся последовательностей. Приведем основные свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 2.6. *Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$, причем $\alpha \neq \beta$. Тогда (см. предложение) $x_n = \alpha + \alpha_n$ и $x_n = \beta + \beta_n$, а последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые.

Вычтем из одного выражения x_n другое, получаем $\gamma = \alpha - \beta = \beta_n - \alpha_n = \gamma_n$. Последовательность $\{\gamma_n\}$ бесконечно малая (теорема 2.1), и все ее члены постоянны и равны действительному числу γ, следовательно, $\gamma = 0$ (теорема 2.4), т. е. $\alpha = \beta$. Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение было неверно. $\triangle$

Теорема 2.7. *Любая сходящаяся числовая последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, тогда (см. предложение) $x_n = \alpha + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а следовательно, последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена (теорема 2.2). Существует такое положительное число β, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|\alpha_n| \leqslant \beta$.

Из неравенства треугольника (1.14) получим

$$|x_n| = |\alpha + \alpha_n| \leqslant |\alpha| + |\alpha_n| \leqslant |\alpha| + \beta = \gamma > 0.$$

Неравенство $|x_n| \leqslant \gamma$ выполнено для всех номеров n. $\triangle$

Замечание 2.9. Отметим важный факт. Любая сходящаяся последовательность является ограниченной (теорема 2.7), однако *не всякая ограниченная последовательность сходится*.

Пример 2.16. Последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена: $|x_n| \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность не является сходящейся.

Достаточно доказать, что числа ± 1 не являются пределом последовательности $\{x_n\}$. Поскольку для любого $|\alpha| \neq 1$ можно указать такую ε-окрестность точки α, что в ней не содержится ни одного члена последовательности.

Ни одно из чисел ± 1 не может быть пределом последовательности, поскольку вне ε-окрестности, например точки 1 при $\varepsilon < 1/2$, содержится бесконечно много членов последовательности (все x_n с нечетными номерами). Аналогичное верно и для точки -1.

Теорема 2.8. *Если числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, то последовательность $\{|x_n|\}$ тоже сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |\alpha|$.*

Доказательство теоремы следует из неравенства треугольника (1.15) и определения предела последовательности (2.9).

Замечание 2.10. В обратную сторону утверждение теоремы 2.8, вообще говоря, неверно. *Из сходимости последовательности $\{|x_n|\}$ не следует сходимость последовательности $\{x_n\}$.*

Например, для последовательности, рассмотренной в примере 2.16, $x_n = (-1)^n$, справедливо, что $|x_n| = 1$ и, следовательно, последовательность $\{|x_n|\}$ сходится к 1. Однако последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся.

2.3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Сформулируем и докажем теоремы, которые позволяют облегчить процесс нахождения предела последовательности, не обращаясь каждый раз к этому определению.

Теорема 2.9. *Сумма (разность) сходящихся числовых последовательностей есть сходящаяся числовая последовательность. Предел суммы (разности) сходящихся последовательностей равен сумме (разности) пределов этих последовательностей.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$, тогда $x_n = \alpha + \alpha_n$ и $y_n = \beta + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности.

Последовательность $\gamma_n = (x_n \pm y_n) - (\alpha \pm \beta) = \alpha_n \pm \beta_n$ представляет собой бесконечно малую числовую последовательность (теорема 2.1).

Следовательно, последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и ее предел равен $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \alpha \pm \beta$. $\triangle$

Теорема 2.10. *Произведение конечного числа сходящихся числовых последовательностей есть сходящаяся числовая последовательность. Предел произведения этих последовательностей равен произведению пределов.*

Доказательство. Рассмотрим случай двух сходящихся последовательностей[2.6] $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих пределы α и β соответственно. Для элементов этих последовательностей выполнено $x_n = \alpha + \alpha_n$ и $y_n = \beta + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности.

Тогда последовательность

$$\gamma_n = x_n \cdot y_n - \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha_n + \alpha \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

бесконечно малая (теоремы 2.2, 2.3 и 2.1). Поэтому справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \alpha \cdot \beta$. $\triangle$

Теорема 2.11. *Для сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta \neq 0$, начиная с некоторого номера n_0, определено их частное $z_n = x_n/y_n$, и предел последовательности $\{z_n\}$ равен α/β.*

Доказательство. Докажем, что для всех $n \geqslant n_0$ существует частное $z_n = x_n/y_n$.

Пусть $\varepsilon = |\beta|/2 > 0$, тогда существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $|y_n - \beta| < |\beta|/2$. Из неравенства треугольника (1.15) находим

$$\big||y_n| - |\beta|\big| \leqslant |y_n - \beta| < |\beta|/2,$$

[2.6] Для произведения конечного числа последовательностей доказательство аналогично.

откуда следуют неравенства $-|\beta|/2 < |y_n| - |\beta|$ и $|y_n| > |\beta|/2$. В частности, справедливо $1/|y_n| < 2/|\beta|$.

Таким образом, начиная с номера n_0, все элементы последовательности $\{y_n\}$ не равны нулю, и имеет смысл частное последовательностей $z_n = x_n/y_n$.

Пусть $x_n = \alpha + \alpha_n$ и $y_n = \beta + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha + \alpha_n)\beta - (\beta + \beta_n)\,\alpha}{y_n\beta} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{\alpha}{\beta}\,\beta_n\right) = \frac{1}{y_n}\gamma_n.$$

Последовательность $\{1/y_n\}$ ограничена, а последовательность γ_n бесконечно малая (теоремы 2.1 и 2.3). Применение еще раз теоремы 2.3 заканчивает доказательство. $\triangle$

Введенные арифметические операции над сходящимися последовательностями и над их пределами облегчают процесс доказательства сходимости ряда непростых последовательностей и нахождения их пределов.

Пример 2.17. Пусть задана последовательность

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}, \quad b_k \neq 0.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a_k}{b_k}$.

Числитель и знаменатель дроби разделим на n^k. Заметим, что последовательности $\{1/n^m\}$, $1 \leqslant m \leqslant k$, бесконечно малые (см. пример 2.10), бесконечно малыми будут последовательности $\{a_{k-m}/n^m\}$ (теорема 2.3), поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k-m}/n^m = 0$ для каждого $1 \leqslant m \leqslant k$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_k + \lim\limits_{n\to\infty}(a_{k-1}/n) + \dots + \lim\limits_{n\to\infty}(a_0/n^k)}{b_k + \lim\limits_{n\to\infty}(b_{k-1}/n) + \dots + \lim\limits_{n\to\infty}(b_0/n^k)} = \frac{a_k}{b_k}.$$

Здесь применены теоремы 2.9 и 2.11.

Пример 2.18. Пусть $k - m > 0$ и $b_k \neq 0$. Предел последовательности

$$x_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

равен нулю. Поскольку, разделив числитель и знаменатель на n^k, получим в числителе бесконечно малую последовательность, а предел знаменателя равен b_k. Здесь применены теоремы 2.9 и 2.11.

Пример 2.19. Предположим, что $m-k>0$, $b_k \neq 0$ и $a_m \neq 0$. Последовательность

$$x_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}, \quad m-k>0,$$

является бесконечно большой, так как

$$x_n = n^{m-k}\,\frac{a_m + a_{m-1}/n + \dots + a_1/n^{m-1} + a_0/n^m}{b_k + b_{k-1}/n + \dots + b_1/n^{k-1} + b_0/n^k}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (см. замечание 2.8), причем знак определяет число a_m/b_k.

Пример 2.20. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{2\cdot x_{n-2} + x_{n-1}}{3}, \qquad n \geqslant 3.$$

Очевидно, что $x_n - x_{n-1} = -\dfrac{2}{3}\,(x_{n-1} - x_{n-2})$, следовательно, для $n \geqslant 2$ выполняется $x_n - x_{n-1} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}(b-a)$. Обозначим $y_n = x_n - x_{n-1}$, тогда

$$\sum_{j=2}^{n} y_j = x_n - x_1 = x_n - a = \\ = (b-a)\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right] = \\ = \frac{3}{5}\,(b-a)\cdot\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Поэтому $x_n = a + \dfrac{3}{5}\,(b-a)\cdot\left[1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a + \frac{3}{5}(b-a)\cdot\left[1 - \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = a + \frac{3}{5}(b-a)$$

(см. пример 2.9 и замечание 2.7).

2.4. Неопределенные выражения. Исследуя арифметические операции с последовательностями, мы предполагали, что последовательности имеют предел (число), а для частного — последовательность, стоящая в знаменателе, не является бесконечно малой.

Что происходит, если, например, обе последовательности являются бесконечно большими? Чему в этом случае равен предел их суммы (разности) или предел их частного? Чему равен предел частного двух бесконечно малых последовательностей? Чему равен предел произведения бесконечно малой и бесконечно большой последовательности? Здесь перечислены наиболее важные встречающиеся случаи, для которых знание пределов каждой последовательности не всегда позволяет судить о пределе последовательности, являющейся результатом арифметической операции над ними.

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Если $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то частное двух последовательностей $\dfrac{x_n}{y_n}$ представляет собой при $n \to \infty$ *неопределенность вида* $\dfrac{0}{0}$.

Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть последовательностью любого типа и даже может не иметь смысла.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Предположим, что $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = \dfrac{1}{n}$ (пример 2.10), тогда их частное $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = 1$ — постоянная последовательность.

2) Пусть $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ и $y_n = \dfrac{1}{n^2}$ (пример 2.10), тогда справедливо, что $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n n$ — бесконечно большая последовательность (пример 2.7).

3) Заданы последовательности $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, тогда их частное $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая последовательность.

4) Для последовательностей

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ — четно}, \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ — нечетно}, \end{cases}$$

частное $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ не определено для четного n.

Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие последовательности, то частное этих последовательностей представляет собой при $n \to \infty$ *неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Частное двух бесконечно больших последовательностей рассмотрим на примерах.

1) Пусть $x_n = (-1)^n n$ (пример 2.7) и $y_n = n$, тогда их частное $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ — ограниченная последовательность, которая не является сходящейся (замечание 2.9).

2) Предположим, что $x_n = n^2$ и $y_n = n$, тогда последовательность $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = n$ — бесконечно большая.

3) Теперь $x_n = n$, $y_n = n^2$, тогда их частное $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая последовательность.

4) Для $x_n = 2n^2 - n + 1$ и $y_n = n^2 + n$ последовательность $z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + n}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2$ (см. пример 2.17).

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то произведение двух последовательностей $x_n \cdot y_n$ представляет собой при $n \to \infty$ *неопределенность вида* $0 \cdot \infty$.

Несколько примеров произведения бесконечно малой последовательности и бесконечно большой последовательности.

1) Для последовательностей $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = 2n$ их произведение $z_n = x_n \cdot y_n = 2$ есть постоянная последовательность.

2) Рассмотрим $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, а $y_n = n$, тогда $z_n = x_n \cdot y_n = \dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая последовательность.

3) Предположим, что $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = n^2$, тогда последовательность $z_n = x_n \cdot y_n = n$ бесконечно большая.

4) Если заданы $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = (-1)^n n$, то их произведение $z_n = x_n \cdot y_n = (-1)^n$ есть ограниченная последовательность, не имеющая предела.

Неопределенность вида $\infty - \infty$. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие последовательности одного знака, то разность последовательностей $x_n - y_n$ представляет собой при $n \to \infty$ *неопределенность вида* $\infty - \infty$.

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие последовательности разных знаков, то сумма двух последовательностей $x_n + y_n$ представляет собой при $n \to \infty$ *неопределенность вида* $\infty - \infty$.

Разность двух бесконечно больших последовательностей одного знака рассмотрим на примерах.

1) Пусть $x_n = 3n$ и $y_n = \dfrac{3n^2 + n + 1}{n + 1}$ (пример 2.19) и верны следующие равенства: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (замечание 2.8). Тогда последовательность $z_n = x_n - y_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2$ (пример 2.17).

2) Последовательности $x_n = 3n^2$ и $y_n = \dfrac{3n^2 + n + 1}{n + 1}$ согласно примеру 2.19 являются бесконечно большими и справедливы следующие равенства: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, тогда разность последовательностей $z_n = x_n - y_n = \dfrac{3n^3 - n - 1}{n + 1}$ есть бесконечно большая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$ (пример 2.19).

3) Пусть $x_n = 3n$ и $y_n = \dfrac{3n^3 - n}{n^2}$. Тогда выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, а разность этих последовательностей $z_n = x_n - y_n = \dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая последовательность.

4) Предположим, что $x_n = 3n^2 + (-1)^n$ и $y_n = 3n^2$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Тогда ограничена последовательность $z_n = x_n - y_n = (-1)^n$, и она не имеет предела.

В случае возникновения указанных неопределенностей необходимо в каждом конкретном случае исследовать полученные выражения для того, чтобы найти предел последовательности. Такое исследование называется *раскрытием неопределенности*.

2.5. Предельный переход в неравенствах. Приведем ряд свойств сходящихся последовательностей, связанных с неравенствами.

Теорема 2.12. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу α и для всех номеров, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \geqslant \beta$ $\left[x_n \leqslant \beta\right]$, то и для предела последовательности так же справедливо неравенство $\alpha \geqslant \beta$ $\left[\alpha \leqslant \beta\right]$.*

Доказательство. Пусть существует номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено $x_n \geqslant \beta$.

Проведем доказательство методом от противного: предположим, что выполнено неравенство $\alpha < \beta$.

Тогда для числа $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ найдется такой номер N, причем $N > n_0$, что для всех номеров $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. Следовательно, из неравенства $x_n - \alpha < \beta - \alpha$ находим, что $x_n < \beta$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Для неравенства $x_n \leqslant \beta$ доказательство проводится аналогично. $\triangle$

Из теоремы 2.12 легко получаются следующие следствия.

Следствие. *Если, начиная с некоторого номера, все члены сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant y_n$, то и пределы этих последовательностей также удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $z_n = x_n - y_n \geqslant 0$ (неравенство выполнено для всех номеров, начиная с некоторого).

Тогда по теореме 2.12 выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \geqslant 0$, а по теореме 2.9 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. △

Следствие. *Если все члены сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a, b]$, то и предел α последовательности $\{x_n\}$ также принадлежит этому отрезку.*

Доказательство. Поскольку $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех номеров, то и для предела α по теореме 2.12 также выполнены неравенства $a \leqslant \alpha \leqslant b$. △

Замечание 2.11. Если в теореме 2.12 нестрогие неравенства $x_n \geqslant \beta$ $\left[x_n \leqslant \beta\right]$ заменить на $x_n > \beta$ $\left[x_n < \beta\right]$, то для предела α последовательности $\{x_n\}$ остаются нестрогие неравенства $\alpha \geqslant \beta$ $\left[\alpha \leqslant \beta\right]$.

Например, для числовой последовательности $x_n = \sqrt[n]{a}$, где число $a > 1$, выполняется $x_n > 1$ для всех номеров n. Однако предел этой последовательности равен 1 (см. пример 2.14).

Теорема 2.13. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ и для всех номеров, начиная с некоторого номера n_0, выполнены неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$.*

Доказательство. Заметим, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $x_n - \alpha \leqslant y_n - \alpha \leqslant z_n - \alpha$. Поэтому справедливо неравенство $|y_n - \alpha| \leqslant \max\{|x_n - \alpha|, |z_n - \alpha|\}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера N_1 и N_2 такие, что для всех $n \geqslant N_1$ выполняется $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ и для всех $n \geqslant N_2$ выполняется $|z_n - \alpha| < \varepsilon$.

Пусть $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$, тогда для всех $n \geqslant N$ выполняется $|y_n - \alpha| < \varepsilon$. В силу произвольности числа ε получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$. △

§ 3. Монотонные последовательности

3.1. Определения и примеры. Рассмотрим еще один важный тип числовых последовательностей.

Определение 2.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* $\big[$*невозрастающей*$\big]$, если для всех номеров, начиная с некоторого, выполняется неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$ $\big[x_{n+1} \leqslant x_n\big]$.

Запишем эти определения с помощью символов:

$$\big[\{x_n\}\ \text{неубывающая}\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, n_0 \colon \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \longmapsto \quad x_{n+1} \geqslant x_n\big]. \tag{2.12}$$

$$\big[\{x_n\}\ \text{невозрастающая}\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, n_0 \colon \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \longmapsto \quad x_{n+1} \leqslant x_n\big]. \tag{2.13}$$

Замечание 2.12. Очевидно, что если числовая последовательность $\{x_n\}$, например, является неубывающей (см. символьное определение (2.12)), то для любых номеров $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ таких, что $m > n$, справедливо неравенство $x_m \geqslant x_n$.

Аналогичные утверждения можно сделать и для других монотонных и строго монотонных последовательностей.

Определение 2.13. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* $\big[$*убывающей*$\big]$, если для всех номеров, а быть может, для всех, начиная с некоторого, выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ $\big[x_{n+1} < x_n\big]$.

Приведем символьную запись этих определений:

$$\big[\{x_n\}\ \text{возрастающая}\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, n_0 \colon \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \longmapsto \quad x_{n+1} > x_n\big]. \tag{2.14}$$

$$\big[\{x_n\}\ \text{убывающая}\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, n_0 \colon \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \longmapsto \quad x_{n+1} < x_n\big]. \tag{2.15}$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности будем называть *монотонными* последовательностями, а возрастающие и убывающие последовательности — *строго монотонными* последовательностями.

Приведем несколько примеров монотонных и строго монотонных последовательностей.

Пример 2.21. Последовательность

$$\{1,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/3, \ldots, \underbrace{1/n \ldots 1/n}_{n}, \ldots\}$$

невозрастающая. Последовательность

$$\{1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots \underbrace{n, \ldots, n}_{n},\ \ldots\}$$

неубывающая.

Пример 2.22. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, приведенную в примере 2.13: $x_n = \dfrac{n^2+n-1/2}{2n^2-2n+1}$. Для этой последовательности

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{2(2n^2-1)}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)} < 0$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ убывающая.

Пример 2.23. Последовательность $x_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n^2+n}$ является возрастающей для $n \geqslant 3$, поскольку

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} > 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 3.$$

Замечание 2.13. Обратим внимание на тот факт, что возрастающие и неубывающие последовательности ограничены снизу числом $\alpha = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ (выражения (2.14) и (2.12)). Число $\beta = \max\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ (выражения (2.15) и (2.13)) ограничивает сверху убывающую и невозрастающую последовательности.

Поэтому когда мы говорим об ограниченной монотонной последовательности, то по теореме о существовании точной верхней [нижней] грани существует точная верхняя грань для возрастающей и неубывающей последовательностей, и существует точная нижняя грань для убывающей и невозрастающей последовательностей.

3.2. Предел монотонной последовательности. В этом разделе предполагаем, что последовательность монотонна, начиная с номера $n_0 = 1$ (см. символьные выражения (2.12) – (2.15)).

Теорема 2.14. *Если монотонная* [*строго монотонная*] *последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена, то она имеет предел.*

Для возрастающих и неубывающих последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$, *а для убывающих и невозрастающих последовательностей* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$.

Доказательство. Докажем теорему для возрастающей последовательности. В остальных случаях доказательства аналогичны.

Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху. Поэтому существует точная верхняя грань последовательности $\alpha = \sup\limits_n x_n$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Из определения точной верхней грани последовательности следует, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется $x_n \leqslant \alpha$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $x_N > \alpha - \varepsilon$. Полученные два условия запишем в виде неравенств: $0 \leqslant \alpha - x_N < \varepsilon$.

Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая, поэтому для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется $x_N \leqslant x_n \leqslant \alpha$. Откуда находим: $0 \leqslant \alpha - x_n \leqslant \alpha - x_N < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha = \sup\limits_n x_n$. $\triangle$

Ограниченность монотонной последовательности является необходимым (теорема 2.7) и достаточным (теорема 2.14) условием ее сходимости. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2.15. *Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Используя теорему 2.14, докажем важную лемму. Ее часто называют *леммой о вложенных отрезках* или *леммой Кантора*.

Определение 2.14. Система отрезков $\{[a_n,\, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой стягивающихся отрезков*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняются вложения $[a_{n+1},\, b_{n+1}] \subset [a_n,\, b_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Лемма 2.16. (Кантор). *Для системы стягивающихся отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам системы.*

Доказательство. Докажем существование такой точки. Заметим, что последовательность $\{a_n\}$ неубывающая, а последовательность $\{b_n\}$ невозрастающая. Обе эти последовательности ограничены, так как $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_1$ и $a_1 \leqslant b_n \leqslant b_1$ для любого номера n. Поэтому по теореме 2.14 существуют пределы указанных последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n a_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_n b_n = \beta$. Поскольку (теорема 2.9) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = \beta - \alpha$, а по условию этот предел равен нулю, то $\alpha = \beta$. Это и есть точка, принадлежащая всем отрезкам системы.

Единственность будем доказывать методом от противного. Пусть существует точка $\gamma \neq \alpha$, принадлежащая всем отрезкам системы. Для этих чисел выполнено либо $\gamma > \alpha$, либо $\alpha > \gamma$. Предположим, что $\alpha > \gamma$, тогда для любого номера n справедливо $b_n - a_n \geqslant \alpha - \gamma = \varepsilon > 0$. В этой ε-окрестности нуля не лежит ни один член последовательности $\{b_n - a_n\}$, но по условию эта последовательность бесконечно малая. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение было неверно и точка, принадлежащая всем отрезкам, единственная. $\triangle$

Замечание 2.14. Лемма перестает быть справедливой, если рассматривать вместо отрезков интервалы. Например, система интервалов $(a_n,\, b_n) = \big(0,\, 1/n\big)$ такова, что для любого номера n верно $\big(0,\, 1/(n+1)\big) \subset \big(0,\, 1/n\big)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Тем не менее не существует точки, принадлежащей всем интервалам системы. Докажем этот факт.

Предположим противное. Пусть есть точка $x_0 > 0$, принадлежащая всем интервалам системы, следовательно, интервал $(0,\, x_0)$ содержится в каждом интервале $\big(0, 1/n\big)$ для $n \in \mathbb{N}$. Однако, по аксиоме Архимеда, найдется такое натуральное число n_0, что $n_0 > 1/x_0$. Тем самым получается, что $\big(0,\, 1/n_0\big) \subset \big(0,\, x_0\big)$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

3.3. Примеры применения теоремы о пределе монотонной последовательности. Теорема 2.14 говорит только о существовании предела числовой последовательности, но нахождение самого предела требует отдельного исследования последовательности в каждом конкретном случае. Рассмотрим несколько примеров числовых последовательностей.

Пример 2.24. Задана последовательность $x_n = x^n/n!$, $x > 0$ — фиксированное число. Заметим, что справедливо равенство

$$x_{n+1} = x_n \cdot \bigl[x/(n+1)\bigr]. \tag{2.16}$$

По аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число n_0, что $n_0 > x$. Следовательно, для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $x/(n+1) < 1$. Таким образом, из (2.16) получаем, что последовательность $\{x_n\}$, начиная с номера n_0, является убывающей.

Для всех членов последовательности $\{x_n\}$ имеют место следующие неравенства: $0 < x_n \leqslant \max\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ (см. замечание 2.13), т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

По теореме 2.14 последовательность $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ имеет предел, который обозначим $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$. Кроме этого, справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ (замечание 2.7), а последовательность $\{x/(n+1)\}$ бесконечно малая.

Перейдя к пределу в (2.16), получим следующее равенство: $\alpha = \alpha \cdot 0$, т. е. $\alpha = 0$.

Пример 2.25. Найдем предел последовательности, заданной рекуррентным выражением $x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n)$, где $0 < x_1 < 1$.

Докажем, что $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ для любого номера $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $0 < x_n < 1$, то $2 - x_n > 1$, из рекуррентного соотношения находим $x_{n+1} > x_n$. Далее получаем, что

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n) = 1 - (1 - x_n)^2 < 1.$$

Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограниченная, из теоремы 2.14 следует, что существует предел $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$, причем $\alpha \neq 0$. Из рекуррентного выражения следует, что $\alpha = 1$.

Пример 2.26. Пусть a и b — положительные числа и $a > b$. Число $\mu = \dfrac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* чисел a и b, а число ν, удовлетворяющее равенству $\dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$, называется *средним гармоническим* чисел a и b. Очевидно, что $\nu = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Числа μ и ν удовлетворяют неравенствам: $a > \mu > \nu > b$. То, что оба эти числа лежат между числами a и b, проверяется непосредственно. Неравенство $\mu > \nu$ получается из неравенства $\mu > \delta$, где $\delta = \sqrt{ab}$ — *среднее геометрическое* чисел a и b, поскольку

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0.$$

Далее из $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 > ab$ следует, что $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{2ab}{a+b}$, таким образом, доказали, что $\mu > \nu$.

Определим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следующим образом:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},$$

$$\ldots$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},$$

$$\ldots$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$a > a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > b.$$

Последовательность $\{a_n\}$ убывающая, а $\{b_n\}$ возрастающая, и обе последовательности ограничены. По теореме 2.14 существуют пределы $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$: $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Для того чтобы найти эти числа, перейдем к пределу в выражении $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, получаем, что $\alpha = \beta$. Далее, достаточно заметить, что $a_1 b_1 = ab$ и $a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n b_n = ab$, таким образом, $\alpha = \beta = \sqrt{ab}$.

Пример 2.27. Последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентным соотношением: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{c}{x_n}\right)$, причем x_1 — любое положительное число и $c > 0$ — фиксированное число.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $x_n > 0$. Используя неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}, \quad n \geqslant 2.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом $\sqrt{c}$.

Последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая для всех номеров, начиная со второго, поскольку $x_n \geqslant \sqrt{c}$ при $n \geqslant 2$ и верно неравенство $x_{n+1} - x_n = \dfrac{c - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$. Следовательно, $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех $n \geqslant 2$.

Применяя теорему 2.14, получаем, что существует предел α последовательности $\{x_n\}$.

Для того чтобы найти α, перейдем к пределу в рекурретном соотношении, находим: $\alpha = \sqrt{c}$.

3.4. Число *e*. Исследуем сходящуюся последовательность, предел которой есть иррациональное, не встречавшееся нам ранее, число. Это число играет важную роль в математическом анализе.

Пусть $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Используя бином Ньютона, запишем выражение для x_n следующим образом:

$$x_n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \\ + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Сравним это выражение с выражением для x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Выражение для x_{n+1} содержит на одно слагаемое больше (все слагаемые положительны), и значения, стоящие в круглых скобках, больше соответствующих значений в выражении для x_n. Поэтому $x_{n+1} > x_n$ для любого номера $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поскольку

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

использованы неравенства $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ для $n > 2$ и $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Итак, для всех номеров $n > 2$ выполняется $2 < x_n < 3$.

По теореме 2.14 существует предел рассматриваемой последовательности, который обозначается через e. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

По следствию из теоремы 2.12 получаем, что $2 < e < 3$. Число e иррациональное — это основание натурального логарифма, оно представляется следующей бесконечной десятичной дробью: $e = 2.718281828459045\ldots$

3.5. Теорема Штольца. Приведем теорему, которая позволяет исследовать сходимость частного $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ в случае неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2.17. (Штольц.) *Пусть $\{y_n\}$ — возрастающая бесконечно большая числовая последовательность, последовательность $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ сходится к α, тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ также сходится к α.*

Доказательство. Последовательность $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ сходится к числу α, поэтому $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Зафиксируем число n_0 и пусть $n > n_0$, тогда справедливы равенства:

$$\begin{gathered}
x_{n_0+1} - x_{n_0} = \alpha(y_{n_0+1} - y_{n_0}) + \alpha_{n_0+1}(y_{n_0+1} - y_{n_0}),\\
x_{n_0+2} - x_{n_0+1} = \alpha(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) + \alpha_{n_0+2}(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1} - x_{n-2} = \alpha(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}),\\
x_n - x_{n-1} = \alpha(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).
\end{gathered}$$

Сложим равенства, получим выражение

$$x_n - x_{n_0} = \alpha(y_n - y_{n_0}) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \alpha_k(y_k - y_{k-1}). \tag{2.17}$$

Поскольку последовательность $\{y_n\}$ возрастающая бесконечно большая, то номер n_0 выберем таким образом, что для всех $n > n_0$ выполняется $y_n > 0$. Тогда из равенства (2.17) находим

$$\frac{x_n}{y_n} - \alpha = \frac{x_{n_0} - \alpha y_{n_0}}{y_n} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \alpha_k \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}$$

и (неравенство треугольника)

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\alpha\right| \leqslant \frac{|x_{n_0}-\alpha y_{n_0}|}{y_n}+\sum_{k=n_0+1}^{n}|\alpha_k|\,\frac{y_k-y_{k-1}}{y_n}. \tag{2.18}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Номер $N' > n_0$ выберем таким образом, чтобы для всех номеров $n > N'$ выполнялось неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon/2$. Это можно сделать в силу того, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Заметим, что последовательность $\left\{\dfrac{|x_{n_0}-\alpha y_{n_0}|}{y_n}\right\}$ является бесконечно малой, поэтому найдется номер $N > N'$ такой, что неравенство $\dfrac{|x_{n_0}-\alpha y_{n_0}|}{y_n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ справедливо для всех номеров $n > N$.

Таким образом, для всех $n > N$ из (2.18) следует

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{y_n-y_{n_0}}{y_n} < \varepsilon,$$

здесь учтено, что $\dfrac{y_n-y_{n_0}}{y_n} < 1$.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найден такой номер N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\alpha\right| < \varepsilon$. $\triangle$

Замечание 2.15. Теорема 2.17 остается справедливой, если последовательность $\left\{\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$ бесконечно большая и стремится к бесконечности определенного знака.

Применение теоремы Штольца 2.17 позволяет доказать следующее утверждение, принадлежащее Коши.

Предложение. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то тот же предел имеет последовательность $b_n = \dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}$.*

Доказательство. Обозначим $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и $y_n = n$, находим $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n$. Тогда, по теореме Штольца: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. △

§ 4. Подпоследовательности. Частичные пределы

4.1. Подпоследовательности и их свойства. Введем важное понятие — понятие подпоследовательности числовой последовательности.

Определение 2.15. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, а $\{k_n\}$ — в о з р а с т а ю щ а я последовательность натуральных чисел. Из последовательности $\{x_n\}$ выберем ее члены с номерами, соответствующими членам последовательности $\{k_n\}$, и расположим их в том же порядке: $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ Полученную числовую последовательность назовем *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение. $\{x_{k_n}\}$, $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Здесь номер n означает порядковый номер члена последовательности $\{x_{k_n}\}$, а k_n — порядковый номер члена исходной последовательности $\{x_n\}$, поэтому $k_n \geqslant n$.

Обратим также внимание на тот факт, что подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ образована из членов последовательности $\{x_n\}$ и порядок следования членов в подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ такой же, как и в самой последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 2.16. Сама последовательность $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность, при этом $k_n = n$.

Опишем свойства подпоследовательностей.

Предложение. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу α, то и любая ее подпоследовательность сходится к этому же числу α.*

Доказательство. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к α означает, что для любого наперед заданного положительного числа ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, начиная с номера N, выполняется неравенство $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.

Пусть $\{x_{k_n}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Поскольку $k_N \geqslant N$, то для любого номера $n \geqslant N$ выполняется $k_n \geqslant k_N \geqslant N$. Поэтому для всех $k_n \geqslant N$ выполняется следующее неравенство: $|x_{k_n} - \alpha| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$. △

Предложение. *Если все подпоследовательности данной последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то пределы этих подпоследовательностей равны одному и тому же числу.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ является своей подпоследовательностью ($k_n = n$), то по условию последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся. Применение предыдущего предложения заканчивает доказательство. △

Предложение. *Каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой.*

Доказательство. По определению бесконечно большой последовательности: для любого положительного числа γ найдется такой номер $N = N(\gamma)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется $|x_n| > \gamma$. Следовательно, для любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ верно неравенство $k_N \geqslant N$. Поэтому для всех номеров $n \geqslant N$ имеет место $k_n \geqslant k_N \geqslant N$. Таким образом, справедливо неравенство $|x_{k_n}| > \gamma$. △

Предложение. *Из любой сходящейся числовой последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Может иметь место, по крайней мере, один из следующих случаев: в любой ε-окрестности точки α есть

1) бесконечно много членов последовательности, равных α;
2) бесконечно много членов последовательности, меньших α;
3) бесконечно много членов последовательности, больших α.

Каждый из случаев рассмотрим отдельно.

Для случая 1) в качестве монотонной подпоследовательности возьмем все члены, равные α так, как они стоят по порядку, т.е. $x_{k_n} = \alpha$.

Рассмотрим случай 2). На любом интервале $(\alpha - \varepsilon, \alpha)$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Пусть $x_{k_1} < \alpha$, зафиксируем этот член последовательности. Рассмотрим интервал (x_{k_1}, α), на нем возьмем член с номером k_2 таким, что $k_2 > k_1$, следовательно, $x_{k_2} > x_{k_1}$. Далее рассмотрим интервал (x_{k_2}, α), на нем выберем элемент x_{k_3} такой, что $k_3 > k_2$ и $x_{k_3} > x_{k_2}$.

Продолжая описанный процесс, получим возрастающую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ исходной последовательности, которая сходится к числу α.

Случай 3) рассматривается аналогично, только будет строиться убывающая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. $\triangle$

4.2. Частичные пределы. Если последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, то ее подпоследовательности могут иметь пределы. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ не сходится, но ее подпоследовательности $x_{k_n} = x_{2n} = 1$ и $x'_{k_n} = x_{2n-1} = -1$ имеют пределы, равные 1 и -1 соответственно.

Определение 2.16. Предел подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Множество частичных пределов может быть не только конечным, но счетным и даже быть несчетным множеством (пока мы оставляем в стороне вопрос о том, может ли множество частичных пределов быть пустым).

Пример 2.28. Рассмотрим последовательность

$$1,\ \underbrace{1,\ \frac{1}{2}}_{2},\ \underbrace{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}}_{3},\ \ldots,\ \underbrace{1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n}}_{n},\ \ldots$$

Множество X частичных пределов числовой последовательности счетно: $X = \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$.

Пример 2.29. Последовательность x_n зададим следующим образом: если номер n записан с помощью цифр, например, $n = mkl$, где цифры m, k, l принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, 9\}$ и $m \neq 0$, то $x_{mkl} = 0.mkl$.

Каждая конечная десятичная дробь, принадлежащая отрезку $[0.1,\ 1]$, является значением бесконечного числа членов последовательности. Например, значение 0.123 принимают члены последовательности с номерами 123, 1230, 12300, ... Таким образом, каждая конечная десятичная дробь есть частичный предел нашей последовательности $\{x_n\}$.

Любое действительное число α, которое представляется бесконечной десятичной дробью $\alpha = 0.a_1a_2\ldots a_n\ldots$, $a_1 \neq 0$, является пределом подпоследовательности x_{a_1}, $x_{a_1a_2}$, ..., $x_{a_1a_2\ldots a_n}$, ...

Следовательно, множеством частичных пределов указанной последовательности будет отрезок $[0.1,\ 1]$.

Введем еще одно важное определение.

Определение 2.17. Число α называется *предельной точкой последовательности* $\{x_n\}$, если в любой ее ε–окрестности содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 2.17. Предел последовательности является ее предельной точкой. Однако произвольная последовательность может иметь предельную точку (и не одну), которая не будет ее пределом. В любой ε-окрестности предельной точки содержится бесконечно много членов последовательности, но не все (сравните с определением 2.11).

Для произвольной числовой последовательности $\{x_n\}$ гораздо проще определить ее предельные точки, чем частичные пределы. В этом случае надо строить подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$, которые сходятся.

Поэтому справедлив критерий частичного предела.

Теорема 2.18. *Для того чтобы число α являлось частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы α являлось предельной точкой этой последовательности.*

Доказательство. Необходимость. Пусть α — частичный предел последовательности $\{x_n\}$, т. е. существует такая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$. Это означает, что (см. определение 2.11) в любой ε-окрестности точки α содержатся все члены подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$, за исключением их конечного числа, т. е. бесконечно много членов подпоследовательности

$\{x_{k_n}\}$, а поэтому и последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, α — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

Достаточность. Пусть α — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Для $\varepsilon = 1$ найдется номер k_1 — номер первого члена числовой последовательности $\{x_n\}$, лежащего на интервале $(\alpha - 1,\, \alpha + 1)$. Для $\varepsilon = 1/2$ найдется такой номер k_2 — номер первого члена последовательности, отличного от x_{k_1}, что $k_2 > k_1$, лежащего на интервале $(\alpha - 1/2,\, \alpha + 1/2)$. На n-м шаге для $\varepsilon = 1/n$ найдется номер k_n — номер первого члена последовательности, отличный от $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-1}}$, $k_n > k_{n-1}$, лежащий на интервале $(\alpha - 1/n,\, \alpha + 1/n)$, и т.д.

Продолжая процесс, построим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящуюся к α. $\triangle$

Теорема 2.19. *Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то она содержит бесконечно большую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = +\infty$.*

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то она содержит бесконечно большую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = -\infty$.

Доказательство. Предложение докажем для неограниченной сверху последовательности. Заметим, что отбрасывание конечного числа членов неограниченной сверху последовательности не влияет на ее поведение, она продолжает оставаться неограниченной сверху.

Из определения (2.1) неограниченной сверху последовательности для числа $\gamma = 1$ найдется такой номер k_1, что член x_{k_1} последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_{k_1} > 1$. Отбросим первые k_1 членов последовательности и рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=k_1+1}^{\infty}$. Для нее при $\gamma = 2$ найдется такой номер k_2, что член x_{k_2} последовательности $\{x_n\}_{n=k_1+1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству $x_{k_2} > 2$, и т. д.

Продолжая процесс, построим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такую, что $x_{k_n} > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для любого $\gamma > 0$ найдется номер $N = N(\gamma)$, что $N > \gamma$ (аксиома Архимеда), т. е. $x_{k_N} > N > \gamma$. Поэтому для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется $x_{k_n} > n \geqslant N > \gamma$. Следовательно, по определению бесконечно большой последовательности (2.5) следует, что подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ бесконечно большая. $\triangle$

4.3. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Множество частичных пределов ограниченной последовательности не пусто. Это доказывается в теореме Больцано – Вейерштрасса.

Теорема 2.20. (Больцано — Вейерштрасс.) *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, существуют такие числа α и β, что для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие неравенства: $\beta \leqslant x_n \leqslant \alpha$.

Разобьем отрезок $[\beta,\, \alpha]$ точкой γ пополам. Тогда хоть в одной половине $[\beta,\, \gamma]$ или $[\gamma,\, \alpha]$ содержится бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. В противном случае, и на всем отрезке $[\beta,\, \alpha]$ содержалось бы их конечное число. Пусть $[\beta_1,\, \alpha_1]$ — та из половин отрезка, которая содержит бесконечное множество членов последовательности (если обе половины отрезка такие, то выбираем любую из них).

Далее, из отрезка $[\beta_1,\, \alpha_1]$ выбираем его половину — отрезок $[\beta_2,\, \alpha_2]$, который содержит бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. На n шаге выбираем отрезок $[\beta_n,\, \alpha_n]$, который также содержит бесконечное множество членов последовательности. Продолжая этот процесс, получаем последовательность отрезков $\{[\beta_n,\, \alpha_n]\}$.

Каждый из построенных отрезков $[\beta_n,\, \alpha_n]$ содержится в предыдущем $[\beta_{n-1},\, \alpha_{n-1}]$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta}{2^n} = 0$$

(пример 2.9 и теорема 2.3). Таким образом, имеем систему стягивающихся отрезков $\{[\beta_n,\, \alpha_n]\}$. Применяя лемму о вложенных отрезках 2.16, получаем, что существует единственная точка γ_0, принадлежащая всем отрезкам $[\beta_n,\, \alpha_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \gamma_0$.

Теперь построим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, которая сходится к γ_0. В качестве x_{k_1} возьмем первый член последовательности $\{x_n\}$, который содержится в отрезке $[\beta_1,\, \alpha_1]$. В качестве x_{k_2} возьмем первый член последовательности $\{x_n\}$, следующий за x_{k_1}, который содержится в $[\beta_2,\, \alpha_2]$, и т. д. В качестве x_{k_n} возьмем первый из членов последовательности $\{x_n\}$, следующий за x_{k_1}, x_{k_2}, $\ldots$, $x_{k_{n-1}}$ и содержащийся в $[\beta_n,\, \alpha_n]$, и т. д. Возможность такого выбора обеспечивается тем, что каждый отрезок последовательности $\{[\beta_n,\, \alpha_n]\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$.

Поскольку $\beta_n \leqslant x_{k_n} \leqslant \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma_0$, то (теорема 2.13) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma_0$. $\triangle$

Из теоремы Больцано — Вейерштрасса получается важное следствие, которое назовем *теоремой о единственном частичном пределе*.

Теорема 2.21. *Если последовательность ограничена и имеет единственный частичный предел, то она сходится к этому частичному пределу.*

Доказательство. Пусть для любого номера n выполняется $\alpha \geqslant x_n \geqslant \beta$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma$. Тогда (теорема 2.12) выполняется $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \beta$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$.

От противного: пусть число γ не является пределом последовательности $\{x_n\}$. Тогда по отрицанию определения 2.10 найдется положительное число ε_0, что вне интервала $(\gamma - \varepsilon_0,\, \gamma + \varepsilon_0)$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Пусть для определенности бесконечно много членов последовательности лежит на отрезке $[\gamma + \varepsilon_0, \alpha]$. По теореме Больцано — Вейерштрасса на отрезке $[\gamma + \varepsilon_0, \alpha]$ существует частичный предел, отличный от γ. Это противоречит единственности частичного предела, поэтому наше предположение было неверно. $\triangle$

Из теоремы 2.20 и теоремы 2.19 следует, что множество X частичных пределов произвольной последовательности $\{x_n\}$ не пусто. В частности, оно может содержать и символы $\pm\infty$, если последовательность не является ограниченной. Причем само множество X может быть любым: конечным, счетным (пример 2.28), несчетным (пример 2.29). Поэтому естественно ввести следующие определения.

Определение 2.18. Точная верхняя грань множества X частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = \sup X.$

Определение 2.19. Точная нижняя грань множества X частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = \inf X.$

Очевидно, что если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = +\infty$, если последовательность $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = -\infty$.

4.4. Лемма Гейне — Бореля. Пусть X — произвольное множество из $\mathbb{R}$. Обозначим через $\Pi = \{\Delta\}$ множество (конечное или бесконечное) интервалов Δ, которое обладает свойством: для любой точки $x \in X$ найдется, по крайней мере, один интервал Δ множества Π такой, что $x \in \Delta$. Множество интервалов Π назовем *покрытием множества* X.

Пример 2.30. Множество

$$\Pi_1 = \{\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}\}\,, \quad \Delta_n = \big(a_n,\, b_n\big) = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{n}\right),$$

является покрытием интервала $(0,\, 1)$.

Множество Π_1 таково, что не существует конечного подмножества Π_1' множества Π_1, являющегося покрытием интервала $(0,\, 1)$. Рассмотрим последовательность точек $x_n = a_n$. Для того чтобы покрыть всю последовательность точек, необходимо бесконечное число интервалов Δ_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$, поскольку $\Delta_{n+1} \cap \Delta_n = (a_n,\, b_{n+1})$.

Пример 2.31. Рассмотрим интервалы

$$\Delta_n' = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad \Delta_n'' = \left(\frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Множество $\Pi_2 = \{\Delta'_n,\, \Delta''_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, и оно является покрытием отрезка $[0,\, 1]$.

Для фиксированного натурального числа n множество $\Pi^n = \Delta'_n \cup \Delta''_n \subset \Pi_2$ конечно и является покрытием отрезка $[0,\, 1]$.

Этот факт не случаен, а именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.22. (Гейне — Борель.) *Из любого покрытия* Π *отрезка* $[a,\, b]$ *можно выделить конечное множество интервалов* $\Pi' \subset \Pi$, *которое также является покрытием отрезка* $[a,\, b]$.

Доказательство. От противного: предположим, что из произвольного бесконечного покрытия Π отрезка $[a,\, b]$ нельзя выделить конечное множество интервалов, которые образуют покрытие отрезка $[a,\, b]$.

Разделим отрезок $[a,\, b]$ пополам, из двух половин возьмем ту, для которой нет конечного покрытия, состоящего из интервалов $\Delta \in \Pi$. Если обе половины отрезка удовлетворяют этому условию, то выберем любую, обозначим ее $[a_1,\, b_1]$.

Полученный отрезок снова делим пополам и из двух половин выбираем ту, для которой нет конечного множества интервалов Δ из Π, образующих покрытие отрезка. Обозначим выбранный отрезок $[a_2,\, b_2]$.

Продолжая процесс, получим систему стягивающихся отрезков (см. определение 2.14):

$$[a_1,\, b_1] \supset [a_2,\, b_2] \supset \dots \supset [a_n,\, b_n] \supset \dots$$

Каждый из отрезков построенной системы обладает следующим свойством: не существует конечное множество интервалов Δ из Π, являющееся покрытием отрезка $[a_n,\, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

По лемме Кантора 2.16 найдется точка $c \in [a,\, b]$, принадлежащая всем отрезкам $[a_n,\, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Множество Π — покрытие отрезка $[a,\, b]$, поэтому для точки c найдется такой интервал $\Delta_c \in \Pi$, что $c \in \Delta_c$.

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к c, следовательно, начиная с некоторого номера n_0, все отрезки $[a_n,\, b_n]$ лежат внутри интервала Δ_c. Таким образом, интервал Δ_c является конечным покрытием всех отрезков $[a_n,\, b_n]$, $n \geqslant n_0$.

Полученное противоречие доказывает лемму. $\triangle$

§ 5. Критерий Коши сходимости последовательности

Как мы убедились на примерах, нахождение пределов некоторых последовательностей требует довольно тонких методов. Можно ли, не находя предела последовательности, дать ответ о существовании ее предела только по виду самой последовательности? Ответ на этот вопрос дает критерий Коши. Предварительно введем новое понятие для последовательностей.

5.1. Фундаментальные последовательности. Определим еще один важный тип числовых последовательностей — *фундаментальные последовательности*.

Определение 2.20. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех номеров $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполняется $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Запишем это определение и его отрицание с помощью символов:

$$\bigl[\{x_n\} \text{ фундаментальная}\bigr] \overset{\text{def}}{=} \bigl[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N = N(\varepsilon): \\ \forall\,n \geqslant N \quad \& \quad \forall\,m \geqslant N \quad \longmapsto \quad |x_n - x_m| < \varepsilon\bigr]. \quad (2.19)$$

$$\bigl[\{x_n\} \text{ не фундаментальна}\bigr] \overset{\text{def}}{=} \bigl[\exists\,\varepsilon_0 > 0: \quad \forall\,n \in \mathbb{N} \\ \exists\,n_0 \geqslant n \quad \& \quad \exists\,m_0 \geqslant n: \quad |x_{n_0} - x_{m_0}| \geqslant \varepsilon_0\bigr]. \quad (2.20)$$

Сформулируем эквивалентное определение фундаментальной последовательности.

Определение 2.21. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для любого номера $n \geqslant N$ и для любого номера $p \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Приведем символьную запись сформулированного определения и его отрицания:

$$\big[\{x_n\}\text{ фундаментальная}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,N=N(\varepsilon):$$
$$\forall\,n\geqslant N \quad \& \quad \forall\,p\in\mathbb{N} \quad \longmapsto \quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon\big]. \qquad (2.21)$$

$$\big[\{x_n\}\text{ не фундаментальна}\big] \overset{\text{def}}{=} \big[\exists\,\varepsilon_0>0: \quad \forall\,n\in\mathbb{N}$$
$$\exists\,n_0\geqslant n \quad \& \quad \exists\,p_0\in\mathbb{N}: \quad |x_{n_0+p_0}-x_{n_0}|\geqslant\varepsilon_0\big]. \qquad (2.22)$$

Следующая лемма описывает свойство фундаментальных последовательностей.

Лемма 2.23. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon=1$, тогда, по определению фундаментальной последовательности, найдется такой номер n_1, что для всех $p\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n_1+p}-x_{n_1}|<1$. Таким образом, все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с номера n_1+1, содержатся в интервале $(x_{n_1}-1,\, x_{n_1}+1)$, а вне этого множества могут находиться только элементы $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n_1}$.

Поскольку

$$|x_{n_1+p}|=|x_{n_1+p}-x_{n_1}+x_{n_1}|\leqslant|x_{n_1+p}-x_{n_1}|+|x_{n_1}|<1+|x_{n_1}|,$$

то определим число

$$\gamma=\max\{|x_1|,\,|x_2|,\ldots,|x_{n_1-1}|,\,|x_{n_1}|+1\}.$$

Тогда для всех номеров $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n|\leqslant\gamma$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. $\triangle$

5.2. Критерий Коши. Критерий сходимости числовой последовательности — это необходимое и достаточное условие ее сходимости.

Теорема 2.24. (Коши.) *Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Последовательность $\{x_n\}$ сходится и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n\geqslant N$

выполняется неравенство $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$. Заметим, что для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо $|x_{n+p} - \alpha| < \varepsilon/2$, если $n \geqslant N$. Следовательно, для всех $n \geqslant N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - \alpha) - (x_n - \alpha)| \leqslant \\ \leqslant |x_{n+p} - \alpha| + |x_n - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, тогда эта последовательность ограничена (см. лемму 2.23). По теореме Больцано — Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$, тогда докажем, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен α.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n \geqslant N_1$ и $m \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Для этого же $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N_2$ справедливо $|x_{k_n} - \alpha| < \varepsilon/2$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Зафиксируем номер $k_n > N$, тогда для всех номеров $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - \alpha| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - \alpha| \leqslant \\ \leqslant |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к α. $\triangle$

Приведем несколько примеров.

Пример 2.32. Рассмотрим следующую последовательность: $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, здесь a_k — действительные числа, удовлетворяющие условию $|a_k| \leqslant q^k$, где q — фиксированное число и $0 < q < 1$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, следовательно (теорема 2.24), является сходящейся последовательностью.

Действительно, для любых n и p выполняется

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \\ + \dots + |a_{n+p}| \leqslant q^{n+1}\bigl(1 + q + \dots + q^{p-1}\bigr) = \\ = q^{n+1}\frac{1 - q^p}{1 - q} < \frac{q}{1 - q} \cdot q^n.$$

Последовательность $\{q^n\}$ бесконечно малая (см. пример 2.9). Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|q^n| < \varepsilon \cdot \dfrac{1-q}{q}$.

Таким образом, получили $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для всех номеров $n \geqslant N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна (выражение (2.21)).

Пример 2.33. Пусть $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}$. Докажем, что последовательность не является фундаментальной. Следовательно, по критерию Коши (теорема 2.24) она не имеет предела.

Воспользуемся выражением (2.22). Для любого номера $n \in \mathbb{N}$ возьмем $n_0 = p_0 = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Итак, существует $\varepsilon_0 = 1/2$ такое, что для любого номера n найдется номер $n_0 = n$ и найдется $p_0 = n$ такие, что справедливо $|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0$. Последовательность $\{x_n\}$ не фундаментальна.

Пример 2.34. Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством:

$$\Big[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a = a(\varepsilon) \quad \& \quad \exists\, N = N(\varepsilon): \\ \forall\, n \geqslant N \quad \longmapsto \quad |x_n - a| < \varepsilon/2\Big].$$

Какими свойствами обладает последовательность $\{x_n\}$?

Для любых $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$ справедливо $|x_{n+p} - a| < \varepsilon/2$. Поэтому для всех $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$ верно

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - a) - (x_n - a)| \leqslant \\ \leqslant |x_{n+p} - a| + |x_n - a| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится (теорема 2.24).

ГЛАВА 3

Предел функции. Непрерывность

В этой главе введем понятия *предела функции в точке* и *непрерывности функции в точке*, исследуем свойства функций, имеющих предел, непрерывных в точке и на множестве, а также докажем непрерывность элементарных функций.

§ 1. Функции

1.1. Определение и примеры. Введем одно из основных понятий этой главы — понятие *функции*.

Определение 3.1. *Функцией* называется правило f, по которому каждому числу x множества $X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие единственное число y множества $\mathscr{Y} \subset \mathbb{R}$.

Обозначение. $f\colon X \longrightarrow \mathscr{Y}, \quad y = f(x)$.

Множество X называется *областью определения* функции f. Множество $Y \subseteq \mathscr{Y}$ такое, что для любого числа $y \in Y$ существует число $x \in X$, удовлетворяющее равенству $y = f(x)$, называется *множеством значений* функции f. Переменная x называется *аргументом* функции f.

Приведем примеры.

Пример 3.1. Функция $y = x^2$ имеет своей областью определения X всю числовую ось $\mathbb{R}$, а множество ее значений Y есть бесконечный полуинтервал $[0, +\infty)$.

Для действительных чисел мы ввели α^n — целую положительную степень n действительного числа α (см. замечание 1.13).

Пример 3.2. Для функции $y = \sqrt{1 - |x|}$ областью определения X является отрезок $[-1, 1]$ и множество значений $Y = [0, 1]$.

Арифметический корень $\sqrt[n]{\alpha}$ степени n из действительного числа $\alpha > 0$ определен в разделе 6.5 главы 1.

Пример 3.3. *Функция Дирихле* $y = D(x)$ определяется следующим образом: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{J}. \end{cases}$ Для нее область определения X совпадает со всей числовой прямой $\mathbb{R}$, а множество значений Y есть конечное множество $\{0,\, 1\}$, состоящее из двух точек.

Пример 3.4. Введем функцию $y = \operatorname{sgn} x$ (от латинского signum — знак), используется обозначение: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$
Для этой функции выполняется $X = \mathbb{R}$ и $Y = \{-1,\, 0,\, 1\}$.

Пример 3.5. Целая часть числа x — функция $y = [x]$. Целая часть действительного числа определена в замечании 1.10.

Область определения X функции совпадает со всей числовой осью $\mathbb{R}$, а множество ее значений Y есть множество $\mathbb{Z}$ целых чисел.

1.2. Суперпозиция функций. Введем *понятие суперпозиции функций.*

Определение 3.2. Пусть заданы функции $f : X \longrightarrow Y$, $y = f(x)$, и $g : \widetilde{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = g(y)$, при этом $Y \subseteq \widetilde{Y}$[3.1]. Функция $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = h(x)$, такая, что $h(x) = g(f(x))$, называется *суперпозицией* (или *сложной* функцией) функций f и g.

Обозначение. $h = g \circ f$.

Пример 3.6. Функция примера 3.2 является суперпозицией функции $y = f(x) = 1 - |x|$, где $f : [-1,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$, и функции $z = g(y) = \sqrt{y}$, здесь $g : [0,\, +\infty) \longrightarrow [0,\, +\infty)$. Таким образом, $h = g \circ f$, где $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - |x|}$ и $h : [-1,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$.

1.3. Функции, ограниченные на множестве. В этом разделе предполагаем, что $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Определения этого раздела аналогичны определениям § 4 гл. 1.

[3.1] Символ $Y \subseteq \widetilde{Y}$ означает, что либо $Y \subset \widetilde{Y}$, либо $Y = \widetilde{Y}$.

Определение 3.3. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant A$. Число A называется *верхней гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X.

Определение 3.4. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует такое число $B \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant B$. Число B называется *нижней гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X.

Определение 3.5. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если существуют такие действительные числа A и B, что для всех точек $x \in X$ выполняются неравенства $B \leqslant f(x) \leqslant A$.

Приведем эквивалентное определение.

Определение 3.6. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует такое действительное число $C > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются неравенства $|f(x)| \leqslant C$.

Запишем это определение с помощью логических символов:

$$\big[y = f(x) \quad \text{ограничена на} \quad X\big] \quad \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \big[\exists\, C > 0 \,:\, \forall\, x \in X \longmapsto |f(x)| \leqslant C\big]. \quad (3.1)$$

Приведем отрицание утверждения (3.1):

$$\big[y = f(x) \quad \text{не является ограниченной на} \quad X\big] \quad \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \big[\forall\, C > 0 \,:\, \exists\, x_C \in X \,:\, |f(x_C)| > C\big]. \quad (3.2)$$

Пример 3.7. Функция $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ ограничена снизу на множестве $X_1 = (0, +\infty)$, для этой функции выполняется неравенство $f(x) > 0$ на множестве X_1.

На множестве $X_2 = (-\infty, 0)$ функция $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ ограничена сверху: $f(x) < 0$ для любого $x \in X_2$.

Пример 3.8. Функция Дирихле $y = D(x)$ ограничена на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Выполняется $0 \leqslant D(x) \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Введем понятия *точной верхней* (*нижней*) грани функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, на множестве X.

Определение 3.7. Действительное число α называется *точной верхней гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия:

1) α — верхняя грань функции $y = f(x)$ на X;

2) для любого положительного числа ε найдется такая точка $x_\varepsilon \in X$, что $f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$.

Обозначение. $\alpha = \sup\limits_{x\in X} f(x)$.

Перепишем определение 3.7 с помощью символов:

$$\bigl[\alpha = \sup_{x\in X} f(x)\bigr] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \bigl[\forall x \in X \longmapsto \alpha \geqslant f(x)\bigr]\,\& \\ \bigl[\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X\colon\ f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon\bigr]. \quad (3.3)$$

Определение 3.8. Действительное число β называется *точной нижней гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия:

1) β — нижняя грань функции $y = f(x)$ на X;

2) для любого положительного числа ε найдется такая точка $x_\varepsilon \in X$, что $\beta + \varepsilon > f(x_\varepsilon)$.

Обозначение. $\beta = \inf\limits_{x\in X} f(x)$.

Перепишем определение 3.7 с помощью символов:

$$\bigl[\beta = \inf_{x\in X} f(x)\bigr] \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \bigl[\forall x \in X \longmapsto f(x) \geqslant \beta\bigr]\,\& \\ \bigl[\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X\colon\ \beta + \varepsilon > f(x_\varepsilon)\bigr]. \quad (3.4)$$

Следующее предложение является простым следствием теоремы 1.4 о существовании точной верхней (нижней) грани множества, ограниченного сверху (снизу).

Предложение. *Если функция $y = f(x)$ ограничена сверху (снизу) на множестве X, то у этой функции существует на множестве X точная верхняя (нижняя) грань.*

1.4. Монотонные функции. В этом разделе определим важные для дальнейшего функции — функции, *монотонные* на их множествах определения.

Определение 3.9. Функция $y = f(x)$ на множестве X называется *неубывающей* $\big[$*невозрастающей*$\big]$, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $\big[f(x_1) \geqslant f(x_2)\big]$.

Запишем эти определения с помощью символов:

$$\big[y = f(x) \text{ неубывающая на } X\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \ \longmapsto\ f(x_1) \leqslant f(x_2)\big]. \quad (3.5)$$

$$\big[y = f(x) \text{ невозрастающая на } X\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \ \longmapsto\ f(x_1) \geqslant f(x_2)\big]. \quad (3.6)$$

Определение 3.10. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется *возрастающей* $\big[$*убывающей*$\big]$ на множестве X, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ $\big[f(x_1) > f(x_2)\big]$.

Запишем эти определения с помощью символов:

$$\big[y = f(x) \text{ возрастающая на } X\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \ \longmapsto\ f(x_1) < f(x_2)\big]. \quad (3.7)$$

$$\big[y = f(x) \text{ убывающая на } X\big] \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \big[\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \ \longmapsto\ f(x_1) > f(x_2)\big]. \quad (3.8)$$

Пример 3.9. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ является неубывающей на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 3.10. Функция $y = x + \operatorname{sgn} x$ — возрастающая на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Неубывающие и невозрастающие функции на множестве X будем называть *монотонными* функциями, а возрастающие и убывающие функции на множестве X — *строго монотонными*.

1.5. Четные и нечетные функции. Будем рассматривать симметричные относительно нуля числовые множества $X \subset \mathbb{R}$, т. е. если $x_0 \in X$, то и $-x_0 \in X$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на симметричном относительно нуля числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 3.11. Назовем функцию $y = f(x)$ *четной*, если для любого значения $x \in X$ выполняется следующее равенство: $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения $x \in X$ выполняется $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = \operatorname{sgn} x$ является нечетной на $\mathbb{R}$, функция $y = x + \operatorname{sgn} x$ будет нечетной на всей числовой оси.

Замечание 3.1. Графики четных функций симметричны относительно прямой $x = 0$ (оси ординат), а графики нечетных функций симметричны относительно точки $x = 0$

§ 2. Предел функции в точке

2.1. Определения предела функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α, т. е. она определена на $\{x : \ 0 < |x - \alpha| < \Delta\}$ (см. раздел 7.2 главы 1).

Определение 3.12. (Гейне). Число β называется *предело́м функции $y = f(x)$ в точке α*, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α, такой, что $x_n \neq \alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к числу β.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

Символьная запись этого определения и его отрицания:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta\Big] \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \Big[\forall \{x_n\} : \\ [x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \;\&\; [x_n \neq \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N}] \;\longmapsto\; [f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \beta]\Big]. \qquad (3.9)$$

$$\Big[y = f(x) \quad \text{не имеет предела в точке} \quad x = \alpha\Big] \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \Big[\exists\,\{x'_n\} \;\&\; \exists\,\{x''_n\}: \;\big[[x'_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \;\&\; [x'_n \neq \alpha \;\forall\, n \in \mathbb{N}]\big] \;\&$$

$$\big[[x''_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \;\&\; [x''_n \neq \alpha \;\forall\, n \in \mathbb{N}]\big] : \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x''_n)\Big]. \quad (3.10)$$

Определение 3.12 удобно использовать для доказательства того факта, что функция не имеет предела в точке.

Пример 3.11. Докажем, что функция Дирихле $y = D(x)$ (пример 3.3) не имеет предела в любой точке $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть последовательность $\{x'_n\}$ такова, что $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x'_n \neq \alpha$ и $x'_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Тогда $y'_n = D(x'_n) = 1$, т. е. $y'_n \to 1$ при $n \to \infty$. Далее, возьмем такую последовательность $\{x''_n\}$, что $x''_n \in \mathbb{J}$, $x''_n \neq \alpha$ и $x''_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, тогда выполняется $y''_n = D(x''_n) = 0$ и $y''_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Найдены две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к числу α, для которых верно

$$1 = \lim_{n\to\infty} D(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} D(x''_n) = 0.$$

Предел функции $y = D(x)$ в любой точке $\alpha \in \mathbb{R}$ не существует.

Приведем еще одно определение предела функции в точке на языке окрестностей.

Определение 3.13. (Коши.) Число β называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* α, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки α соответствующие им значения $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки β.

Определение можно сформулировать и на языке неравенств[3.2].

Определение 3.14. (Коши.) Число β называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* α, если для любого положительного

[3.2] Определения предела функции в точке по Коши называют еще определениями на языке «ε–δ».

числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $0 < |x-\alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

Запишем определение 3.14 и его отрицание с помощью логических символов:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\, x : \quad 0 < |x-\alpha| < \delta \quad \longmapsto \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon\Big]. \qquad (3.11)$$

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x) \neq \beta\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta : \quad 0 < |x_\delta - \alpha| < \delta : \quad |f(x_\delta) - \beta| \geqslant \varepsilon_0\Big]. \qquad (3.12)$$

Замечание 3.2. В определениях 3.12 и 3.14 предела функции $y = f(x)$ в точке α предполагается, что аргумент функции не равен α. Это требование связано с тем, что функция $y = f(x)$ может быть не определена в точке α. Отсутствие этого требования сделало бы невозможным, например, определение производной $f'(\alpha)$ функции $y = f(x)$ в точке $x = \alpha$, поскольку $f'(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.

Замечание 3.3. Функция $y = f(x)$ в точке α может иметь только единственный предел. Это следует из определения 3.12 и теоремы 2.6 единственности предела числовой последовательности $\{y_n = f(x_n)\}$.

2.2. Эквивалентность определений предела функции в точке по Гейне и по Коши. Докажем, что сформулированные определения предела функции в точке эквивалентны.

Теорема 3.1. *Определения предела функции в точке по Гейне* (*определение* 3.12) *и по Коши* (*определение* 3.14) *эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что если функция имеет предел в точке в смысле одно из определений, то она имеет этот же предел в рассматриваемой точке в смысле другого определения.

Определение по Коши $\Longrightarrow$ определение по Гейне. Справедливо символьное выражение (3.11). Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к α при $n \to \infty$ и $x_n \neq \alpha$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $x_n \to \alpha$, то для указанного числа $\delta > 0$ найдется такой номер $N = N(\delta)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ справедливо неравенство $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, поэтому выполняется $|f(x_n) - \beta| < \varepsilon$.

Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу β при $n \to \infty$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$ и $x_n \neq \alpha$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ (символьное выражение (3.9)).

Определение Гейне $\Longrightarrow$ определение по Коши. Будем доказывать от противного. Пусть предел функции не равен β в смысле определения по Коши (см. символьное выражение (3.12)).

Для положительных чисел $\delta_n = 1/n$ найдутся такие точки x_n, что $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$, для которых выполнено неравенство $|f(x_n) - \beta| \geqslant \varepsilon_0$. Обратим внимание на тот факт, что неравенство $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$ означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу α и $x_n \neq \alpha$ для любого номера n. Поэтому $f(x_n) \to \beta$ при $n \to \infty$ (выражение (3.9)). Это противоречит имеющемуся неравенству $|f(x_n) - \beta| \geqslant \varepsilon_0$, что доказывает теорему. $\triangle$

Пример 3.12. Найдем предел функции $y = f(x) = C$, где $C = \text{const}$, $C \in \mathbb{R}$, в точке $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к α, $x_n \neq \alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y_n = f(x_n) = C$, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = C$.

Пример 3.13. Пусть $y = f(x) = x$, вычислим предел этой функции в точке $\alpha \in \mathbb{R}$. Из определения 3.12 следует, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to \alpha$ и все ее члены не равны α, выполняется $y_n = f(x_n) = x_n$, т. е. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \alpha$.

2.3. Односторонние пределы. Предел функции при $x \to \infty$. Будем формулировать определения на языке последовательностей и на языке окрестностей (неравенств).

Определение 3.15. Число β называется *правым пределом* (*пределом справа*) функции $y = f(x)$ в точке α, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α, все члены которой больше

α, следует, что числовая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к числу β.

Обозначение. $\beta = \lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x)$, $f(\alpha+0) = \beta$.

Символьная запись $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = \beta$:

$$\Big[\forall\,\{x_n\} : [x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \mathbin{\&} [x_n > \alpha \;\forall\, n \in \mathbb{N}] \;\longmapsto\; [f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \beta]\Big].$$

Определение 3.16. Число β называется *правым пределом* (*пределом справа*) функции $y = f(x)$ в точке α, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех x из правой δ-окрестности точки α, $x \ne \alpha$, соответствующие им значения $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки β.

Определение 3.17. Число β называется *правым пределом* (*пределом справа*) функции $y = f(x)$ в точке α, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $0 < x - \alpha < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

Запишем это определение с помощью символов:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha+0} f(x) = \beta\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$\forall\, x : \quad 0 < x - \alpha < \delta \quad \longmapsto \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon\Big]. \tag{3.13}$$

Аналогично можно определить левый предел (предел слева) в точке.

Определение 3.18. Число β называется *левым пределом* (*пределом слева*) функции $y = f(x)$ в точке α, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α, все члены которой меньше α, следует, что числовая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к числу β.

Обозначение. $\beta = \lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x)$, $f(\alpha-0) = \beta$.

Символьная запись:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha-0} f(x)=\beta\Big] \overset{\mathrm{def}}{=} \Big[\forall\,\{x_n\}:$$

$$[x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha]\ \&\ [x_n<\alpha\ \forall\, n\in\mathbb{N}] \longmapsto [f(x_n)\underset{n\to\infty}{\to}\beta]\Big].$$

Определение 3.19. Число β называется *левым пределом* (*пределом слева*) функции $y=f(x)$ в точке α, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x из левой δ-окрестности точки α, $x\neq\alpha$, соответствующие им значения $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки β.

Определение 3.20. Число β называется *левым пределом* (*пределом слева*) функции $y=f(x)$ в точке α, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $0<\alpha-x<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-\beta|<\varepsilon$.

Символьная запись определения:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha-0} f(x)=\beta\Big] \overset{\mathrm{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:$$

$$\forall\, x:\quad 0<\alpha-x<\delta \quad\longmapsto\quad |f(x)-\beta|<\varepsilon\Big]. \qquad (3.14)$$

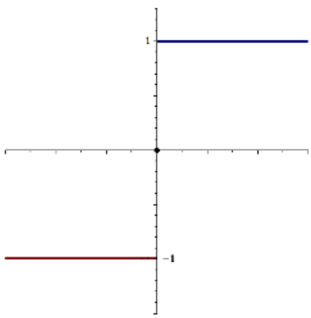

Рис. 3.1

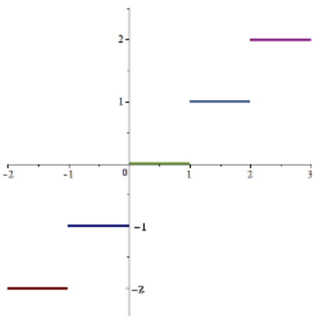

Рис. 3.2

Пример 3.14. Для функции $y = \operatorname{sgn} x$ выполняется[3.3]

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

График функции изображен на рис. 3.1.

Пример 3.15. Пусть $y = [x]$, тогда для любого целого m выполняется $\lim\limits_{x\to m-0}[x] = m-1$ и $\lim\limits_{x\to m+0}[x] = m$ (см. рис. 3.2).

Предложение. *Если в точке α правый и левый пределы функции $y = f(x)$ совпадают, то в точке α существует предел функции $y = f(x)$, равный односторонним пределам.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to\alpha+0} f(x) = \lim_{x\to\alpha-0} f(x) = \beta.$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (\alpha,\, \alpha+\delta_1)$ выполняется $|f(x)-\beta| < \varepsilon$ (см. (3.13)). Аналогично, для этого же положительного числа ε найдется такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (\alpha-\delta_2,\, \alpha)$ выполняется $|f(x)-\beta| < \varepsilon$ (выражение (3.14)).

Выберем $\delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$, тогда для всех точек x таких, что $0 < |x-\alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-\beta| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. Символьная запись этого утверждения — выражение (3.11). $\triangle$

Предположим, что $f\colon\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ и $X = \{x : |x| > \Delta\}$, $\Delta > 0$ — некоторое фиксированное число.

Определение 3.21. Число β называется *пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$*, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\} \subset X$ значений аргумента x соответствующая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу β.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta.$

Это же определение на языке «ε–δ».

[3.3] Для пределов функции $y = f(x)$ справа и слева в точке нуль часто используют обозначения $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-0} f(x)$ соответственно.

Определение 3.22. Число β называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

Запишем последнее определение с помощью логических символов:

$$\Big[\lim_{x\to\infty} f(x) = \beta\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ \forall\, x : \quad |x| > \delta \quad \longmapsto \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon\Big].$$

Пример 3.16. Предположим, что $y = f(x) = 1/x$ и множество $X = \{x : |x| > 1\}$. Поскольку для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x последовательность $\{1/x_n\}$ значений функции $y = 1/x$ является бесконечно малой (теорема 2.5), то $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$.

Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ и $X = \{x : x > \Delta\}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ — некоторое фиксированное число.

Определение 3.23. Число β называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\} \subset X$ значений аргумента x, элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны, соответствующая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу β.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$.

Сформулируем это определение на языке «ε–δ».

Определение 3.24. Число β называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $x > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

$$\Big[\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ \forall\, x : \quad x > \delta \quad \longmapsto \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon\Big].$$

Дадим определение предела функции при $x \to -\infty$. Предположим, что $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ и $X = \{x : x < \Delta\}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ — некоторое фиксированное число.

Определение 3.25. Число β называется *пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$*, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\} \subset X$ значений аргумента x, элементы которой, начиная с некоторого номера, отрицательны, соответствующая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу β.

Обозначение. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$.

Определение 3.26. Число β называется *пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x таких, что $x < -\delta$, выполняется неравенство $|f(x) - \beta| < \varepsilon$.

Символьная запись сформулированного определения:

$$\Big[\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\; \forall\, x :\; x < -\delta \;\longmapsto\; |f(x) - \beta| < \varepsilon\Big].$$

§ 3. Свойства функций, имеющих предел

Все утверждения этого параграфа будем формулировать для пределов функции в точке α. Тем не менее они остаются справедливыми, если в формулировке утверждения предел функции в точке α заменить пределом справа (слева) в точке α или пределом функции при $x \to \pm\infty$ ($x \to \infty$). При этом функции определяются на соответствующих множествах.

3.1. Критерий Коши. Как, не находя предел функции в точке, доказать, что он существует? Для этого сформулируем необходимое и достаточное условие существования предела функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α.

Определение 3.27. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ в точке α удовлетворяет *условию Коши*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек x' и x'', принадлежащих проколотой δ-окрестности точки α, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Запишем *условие Коши* в точке α с помощью логических символов:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall\,x',\,x'': \quad 0 < |x' - \alpha| < \delta,$$
$$0 < |x'' - \alpha| < \delta \quad \longmapsto \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Теорема 3.2. (Коши.) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ в точке α имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы эта функция в точке α удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ в точке α имеет предел: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. Следовательно, для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых точек x' и x'', удовлетворяющих $0 < |x' - \alpha| < \delta$, $0 < |x'' - \alpha| < \delta$, выполняются следующие неравенства: $|f(x') - \beta| < \varepsilon/2$ и $|f(x'') - \beta| < \varepsilon/2$.

Таким образом, справедливо

$$|f(x') - f(x'')| = |[f(x') - \beta] - [f(x'') - \beta]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x') - \beta| + |f(x'') - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке α условию Коши.

Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке α. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к α, для членов которой выполняется $x_n \neq \alpha$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что последовательность значений $\{f(x_n)\}$ сходится.

Возьмем произвольное положительное число ε, ему (по условию Коши (3.15)) соответствует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого найдется такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $0 < |x_n - \alpha| < \delta$. Это справедливо, поскольку $x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Для любого натурального числа p также выполняется аналогичное неравенство $0 < |x_{n+p} - \alpha| < \delta$ при всех $n \geqslant N$. Таким образом, по условию Коши, справедливо неравенство $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$. Доказано, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна, тогда по критерию Коши для числовой последовательности (теорема 2.24) она сходится.

Докажем, что последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$, соответствующие разным сходящимся к α последовательностям $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходятся к одному и тому же числу.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \beta'$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = \beta''$. Рассмотрим последовательность $\{\bar{x}_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots\}$, построенную из последовательностей $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ и, так же как и они, сходящуюся к α. Тогда последовательность $\{f(\bar{x}_n)\}$ сходится.

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к одному и тому же числу (см. раздел 4.1 гл. 2). Это справедливо и для подпоследовательностей $\{f(x'_n)\}$ и $f(x''_n)\}$. Следовательно, выполняется равенство $\beta' = \beta''$. $\triangle$

Теорема 3.2 остается справедливой, если α заменить символами $a \pm 0$, ∞ и $\pm\infty$. При этом условие Коши выполняется на соответствующих множествах.

Сформулируем, например, *условие Коши* для $x \to -\infty$ с помощью логической символики:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\, x', x'' :$$
$$x' < -\delta \quad x'' < -\delta \quad \longmapsto \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

3.2. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Будем предполагать, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы в одной и той же проколотой Δ-окрестности α.

Теорема 3.3. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ таковы, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \gamma$. Тогда функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x)\cdot g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке α имеют пределы, равные $\beta \pm \gamma$, $\beta\cdot\gamma$ и $\dfrac{\beta}{\gamma}$ соответственно (в случае частного $\gamma \neq 0$).*

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, надо воспользоваться определением 3.12 предела функции в точке и арифметическими свойствами сходящихся числовых последовательностей (теоремы 2.9–2.11). △

Теорема 3.3 справедлива, если α заменить одним из следующих символов: $\alpha \pm 0$, ∞, $\pm\infty$. При этом функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ должны быть определены одновременно на соответствующих множествах.

Сформулируем, например, теорему для символа $+\infty$.

Теорема. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, определенные на множестве $\{x : x > \Delta\}$, $\Delta \in \mathbb{R}$, таковы, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \gamma$. Тогда функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеют при $x \to +\infty$ пределы, равные $\beta \pm \gamma$, $\beta \cdot \gamma$ и $\dfrac{\beta}{\gamma}$ соответственно (в случае частного $\gamma \neq 0$).*

Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, позволяет вычислять предел функции, не обращаясь к определению. Поясним это на следующем примере.

Пример 3.17. Найдем предел функции

$$y = f(x) = \frac{3x^2 + x - 3}{x^2 + 1}$$

в точке $x = 1$. Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} C = C$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$ (примеры 3.12 и 3.13), то из теоремы 3.3 получаем

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to1} 3 \cdot \lim\limits_{x\to1} x \cdot \lim\limits_{x\to1} x + \lim\limits_{x\to1} x - \lim\limits_{x\to1} 3}{\lim\limits_{x\to1} x \cdot \lim\limits_{x\to1} x + \lim\limits_{x\to1} 1} = \frac{1}{2}.$$

3.3. Предельный переход в неравенствах. Приведем утверждения, аналогичные тем, что сформулированы в разделе 2.5 главы 2.

Теорема 3.4. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α, в этой окрестности выполнено следующее неравенство: $f(x) \geqslant \gamma$ $\big[f(x) \leqslant \gamma\big]$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. Тогда справедливо неравенство $\beta \geqslant \gamma$ $\big[\beta \leqslant \gamma\big]$.*

Замечание 3.4. Если в теореме 3.4 нестрогие неравенства $f(x) \geqslant \gamma$ $\big[f(x) \leqslant \gamma\big]$ заменить на $f(x) > \gamma$ $\big[f(x) < \gamma\big]$, то для $\beta = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ остаются нестрогие неравенства $\beta \geqslant \gamma$ $\big[\beta \leqslant \gamma\big]$.

Для функции $y = f(x) = x^2$ на множестве $[-1,\, 1]\backslash\{0\}$ выполняется $f(x) > 0$. Однако $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (см. пример 3.13 и теорему 3.3).

Следствие. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α, в пределах этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \gamma$. Тогда справедливо неравенство $\beta \geqslant \gamma$.*

Теорема 3.5. *Если в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α определены функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$, в пределах этой окрестности выполняются следующие неравенства: $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x)$. Тогда выполняется $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.*

Для того чтобы доказать сформулированные утверждения, достаточно воспользоваться определением 3.12 предела функции в точке и соответствующими утверждениями для последовательностей — теоремами 2.12 и 2.13.

Теоремы остаются справедливыми, если α в пределе заменить любым из символов: $\alpha \pm 0$, ∞, $\pm\infty$. Например, приведем теорему 3.5 для символа ∞.

Теорема. *Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$ определены на множестве $\{x : |x| > \Delta\}$, $\Delta > 0$, для точек этого множества выполняются неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \beta$, то $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \beta$.*

3.4. Предел суперпозиции функций. Выясним, чему равен предел суперпозиции функций (см. определение 3.2), имеющих пределы.

Теорема 3.6. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки α, имеет предел β в этой* *точке и* $f(x) \neq \beta$ *для всех* x *из указанной проколотой окрестности. Предположим, что функция* $z = g(y)$ *определена в некоторой проколотой окрестности точки* β *и* $\lim\limits_{y \to \beta} g(y) = \gamma$*. Тогда* $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = \gamma$.

Доказательство. Выбираем произвольную последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента x из области определения функции $y = f(x)$, сходящуюся к α, такую, что $x_n \neq \alpha$ для любого номера n. Тогда последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ значений функции $y = f(x)$, для всех членов которой выполнено неравенство $y_n \neq \beta$, сходится к β.

Поэтому для всех номеров n, начиная с некоторого номера n_0, все члены последовательности $\{y_n\}$ попадают в проколотую окрестность точки β, где определена функция $z = g(y)$. Следовательно, последовательность $\{z_n = g(y_n)\}$ сходится к числу γ.

Таким образом, получили, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α, у которой для всех n верно $x_n \neq \alpha$, соответствующая ей последовательность $\{g(f(x_n))\}$ значений функции $h(x) = g(f(x))$ сходится к γ. $\triangle$

Замечание 3.5. Условие $f(x) \neq \beta$ в формулировке теоремы 3.6 убрать нельзя. Приведем контрпример.

Пусть заданы функции $y = f(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $z = g(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0; \\ 1, & y = 0. \end{cases}$ Для этих функций верно $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$. Поскольку $g(f(x)) \equiv 1$, то

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1 \neq \lim_{y \to 0} g(y) = 0.$$

В этом примере отсутствует условие $f(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки нуль.

§ 4. Сравнение функций

Введем понятия *бесконечно большой функции* и *бесконечно малой функции*, способы сравнения функций (бесконечно малых или бесконечно больших). Все понятия будем формулировать в точке α, но они легко переносятся на случай символов $\alpha \pm 0$, ∞ и $\pm\infty$.

4.1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α.

Определение 3.28. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *бесконечно малая* в точке α (при $x \to \alpha$), если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$.

Пример 3.18. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке α предел, равный β, то функция $y = g(x) = f(x) - \beta$ бесконечно малая в точке α, поскольку (теорема 3.3, пример 3.12) справедливы равенства $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x) - \beta) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) - \lim\limits_{x\to\alpha} \beta = 0$.

Пример 3.19. Функция $y = f(x) = (x - \alpha)^n$ бесконечно малая в точке α, где $n \in \mathbb{N}$ — фиксированное число, так как (см. теорему 3.3 и примеры 3.12, 3.13):

$$\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^n = \underbrace{\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)\ldots\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)}_{n} = 0.$$

Замечание 3.6. Из примера 3.18 получаем представление для функции, имеющей предел β в точке α: $f(x) = \beta + g(x)$, где $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$.

Определение бесконечно большой функции дадим на языке последовательностей (определение по Гейне) и на языке «ε–δ» (определение по Коши).

Определение 3.29. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке α (при $x \to \alpha$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, сходящейся к α, все члены которой не равны α, соответствующая последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ значений функции бесконечно большая.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Определение 3.30. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке α (при $x \to \alpha$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, что для любого числа x такого, что $0 < |x - \alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Символьная запись этого определения:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x)=\infty\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0: \\ \forall\,x: \quad 0<|x-\alpha|<\delta \quad \longmapsto \quad |f(x)|>\varepsilon\Big]. \tag{3.16}$$

Определим бесконечно большие функции определенного знака в точке α.

Определение 3.31. Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой положительной* в точке α (или при $x\to\alpha$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, сходящейся к α, все члены которой не равны α, соответствующая последовательность $\{y_n=f(x_n)\}$ значений функции бесконечно большая положительная, начиная с некоторого номера.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$.

Определение 3.32. Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой положительной* в точке α (или при $x\to\alpha$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, что для любого числа x такого, что $0<|x-\alpha|<\delta$, выполняется неравенство $f(x)>\varepsilon$.

Приведем символьную запись этого определения:

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0: \\ \forall\,x: \quad 0<|x-\alpha|<\delta \quad \longmapsto \quad f(x)>\varepsilon\Big].$$

Аналогично можно определить $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$.

Для бесконечно больших функций можно также определить пределы при $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, а также определить бесконечно большие функции справа или слева в точке $x=a$.

Приведем примеры соответствующих определений на языке ε–δ в символьной записи, для этого будем пользоваться введенными определениями 3.22, 3.26 и 3.17.

Пример 3.20.

1. $\left[\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right] \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\forall\, x: \quad |x| > \delta \quad \longmapsto \quad f(x) < -\varepsilon\Big].$$

2. $\left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right] \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\forall\, x: \quad x < -\delta \quad \longmapsto \quad f(x) < -\varepsilon\Big].$$

3. $\left[\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = -\infty\right] \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\forall\, x: \quad 0 < x - \alpha < \delta \quad \longmapsto \quad f(x) < -\varepsilon\Big].$$

Приведем примеры бесконечно больших функций.

Пример 3.21. Функция $y = f(x) = \dfrac{1}{x-\alpha}$ при $x \to \alpha$ бесконечно большая, т. е. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента x, сходящуюся к α и такую, что $x_n \neq \alpha$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Тогда верно, что последовательность $\{z_n = x_n - \alpha\}$ бесконечно малая, $z_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность значений функции $\left\{y_n = \dfrac{1}{z_n}\right\}$ бесконечно большая (см. теорему 2.5 для последовательностей).

По определению 3.29 получаем, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Приведем доказательство, используя определение 3.30. Для любого положительного числа ε неравенство $\left|\dfrac{1}{x-\alpha}\right| > \varepsilon$ выполняется для любого x такого, что $0 < |x-\alpha| < \dfrac{1}{\varepsilon} = \delta$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, что при всех x, удовлетворяющих $0 < |x-\alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$ (см. выражение в логических символах (3.16)).

Пример 3.22. Для функции $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ выполняется $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Действительно, для любой бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, справедливо, что последовательность $\left\{y_n = \dfrac{1}{x_n^2}\right\}$ бесконечно большая и все ее члены положительны (см. теорема 2.5).

4.2. Сравнение бесконечно малых функций. Далее будем предполагать, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в некоторой проколотой Δ-окрестности точки α и являются бесконечно малыми в точке α.

Определение 3.33. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* (еще говорят: *имеет более высокий порядок малости*), *чем функция* $y = g(x)$ при $x \to \alpha$, если выполняется $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Обозначение. $f(x) = o(g(x))$, $x \to \alpha$ или $f = o(g)$, $x \to \alpha$.

Читается: «f есть o малое по сравнению с g» или «f равно o малое от g» при x, стремящемся к α.

Определение 3.34. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* (еще говорят: *имеют одинаковый порядок малости*) при $x \to \alpha$, если выполняется $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$, $\beta \neq 0$ и $\beta \neq 1$.

Определение 3.35. Бесконечно малые при $x \to \alpha$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются *эквивалентными*, если выполняется следующее равенство: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Обозначение. $f(x) \sim g(x)$, $x \to \alpha$ или $f \sim g$, $x \to \alpha$.

Читается: «f эквивалентно g» при x, стремящемся к α.

Свойства символа «o».

1°. $o(g) \pm o(g) = o(g)$.

Доказательство. Пусть $f = o(g)$ при $x \to \alpha$, т. е. выполняется $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) \pm f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \pm \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(см. теорему 3.3). $\triangle$

2°. $o(C \cdot g) = o(g)$, $C \cdot o(g) = o(g)$, $\quad C = \text{const} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $h = o(C \cdot g)$ при $x \to \alpha$, т. е. верно $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{h(x)}{C \cdot g(x)} = 0$. Следовательно, верно $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha} C \cdot \dfrac{h(x)}{C \cdot g(x)} = 0$. Таким образом, $h = o(g)$ при $x \to \alpha$.

Пусть $f = o(g)$ при $x \to \alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{C \cdot f(x)}{g(x)} = C \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Поэтому $C \cdot o(g) = o(g)$ при $x \to \alpha$. $\triangle$

3°. $o(o(g)) = o(g)$.

Доказательство. Введем обозначение $f = o(g)$ и $h = o(f)$ при $x \to \alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

т. е. $h = o(g)$ при $x \to \alpha$. $\triangle$

4°. $o(g) \pm o(o(g)) = o(g)$.

Доказательство. Пусть $f = o(g)$ и $h = o(f)$ при $x \to \alpha$. Получаем

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) \pm h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \pm \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

т. е. $f \pm h = o(g)$ при $x \to \alpha$. $\triangle$

5°. Если $f = o(p)$ и $g = o(q)$ при $x \to \alpha$, то $f \cdot g = o(p \cdot q)$ при $x \to \alpha$.

Доказательство. Из теоремы 3.3 об арифметических свойствах пределов следует

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\cdot g(x)}{p(x)\cdot q(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{p(x)}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{q(x)}=0\cdot 0=0.\quad\triangle$$

Пример 3.23. Для функций $y = f(x) = x^3 - 2x^2$ и $y = g(x) = x$ справедливо $f(x) = o(g(x))$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 2x) = 0$.

Пример 3.24. Функции $y = f(x) = x^3 - 2x^2$ и $y = g(x) = x^2$ одного порядка малости при $x \to 0$. Действительно, выполняется $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(x - 2) = -2$.

Пример 3.25. При $x \to 0$ функции $y = f(x) = x^3 + x^2$ и $y = g(x) = x^2$ эквивалентные $(f(x) \sim g(x),\ x \to 0)$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(x + 1) = 1$.

4.3. Сравнение бесконечно больших функций. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — бесконечно большие функции в точке α, т. е. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty(\pm\infty)$.

Определение 3.36. Функция $y = f(x)$ имеет в точке α *более высокий порядок роста*, чем функция $y = g(x)$, если функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ является бесконечно большой в точке α.

Пример 3.26. Функция $y = \dfrac{1}{x^4}$ имеет в точке $x = 0$ более высокий порядок роста, чем функция $y = \dfrac{1}{x^2}$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Определение 3.37. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют в точке α *одинаковый порядок роста*, если выполняется равенство $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$, $\beta \neq 0$.

Пример 3.27. Для функций $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$ и $y = g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ выполняется $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Эти функции имеют в точке $x = 0$ один порядок роста, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(2x+3) = 3$.

В определениях этого раздела точку α можно заменить любым из символов: $\alpha \pm 0$, ∞, $\pm\infty$.

§ 5. Непрерывность функции в точке

Будем предполагать, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки α.

5.1. Определения. Введем основное понятие параграфа.

Определение 3.38. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* α, если предел функции в этой точке существует и равен $f(\alpha)$.

Обозначение. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Запишем это определение с помощью логических символов на языке последовательностей (по Гейне) и на языке «ε–δ» (по Коши):

$$\Big[\text{функция } y = f(x) \text{ непрерывна в } \alpha\Big] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\{x_n\}:\ [x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha] \longmapsto [f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(\alpha)]\Big]. \quad (3.17)$$

$$\Big[\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)\Big] \overset{\text{def}}{=} \Big[\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall\, x:\ |x - \alpha| < \delta \longmapsto |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon\Big]. \quad (3.18)$$

Замечание 3.7. Из определения 3.38 следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке α, если:

1) функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки α;

2) существует $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$;

3) $f(\alpha) = \beta$.

Пример 3.28. Функция Дирихле $y = D(x)$ не является непрерывной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$, поскольку (см. пример 3.11) эта функция ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$ не имеет предела. Для функции Дирихле ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$ не выполнено условие 2) замечания 3.7.

Пример 3.29. Введем функцию $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{J}, \end{cases}$ она непрерывна только в точке $\alpha = 0$, а во всех точках $\alpha \neq 0$ она не является непрерывной.

Действительно, $f(0) = 0$, и для произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется $|f(x) - f(0)| = |x| < \varepsilon$ для любого такого аргумента x, что $|x| < \delta = \varepsilon$ (см. выражение в логических символах (3.18)).

Не существует $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ при $\alpha \neq 0$. Так как для последовательности $\{x'_n\}$ такой, что $x'_n \in \mathbb{Q}$ и $x'_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = \alpha$. Аналогично, для последовательности $\{x''_n\}$ такой, что $x''_n \in \mathbb{J}$ и $x''_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n) = -\alpha$. Если $\alpha \neq 0$, то $\alpha \neq -\alpha$.

Для функции $y = f(x)$ ни в одной точке $\alpha \neq 0$ не выполняется условие 2) замечания 3.7.

Определение 3.39. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной справа* (*слева*) *в точке* α, если правый (левый) предел этой функции в точке α существует и равен значению функции в этой точке.

Обозначение. $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = f(\alpha)$, $f(\alpha + 0) = f(\alpha)$ или $\lim\limits_{x \to \alpha - 0} f(x) = f(\alpha)$, $f(\alpha - 0) = f(\alpha)$.

Предложение. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна слева и справа в точке α, то она непрерывна в точке α.*

Доказательство. Следует из определений непрерывности функции слева и справа в точке α и предложения из раздела 1.4 главы 3. $\triangle$

Пример 3.30. Функция $y = f(x) = [x]$ непрерывна справа в любой точке $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$, поскольку справедливо $f(m) = m$ и $\lim\limits_{x \to m+0} f(x) = m$.

Эта функция не является непрерывной в любой целой точке, так как не существует предел функции $y = f(x)$ в точке $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$ (см. пример 3.15). Для функции не выполняется условие 2) замечания 3.7.

5.2. Точки разрыва, классификация. Приведем классификацию точек, которые не являются точками непрерывности функции.

Определение 3.40. Если функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке α, то точка α называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$.

Для классификации точек разрыва будем использовать условия 1) — 3) замечания 3.7.

Определение 3.41. Точка α называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если либо в точке α существует $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, но сама функция в точке α не определена (не выполнено условие 1) замечания 3.7), либо существует $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, но $\beta \neq f(\alpha)$ (не выполнено условие 3) замечания 3.7).

Пример 3.31. Функция $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{3\,x^2 - 3x}$ в точке $x = 1$ не определена (не выполнено условие 1) замечания 3.7), но вне этой точки $x = 1$ функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = g(x) = \dfrac{x+2}{3\,x}$, поэтому справедливо $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$. Таким образом, точка $x = 1$ является точкой устранимого разрыва для функции $y = f(x)$.

Если доопределить функцию $y = f(x)$ в точке $x = 1$ значением ее предела, т. е. $y = F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{3\,x^2 - 3x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ то полученная функция $y = F(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Для этой функции в точке $x = 1$ выполняются все условия 1) — 3) замечания 3.7.

Говорят, что функция $y = f(x)$ *доопределена в точке* $x = 1$ *по непрерывности.*

Пример 3.32. Функция[3.4] $y = f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ в точке $x = 0$ имеет предел, равный 1, но $f(0) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ (не выполнено условие 3) замечания 3.7). Точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$.

Функция $y = F(x) = \begin{cases} |\operatorname{sgn} x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ непрерывна в точке $x = 0$. Таким образом, функция $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x \neq 0$, доопределена в нуле по непрерывности.

Определение 3.42. Точка α называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если предел функции в точке α не существует (не выполнено условие 2) замечания 3.7), однако существуют конечные пределы справа $f(\alpha+0)$ и слева $f(\alpha-0)$ в точке $x = \alpha$.

Величина $\omega(\alpha) = f(\alpha+0) - f(\alpha-0)$ называется *скачком* функции в точке α.

Пример 3.33. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ в точке $x = 0$ имеет точку разрыва первого рода: $f(0+0) = 1$, $f(0-0) = -1$, скачок $\omega(0)$ функции в этой точке равен 2.

Пример 3.34. Функция $y = [x]$ в точках $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$, имеет точки разрыва первого рода, поскольку (см. пример 3.15) $\lim\limits_{x\to m-0} [x] = m - 1$ и $\lim\limits_{x\to m+0} [x] = m$; скачок $w(m)$ этой функции в точке $x = m$ равен 1.

Определение 3.43. Точка α называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если предел функции в точке α не существует (не выполнено условие 2) замечания 3.7), при этом либо хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to\alpha\pm 0} f(x)$ не существует, либо функция $y = f(x)$ является бесконечно большой при $x \to \alpha + 0$ (при $x \to \alpha - 0$).

Пример 3.35. Функция Дирихле $y = D(x)$ имеет в каждой точке $\alpha \in \mathbb{R}$ точку разрыва второго рода, поскольку не существует

[3.4] Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определена в примере 3.4.

$\lim\limits_{x\to\alpha} D(x)$ (см. пример 3.11) и ни один из пределов $\lim\limits_{x\to\alpha\pm 0} D(x)$ не существует. Доказательство этого факта подобно доказательству из примера 3.11.

Пример 3.36. Для функции $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как для этой функции $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, более точно: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

5.3. Свойства функций, непрерывных в точке. Опишем свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 3.7. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы в некоторой Δ-окрестности точки α и непрерывны в этой точке. Тогда функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке α (в случае частного, $g(\alpha) \neq 0$).*

Доказательство. Следует из теоремы 3.3 и определения 3.38 непрерывной в точке функции. $\triangle$

Докажем теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

Теорема 3.8. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки α и существует предел $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. Функция $z = g(y)$ определена в некоторой окрестности точки β и непрерывна в этой точке. Тогда*

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(\beta). \tag{3.19}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к α такая, что $x_n \neq \alpha$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к числу β.

По определению непрерывности функции в точке (3.17) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(\beta)$ или $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(\beta)$. В силу произвольности $\{x_n\}$ получаем равенство (3.19). $\triangle$

Замечание 3.8. Выражение (3.19) можно переписать в следующем виде: $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g\big(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\big)$. Полученное равенство говорит о том, что можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции.

Замечание 3.9. Теорема 3.8 аналогична теореме 3.6 о пределе суперпозиции функций, имеющих предел. Тем не менее теорема 3.8 не следует из теоремы 3.6, поскольку исключено условие теоремы: $f(x) \neq \beta$.

Следующая теорема — теорема о суперпозиции непрерывных функций — следует непосредственно из теоремы 3.8.

Теорема 3.9. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке α, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке β, причем $\beta = f(\alpha)$. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке α.*

Доказательство. Из (3.19) получаем следующее равенство: $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(f(\alpha)) = h(\alpha)$. $\triangle$

§ 6. Некоторые локальные свойства функций

6.1. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Локальные свойства функции — свойства, которыми обладает функция в некоторой окрестности точки.

Теорема 3.10. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки α, быть может, проколотой. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке α, то существует такая δ-окрестность точки α, в пределах которой функция $y = f(x)$ ограничена.*

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. Зафиксируем положительное число ε, тогда, по определению предела функции в точке (см. выражение в логических символах (3.11)), найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех значений аргумента x таких, что $0 < |x - \alpha| < \delta$, выполняется $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$.

Осталось рассмотреть два случая.

1. Точка $x = \alpha$ не входит в область определения функции $y = f(x)$, тогда теорема доказана. $B = \beta - \varepsilon$, $A = \beta + \varepsilon$ (см. определение 3.5).

2. В точке α определено значение функции $\gamma = f(\alpha)$. Тогда $B = \min\{\beta - \varepsilon, \gamma\}$ и $A = \max\{\beta + \varepsilon, \gamma\}$ и для всех x таких, что $|x - \alpha| < \delta$, выполняется $B \leqslant f(x) \leqslant A$. $\triangle$

Замечание 3.10. Теорема 3.10 остается справедливой, если существование предела в точке α заменить существованием правого (левого) предела в точке α.

6.2. Устойчивость знака непрерывной функции. Для непрерывной в точке функции справедливо утверждение.

Теорема 3.11. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки α. Если функция f непрерывна в точке α и $f(\alpha) \neq 0$, то существует такая δ-окрестность точки α, что для любого значения аргумента x из этой окрестности значения функции $f(x) \neq 0$ и имеют знак, совпадающий со знаком значения функции $f(\alpha)$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha) \neq 0$, то по определению функции, непрерывной в точке α $\big($см. определение по Коши (3.18)$\big)$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого значения аргумента x, для которого выполнено $|x - \alpha| < \delta$, справедливы неравенства $f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon < |f(\alpha)|$. Тогда $f(\alpha) - \varepsilon$, $f(\alpha)$ и $f(\alpha) + \varepsilon$ — числа одного знака. Следовательно, для любого значения аргумента x такого, что $|x - \alpha| < \delta$, выполняется $f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$ и $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(\alpha)$. $\triangle$

Замечание 3.11. Теорема 4.2 остается справедливой, если непрерывность в точке α заменить непрерывностью справа (слева) в точке α (см. определение 3.39).

Замечание 3.12. Функция $y = f(x)$ может быть определена в проколотой Δ-окрестности точки α, но у нее существует предел $\beta \neq 0$ при $x \to \alpha$, т. е. точка α является точкой устранимого разрыва (см. определение 3.41). Теорема 4.2 остается справедливой и в этом случае, если положить $f(\alpha) = \beta$.

Теорема. *Предположим, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки α, быть может, проколотой. Если функция $y = f(x)$ непрерывна справа (слева) в точке α и $f(\alpha) \neq 0$, то существует такая правая (левая) полуокрестность точки α, что для любого значения аргумента x из этой полуокрестности значения функции $f(x) \neq 0$ и имеют знак, совпада-*

ющий со знаком значения функции $f(\alpha)$.

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 4.2, при этом используется определение 3.39 функции, непрерывной справа (слева) в точке. △

6.3. Разностная форма условия непрерывности. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b), точка x_0 принадлежит интервалу (a, b), а Δx — приращение аргумента функции, причем $x_0 + \Delta x$ принадлежит интервалу (a, b).

Определение 3.44. *Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx*, назовем число $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Обозначение.

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Теорема 3.12. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta y(x_0, \Delta x)$ была бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся следующими эквивалентными утверждениями:

a) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0;
b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$;
c) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Утверждение c) означает, что $\Delta f(x_0, \Delta x) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. △

§ 7. Предельные свойства монотонных функций

7.1. О локальных и глобальных свойствах непрерывных функций. Понятие *непрерывности функции* носит локальный характер, функция определена в некоторой окрестности точки непрерывности. Сейчас нас будут интересовать свойства функций, непрерывных на множестве из R, в качестве такого множества будем рассматривать интервал (конечный или бесконечный) либо отрезок. Дадим определения функции, непрерывной на интервале и на отрезке.

Определение 3.45. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a,\, b)$, если она непрерывна в любой точке этого интервала.

Определение 3.46. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,\, b]$, если она непрерывна на интервале $(a,\, b)$, непрерывна справа в точке a и в точке b непрерывна слева.

Легко привести пример функции, определенной на некотором интервале $(a,\, b)$, которая непрерывна в некоторой точке c интервала $(a,\, b)$, но не является непрерывной ни на каком интервале $(c - \delta,\, c + \delta) \subset (a,\, b)$.

Пример 3.37. Пусть $\widetilde{D}(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{J}, \end{cases}$ — это модификация функции Дирихле. Функция $\widetilde{D}$ непрерывна в точке $x = 0$, где $\widetilde{D}(0) = 0$, так как для любого наперед заданного положительного числа ε найдется положительное число $\delta = \varepsilon$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$, выполняется $|\widetilde{D}(x)| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon$.

Тем не менее функция $\widetilde{D}$ не является непрерывной ни в какой точке $x \neq 0$. Доказательство аналогично доказательству того факта, что у функции Дирихле в каждой точке не существует предела (см. пример 3.11).

Функция $\widetilde{D}$ примера 3.37 не является монотонной. Функции, монотонные на множестве (см. гл. 3, раздел 1.4), обладают интересными свойствами, которые рассмотрим далее.

7.2. Существование односторонних пределов. Раздел посвящен интересному свойству функций, монотонных на некотором множестве. Это свойство заключается в существовании односторонних пределов в каждой точке множества, на котором определена и монотонна функция.

Теорема 3.13. *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на интервале $(a,\, b)$, то в каждой точке x_0 интервала $(a,\, b)$ она имеет односторонние пределы. Причем если $y = f(x)$ неубывающая на интервале $(a,\, b)$, то справедливы неравенства*

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0), \tag{3.20}$$

если $y = f(x)$ *невозрастающая на интервале* $(a,\, b)$, *то справедливы неравенства*

$$f(x_0+0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0-0). \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ неубывающая на $(a,\, b)$. Для невозрастающей функции $y = f(x)$ доказательство подобно приведенному ниже.

Фиксируем точку $x_0 \in (a,\, b)$. Для любой точки x из интервала $(a,\, x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена сверху на интервале $(a,\, x_0)$, поэтому существует точная верхняя грань $\alpha = \sup\limits_{(a,\, x_0)} f(x)$ функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\, x_0)$, причем $\alpha \leqslant f(x_0)$.

Воспользуемся определением 3.7 точной верхней грани, а именно условием 2): для любого положительного числа ε найдется такая точка $x_\varepsilon \in (a,\, x_0)$, что $f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$. Обозначим $\delta = x_0 - x_\varepsilon > 0$. Если точка x принадлежит интервалу $(x_\varepsilon,\, x_0) = (x_0 - \delta,\, x_0)$, то $f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, так как $y = f(x)$ неубывающая.

Итак,

$$\Big[\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon > 0 : \\ \forall\, x :\ 0 < x_0 - x < \delta \ \longmapsto\ \alpha - \varepsilon < f(x) \leqslant \alpha\Big].$$

Это означает, что

$$f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{(a,\, x_0)} f(x) = \alpha \leqslant f(x_0).$$

Доказано, что предел слева в точке x_0 существует и выполняется левое неравенство в выражении (3.20).

Существование предела справа и правое неравенство выражения (3.20) в точке x_0 доказываются аналогично. $\triangle$

Замечание 3.13. Теорема 3.13 остается справедливой не только для конечного интервала $(a,\, b)$, но и для бесконечного интервала, например $(a,\, +\infty)$, и даже для всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Если интервал $(a,\, b)$ заменить отрезком $[a,\, b]$, то теорема 3.13 также остается справедливой, только в точках $x = a$ и $x = b$ неравенства (3.20) и (3.21) превращаются соответственно в неравенства $f(a) \leqslant f(a+0)$, $f(b-0) \leqslant f(b)$ для неубывающей функции, неравенства $f(a) \geqslant f(a+0)$, $f(b-0) \geqslant f(b)$ для невозрастающей функции.

7.3. Точки разрыва монотонных функций. Опишем точки разрыва монотонной на множестве функции.

Приведенная и доказанная ниже теорема является простым следствием теоремы 3.13.

Теорема 3.14. *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на интервале (a, b), то она может иметь на этом интервале только точки разрыва первого рода.*

Доказательство. Теорема 3.13 исключает существование точек разрыва второго рода.

Точек устранимого разрыва не существует в силу монотонности функции на интервале (a, b), так как при выполнении равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \gamma$ не может быть неравенства $f(x_0) \neq \gamma$. $\triangle$

Теорема 3.15. *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на интервале (a, b), то множество ее точек разрыва не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ неубывающая на интервале (a, b) функция. Множество X — множество ее точек разрыва.

Для каждой точки $x_0 \in X$ выполняется следующее неравенство: $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, и весь интервал $\big(f(x_0 - 0),\, f(x_0 + 0)\big)$, за исключением, быть может, точки $f(x_0)$, не принадлежит множеству значений функции $y = f(x)$. Для любых точек x_1 и x_2 из множества X таких, что $x_1 \neq x_2$, выполняется

$$\big(f(x_1 - 0),\, f(x_1 + 0)\big) \cap \big(f(x_2 - 0),\, f(x_2 + 0)\big) = \varnothing.$$

Это обусловлено тем, что функция $y = f(x)$ неубывающая на интервале (a, b).

В силу леммы 1.1 для чисел $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ найдется рациональное число c_0 такое, что выполняются неравенства $f(x_0 + 0) > c_0 > f(x_0 - 0)$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками множества X и некоторым подмножеством множества рациональных чисел. Подмножество множества рациональных чисел не более чем счетно. $\triangle$

Замечание 3.14. Теоремы 3.14 и 3.15 остаются справедливыми для функций, монотонных на множествах, указанных в замечании 3.13.

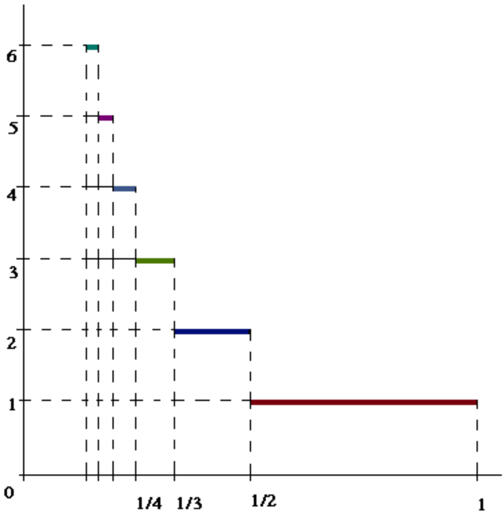

Рис. 3.3

Пример 3.38. Функция $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, неубывающая на всей числовой оси, и ее множество точек разрыва — множество $\mathbb{Z}$ — счетно (см. рис. 3.2 в § 2).

Усложним пример, приведем пример функции, монотонной на конечном интервале, имеющей на этом интервале счетное число точек разрыва.

Пример 3.39. Функция $y = [1/x]$, $x \in (0,\,1)$, невозрастающая на интервале $(0,\,1)$, и множество ее точек разрыва — множество $X = \{\,1/n,\ n \in \mathbb{N}\,\}$ — счетно (см. рис. 3.3).

§ 8. Свойства функций, непрерывных на отрезке

8.1. О прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение. Докажем простое свойство функций, непрерывных на отрезке и принимающих на его концах значения разных знаков. Этот результат принадлежит Б. Больцано и О. Коши. Приведем доказательство О. Коши.

Теорема 3.16. (Теорема Больцано — Коши.) *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и справедливо неравенство $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Неравенство $f(a) \cdot f(b) < 0$ означает, что функция $y = f(x)$ принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. Пусть, для определенности, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

Введем обозначение $X = \{\, x \in [a, b] : f(x) < 0 \,\}$. Множество X не пусто, поскольку точка a принадлежит этому множеству. Оно ограничено, так как $X \subset [a, b]$. По теореме 1.4 существует точная верхняя грань множества X. Пусть $c = \sup X$. Докажем, что это искомая точка, т. е. $c \in (a, b)$ и $f(c) = 0$.

Точка c принадлежит интервалу (a, b). Действительно, в силу теоремы 4.2 существуют такие положительные числа δ_1 и δ_2, что на интервале $(a, a + \delta_1)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервале $(b - \delta_2, b)$ — положительные значения. Следовательно, $c = \sup X$ лежит на интервале (a, b).

Предположим противное: $f(c) \neq 0$. Тогда, либо $f(c) > 0$, либо $f(c) < 0$. Воспользуемся теоремой 4.2, найдется δ-окрестность точки c, в пределах которой функция $y = f(x)$ сохраняет знак значения $f(c)$.

Однако, по определению 1.10 точной верхней грани множества, найдется такая точка $x' \in X$, лежащая на интервале $(c - \delta, c)$, что выполняется неравенство $f(x') < 0$. С другой стороны, для всех точек x из интервала $(c, c + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$.

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение было неверно и $f(c) = 0$. $\triangle$

Замечание 3.15. Если функция $y = f(x)$ не является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то теорема 3.16 неверна.

Пример 3.40. Функция $y = x + \operatorname{sgn} x + 1$ не является непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, на концах этого отрезка принимает значения разных знаков: $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$. Однако ни в одной точке интервала $(-1,\, 1)$ она не равна нулю (см. рис. 3.4).

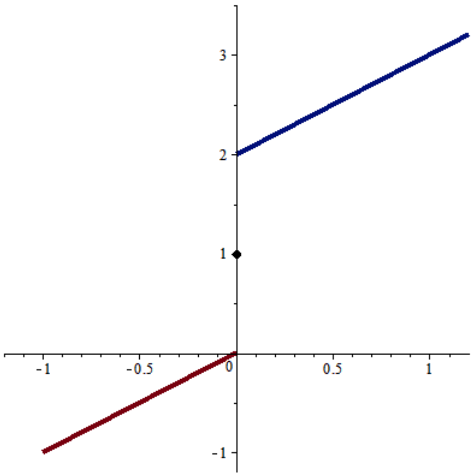

Рис. 3.4

Замечание 3.16. Теорема 3.16 имеет простой геометрический смысл: график непрерывной на отрезке функции, имеющей на его концах значения разного знака, по крайней мере, один раз пересечет ось абсцисс.

Теоремой Больцано — Коши можно пользоваться не только для доказательства существования корня уравнения, но и для его приближенного вычисления.

Пример 3.41. Рассмотрим уравнение

$$131\,072\,x^3 + 256\,x^2 - 32\,x - 31 = 0.$$

Обозначим $\mathscr{P}(x) = 131\,072\,x^3 + 256\,x^2 - 32\,x - 31$. Многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный нуль. Следовательно, многочлен $\mathscr{P}(x)$ имеет хотя бы один действительный нуль.

Поскольку $\mathscr{P}(0) = -31$, а $\mathscr{P}(1) = 131\,265$, то нуль многочлена $\mathscr{P}(x)$ лежит на интервале $(0,\, 1)$. Точка $x = 1/2$ делит интервал $(0,\, 1)$ пополам и $\mathscr{P}(1/2) = 16\,401$. Следовательно, нуль многочлена

$\mathscr{P}(x)$ принадлежит интервалу $(0,\ 1/2)$. Продолжая этот процесс, находим

$$\mathscr{P}(1/4) = 2\,025, \quad \mathscr{P}(1/8) = 225, \quad \mathscr{P}(1/16) = 0.$$

Следующая теорема является простым следствием теоремы Больцано — Коши, назовем ее *теоремой о промежуточных значениях непрерывной функции.*

Теорема 3.17. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и $\alpha = f(a) \neq f(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ, лежащего между числами α и β, найдется такая точка c из интервала $(a,\ b)$, что $f(c) = \gamma$.*

Доказательство. Пусть для определенности $\alpha > \beta$, тогда $\alpha > \gamma > \beta$. Рассмотрим функцию $y = g(x) = f(x) - \gamma$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a,\ b]$. Кроме того, справедливо $g(a) = \alpha - \gamma > 0$ и $g(b) = \beta - \gamma < 0$. Следовательно, по теореме Больцано — Коши, существует точка $c \in (a,\ b)$ такая, что $g(c) = 0$. Таким образом, $f(c) = \gamma$. $\triangle$

8.2. Ограниченность функций, непрерывных на отрезке. Будем использовать определение 3.6, а именно запись с помощью логических символов (3.1) и его отрицание (3.2).

Теорема 3.18. (Первая теорема Вейерштрасса.) *Непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция $y = f(x)$ ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Используем метод доказательства от противного: пусть функция $y = f(x)$ не является ограниченной на отрезке $[a,\ b]$. Тогда из (3.2) получаем: для любого натурального числа n найдется такая точка x_n из отрезка $[a,\ b]$, что $|f(x_n)| > n$.

Из этого следует, что последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ является бесконечно большой. Действительно (сравни с (2.5)), для любого $\gamma > 0$ найдется в силу аксиомы Архимеда такое натуральное число $N > \gamma$, что для всех $n \geqslant N$ выполняются неравенства $|y_n| > n \geqslant N > \gamma$.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поскольку точки x_n принадлежат отрезку $[a,\ b]$ для всех номеров n. В силу теоремы Больцано — Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$ и $c \in [a,\, b]$ (следствие из теоремы 2.12). Тогда из непрерывности функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(c)$, таким образом, подпоследовательность $\{y_{k_n} = f(x_{k_n})\}$ бесконечно большой числовой последовательности $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится.

Однако любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой (см. предложение из гл. 2, § 4, раздел 4.1). Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangle$

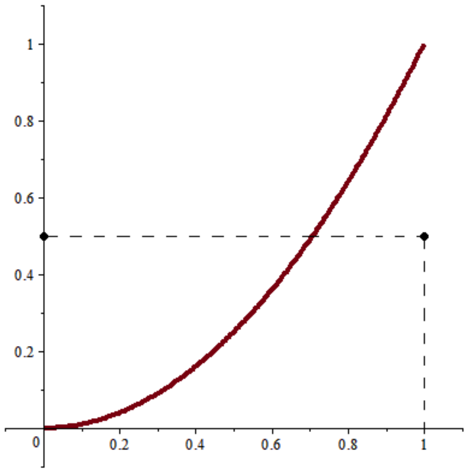

Рис. 3.5

8.3. Достижение точных верхней и нижней граней функций, непрерывных на отрезке. Предварительно рассмотрим следующий пример.

Пример 3.42. Рассмотрим $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1, \\ 1/2, & x = 0,\ x = 1. \end{cases}$

Для функции выполняется $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 1$ и $\inf\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 0$. Однако ни в одной точке отрезка $[0,\, 1]$ функция не принимает этих значений. При этом заметим, что функция $y = f(x)$ не является непрерывной на отрезке $[0,\, 1]$ (см. рис. 3.5).

Что произойдет, если добавить условие непрерывности функции на отрезке $[a, b]$? Будет ли в этом случае функция $y = f(x)$ достигать своих точных граней на этом отрезке? На этот вопрос дает ответ вторая теорема Вейерштрасса.

Теорема 3.19. (Вторая теорема Вейерштрасса.) *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ достигает на этом отрезке своих точных верхней и нижней граней.*

Доказательство. Докажем методом от противного: пусть $\alpha = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ и $f(x) \neq \alpha$ для всех точек x из отрезка $[a, b]$.

Введем функцию $y = g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому (см. теорему 3.18) ограничена на отрезке $[a, b]$. Следовательно, найдется такое положительное число A, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется $g(x) \leqslant A$ и справедливы неравенства $f(x) \leqslant \alpha - \dfrac{1}{A} < \alpha$. Таким образом, число α не является точной верхней гранью функции $y = f(x)$. Полученное противоречие доказывает, что предположение было неверно.

Окончательно: найдется такая точка $c_1 \in [a, b]$, для которой справедливо равенство $f(c_1) = \alpha$.

Достижимость точной нижней грани непрерывной на отрезке функции доказывается аналогично. $\triangle$

Поскольку непрерывная на отрезке функция достигает своих точных граней, то это наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, поэтому вторую теорему Вейерштрасса можно переформулировать следующим образом.

Теорема. *Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения.*

Замечание 3.17. Если в условии теоремы 3.19 отрезок $[a, b]$ заменить интервалом (a, b), то утверждение теоремы перестает быть справедливым. Например, функция $f(x) = x^2$ при $x \in (0, 1)$ имеет $\sup\limits_{0<x<1} f(x) = 1$ и $\inf\limits_{0<x<1} f(x) = 0$. Однако $f(x) \neq 0$ и $f(x) \neq 1$ для всех $x \in (0, 1)$.

Сформулируем следствие из теоремы 3.19.

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\alpha = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $\beta = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, то множество значений, принимаемых функцией $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, есть отрезок $[\beta, \alpha]$.*

Доказательство. Из теоремы 3.19 следует, что найдутся такие точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, что $\alpha = f(c_1)$ и $\beta = f(c_2)$. Тогда, по теореме 3.17 получается, что для любого γ, $\beta < \gamma < \alpha$, существует такая точка c, лежащая между точками c_1 и c_2, что $f(c) = \gamma$. Следовательно, образом отрезка $[a, b]$ является отрезок $[\beta, \alpha]$. $\triangle$

§ 9. Обратная функция

9.1. Определение и примеры. Введем определение обратной функции.

Определение 3.47. На множестве $X \subset \mathbb{R}$ задана функция $y = f(x)$ и $Y \subset \mathbb{R}$ — множество ее значений. Предположим, что функция $y = f(x)$ обладает следующим свойством:

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{каждому } y_0 \in Y \textit{ соответствует единственное} \\ \textit{число } x_0 \in X \textit{ такое, что } y_0 = f(x_0).\end{array}} \tag{3.22}$$

Тогда на множестве Y можно определить *обратную функцию* $x = f^{-1}(y)$, ставя в соответствие каждому числу $y \in Y$ такое число $x \in X$, что $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *обратимой*.

Функция $y = f(x)$ является обратной к $x = f^{-1}(y)$, поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными функциями*.

Замечание 3.18. Взаимно обратные функции обладают свойствами: $f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Лемма 3.20. *Если функция $y = f(x)$ строго монотонная на множестве X, а Y — множество ее значений, то на множестве Y определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$.*

Более того, если $y = f(x)$ возрастающая (убывающая) на множестве X, то функция $x = f^{-1}(y)$ также является возрастающей (убывающая) на множестве Y.

Доказательство. Строго монотонная на множестве X функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию (3.22), поскольку для любых $x_1 \neq x_2$ из множества X в силу строгой монотонности функции выполняется неравенство: $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$. Поэтому на множестве Y у функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Второе утверждение леммы докажем для возрастающей на множестве X функции $y = f(x)$: если выполняется неравенство $y_1 > y_2$, то справедливо $f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$. Будем доказывать от противного: пусть $x_1 \leqslant x_2$. Тогда в силу возрастания функции $y = f(x)$ выполняется $y_1 \leqslant y_2$, что противоречит условию $y_1 > y_2$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. $\triangle$

Пример 3.43. Пусть $y = f(x) = x/2$, $x \in [0,\, 2]$. Тогда на множестве $[0,\, 1]$, являющемся множеством значений функции, существует обратная $x = f^{-1}(y) = 2y$.

Можно привести пример функции $f\colon X \to Y$ не строго монотонной на X, но удовлетворяющей условию (3.22) и, таким образом, имеющей обратную функцию $f^{-1}\colon Y \to X$.

Пример 3.44. Пусть на множестве $[0,\, 1]$ задана функция $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbb{J}. \end{cases}$ Тогда на множестве $[0,\, 1]$ у функции $y = f(x)$ существует обратная $x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in \mathbb{Q}, \\ 1 - y, & y \in \mathbb{J}. \end{cases}$

9.2. Теорема об обратной функции. Сформулируем и докажем основную теорему параграфа.

Теорема 3.21. *Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на множестве $[a,\, b]$, кроме того, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, то на множестве $[\alpha,\, \beta]$ (на множестве $[\beta,\, \alpha]$) определена и непрерывна обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая возрастает (убывает) на этом множестве.*

Доказательство. Из леммы 3.20 следует существование и строгая монотонность функции $x = f^{-1}(y)$. Надо доказать непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$.

Доказательство проведем для возрастающей функции $y = f(x)$, для убывающей функции доказательство аналогично.

Пусть $x_0 \in (a,\, b)$ и $y_0 = f(x_0)$. Надо доказать, что

$$f^{-1}(y_0 - 0) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + 0). \tag{3.23}$$

Предположим, что не выполнено первое равенство в выражении (3.23). Тогда из неравенства (3.20) (см. теорему 3.13) для возрастающей функции $x = f^{-1}(y)$ получаем следующее неравенство: $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0)$.

Поскольку для любой точки $y \in [\alpha,\, y_0)$ выполняется неравенство $a \leqslant f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 - 0) = \sup\limits_{a \leqslant y < y_0} f^{-1}(y)$, а для любой точки $y \in [y_0,\, \beta]$ имеют место неравенства: $f^{-1}(y_0) \leqslant f^{-1}(y) \leqslant b$, то интервал $\big(f^{-1}(y_0 - 0), f^{-1}(y_0)\big)$ не принадлежит множеству значений функции $x = f^{-1}(y)$. Однако образом отрезка $[a,\, b]$ для непрерывной функции $y = f(x)$ является отрезок $[\alpha,\, \beta]$.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение об отсутствии первого равенства в выражении (3.23) было неверно. Аналогично проводится доказательство второго равенства в (3.23).

Для концов отрезка — точек α и β — надо доказать равенства $f^{-1}(\alpha + 0) = f^{-1}(\alpha)$ и $f^{-1}(\beta - 0) = f^{-1}(\beta)$. $\triangle$

§ 10. Равномерная непрерывность

10.1. Определения и примеры. Введем еще одно очень важное в анализе понятие *функции, равномерно непрерывной на множестве*. Пусть $f\colon X \to Y$ и $y = f(x)$.

Определение 3.48. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых точек x' и x'' из множества X таких, что $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Представим определение 3.48 в символьной записи:

$$\Big[\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x',\, x'' \in X :$$
$$|x' - x''| < \delta \ \longmapsto\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\Big]. \tag{3.24}$$

Пример 3.45. Приведем простейший пример равномерно непрерывной функции на всей числовой прямой, такой функцией является линейная функция $y = kx + b$.

Действительно,

$$|f(x') - f(x'')| = |k| \cdot |x' - x''| < \delta \cdot |k|.$$

Если δ взять равным $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$, то, согласно определению (3.24), функция $y = kx + b$ будет равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Дадим в символьной записи отрицание определения 3.48:

$$\Big[y = f(x) \text{ не является равномерно непрерывной на } X\Big] \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \Big[\exists\, \varepsilon_0 > 0 :\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x',\, x'' \in X :\ |x' - x''| < \delta\ : \\ |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0\Big]. \quad (3.25)$$

Приведем пример функции, не являющейся равномерно непрерывной на множестве.

Пример 3.46. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$. Докажем этот факт.

Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, для каждого положительного числа δ найдется точка $x' > \dfrac{\varepsilon_0}{\delta}$. Это можно сделать в силу того, что функция $y = x^2$ определена на $(0, +\infty)$. Пусть $x'' = x' + \dfrac{\delta}{2}$ и $|x' - x''| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. Тогда получаем

$$|f(x') - f(x'')| = |(x')^2 - (x'')^2| = |x' + x''| \cdot |x' - x''| = \\ = \left(2x' + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > \left(2\,\frac{\varepsilon_0}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} = \varepsilon_0 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > \varepsilon_0.$$

Таким образом, из (3.25) делаем вывод, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на множестве $(0, +\infty)$.

Введем еще одно понятие, которое в дальнейшем позволит нам доказывать равномерную непрерывность на множестве некоторых функций.

Определение 3.49. *Модулем непрерывности* ограниченной на множестве X функции $y = f(x)$ называется следующая функция: $\omega_{f,\,X}(\delta) = \sup\limits_{\substack{x',\,x''\in X\\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')|$.

Пример 3.47. Найдем оценку модуля непрерывности функции $y = f(x) = \sqrt{x}$ на множестве $X = (0,\,+\infty)$.

Пусть, для определенности, $x'' = x' + c$, где $0 < c < \delta$, тогда

$$|f(x') - f(x'')| = |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} = \\ = \frac{c}{\sqrt{x' + c} + \sqrt{x'}} < \sqrt{c} < \sqrt{\delta}.$$

Итак, справедлива оценка:

$$\omega_{f,\,X}(\delta) = \sup_{\substack{x',\,x''\in X\\ |x'-x''|<\delta}} |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \sqrt{\delta}.$$

10.2. Теорема Кантора. Сформулируем и докажем следующую важную теорему.

Теорема 3.22. (Кантор.) *Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,\,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Докажем теорему методом от противного: пусть функция $y = f(x)$ не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,\,b]$. Тогда, следуя (3.25), существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие точки x'_n и x''_n отрезка $[a, b]$, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Так как $x'_n \in [a,\,b]$, то последовательность $\{x'_n\}$ ограничена, а поэтому существует подпоследовательность $\{x'_{k_n}\}$, которая сходится к некоторому числу $c \in [a,\,b]$ (см. теорему Больцано — Вейерштрасса, теорема 2.20). Кроме того, для членов этой подпоследовательности верно: $|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < 1/k_n \leqslant 1/n$, это неравенство перепишем в следующем виде: $x'_{k_n} - 1/n < x''_{k_n} < x'_{k_n} + 1/n$. Следовательно, согласно теореме 2.13, последовательность $\{x''_{k_n}\}$ так же сходится к числу c.

Воспользуемся непрерывностью функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$, при $n \to \infty$ получаем, что $f(x'_{k_n}) \to f(c)$ и $f(x''_{k_n}) \to f(c)$, а последовательность $\{f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\}$ является бесконечно малой последовательностью. Однако имеет место также неравенство $|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangle$

Покажем, как применение теоремы 3.22 позволяет доказать равномерную непрерывность функции на некотором множестве.

Пример 3.48. Докажем, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на множестве $X = [0, +\infty)$.

Введем множества $X_1 = [0, 2]$ и $X_2 = [1, +\infty)$, для которых выполняется $X = X_1 \cup X_2$. По теореме 3.22 функция $y = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на X_1. Поэтому (см. определение 3.48) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любых точек x' и x'' из множества X_1, для которых выполняется $|x' - x''| < \delta_1$, верно неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Для точек $x', x'' \in X_2$ таких, что $|x' - x''| < \delta_2$, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$|f(x') - f(x'')| = \frac{|x' - x''|}{(\sqrt[3]{x'})^2 + \sqrt[3]{x'x''} + (\sqrt[3]{x''})^2} \leqslant \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta_2}{3}.$$

Если $\delta_2 = 3\varepsilon$, то для выбранных точек x' и x'' верно неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Для указанного δ точки x' и x'' такие, что $|x' - x''| < \delta$, принадлежат либо множеству X_1, либо множеству X_2 и невозможен случай $x' \in X_1$ и $x'' \in X_2$.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдено число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек x' и x'' множества X, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$, выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

10.3. Критерий равномерной непрерывности на множестве. Теорема 3.22 дает достаточное условие равномерной непрерывности функции на отрезке. Сформулируем критерий равномерной непрерывности функции на произвольном множестве, используя понятие *модуля непрерывности функции* 3.49.

Теорема 3.23. *Для равномерной непрерывности на множестве X функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_{f,X}(\delta) = 0$.

Доказательство. Необходимость. В определении (3.24) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такое положительное число δ_ε, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$ для всех x', $x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$. Тогда

$$\sup_{\substack{x',\, x'' \in X \\ |x'-x''|<\delta_\varepsilon}} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Неравенство (3.26) остается справедливым для любых точек x', $x'' \in X$ таких, что $|x' - x''| < \delta$ для любого числа $\delta \in (0,\, \delta_\varepsilon)$.

Итак, для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta_\varepsilon > 0$, зависящее от ε, что для всех $\delta \in (0,\, \delta_\varepsilon)$ выполняется неравенство $\omega_{f,\,X}(\delta) < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_{f,\,X}(\delta) = 0$.

Достаточность. Для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ_ε, что выполняется неравенство $\sup\limits_{\substack{x',\, x'' \in X \\ |x'-x''|<\delta_\varepsilon}} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Зафиксируем число $\delta \in (0,\, \delta_\varepsilon)$. Справедливо

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \sup_{\substack{x',\, x'' \in X \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется для любых точек x', $x'' \in X$ таких, что $|x' - x''| < \delta$. Таким образом, функция $y = f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X (см. выражение (3.24)).$\triangle$

Пример 3.49. Используем теорему 3.23 для исследования на равномерную непрерывность на множестве $X = (0,\, +\infty)$ функцию $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Здесь теорема Кантора не применима, поскольку множество X не является отрезком. Однако из примера 3.47 находим, что функция $y = f(x) = \sqrt{x}$, заданная на этом множестве, является, в силу критерия (теорема 3.23), равномерно непрерывной на $(0,\, +\infty)$. Поскольку справедливо $0 \leqslant \omega_{f,\,X}(\delta) \leqslant \sqrt{\delta}$, поэтому выполняется $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_{f,\,X}(\delta) = 0$.

§ 11. Элементарные функции, их непрерывность

Все приведенные ранее в этой главе результаты касались абстрактных функций, обладающих определенными свойствами, а именно: имеющие предел в точке, монотонные на некотором множестве, непрерывные в точке или на отрезке и т. п. Теперь строго определим некоторые элементарные функции, которые известны из школьного курса математики, и докажем их непрерывность.

В гл. 1 были определены основные операции над действительными числами, а также определены следующие выражения для $n \in \mathbb{N}$: x^n (замечание 1.13), x^{-n} (замечание 1.14), $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (определение 1.20).

Более того, можно определить рациональную степень любого положительного действительного числа.

Определение 3.50. Пусть $r = m/n$ — рациональное число и $m,\, n \in \mathbb{N}$, определим *рациональную степень действительного числа* $x > 0$ следующим образом: $x^r = (x^{1/n})^m$. При этом договоримся, что $x^0 = 1$ и $x^{-r} = \bigl(1/x\bigr)^r$.

11.1. Многочлены и рациональные функции. На $\mathbb{R}$ зададим функции: $y = p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ и $y = q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Функция $y = p_n(x)$ называется *многочленом степени* n, функция $y = q_m(x)$ — многочлен степени m. Областью определения многочлена является $\mathbb{R}$.

Функция $y = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)} = \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$ называется *рациональной функцией*, она определена на всей числовой оси $\mathbb{R}$, за исключением точек, являющихся нулями многочлена $y = q_m(x)$.

Очевидно, что любая функция $y = a\,x^n$ непрерывна на всей числовой оси (см. теорему 3.7). Из этой же теоремы следует, что многочлены и рациональные функции непрерывны на своей области определения. Итак, справедливы следующие предложения.

Предложение. *Функция $y = p_n(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Предложение. *Функция $y = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением точек, являющихся нулями многочлена $y = q_m(x)$.*

11.2. Степенная функция с рациональным показателем. Рассмотрим функцию $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, на отрезке $[0,\, a]$. Функция является возрастающей на этом отрезке. Докажем этот факт.

Пусть $x_1,\, x_2 \in [0,\, a]$ и $x_1 < x_2$, тогда

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)\bigl(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2\, x_1^{n-2} + x_1^{n-1}\bigr) > 0.$$

Итак, функция $y = x^n$ возрастает и непрерывна на отрезке $[0,\, a]$, множество ее значений есть отрезок $[0,\, a^n]$, поэтому по теореме об обратной функции (теорема 3.21) на отрезке $[0,\, a^n]$ существует обратная ей функция, которую обозначим $y = x^{1/n}$ или $y = \sqrt[n]{x}$. Функция $y = x^{1/n}$ является возрастающей и непрерывной на этом отрезке. В силу произвольности действительного числа $a > 0$ получаем, что функция $y = x^{1/n}$ определена и непрерывна на всем множестве $\{x \in \mathbb{R}\colon\, x \geqslant 0\}$.

Используя определение 3.50, можно ввести степенную функцию $y = x^r$ рационального показателя $r = m/n$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$ при этом полагаем, что $y = x^r = \bigl(x^{1/n}\bigr)^m$. Функция $y = x^r$ является непрерывной на множестве $\mathbb{R}_+$.

Функция $y = x^r$, $r = m/n$ и $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, возрастает при $m > 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}\colon\, x > 0\}$ и убывает на этом множестве при $m < 0$.

Сформулируем некоторые свойства рациональной степени действительного положительного числа, которые нам потребуются в дальнейшем.

Лемма 3.24. *Справедливы следующие свойства рациональной степени числа $x > 0$:*

1) $\bigl(x^{1/n}\bigr)^m = \bigl(x^m\bigr)^{1/n}$*;*
2) *для $r_1,\, r_2 \in \mathbb{Q}$ выполняется $\bigl(x^{r_1}\bigr)^{r_2} = x^{r_1 r_2}$;*
3) *для $r_1,\, r_2 \in \mathbb{Q}$ выполняется $x^{r_1}\, x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}$;*
4) *для $x > 1$, $r \in \mathbb{Q}$ и $r > 0$ выполняется $x^r > 1$;*
5) *для $x > 1$, $r_1,\, r_2 \in \mathbb{Q}$ и $r_1 < r_2$ верно $x^{r_1} < x^{r_2}$.*

Доказательство. Свойства 1) — 3) проверяются непосредственно, при этом используются свойства целых степеней и определение 3.50.

1) Пусть $b = \left(x^{1/n}\right)^m$ и $a = \left(x^m\right)^{1/n}$, тогда

$$b^n = \left(x^{1/n}\right)^{mn} = \left(x^{1/n}\right)^{nm} = \left(\left(x^{1/n}\right)^n\right)^m = x^m;$$

$$a^n = \left(\left(x^m\right)^{1/n}\right)^n = x^m.$$

Следовательно, $b^n = a^n$ и $a = b$.

Свойства 2) и 3) доказываются аналогичным образом, при этом уже используется свойство 1).

Очевидным является утверждение 4). Поскольку для $x > 1$ выполняется $x^{1/n} > 1$, а функция $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, возрастает на множестве $\{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$, то $x^r > 1$ для $r = m/n > 0$.

5) следует из 3) и 4). Действительно, пусть $r = r_2 - r_1$ и $r > 0$. Умножим неравенство $x^{r_1} < x^{r_2}$ слева и справа на число x^{-r_1}. Тогда из свойства 3) получаем $1 < x^r$. Поскольку $x > 1$ и $r > 0$, то из 4) следует, что $1 < x^r$. Таким образом, исходное неравенство $x^{r_1} < x^{r_2}$ справедливо. $\triangle$

Поскольку следующие свойства рациональной степени действительного числа важны для определения показательной функции, то их сформулируем в виде отдельных лемм.

Лемма 3.25. *Если $a > 1$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $|r| < \delta$, выполняется $|a^r - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство. В примере 2.14 было доказано, что для $a > 1$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. Справедливо также утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$.

Из определения предела последовательности получаем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, для которого выполнены неравенства: $1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^{1/N} < 1 + \varepsilon$.

Тогда для любого числа $r \in \mathbb{Q}$ такого, что $|r| < 1/N$, справедливы следующие неравенства: $1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^r < a^{1/N} < 1 + \varepsilon$.

Таким образом, для любого положительного числа ε найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, что для всех рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $|r| < \delta$, выполняется $|a^r - 1| < \varepsilon$. $\triangle$

Лемма 3.26. *Если $a > 1$ и последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то числовая последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.*

Доказательство. Поскольку последовательность r_n сходится, то она ограничена, т. е. существуют такие рациональные числа p и q, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $p \leqslant r_n \leqslant q$. Из свойства 5) леммы 3.24 получаем $a^p \leqslant a^{r_n} \leqslant a^q$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее воспользуемся леммой 3.25: для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого рационального числа r, для которого выполнено неравенство $|r| < \delta$, справедливо $|a^r - 1| < \varepsilon/a^q$.

Последовательность $\{r_n\}$ сходится, следовательно, она фундаментальная (критерий Коши — теорема 2.24). Поэтому для числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ имеет место неравенство $|r_n - r_m| < \delta$. Таким образом, $|a^{r_n - r_m} - 1| < \varepsilon/a^q$.

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполняется

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| < a^q \,\frac{\varepsilon}{a^q} = \varepsilon.$$

Последовательность $\{a^{r_n}\}$ фундаментальна, в силу критерия Коши (теорема 2.24) она сходится. $\triangle$

Замечание 3.19. Из этой леммы, в частности, следует, что если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ бесконечно малая, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится к 1. Поскольку $\{a^{1/n}\}$ сходится к 1 при $n \to \infty$ для $a > 0$ (см. пример 2.14), а последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится, то она сходится к 1.

11.3. Показательная функция. Используем степенную функцию с рациональным показателем для определения показательной функции.

Определение 3.51. Пусть $a > 0$ и x — произвольное действительное число, последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Тогда по определению будем считать,что

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{3.27}$$

Замечание 3.20. Существование предела (3.27) следует из леммы 3.26.

Замечание 3.21. Определение 3.51 корректно, т. е. предел (3.27) не зависит от выбора последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящейся к числу x.

Докажем это методом от противного. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — две различные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к x, однако $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = A'$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n} = A''$.

Рассмотрим следующую последовательность рациональных чисел $\{r_n\} = \{r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, \ldots\}$. Эта последовательность сходится к числу x, а поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = A$ (лемма 3.26). Последовательности $\{a^{r'_n}\}$ и $\{a^{r''_n}\}$ — подпоследовательности сходящейся к числу A последовательности $\{a^{r_n}\}$, поэтому $A' = A'' = A$.

С помощью (3.27) на всей числовой оси $\mathbb{R}$ определена *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$.

Предложение. *Показательная функция $y = a^x$ обладает следующими свойствами:*

1) *для любых действительных чисел x_1 и x_2 выполняются равенства: $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;*
2) *функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает на $\mathbb{R}$, функция $y = a^x$ убывает на $\mathbb{R}$ при $0 < a < 1$;*
3) *функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси;*
4) *если $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$;*
5) *если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

Доказательство. Равенства 1) можно доказать, если воспользоваться свойствами рациональных степеней положительного действительного числа (свойства 2) и 3) леммы 3.24), определением (3.27) и арифметическими операциями над сходящимися последовательностями.

Свойство 2) следует из утверждения 5) леммы 3.24 и определения показательной функции (3.27).

Докажем пункт 3) предложения — непрерывность показательной функции для $a > 1$. Предварительно покажем, что функция $y = a^x$ непрерывна в нуле, т. е. справедливо $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно малая последовательность действительных чисел. Для каждого действительного числа x_n найдется такая пара чисел r'_n, $r''_n \in \mathbb{Q}$, что $r'_n < x_n < r''_n$. В качестве r'_n возьмем рациональное приближение числа x_n по недостатку, а в качестве r''_n — рациональное приближение x_n по избытку, причем

$$r''_n - x_n = \frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{n}, \qquad x_n - r'_n = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}.$$

Тогда $x_n - \dfrac{1}{n} < r'_n < x_n < r''_n < x_n + \dfrac{1}{n}$. Поэтому последовательности $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ являются бесконечными малыми.

В силу возрастания функции $y = a^x$ для $a > 1$ выполняется $a^{r'_n} < a^{x_n} < a^{r''_n}$. Из леммы 3.25 (см. замечание после доказательства этой леммы) следует, что верно $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n} = 1$. Применяя теорему 2.13, находим $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^0 = 1$. Равенство выполняется для любой бесконечно малой последовательности, поэтому предел $y = a^x$ в нуле существует и равен значению этой функции в нуле: $\lim\limits_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$, т. е. функция $y = a^x$ непрерывна в нуле.

Осталось доказать непрерывность функции $y = a^x$ в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, сходящаяся к x_0. Для этой последовательности, из непрерывности функции $y = a^x$ в нуле, следует:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{x_n} - a^{x_0}\right) = a^{x_0}\lim_{n\to\infty}\left(a^{x_n - x_0} - 1\right) = 0.$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, выполняется $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, и, таким образом, функция $y = a^x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Для $0 < a < 1$ доказательство аналогично, при этом используется убывание функции $y = a^x$ на $\mathbb{R}$.

Докажем утверждение 4). Обозначим $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность: для любого натурального числа m найдется такое натуральное число n_m, что для всех $n \geqslant n_m$ выполняется $x_n > m$.

К выражению $(1+\alpha)^m$ применим неравенство Бернулли (2.7), получаем $a^m = (1+\alpha)^m > m\alpha$. Однако для всех номеров $n \geqslant n_m$ выполняется $a^{x_n} > a^m > m\alpha$. Таким образом, последовательность $\{a^{x_n}\}$ является бесконечно большой положительной последовательностью. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ приходим к выводу, что функция $y = a^x$ является бесконечно большой положительной при $x \to +\infty$ т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Заметим, что для произвольной бесконечно большой положительной последовательности $\{x_n\}$ выполняется $a^{-x_n} = \dfrac{1}{a^{x_n}}$ и по доказанному выше $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-x_n} = 0$ (см. теорему 2.5). Откуда, в силу произвольности последовательности $\{x_n\}$, находим $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Для $0<a<1$ свойство 5) доказывается аналогично. $\triangle$

Замечание 3.22. Показательная функция $y = e^x$, где основание $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентой*.

11.4. Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$ для $a > 1$ является возрастающей и непрерывной на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, множество ее значений есть отрезок $[a^\alpha, a^\beta] \subset \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\}$.

По теореме 3.21 об обратной функции на $[a^\alpha, a^\beta]$ у нее существует обратная функция $y = \log_a x$, называемая *логарифмической функцией* по основанию a. Эта функция непрерывна и возрастает на отрезке $[a^\alpha, a^\beta]$.

В силу произвольности отрезка $[\alpha, \beta]$, логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена, возрастает и непрерывна на всем множестве $\{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$, а множеством ее значений будет вся числовая ось $\mathbb{R}$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена, возрастает и непрерывна на множестве $\{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$. Для этой функции верно $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.*

Если $0 < a < 1$, *то функция* $y = \log_a x$ *определена, убывает и непрерывна на* $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\}$. *Для этой функции выполняется* $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.

Замечание 3.23. Особую роль играет логарифмическая функция, основанием которой является число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Для этой функции есть особое обозначение $y = \ln x$, и логарифмы по основанию e называются *натуральными логарифмами*.

11.5. Гиперболические функции. Определим следующие функции:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

— *гиперболический синус, гиперболический косинус, гиперболический тангенс и гиперболический котангенс* соответственно.

Из теоремы 3.7 вытекает непрерывность функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{th} x$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$, поскольку функции $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Функция $y = \operatorname{cth} x$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11.6. Степенная функция с любым действительным показателем. Пусть $x > 0$. Определим функцию $y = x^\beta$ для фиксированного числа $\beta \in \mathbb{R}$: $y = x^\beta = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = a^{\beta \log_a x}$. Эта функция непрерывна на $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 0\}$ как суперпозиция непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $y = a^z$ и непрерывной на $\{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$ функции $z = \beta \log_a x$ (см. теорему 3.9).

11.7. Тригонометрические функции. Справедливо следующее утверждение, определяющее тригонометрические функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ по некоторому минимальному набору свойств[3.5].

[3.5]Такое определение тригонометрических функций и доказательство приведены в книге [**5**].

Предложение. *Существует единственная пара функций, определенных на всей числовой оси, которые обозначим $y = \sin x$ и $y = \cos x$, удовлетворяющих приведенным ниже свойствам.*

Для любых чисел α и β из $\mathbb{R}$ выполняется:

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;
2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
4) $\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1$;
5) $\sin(\pi/2) = 1, \quad \cos(\pi/2) = 0$;
6) *если* $0 < \alpha < \pi/2$, *то справедливо* $0 < \sin\alpha < \alpha$.

Замечание 3.24. Свойства 1) — 5) хорошо известны из курса школьной математики, свойство 6) легко доказать геометрическими рассуждениями.

Все остальные известные свойства тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ получаются из свойств 1) — 6).

11.7.1. *Доказательство некоторых свойств.* Используя свойства 1) — 6), докажем ряд известных из элементарной математики свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

1°. $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$.

Используем свойства 1) — 4) для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = \sin 0 = \sin(x - x) = \sin\bigl(x + (-x)\bigr) = \\ = \sin x\cos(-x) + \sin(-x)\cos x. \quad (3.28)$$

$$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos\bigl(x + (-x)\bigr) = \\ = \cos x\cos(-x) - \sin x\sin(-x). \quad (3.29)$$

Умножим (3.28) на $\sin x$, а (3.29) на $\cos x$ и сложим полученные выражения, находим $\cos(-x) = \cos x$.

Аналогично, умножим выражение (3.28) на $\cos x$, а выражение (3.29) на $-\sin x$ и сложим равенства, тогда $\sin(-x) = -\sin x$.

2°. Для $-\pi/2 < x < 0$ выполняется $x < \sin x < 0$.

Умножим неравенства свойства 6) на (-1) и воспользуемся свойством **1°** для функции $y = \sin x$, получаем требуемые неравенства.

3°. Для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right); \tag{3.30}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{3.31}$$

Для доказательства равенств (3.30) и (3.31) используются свойства 1) — 3) функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. При этом выписываются выражения, стоящие в правых частях равенств и используются частные случаи равенств 1) и 2) при $\alpha = \beta = \alpha/2$: $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ и $\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$.

4°. Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ периодические с периодом 2π.

Это утверждение доказывают последовательным применением свойств 1) — 2) и 4) — 5).

5°. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ограничены на всей числовой оси и $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Следуют из свойства 3).

6°. Функция $y = \sin x$ возрастает на каждом отрезке вида $[-\pi/2 + 2\pi k,\ \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$; функция $y = \cos x$ убывает на каждом отрезке $[2\pi k,\ \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Докажем возрастание функции $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$.

Пусть $\pi/2 > \alpha > \beta > -\pi/2$, тогда из (3.30) получаем неравенство $\sin\alpha - \sin\beta > 0$, поскольку $\cos(-x) = \cos x$, а из свойства 6) следует для $0 < (\alpha-\beta)/2 < \pi/2$ неравенство $\sin\big((\alpha-\beta)/2\big) > 0$.

Для функции $y = \cos x$ убывание на отрезке $[0,\ \pi]$ доказывается аналогично.

Для других отрезков используем свойство периодичности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

11.7.2. *Непрерывность функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.*

Предложение. *Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей числовой оси $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Докажем непрерывность в нуле функции $y = \sin x$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно малая последовательность и $x_n > 0$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Тогда из свойства 6) получаем $0 < \sin(x_n) < x_n$. Применим теорему 2.13, в силу произвольности последовательности $\{x_n\}$, находим $\lim\limits_{x \to +0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Аналогично, для любой бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n < 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, выполняются неравенства $x_n < \sin(x_n) < 0$ (см. свойство **2°**). Итак, $\lim\limits_{x \to -0} \sin x = \sin 0 = 0$. Полученное равенство означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в нуле.

Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, тогда из равенства (3.30) и непрерывности функции $y = \sin x$ в нуле получаем

$$\sin(x_n) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x_n - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_n + x_0}{2}\right) \to 0.$$

Из произвольности последовательности $\{x_n\}$ следует равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin(x_0)$.

Аналогичным образом (см. (3.31)) доказывается, что функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Пример 3.50. Функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Докажем это утверждение, используя отрицание определения предела функции в точке по Гейне (3.10).

Пусть $x'_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $x'_n \to 0$ и $x''_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $y'_n = f(x'_n) = 0$, $y''_n = f(x''_n) = 1$. Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n)$.

Пример 3.51. Тригонометрическая функция $y = \sin x$ не имеет предела при $x \to \pm\infty$.

Докажем, что не существует предел при $x \to +\infty$. Используем отрицание определения предела по Гейне. Пусть $x'_n = \pi n$ и $x''_n = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x'_n \to +\infty$ и $x''_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ и $f(x'_n) \to 0$ и $f(x''_n) \to 1$ для $n \to \infty$.

Пример 3.52. Функция $y = x\cos\dfrac{1}{x}$ имеет предел в нуле и $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$, поскольку функция $y = x$ бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $y = \cos\dfrac{1}{x}$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Пример 3.53. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\cos x}{x^2+\sin x}$.

Справедливо $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\cos x}{x^2+\sin x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{\cos x}{x^2}}{1+\dfrac{\sin x}{x^2}} = 1$, поскольку при $x \to +\infty$ функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ бесконечно малая, а функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ ограничены на $\mathbb{R}$.

11.7.3. *Другие тригонометрические функции, непрерывность.* Функция $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ определена и непрерывна на множестве $X_1 = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Непрерывность функции $y = \operatorname{tg} x$ следует из теоремы 3.7.

Функция $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ определена и непрерывна на множестве $X_2 = \mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ее непрерывность так же следует из теоремы 3.7.

Функции $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ определены на множествах X_1 и X_2 соответственно и непрерывны на них.

Замечание 3.25. Далее нам потребуются следующие неравенства: $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ при $|x| < \pi/2$. Эти неравенства доказываются геометрически при $0 < x < \pi/2$, а для случая $-\pi/2 < x < 0$ используется нечетность функции $y = \sin x$ и четность функции $y = \cos x$.

Смотри рисунок 3.6: $|AD| = \sin x$, $|OD| = \cos x$, $\dfrac{|AD|}{|OD|} = \dfrac{|BC|}{|OC|}$ и $|OC| = 1$, поэтому $|BC| = \operatorname{tg} x$, а $|\overset{\smile}{AC}| = x$. Следовательно, справедливы неравенства $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

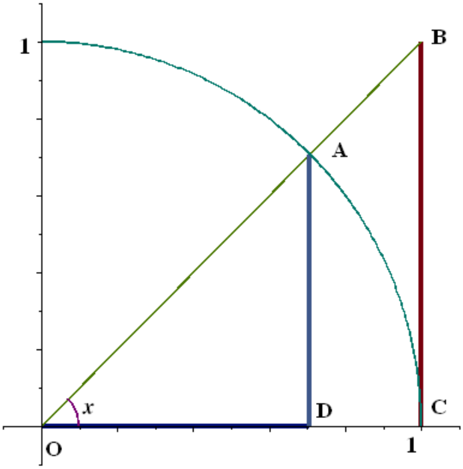

Рис. 3.6

11.8. Обратные тригонометрические функции и их непрерывность. Функция $y = \sin x$ возрастает на $[-\pi/2,\ \pi/2]$ (см. свойство **6°**), множество ее значений есть отрезок $[-1,\ 1]$.

Применим теорему об обратной функции (теорема 3.21): на отрезке $[-1,\ 1]$ определена обратная функция, которую обозначим $y = \arcsin x$, множество ее значений есть отрезок $[-\pi/2,\ \pi/2]$. Эта функция возрастает и непрерывна на отрезке $[-1,\ 1]$.

Функция $y = \cos x$ убывает на $[0,\ \pi]$, множеством ее значений является отрезок $[-1,\ 1]$. По теореме об обратной функции 3.21 на отрезке $[-1,\ 1]$ определена обратная функция $y = \arccos x$, убывающая и непрерывная на этом отрезке, отрезок $[0,\ \pi]$ — множество ее значений.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает и непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, множеством ее значений является вся числовая ось $\mathbb{R}$.

Для любого отрезка $[-\alpha,\ \alpha] \subset (-\pi/2,\ \pi/2)$ применим теорему 3.21 об обратной функции, тогда на соответствующем отрезке $[-\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha]$ определена и непрерывна обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$.

В силу произвольности числа $\alpha \in (0,\ \pi/2)$ находим, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена и непрерывна на всей числовой оси, а ее множеством значений является интервал $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Причем справедливо $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена и непрерывна на интервале $(0,\ \pi)$. Эта функция убывает на данном интервале. Множеством ее значений является вся числовая ось $\mathbb{R}$.

Применим теорему об обратной функции для произвольного отрезка $[\alpha,\ \beta] \subset (0,\ \pi)$. На отрезке $[\operatorname{ctg}\beta,\ \operatorname{ctg}\alpha]$ определена и непрерывна убывающая обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

В силу произвольности чисел $\alpha,\ \beta \in (0,\ \pi)$ получаем, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена и непрерывна на всей числовой оси, а интервал $(0,\ \pi)$ является ее множеством значений.

Для этой функции справедливы равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

§ 12. Вычисление некоторых пределов

12.1. Первый замечательный предел. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем неравенство $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$, для $|x| < \pi/2$ (см. замечание 3.25). Из этого неравенства легко получить выражение $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Для функции $y = \cos x$ выполняется $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, и применение теоремы 3.5 заканчивает доказательство. $\triangle$

Из теорем 3.27, 3.7 и 3.9, а также непрерывности функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \arcsin x$ в нуле следуют следующие выражения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \tag{3.32}$$

Эти пределы будем называть *модификациями первого замечательного предела.*

Покажем, как из первого замечательного предела следует, например, последнее равенство в (3.32).

Очевидно, что $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$. Пусть $y=\arcsin x$ и $y\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности функции $y=\arcsin x$ в нуле. Тогда $\dfrac{y}{\sin y}=\dfrac{\arcsin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$.

12.2. Второй замечательный предел. Для $|x|>1$ определена функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

Теорема 3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Доказательство. Будем использовать определение числа e (см. гл. 2, § 3, пункт 3.4): $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. С помощью логических символов это выражение можно представить следующим образом:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,N=N(\varepsilon):\quad \forall\,n>N\quad\longmapsto$$
$$\longmapsto\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon. \tag{3.33}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$, так как последовательность $\{n+1\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{n\}$ натуральных чисел.

Пусть $x\geqslant N$ и $[x]=n$, здесь N — номер из выражения (3.33), тогда справедливы следующие неравенства: $n\leqslant x<n+1$, $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{n}$ и $1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$. Откуда находим

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Таким образом, в силу произвольности действительного числа $x\geqslant N$ справедливо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Пусть $x = -1 - y$, очевидно, что $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Тогда $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\dfrac{1}{y+1}\right)^{-1-y} = \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Далее, рассмотрим произвольную бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$, которая содержит как бесконечно много положительных членов, так и бесконечно много отрицательных членов. Эту последовательность разобьем на две подпоследовательности: $\{x'_{k_n}\}$ — все ее члены положительны и $\{x''_{k_n}\}$ — все ее члены отрицательны.

В силу доказанного выше, имеют место следующие равенства: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x'_{k_n}}\right)^{x'_{k_n}} = e$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x''_{k_n}}\right)^{x''_{k_n}} = e$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Поскольку бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ произвольна, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$. △

Теоремы 3.27, 3.7, 3.9, а также непрерывность элементарных функций $y = \log_a(1+x)$, $y = \ln(1+x)$, $y = a^x$, $y = e^x$ и $y = (1+x)^\beta$ в нуле[3.6] позволяют получить следующие пределы:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e,\\
&\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a},\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\\
&\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\\
&\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1,\\
&\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\beta-1}{x} = \beta.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

[3.6] Здесь $\beta \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$.

Например, последнее равенство получаем таким образом:

$$\frac{(1+x)^\beta - 1}{x} = \frac{\left(a^{\log_a(1+x)}\right)^\beta - 1}{x} = \frac{a^{\beta\log_a(1+x)} - 1}{x} =$$
$$= \frac{a^{\beta\log_a(1+x)} - 1}{\beta\log_a(1+x)} \cdot \frac{\beta\log_a(1+x)}{x} \to \beta, \quad x \to 0.$$

Пределы (3.34) назовем *модификациями второго замечательного предела.*

12.3. Эквивалентность функций. Справедливо следующее утверждение[3.7].

Предложение. *Если $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g(x)}.$$

Применение определения 3.35 эквивалентных функций и теоремы 3.3 об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, заканчивает доказательство. $\triangle$

Из равенств (3.32) и (3.34) получаем, что при $x \to 0$ эквивалентны следующие функции:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x,$$
$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},\ \ln(1+x) \sim x,\ (1+x)^\beta - 1 \sim \beta x,$$
$$a^x - 1 \sim x\ln a, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \operatorname{sh} x \sim x, \quad \operatorname{th} x \sim x.$$

[3.7] Символ $\sim$ введен в определении 3.35.

ГЛАВА 4

Дифференциальное исчисление

§ 1. Производная и дифференцируемость функции

1.1. Определения. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a,\, b)$.

Для определения производной воспользуемся введенным понятием приращения функции в точке $x_0 \in (a,\, b)$, соответствующего приращению аргумента Δx (см. определение 3.44).

Определение 4.1. *Разностным отношением* в точке x_0 назовем выражение

$$\frac{\Delta y(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание 4.1. Обратим внимание на тот факт, что разностное отношение в точке есть функция, зависящая только от $\Delta x \neq 0$. Таким образом, можно рассмотреть предел этой функции при $\Delta x \to 0$.

Определение 4.2. Если существует и конечен предел разностного отношения $\dfrac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначение. $y'(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x}$. Иногда используют обозначение $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Пример 4.1. Приведем пример функции, которая непрерывна в точке, однако не имеет производной в этой точке.

Функция $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна в нуле, но не имеет в нуле производной, поскольку

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x},$$

а функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$ не имеет предел в точке $x = 0$ (см. пример 3.50).

Можно рассматривать пределы справа и слева разностного отношения в точке $\Delta x = 0$.

Определение 4.3. Назовем *правой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$, соответственно *левой производной* назовем предел $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$.

Обозначение.

$$y'(x_0 + 0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x};$$

$$y'(x_0 - 0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}.$$

Введенные понятия связаны следующим образом.

Предложение. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную в том и только в том случае, когда в этой точке существуют левая и правая производные и они совпадают.*

Доказательство следует, например, из символьной записи определений предела функции в точке (3.11), правого (3.13) и левого (3.14) предела функции в точке.

Пример 4.2. Для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ выполняется

$$y'(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1;$$

$$y'(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Таким образом, $y'(-0) \neq y'(+0)$, поэтому в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной.

Если функция $\dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ является бесконечно большой определенного знака, то будем говорить о *бесконечной производной*, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \pm\infty.$$

Пример 4.3. Функция $y = x^{1/3}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, поскольку

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty.$$

Можно говорить об односторонних бесконечных производных: если разностное отношение в точке x_0 является бесконечно большой функцией определенного знака при $\Delta x \to \pm 0$, то будем говорить об *односторонних бесконечных производных*, т. е.

$$f'(x_0 \pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \pm\infty \, (\mp\infty).$$

Пример 4.4. Функция $y = |x|^{1/3}$ непрерывна в нуле и

$$y'(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{|x|^{1/3}}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty;$$

$$y'(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{|x|^{1/3}}{x} = -\lim_{x \to -0} \frac{1}{x^{2/3}} = -\infty.$$

1.2. Геометрический смысл производной. Пусть $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$. Точка $A(x_0, y_0)$ лежит на графике функции. Придадим x_0 приращение Δx, пусть $\overline{x} = x_0 + \Delta x$ и $\overline{y} = f(\overline{x})$. Точку с координатами $(\overline{x}, \overline{y})$ обозначим $\overline{B}$. Проведем секущую через точки A и $\overline{B}$ (см. рис. 4.1).

Когда точка $\overline{B}$ перемещается вдоль графика функции, то секущая будет вращаться вокруг точки A.

Определение 4.4. *Касательной* в точке A к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение AB секущей $A\overline{B}$, когда точка $\overline{B}$, двигаясь вдоль графика, стремится совпасть с точкой A.

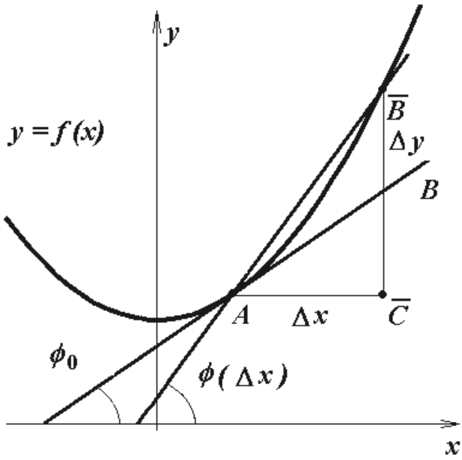

Рис. 4.1

При стремлении точки $\overline{B}$ к точке A приращение аргумента Δx стремится к нулю. Обозначим $\overline{y} - y_0 = \Delta y(x_0, \Delta x)$, тогда $\dfrac{|\overline{C}\,\overline{B}|}{|A\,\overline{C}|} = \dfrac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\phi(\Delta x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 — существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$. При стремлении Δx к нулю секущая стремится занять положение касательной, имеющей угловой коэффициент $\operatorname{tg}\phi_0$. Таким образом, выполняется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\phi(\Delta x) = \operatorname{tg}\phi_0 = f'(x_0)$.

Предложение. *Производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$.*

Замечание 4.2. Если у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существуют односторонние производные $f'(x_0 \pm 0)$, то будем говорить об односторонних касательных в этой точке.

Например, у функции $y = |x|$ (см. пример 4.2) в точке $x = 0$ существуют односторонние производные, следовательно, имеются односторонние касательные в этой точке и $\phi_0 = \pm\dfrac{\pi}{4}$.

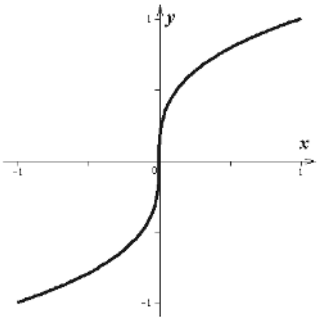

Рис. 4.2

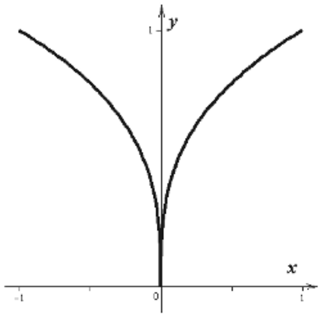

Рис. 4.3

Замечание 4.3. Пусть $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$, тогда касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 вертикальна. В данном случае $\operatorname{arctg}\phi(\Delta x) \to \dfrac{\pi}{2}$ или $\operatorname{arctg}\phi(\Delta x) \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $\Delta x \to 0$.

Для функции $y = x^{1/3}$ из примера 4.3 в точке $x = 0$ существует вертикальная касательная (см. рис. 4.2).

Функция $y = |x|^{1/3}$ примера 4.4 в точке $x = 0$ имеет односторонние касательные, которые вертикальны (см. рис. 4.3). Для этой функции выполняется $\operatorname{arctg}\phi(\Delta x) \to \dfrac{\pi}{2}$ при $\Delta x \to +0$ и $\operatorname{arctg}\phi(\Delta x) \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $\Delta x \to -0$.

1.3. Примеры вычисления производных некоторых элементарных функций. Используя определение 4.2 производной, найдем производные некоторых элементарных функций.

1.3.1. *Производная постоянной функции.* Пусть $y = C$ — постоянная функция на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

1.3.2. *Производные функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.* Для функции $y = \sin x$ получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x.$$

Здесь воспользовались равенством (3.30) и первым замечательным пределом. Итак, $(\sin x)' = \cos x$, для всех $x \in \mathbb{R}$.

Для функции $y = \cos x$ находим

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \\ = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \sin(x + \Delta x/2) = -\sin x.$$

Применили равенство (3.31), первый замечательный предел и непрерывность функции $y = \cos x$ на всей числовой прямой. Окончательно: $(\cos x)' = -\sin x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

1.3.3. *Производная показательной функции.* Для $y = a^x$ справедливо

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} a^x = a^x \ln a.$$

Воспользовались модификацией (3.34) второго замечательного предела, получаем $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, справедливо равенство $(e^x)' = e^x$.

1.3.4. *Производная логарифмической функции.* Рассмотрим $y = \log_a x$, $x > 0$, тогда справедливы равенства, для получения которых так же воспользовались модификацией второго замечательного предела (3.34):

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, в частности, выполняется $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

1.3.5. *Производная степенной функции.* Для степенной функции $y = x^\beta$, где $x > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$, найдем производную. Для этого воспользуемся выражением (3.34):

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x,\, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\beta - x^\beta}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x / x)^\beta - 1}{\Delta x / x}\, x^{\beta - 1} = \beta\, x^{\beta - 1}.$$

Окончательно находим $(x^\beta)' = \beta\, x^{\beta - 1}$.

1.4. Дифференцируемость функции в точке. Введем еще одно важное понятие.

Определение 4.5. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, представляется в виде

$$\Delta f(x_0,\, \Delta x) = A\, \Delta x + \alpha(\Delta x)\, \Delta x, \tag{4.1}$$

где A — константа, не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Замечание 4.4. Учитывая определение 3.33, условие (4.1) можно переписать следующим образом:

$$\Delta f(x_0,\, \Delta x) = A\, \Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0. \tag{4.2}$$

Следующая теорема связывает понятия производной функции в точке и дифференцируемости функции в точке.

Теорема 4.1. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, когда она имеет в этой точке производную.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда имеет место выражение (4.1). Представим его следующим образом: $\dfrac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Откуда находим

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Достаточность. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x}$.

Из определения предела функции в точке находим $\dfrac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\Delta f(x_0,\, \Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$, т.е. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. $\triangle$

Итак, дифференцируемость функции в точке эквивалентна существованию производной функции в этой точке.

Замечание 4.5. Из доказательства теоремы 4.1 получаем, что равенства (4.1) и (4.2) принимают следующий вид:

$$\Delta f(x_0,\, \Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x; \tag{4.3}$$

$$\Delta f(x_0,\, \Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0. \tag{4.4}$$

Далее, выясним связь понятий *дифференцируемости функции в точке* и *непрерывности функции в точке*.

Теорема 4.2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся равенством (4.3) и теоремой 3.12 — разностным аналогом условия непрерывности. Итак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0,\, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \big(f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\big) = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. $\triangle$

Замечание 4.6. Утверждение, обратное теореме 4.2, неверно. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но она не является дифференцируемой в этой точке (см. пример 4.2 и теорему 4.1).

Функция $y = |x|$ дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$. Однако существуют примеры функций, непрерывных на всей числовой оси и не являющихся дифференцируемыми ни в одной точке числовой оси $\mathbb{R}$. Впервые пример такой функции был построен К. Вейерштрассом[4.1].

[4.1] Пример приведен в книге: Гелбаум Б., Олмстелд Дж.. Контрпримеры в анализе. Москва : Мир, 1967.

1.5. Локальные и глобальные свойства дифференцируемой функции. Дифференцируемость функции — локальное понятие. Введем понятие функции, дифференцируемой на некоторых множествах действительной прямой. Определения приведем для интервала и для отрезка. Для других промежутков определения аналогичны.

Определение 4.6. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* $(a,\, b)$, если она дифференцируема в каждой точке интервала $(a,\, b)$.

Определение 4.7. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a,\, b]$, если она дифференцируема в каждой точке интервала $(a,\, b)$, кроме того, имеет правую производную в точке $x = a$ и левую производную в точке $x = b$.

Функция может быть дифференцируема в точке и не быть дифференцируемой ни на каком интервале, содержащем эту точку. Приведем пример такой функции.

Пример 4.5. Функция $y = x^2 \cdot D(x)$, где D — функция Дирихле (см. пример 3.11), является дифференцируемой в точке $x = 0$. Действительно, $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot D(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot D(x) = 0$. Эта функция не является непрерывной ни в какой точке $x_0 \neq 0$, а тем более и дифференцируемой (см. теорему 4.2). Таким образом, рассматриваемая функция дифференцируема в нуле и не является дифференцируемой ни в какой точке как угодно малого интервала, содержащего точку $x = 0$.

§ 2. Основные свойства производной

2.1. Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Укажем, как связаны операция дифференцирования и арифметические операции.

Теорема 4.3. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производные в точке x_0, то функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x)\cdot$ $\cdot g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также имеют производные в точке x_0, которые определяются следующим образом:*

$$1)\ (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0); \tag{4.5}$$

$$2)\ (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0); \tag{4.6}$$

$$3)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}; \tag{4.7}$$

последняя формула справедлива при $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $y = f(x) \pm g(x)$. Тогда приращение функции в точке x_0 имеет вид при $\Delta x \neq 0$:

$$\Delta y(x_0,\, \Delta x) = \Delta f(x_0,\, \Delta x) \pm \Delta g(x_0,\, \Delta x).$$

Разделим равенство на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получаем, в силу существования производных функций f и g в точке x_0:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

2. Пусть $y = f(x) \cdot g(x)$, следовательно,

$$\Delta y(x_0,\, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ = \big[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big] \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot \big[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)\big] = \\ = \Delta f(x_0,\, \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot \Delta g(x_0,\, \Delta x).$$

Правую и левую части равенства разделим на $\Delta x \neq 0$ и устремим Δx к нулю. Находим

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) + \\ + f(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = \\ = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Здесь воспользовались существованием производных функций f и g в точке x_0 и, как следствие, непрерывностью функции g в точке x_0.

3. Наконец, рассмотрим функцию $y = f(x)/g(x)$. Приращение этой функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, представим в виде

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \\ = \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot \Delta g(x_0, \Delta x)}{g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}.$$

Разделим левую и правую части равенства на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Находим

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \\ = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x_0, \Delta x)}{\Delta x}}{g(x_0)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x)} = \\ = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

Здесь пользуемся существованием в точке x_0 производных функций f и g и непрерывностью g в точке x_0. $\triangle$

Пример 4.6. Применим полученную формулу (4.7) для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$:

$$y'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$y'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

2.2. Теорема о производной обратной функции. Выясним, какими дифференциальными свойствами обладает обратная функция $x = f^{-1}(y)$, если, например, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке.

Теорема 4.4. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна на множестве $|x - x_0| \leqslant \delta$, в точке x_0 имеет производную и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и $\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. По теореме 3.21 об обратной функции на отрезке $[a, b]$, если $y = f(x)$ возрастает на множестве $|x - x_0| \leqslant \delta$ (или $[b, a]$, если $y = f(x)$ убывает на этом множестве), существует и непрерывна обратная функция $x = f^{-1}(x)$, здесь $a = f(x_0 - \delta)$ и $b = f(x_0 + \delta)$.

Докажем дифференцируемость функции $x = f^{-1}(y)$ в точке y_0. Для этого введем обозначения: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$.

Пусть
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{4.8}$$
Если $\Delta y \to 0$, то, в силу непрерывности обратной функции $x = f^{-1}(y)$ и разностного аналога условия непрерывности (теорема 3.12), следует, что $\Delta x \to 0$.

При $\Delta x \to 0$ выполняется $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$, поэтому при $\Delta y \to 0$ предел правой части равенства (4.8) существует и равен $1/f'(x_0)$, где $f'(x_0) \neq 0$. Таким образом, при $\Delta y \to 0$ предел левой части выражения (4.8) существует и равен $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$, и требуемое равенство доказано. $\triangle$

Геометрический смысл теоремы легко проиллюстрировать с помощью рисунка, используя геометрический смысл производной (см. рис. 4.4).

Здесь α — угол наклона касательной AB к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$ и $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке A. Выполняются равенства: $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Таким образом, для углового коэффициента касательной к графику обратной функции $\operatorname{tg}\beta = \left(f^{-1}\right)'(y_0)$ верно равенство $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

С помощью доказанной теоремы найдем производные обратных тригонометрических функций.

Пример 4.7. Для функции $y = \arcsin x$ при $x \in [-1, 1]$ существует обратная функция $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Функция $x = \sin y$ дифференцируема на $(-\pi/2, \pi/2)$ и $x'(y) \neq 0$ на этом множестве.

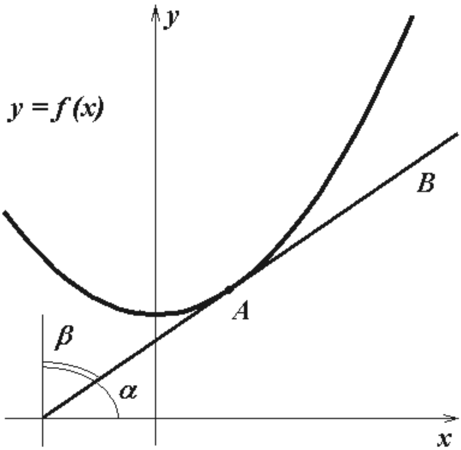

Рис. 4.4

Используя теорему 4.4 и результаты п. 1.3.2, приходим к равенствам

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь учтено, что $\cos y > 0$ при $y \in (-\pi/2,\ \pi/2)$. Итак, доказано: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, здесь $x \in (-1,\ 1)$.

Пример 4.8. Функция $y = \arccos x$, $x \in [-1,\ 1]$, имеет обратную функцию $x = \cos y$, $y \in [0,\ \pi]$, которая дифференцируема на $(0,\ \pi)$ и $x'(y) \neq 0$ на этом интервале. Тогда

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь снова использован тот факт, что $\sin y > 0$ на $(0,\ \pi)$.

Пример 4.9. Функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет обратную функцию $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2,\ \pi/2)$. Снова применим теорему о производной обратной функции, получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 4.10. К функции $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, которая имеет обратную функцию $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0, \pi)$, применяем теорему 4.4. Справедливы следующие выражения:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.3. Дифференцирование суперпозиции функций. Приведем еще одно важное правило нахождения производных.

Теорема 4.5. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0 и $y_0 = f(x_0)$, то суперпозиция функций $h = g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, причем для ее производной справедлива следующая формула:*

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть $\Delta y = \Delta y(x_0, \Delta x)$ — приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, в свою очередь приращению аргумента Δy соответствует приращение функции $z = g(y)$ в точке y_0, которое обозначим $\Delta z = \Delta z(y_0, \Delta y)$.

Поскольку функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то из определения дифференцируемости функции в точке (4.3) получаем $\Delta z = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y$, здесь $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Откуда находим следующее равенство:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\,\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.10}$$

Если $\Delta x \to 0$, то из дифференцируемости в точке x_0 функции $y = f(x)$ и разностной формы условия непрерывности (теорема 3.12) следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (4.10), получаем формулу (4.9) для производной суперпозиции функций. $\triangle$

Полученное правило дифференцирования суперпозиции функций применим для нахождения производных некоторых элементарных функций.

Пример 4.11. Определим производные гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$.

1. Пусть $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$y'(x) = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - (e^{-x})'\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

2. Для функции $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, находим

$$y'(x) = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' + (e^{-x})'\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

3. Функция $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$y'(x) = [\operatorname{th} x]' = \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right]' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

здесь использовали тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$.

4. Функция $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ определена при $x \neq 0$, найдем ее производную:

$$y'(x) = [\operatorname{cth} x]' = \left[\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right]' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Здесь также использовано основное гиперболическое тождество.

Пример 4.12. Пусть $y = f(x) = \ln|x|$. Найдем производную этой функции. Функция $y = f(x)$ определена на всей оси $\mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$. При $x > 0$ справедливо $f(x) = \ln(x)$ и $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. При $x < 0$ выполняется $f(x) = \ln(-x)$, и производная имеет вид $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. Таким образом, $\big(\ln|x|\big)' = \dfrac{1}{x}$.

Пример 4.13. Пусть $y = f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\big)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Пример 4.14. Функция $y = f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет производную: $f'(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}$ в каждой точке $x \neq 0$ и имеет производную в точке $x = 0$ (см. пример 3.52):

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Пример 4.15. Четные и нечетные функции, определенные на симметричном относительно нуля множестве X (см. определение 3.11) и имеющие производную в каждой точке множества X, обладают замечательным свойством: производная четной функции есть функция нечетная, и наоборот, производная нечетной функции есть четная функция.

Докажем утверждение для нечетных функций $y = f(x)$. Используем равенство из определения 3.11: $f(-x) = -f(x)$. Возьмем производную от левой и правой частей этого равенства, используя теорему 4.5. Для любой точки x множества X находим $\big(f(-x)\big)' = -f'(-x) = \big(-f(x)\big)' = -f'(x)$. Откуда $f'(-x) = f'(x)$, т. е. функция $y = f'(x)$ четная.

§ 3. Дифференциал функции

В этом параграфе введем очень важное в математике понятие *дифференциала функции в точке.*

3.1. Определение и геометрический смысл. Вернемся к определению функции, дифференцируемой в точке, и воспользуемся равенством (4.2). В нем $A\,\Delta x$ — главная линейная относительно Δx часть приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующего приращению аргумента Δx. Под словами *главная часть* имеется в виду тот факт, что $\Delta y(x_0, \Delta x) - A\,\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости относительно Δx.

Если учесть замечание 4.5, то главная линейная относительно Δx часть приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть $f'(x_0)\,\Delta x$.

Определение 4.8. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется главная линейная относительно приращения аргумента Δx часть приращения $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующего приращению аргумента Δx.

Обозначение. $dy(x_0) = y'(x_0)\,\Delta x$, $df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$.

Уточним выражение для дифференциала функции в точке, а для этого определим дифференциал независимой переменной.

Определение 4.9. *Дифференциалом dx независимой переменной x* назовем любое число, и в дальнейшем будем брать это число, равным приращению аргумента Δx.

Таким образом, для любой функции $y = f(x)$ справедливо выражение для ее дифференциала в точке x_0:

$$dy = y'(x_0)\,dx \quad \text{или} \quad df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \tag{4.11}$$

Замечание 4.7. Для функции $y = x$ ее дифференциал в любой точке x, с учетом определения дифференциала независимой переменной, имеет вид $dy = \Delta x = dx$. Это показывает взаимосвязь введенных обозначений.

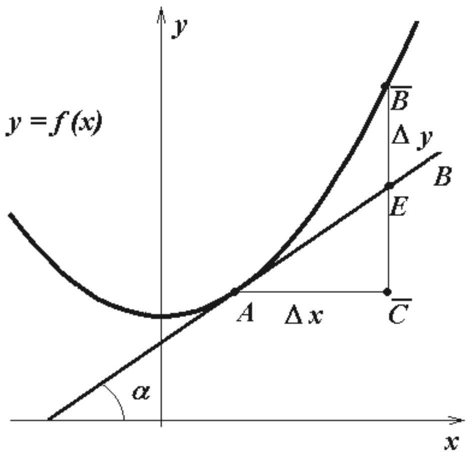

Рис. 4.5

Из (4.11) получаем выражение для производной функции как отношения дифференциалов:

$$y'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}, \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Обратим внимание на тот факт, что для нас ранее производная $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляла собой символ, теперь мы ее можем трактовать как частное дифференциалов.

Выясним геометрический смысл дифференциала. Для этого обратимся к рис. 4.5.

Прямая AB — касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной в точке A. Длина отрезка $\overline{C}E$ равна дифференциалу функции $y = f(x)$ в точке x_0, так как

$$\left|\overline{C}E\right| = \operatorname{tg}\alpha\,\Delta x = f'(x_0)\,\Delta x = df(x_0),$$

в то время как приращение $\Delta y(x_0, \Delta x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, равно длине отрезка $\overline{C}\,\overline{B}$.

3.2. Инвариантность формы первого дифференциала. Рассмотрим дифференцируемую в y_0 функцию $z = g(y)$, если бы y была независимой переменной, то $dz = g'(y_0)\,dy$.

Пусть $z = g(y)$ и $y = f(x)$, причем $y_0 = f(x_0)$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Из равенства для функции (4.9) для $z = g(f(x)) = h(x)$ получаем следующее равенство: $h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

Заметим, что здесь x — независимая переменная, а поэтому: $h'(x_0) = \dfrac{dz}{dx}$ и $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$. Итак: $\dfrac{dz}{dx} = g'(y_0)\cdot\dfrac{dy}{dx}$. Откуда находим: $dz = g'(y_0)\,dy$.

Таким образом, получено то же самое выражение для дифференциала функции в точке, что и в случае, когда y была независимой переменной.

Доказано следующее предложение.

Предложение. *Как и в случае, когда y является независимой переменной, так и в случае, когда y является дифференцируемой функцией другой переменной, дифференциал dz функции $z = g(y)$ в точке y_0 равен производной этой функции в точке y_0, умноженной на дифференциал аргумента dy: $dz = g'(y_0)\,dy$.*

Из этого предложения получаем следствие.

Следствие. *Производная дифференцируемой в точке y_0 функции $z = g(y)$ всегда равна частному дифференциала этой функции в точке y_0 и дифференциала переменной:* $g'(y_0) = \dfrac{dz}{dy}$.

Замечание 4.8. С помощью этого следствия правило нахождения производной обратной функции и правило дифференцирования суперпозиции функций можно записать соответственно следующим образом:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Тем не менее нельзя эти выражения рассматривать как более короткие доказательства теорем 4.4 и 4.5, поскольку предложение об инвариантности формы дифференциала доказано с помощью формулы (4.9) дифференцирования суперпозиции функций.

3.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Предположим, что переменные x и y не связаны напрямую некоторой функциональной зависимостью, а вместо этого x и y являются функциями вспомогательной переменной $t \in T \subset \subset \mathbb{R}$. Таким образом, заданы две функции:

$$x = u(t), \quad y = v(t), \qquad t \in T, \tag{4.12}$$

при этом нам не известна функциональная зависимость $y = f(x)$ переменной y от x. Такое задание называется *параметрическим заданием функции*, а переменная t называется *параметром*.

Можно исследовать дифференциальные свойства функции y как функции переменной x, используя знание дифференциальных свойств функций (4.12), не находя непосредственно эту функциональную зависимость. Справедливо утверждение.

Предложение. *Пусть функции $x = u(t)$ и $y = v(t)$ непрерывны на отрезке $\left|t - t_0\right| \leqslant \delta$, при этом функция $x = u(t)$ строго монотонна на этом отрезке. Далее предположим, что эти* *функции дифференцируемы в точке* t_0 *и* $u'(t_0) \neq 0$. *Тогда в точке* $x_0 = u(t_0)$ *существует производная функции* y *как функции переменной* x *и справедливо выражение*: $\dfrac{dy(x_0)}{dx} = \dfrac{v'(t_0)}{u'(t_0)}$.

Доказательство. Обозначим $a = u(t_0 - \delta)$ и $b = u(t_0 + \delta)$. По теореме об обратной функции 3.21 существует обратная функция $t = u^{-1}(x)$ на отрезке $[a, b]$ или $[b, a]$ в зависимости от того, возрастает или убывает соответственно функция $x = u(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Тогда $y = v(u^{-1}(x))$ является функцией от x на отрезке $[a, b]$ (или $[b, a]$).

По теореме 4.4 обратная функция $t = u^{-1}(x)$ дифференцируема в точке x_0, по теореме 4.5 суперпозиция функций $f = v \circ u^{-1}$ дифференцируема в точке x_0, а ее производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{v'(t_0)\,dt}{u'(t_0)\,dt} = \frac{v'(t_0)}{v'(t_0)}. \qquad \triangle$$

Функциям (4.12) можно придать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть $T = [\alpha, \beta]$ и функции u и v непрерывны на этом отрезке. Если x и y рассматривать как координаты точки на плоскости, то каждому $t \in T$ соответствует точка $M(t)$ плоскости, имеющая координаты (x, y).

Обозначим множество таких точек плоскости через Γ. На этом множестве введем порядок: точка $M_1(t_1)$ предшествует точке $M_2(t_2)$, если $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, причем точки, отвечающие различным значениям параметра, считаются различными.

Полученное упорядоченное множество точек плоскости называют *плоской кривой* и обозначают

$$\Gamma = \{\, x = u(t),\ y = v(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \,\}.$$

Уравнения (4.12) называются параметрическими уравнениями (или параметризацией) кривой Γ.

Доказанное предложение позволяет найти угловой коэффициент касательной к кривой Γ в точке с координатами x_0 и y_0, где $x_0 = u(t_0)$ и $y_0 = v(t_0)$, при условии, что $u'(t_0) \neq 0$. При этом нам нет необходимости в явном виде выражать функцию y как функцию переменной x.

Замечание 4.9. Если же в условиях предложения выполнено равенство $u'(t_0) = 0$, а функция $y = v(t)$ строго монотонна на $|t - t_0| \leqslant \delta$ и $v'(t_0) \neq 0$, то можно говорить о переменной x как о функции переменной y, и при этом выполняется равенство $\dfrac{dx(y_0)}{dy} = \dfrac{u'(t_0)}{v'(t_0)}$.

Поэтому точка $t = t_0$, в которой $u'(t_0) = v'(t_0) = 0$, является *особой*, в ней не существуют $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$ и $\dfrac{dx(y_0)}{dy}$.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

4.1. Определение производной порядка n. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой Δ-окрестности точки x_0. Тогда на этом множестве определена следующая функция: $y = f_1(x) = f'(x)$. Предположим далее, что полученная функция $y = f_1(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда в точке x_0 определена производная от производной функции $y = f(x)$, ее называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают одним из символов: $y''(x_0)$, $y^{(2)}(x_0)$, $\dfrac{d^2y(x_0)}{dx^2}$, $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Аналогично предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную второго порядка в каждой точке Δ-окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 полученная функция $y = f_2(x) = f''(x)$ дифференцируема. Тогда говорят, что в точке x_0 рассматриваемая функция $y = f(x)$ имеет *третью производную* (или *производную третьего порядка*) и обозначают одним из следующих символов: $y'''(x_0)$, $y^{(3)}(x_0)$, $\dfrac{d^3y(x_0)}{dx^3}$, $f'''(x_0)$, $f^{(3)}(x_0)$, $\dfrac{d^3f(x_0)}{dx^3}$.

Этот процесс мы можем продолжать дальше, вводя производные четвертого, пятого и т. д. порядка.

Теперь предположим, что определена *производная* $(n-1)$*-го порядка* функции $y = f(x)$. Пусть в каждой точке Δ-окрестности точки x_0 функция $y = f(x)$ имеет производную $(n-1)$-го порядка (на множестве определена функция: $y = f_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$). Далее, пусть сама функция $y = f_{n-1}(x)$ дифференцируема в точке

x_0, тогда исходная функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *производную n-го порядка*. Эту производную будем обозначать символами $y^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^n y(x_0)}{dx^n}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Замечание 4.10. Производная n-го порядка определена с помощью соотношения: $y^{(n)} = \bigl(y^{(n-1)}\bigr)'$.

Определение 4.10. Функция $y = f(x)$ называется *n раз дифференцируемой в точке* x_0, если в этой точке существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$.

Определение 4.11. Функция $y = f(x)$ называется *n раз дифференцируемой на интервале* (a, b), если она имеет производные n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в каждой точке x интервала (a, b).

Приведем ряд примеров нахождения $y^{(n)}$ для некоторых элементарных функций.

Пример 4.16. Пусть $y = (x+b)^\beta$, где $b, \beta \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$y' = \beta \cdot (x+b)^{\beta-1}, \quad y'' = \beta(\beta-1)\cdot(x+b)^{\beta-2}, \quad \ldots$$

Очевидно, чему равна производная n-го порядка, а именно:

$$y^{(n)} = \beta(\beta-1)\ldots\bigl(\beta-(n-1)\bigr)\cdot(x+b)^{\beta-n}. \tag{4.13}$$

Докажем это методом математической индукции. Предположим, что для порядка $(n-1)$ эта формула верна:

$$y^{(n-1)} = \beta(\beta-1)\ldots(\beta-(n-2))\cdot(x+b)^{\beta-(n-1)}.$$

Тогда из рекуррентной формулы $y^{(n)} = \bigl(y^{(n-1)}\bigr)'$ следует выражение (4.13).

В частности, для $\beta = m$, $m \in \mathbb{N}$, все производные порядка $n > m$ равны нулю.

Для $\beta = -1$, т. е. для функции $y = \dfrac{1}{x+b}$, получаем

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+b)^{n+1}}. \tag{4.14}$$

Пример 4.17. Используем формулу (4.14) для нахождения производной n-го порядка функции $y = \log_a(x+b)$. Поскольку

$y' = \dfrac{1}{(x+b)\ln a}$, то для $y^{(n)}$ получаем следующее выражение: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+b)^n \ln a}$. В частности, для $y = \ln(x+b)$ находим: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+b)^n}$.

Пример 4.18. Найдем производную n-го порядка функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Очевидно, что $y^{(n)} = a^x \ln^n a$. В частности, для $y = e^x$ получаем $y^{(n)} = e^x$.

Пример 4.19. Для функции $y = \sin x$ выполняется

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin(x) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad \ldots$$

Окончательно получаем, что $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Для функции $y = \cos x$ находим $y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.2. Формула Лейбница. Если каждая из заданных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет в точке x_0 производные n-го порядка, то функции $y = f(x) \pm g(x)$ имеют в точке x_0 производную n-го порядка и справедливо следующее равенство:

$$(f \pm g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$$

Для произведения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет место формула, носящая название *формулы Лейбница*. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0, тогда функция $y = f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и справедливо следующее выражение*:

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0), \tag{4.15}$$

здесь полагаем: $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ *и* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, *при этом считаем* $0! = 1$.

Доказательство. Доказывать будем методом математической индукции. Обозначим $h = f \cdot g$.

Для $n = 1$ выполняется (см. формулу (4.6)):

$$h'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0).$$

Предположим, что выполнено равенство (4.15) для порядка $(n-1)$:

$$\begin{aligned} h^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}^0\, f(x_0) \cdot g^{(n-1)}(x_0) + \\ + C_{n-1}^1 f'(x_0) \cdot g^{(n-2)}(x_0) + C_{n-1}^2\, f''(x_0) \cdot g^{n-3}(x_0) + \cdots \\ \cdots + C_{n-1}^{n-2} f^{(n-2)}(x_0) \cdot g'(x_0) + C_{n-1}^{n-1}\, f^{(n-1)}(x_0) \cdot g(x_0). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное выражение, используя равенство: $\big((f \cdot g)^{(n-1)}\big)'(x_0) = (f \cdot g)^{(n)}(x_0)$. Находим сумму

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x_0) = C_{n-1}^0 f(x_0) \cdot g^{(n)}(x_0) + C_{n-1}^0 f'(x_0) \cdot g^{(n-1)}(x_0) + \\ + C_{n-1}^1 f'(x_0) \cdot g^{(n-1)}(x_0) + C_{n-1}^1 f''(x_0) \cdot g^{(n-2)}(x_0) + \\ + C_{n-1}^2\, f''(x_0) \cdot g^{(n-2)}(x_0) + C_{n-1}^2\, f^{(3)}(x_0) \cdot g^{n-3}(x_0) + \cdots \\ \cdots + C_{n-1}^{n-2} f^{(n-2)}(x_0) \cdot g''(x_0) + C_{n-1}^{n-2} f^{(n-1)}(x_0) \cdot g'(x_0) + \\ + C_{n-1}^{n-1}\, f^{(n-1)}(x_0) \cdot g'(x_0) + C_{n-1}^{n-1}\, f^{(n)}(x_0) \cdot g(x_0). \end{aligned}$$

Сгруппируем соответствующие слагаемые с одинаковыми производными (второе слагаемое с третьим, четвертое с пятым и т. д.), полученное выражение совпадает с формулой (4.15), если справедливо следующее равенство: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$. Это равенство проверяется непосредственно. Кроме этого, воспользовались тем, что $C_{n-1}^0 = C_n^0 = C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1$. △

Пример 4.20. К функции $y = (x^3+x+3)\, 2^x$ применим формулу Лейбница для нахождения производной порядка n, $n > 3$.

Обозначим $f(x) = x^3 + x + 3$ и $g(x) = 2^x$. Очевидно, что $f^{(n)}(x) = 0$ при $n > 3$, и $g^{(k)}(x) = 2^x \ln^k 2$. Следовательно, выражение $y^{(n)}$ будет содержать только четыре слагаемых:

$$\begin{aligned} y^{(n)} = \Big[(x^3 + x + 3) \cdot \ln^n 2 + n \cdot (3x^2 + 1) \cdot \ln^{n-1} 2 + \\ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6x \cdot \ln^{n-2} 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 6 \cdot \ln^{n-3} 2\Big] \cdot 2^x. \end{aligned}$$

Пример 4.21. Найдем вторую производную функции, заданной параметрически (4.12). При этом предполагаем, что функции u и v удовлетворяют всем условиям предложения раздела 3.3 гл. 4 и имеют производные второго порядка в точке t_0.

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}(x_0) = \frac{v''(t_0)\cdot u'(t_0) - v'(t_0)\cdot u''(t_0)}{\big(u'(t_0)\big)^3}.$$

4.3. Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой Δ-окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в самой точке x_0. На интервале $(x_0 - \Delta,\, x_0 + \Delta)$ определена следующая функция: $dy = f'(x)\,dx$ (см. формулу (4.11)), которую можем рассматривать как функцию переменной x, при этом будем считать, что dx принимает одно и то же значение для всех точек x из рассматриваемого интервала.

Тогда $d(dy) = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx = f''(x_0)\,(dx)^2$. Это выражение назовем *вторым дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0. Для обозначения второго дифференциала будем использовать символы: $d^2y = f''(x_0)\,dx^2$ или $d^2f(x_0) = f''(x_0)\,dx^2$. Заметим, что здесь квадрат у dx означает $(dx)^2$, а не дифференциал от x^2, т. е. не $d(x^2)$.

Аналогичным способом можно определить *дифференциал третьего порядка* (или *третий дифференциал*) в точке x_0 для функции $y = f(x)$, дважды дифференцируемой в Δ-окрестности точки x_0 и трижды дифференцируемой в точке x_0. Справедливы выражения: $d^3y = f^{(3)}(x_0)\,dx^3$ или $d^3f(x_0) = f^{(3)}(x_0)\,dx^3$.

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$, дифференцируемой $(n-1)$ раз на интервале $(x_0 - \Delta,\, x_0 + \Delta)$ и имеющей производную n-го порядка в точке x_0, называется дифференциал в точке x_0 от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n$.

Покажем, что дифференциалы высших порядков *не обладают свойством инвариантности формы* на примере второго дифференциала.

Рассмотрим функции $z = g(y)$ и $y = f(x)$. Первый дифференциал функции $z = g(y)$ в силу инвариантности его формы имеет следующий вид: $dz = g'(y)\,dy$. Тогда

$$d^2z = d(g'(y)\,dy) = d(g'(y))\,dy + g'(y)\,d(dy) = \\ = g''(y)\,dy^2 + g'(y)\,d^2y.$$

В отличие от случая независимой переменной, второй дифференциал d^2y во втором слагаемом не равен нулю, для него справедливо следующее: $d^2y = f''(x)\,dx^2$.

§ 5. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

5.1. Возрастание (убывание) функции в точке. В этом разделе предполагаем, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки x_0.

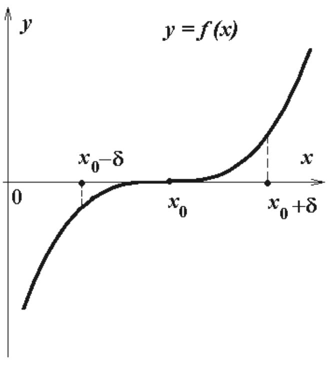

Рис. 4.6

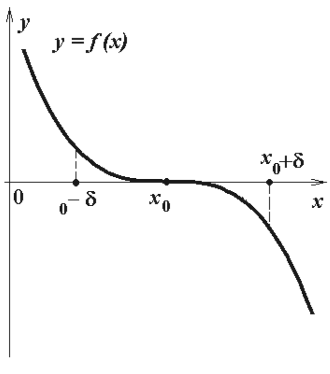

Рис. 4.7

Определение 4.12. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, (см. рис. 4.6), если найдется такая δ-окрестность, $\delta < \Delta$, точки x_0, что в пределах этой окрестности выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f(x) < f(x_0) \quad &\text{для} \quad x < x_0, \\ f(x) > f(x_0) \quad &\text{для} \quad x > x_0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Определение 4.13. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей в точке* x_0, (см. рис. 4.7), если найдется такая δ-окрестность,

$\delta < \Delta$, точки x_0, что в пределах этой окрестности выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) \quad \text{для} \quad x < x_0, \\ f(x) &< f(x_0) \quad \text{для} \quad x > x_0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для функции, дифференцируемой в точке x_0, справедливо достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке x_0.

Теорема 4.7. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает в точке x_0. Если $f'(x_0) < 0$, то $y = f(x)$ убывает в точке x_0.*

Доказательство. Из определения производной рассматриваемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 следует, что для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого x из проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняются неравенства

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon. \tag{4.18}$$

Пусть $f'(x_0) > 0$ и $\varepsilon < f'(x_0)$. Тогда для любого x такого, что $0 < |x - x_0| < \delta$, из неравенств (4.18) следуют условия (4.16).

Если же $f'(x_0) < 0$ и $\varepsilon < |f'(x_0)|$, то из неравенств (4.18) следует выполнение условий (4.17) для всех точек x из проколотой δ-окрестности точки x_0. $\triangle$

Замечание 4.11. Условие теоремы 4.7 не является необходимым для возрастания (убывания) функции в точке. Например, функция $y = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, а ее производная $y'(x) = 3\,x^2$ в этой точке обращается в нуль.

Выясним, как связаны между собой введенное понятие *возрастания (убывания) функции в точке* и понятие (см. определение 3.10) *возрастающей (убывающей)* функции *на множестве*, например, на интервале $(a,\, b)$.

Возрастание (убывание) функции $y = f(x)$ в точке вовсе не означает, что функция $y = f(x)$ непременно будет возрастающей (убывающей) на некотором интервале, содержащем эту точку.

Пример 4.22. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке $x = 0$. Докажем это, используя теорему 4.7. Действительно,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 \sin\dfrac{2}{x}}{x} = 1.$$

Поскольку $f'(0) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает в точке $x = 0$. Однако эта функция не является возрастающей ни на каком интервале $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Пусть $\dfrac{2}{x'_n} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)$ и $\dfrac{2}{x''_n} = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, при этом справедливо $x'_n < x''_n$. Значения функции $y = f(x)$ в точках x'_n и x''_n равны: $f(x'_n) = x'_n + (x'_n)^2$, $f(x''_n) = x''_n - (x''_n)^2$. Далее, находим

$$f(x''_n) - f(x'_n) = x''_n - (x''_n)^2 - x'_n - (x'_n)^2 = \\ = -\frac{8\big[(64 - 16\pi)n^2 + (128 - 32\pi)n + (68 - 15\pi)\big]}{\pi^2(3+4n)^2(5+4n)^2} < 0.$$

Найдены такие точки x'_n и x''_n, что $x'_n < x''_n$, но $f(x'_n) > f(x''_n)$.

С другой стороны, для $x^*_n = \dfrac{2}{2\pi n}$ и $x^{**}_n = \dfrac{2}{\pi n}$ выполняется $x^*_n < x^{**}_n$, и для значений $f(x^*_n) = x^*_n$, $f(x^{**}_n) = x^{**}_n$ рассматриваемой функции в этих точках справедливо $f(x^*_n) < f(x^{**}_n)$.

Очевидно, что для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что точки x'_n, x''_n и x^*_n, x^{**}_n принадлежат интервалу $(0, \varepsilon)$. На этом интервале функция $y = f(x)$ не является монотонной.

Аналогичные рассуждения можно провести и для интервала $(-\varepsilon,\, 0)$.

Лемма 4.8. *Возрастающая (убывающая) на интервале $(a,\, b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) в каждой точке интервала $(a,\, b)$.*

Доказательство. Докажем утверждение для возрастающей на интервале $(a,\, b)$ функции. Для убывающей функции доказательство аналогично.

Фиксируем точку $x_0 \in (a,\, b)$, введем следующее обозначение: $\delta = \min\{b - x_0,\, x_0 - a\}$. Интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ лежит внутри интервала $(a,\, b)$.

Из определения 3.10 возрастающей функции $y = f(x)$ следует, что для любой точки $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется $f(x) < f(x_0)$, а для любой точки $x \in (x_0,\, x_0 + \delta)$ справедливо $f(x) > f(x_0)$. Это означает, что функция $y = f(x)$ возрастает в точке x_0 (см. определение 4.12). В силу произвольности точки x_0, следует, что функция $y = f(x)$ возрастает в любой точке интервала $(a,\, b)$. $\triangle$

В обратную сторону утверждение доказывается сложнее.

Лемма 4.9. *Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) в каждой точке интервала $(a,\, b)$, то она является возрастающей (убывающей) на этом интервале.*

Доказательство проведем для такой функции $y = f(x)$, которая возрастает в каждой точке интервала $(a,\, b)$. Для функций, убывающих в каждой точке интервала, доказательство аналогично.

Пусть x' и x'' — произвольные точки интервала $(a,\, b)$ такие, что $x' < x''$. Надо доказать, что $f(x') < f(x'')$.

Для каждой точки x_0 отрезка $[x',\, x''] \subset (a,\, b)$ найдется интервал $\Delta = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, в пределах которого выполняются неравенства (4.16). Множество таких интервалов Δ можно рассматривать как покрытие Π отрезка $[x',\, x'']$.

По лемме Гейне — Бореля 2.22 найдется конечное множество Π' интервалов Δ: $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ с центрами в точках x_j, $j = 1, \ldots, m$, для которых выполнены неравенства (4.16) и которые образуют покрытие отрезка $[x',\, x'']$. Будем предполагать, что $x' = x_1$ и $x'' = x_m$, если это не так, то добавим интервалы точек x' и x'' Кроме этого, будем предполагать, что $\Delta_j \cap \Delta_i \neq \varnothing$ при $i = j + 1$, $j = 1, \ldots, m - 1$. Если это не так, то отбросим лишние интервалы.

Если $x \in \Delta_j \cap \Delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, m - 1$, — произвольная точка этого множества и $x_j < x < x_{j+1}$, то справедливы неравенства: $f(x_j) < f(x) < f(x_{j+1})$. Таким образом,

$$f(x') = f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_m) = f(x''),$$

окончательно находим, что $f(x') < f(x'')$.

В силу произвольности точек x' и x'' интервала $(a,\, b)$ получаем, что функция $y=f(x)$ является возрастающей на этом интервале. $\triangle$

5.2. Локальные экстремумы и теорема Ферма. Функция $y = f(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки x_0.

Определение 4.14. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум* (*локальный минимум*), если найдется такая δ-окрестность точки x_0, $\delta < \Delta$, в пределах которой значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим).

Понятия *локальный максимум* и *локальный минимум* объединяют общим понятием *локальный экстремум*.

Следующая теорема дает необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой в точке функции.

Теорема 4.10. (Ферма.) *Если дифференцируемая в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Поскольку в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не может ни возрастать, ни убывать. Из теоремы 4.7 следует, что в этом случае $f'(x_0) = 0$. $\triangle$

Замечание 4.12. Обратим внимание на тот факт, что условие $f'(x_0) = 0$ не может быть достаточным условием существования локального экстремума в точке x_0 функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = f(x) = x^3$ выполнено $f'(0) = 0$, но эта функция в точке $x = 0$ не имеет локального экстремума.

5.3. Теорема Ролля. Докажем теорему о нуле производной функции.

Теорема 4.11. *Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$,*
2) *$y = f(x)$ дифференцируема на интервале*[4.2] *$(a,\, b)$,*
3) *$f(a) = f(b)$,*

[4.2] См. определение 4.6.

тогда найдется такая точка $x_0 \in (a, b)$, *что* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса для непрерывных на отрезке функций (теорема 3.19) функция $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a, b]$ максимального $\alpha = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и минимального $\beta = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ значений. Причем $\alpha > \beta$, в противном случае функция $y = f(x)$ была бы тождественно равна постоянной $\alpha = \beta$.

Поскольку на концах отрезка функция принимает равные значения, то, по крайней мере, одно из значений α или β функция достигает в некоторой точке x_0 из интервала (a, b). Следовательно, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 интервала (a, b) локальный экстремум. Таким образом, по теореме Ферма (теорема 4.10) выполняется $f'(x_0) = 0$. $\triangle$

Замечание 4.13. Ни одно из условий 1) — 3) теоремы 4.11 нельзя опустить. При отсутствии хотя бы одного условия теорема перестает быть справедливой.

1. Для функции

$$y = f_1(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leqslant x < 2, \\ 2, & x = 2, \end{cases}$$

не выполнено условие 1). Для этой функции точка $x = 2$ является точкой разрыва. Действительно,

$$f_1(2-0) = -2 \neq f_1(2) = 2.$$

При этом условия 2) и 3) для функции $y = f_1(x)$ выполнены.

2. Для функции $y = f_2(x) = 2 - |x|$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, не выполнено условие 2). Функция $y = f_2(x)$ не является дифференцируемой в точке $x = 0$. Имеют место следующие равенства: $f_2'(-0) = 1$ и $f_2'(+0) = -1$. Однако для функции $y = f_2(x)$ выполнены условия 1) и 3).

3. Для функции $y = f_3(x) = x$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, не выполнено условие 3): $f_3(-2) = -2 \neq f_3(2) = 2$ и выполнены условия 1), 2).

5.4. Теорема Лагранжа. Докажем теорему, которая является обобщением теоремы Ролля и играет важную роль в математическом анализе.

Теорема 4.12. *Если для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:*

1) *$y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$,*
2) *$y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b),*

то существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a). \tag{4.19}$$

Доказательство. Введем функцию

$$y = F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Для функции $y = F(x)$ выполнены все условия 1) — 3) теоремы 4.11. Функция $y = F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поскольку функции $y = f(x)$ и $y = x - a$ непрерывны на $[a, b]$. Функция $y = F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), так как дифференцируемы на этом интервале функции $y = f(x)$ и $y = x - a$. Выполняются равенства $F(a) = F(b) = 0$.

Из теоремы 4.11 следует существование такой точки x_0 интервала (a, b), в которой $F'(x_0) = 0$. Учитывая выражение для функции $y = F(x)$, получаем $F'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Из полученного равенства и следует формула (4.19). $\triangle$

Формулу (4.19) называют *формулой Лагранжа*. Эту формулу можно представить в следующем виде, используя понятие *приращения функции $\Delta f(x_0, \Delta x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx*: существует такое число $0 < \theta < 1$, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\,\Delta x)\,\Delta x. \tag{4.20}$$

Формулу (4.20) называют *формулой конечных приращений.*

5.5. Геометрический смысл теорем Ферма, Ролля и Лагранжа. Геометрический смысл теоремы 4.10 Ферма заключается в том, что касательные к графику дифференцируемой функции в точках локального экстремума параллельны оси абсцисс.

Геометрический смысл теоремы Ролля (теорема 4.11) заключается в следующем: если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то найдется такая точка

x_0 интервала $(a,\, b)$, что касательная к графику функции в точке $\bigl(x_0,\, f(x_0)\bigr)$ параллельна оси абсцисс. На рис. 4.8 точки $A\bigl(a,\, f(a)\bigr)$ и $B\bigl(b,\, f(b)\bigr)$ — точки с равными ординатами $f(a) = f(b)$, а точка C имеет координаты x_0 и $f\bigl(x_0\bigr)$.

Величина $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, присутствующая в формуле Лагранжа (4.19), есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $A\bigl(a,\, f(a)\bigr)$ и $B\bigl(b,\, f(b)\bigr)$ графика функции $y = f(x)$. Величина $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $C\bigl(x_0,\, f(x_0)\bigr)$.

Теорема Лагранжа (теорема 4.12) утверждает, что существует такая точка $x_0 \in (a,\, b)$, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке C параллельна секущей AB (см. рис. 4.9).

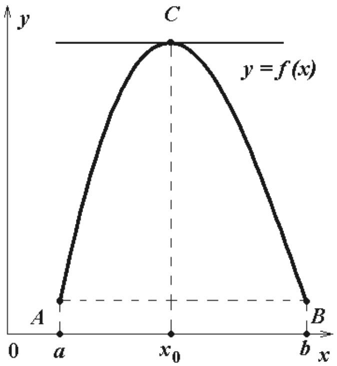

Рис. 4.8

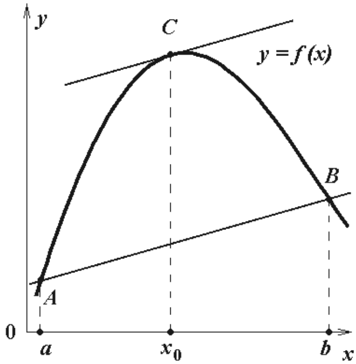

Рис. 4.9

5.6. Теорема Коши. Сформулируем и докажем теорему, являющуюся обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема 4.13. *Если для функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ выполнены следующие условия:*

1) *функции непрерывны на отрезке* $[a,\, b]$,
2) *дифференцируемы на интервале* $(a,\, b)$,
3) $g'(x) \neq 0$ *для всех точек* $x \in (a,\, b)$,

то существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Заметим, что $g(b) \neq g(a)$. Если бы это было не так, то функция $y = g(x)$ удовлетворяла бы всем условиям теоремы Ролля 4.11, а поэтому нашлась бы такая точка интервала (a, b), что в ней производная функции $y = g(x)$ равнялась бы нулю. Но это противоречит условию 3) нашей теоремы.

Пусть $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля 4.11. Поэтому найдется точка $x_0 \in (a, b)$, в которой выполнено равенство $F'(x_0) = 0$. Поскольку $F'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x_0) = 0$, то справедлива формула (4.21). △

Замечание 4.14. Формула Лагранжа (4.19) является частным случаем формулы Коши (4.21) при $y = g(x) = x$.

5.7. Некоторые следствия из формулы конечных приращений. Докажем несколько важных для приложений следствий из теоремы Лагранжа 4.12.

Теорема 4.14. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и для всех точек этого интервала выполняется равенство* $f'(x) = 0$, *то функция* $y = f(x)$ *постоянна на этом интервале.*

Доказательство. Фиксируем точку x_0 из интервала (a, b) и пусть $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Функция $y = f(x)$ удовлетворяет на отрезке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$ всем условиям теоремы Лагранжа. Поэтому из формулы конечных приращений (4.20) находим, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

В силу произвольности Δx полученное равенство выполняется для всех точек $x = x_0 + \Delta x$ интервала (a, b), т. е. функция $y = f(x)$ постоянна на интервале (a, b). △

Замечание 4.15. В п. 1.3.1 доказано, что производная постоянной функции равна нулю. Теперь, используя теорему Лагранжа 4.12, мы доказали это утверждение в обратную сторону.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $y = f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на интервале $(a,\, b)$ (см. определение 3.9).

Теорема 4.15. *Для того чтобы функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a,\, b)$, была неубывающей [невозрастающей] на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $f'(x) \geqslant 0$ $[f'(x) \leqslant 0]$ выполнялось во всех точках интервала $(a,\, b)$.*

Доказательство. Будем доказывать для неубывающей функции, для невозрастающей функции доказательство аналогично.

Необходимость. Дифференцируемая на интервале $(a,\, b)$ функция $y = f(x)$ является неубывающей на этом интервале. Таким образом, функция $y = f(x)$ не может убывать ни в одной точке интервала $(a,\, b)$ (см. лемму 4.8). Следовательно, в силу теоремы 4.7, получаем, что выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a,\, b)$.

Достаточность. Пусть для всех $x \in (a,\, b)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$. Тогда к отрезку $[x_1,\, x_2]$, где $x_1 < x_2$ и $x_1,\, x_2$ — произвольные точки интервала $(a,\, b)$, применим теорему Лагранжа 4.12. Найдется такая точка x_0 интервала $(x_1,\, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$.

Получаем, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. В силу произвольности точек $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$, следует, что $y = f(x)$ является неубывающей на этом интервале. $\triangle$

Следующая теорема дает достаточное условие, при котором функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей) на интервале $(a,\, b)$ функцией.

Теорема 4.16. *Если для дифференцируемой на интервале $(a,\, b)$ функции $y = f(x)$ в каждой точке этого интервала выполняется неравенство $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$, то функция является возрастающей [убывающей] на интервале $(a,\, b)$.*

Доказательство. Пусть на интервале (a, b) выполнено неравенство $f'(x) > 0$ и $x_1 < x_2$ — произвольные точки этого интервала. К отрезку $[x_1,\, x_2]$ применим теорему Лагранжа 4.12. Найдется такая точка $x_0 \in (x_1,\, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$. Следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1 и

x_2, получаем, что $y = f(x)$ является возрастающей на интервале (a, b).

Для убывающей на (a, b) функции доказательство теоремы аналогично. $\triangle$

Замечание 4.16. Условие $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ на интервале (a, b) не является необходимым для того, чтобы функция $y = f(x)$ являлась возрастающей (убывающей) на этом интервале. Например, функция $y = f(x) = x^3$ является возрастающей на интервале $(-1, 1)$, а для ее производной $f'(x) = 3x^2$ справедливо неравенство $f'(x) \geqslant 0$ на этом интервале.

Предложение. 1. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (x_0, x_0+a) и имеет правую производную $f'(x_0+0)$ в точке x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$.*

2. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0 - a, x_0)$ и имеет левую производную $f'(x_0 - 0)$ в точке x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$, то выполняется следующее равенство: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = f'(x_0 - 0)$.*

Доказательство. Докажем только утверждение 1. Аналогично доказывается утверждение 2.

К отрезку $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $\Delta x < a$, применим теорему Лагранжа 4.12. Тогда найдется такое число $0 < \theta < 1$, что выполняется равенство (4.20). Перейдем к пределу в полученном равенстве: $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\Delta x)$ при $\Delta x \to +0$. Учитывая существование предела в правой части, получаем указанное в теореме равенство. $\triangle$

Для дифференцируемых на интервале (a, b) функций справедливо следующее свойство.

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то ее производная $y = f'(x)$ не имеет на этом интервале ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва первого рода.*

Доказательство. Если в точке $x_0 \in (a, b)$ существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f'(x)$, то эти пределы равны $f'(x_0 \pm 0)$ соответственно. Для производной функции в точке выполняются равенства: $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$. Таким образом, точка x_0 в этом случае является точкой непрерывности функции $y = f'(x)$.

Следовательно, возможен только случай, когда не существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f'(x)$. А это означает, что у функции $y = f'(x)$ возможны только такие точки разрыва второго рода. $\triangle$

Пример 4.23. Функция $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет в каждой точке интервала $(-1, 1)$ производную

$$y = f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

см. пример 4.14.

В точке $x = 0$ функция $y = f'(x)$ имеет точку разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x \to \pm 0} f'(x)$ не существует (см. пример 3.50).

§ 6. Правило Лопиталя

В этом разделе выясним, как дифференциальное исчисление позволяет вычислять некоторые пределы.

6.1. Раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$. Начнем с пределов вида $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to \alpha$. Нахождение этого предела будем называть *раскрытием неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$. Сформулируем результат, позволяющий раскрывать неопределенности такого вида, это утверждение называют *правилом Лопиталя*.

Теорема 4.17. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0;$

2) *функции дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки* α*:* $0 < |x - \alpha| < \delta$*;*
3) $g'(x) \neq 0$ *всюду в указанной проколотой окрестности точки* α*;*
4) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует.*

Тогда $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Точка $\alpha + \Delta x$, $|\Delta x| < \delta$ принадлежит указанной проколотой окрестности точки α. Доопределим функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке α нулем. Тогда доопределенные функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши 4.13 на отрезке с концами α и $\alpha + \Delta x$.

Потому найдется такое число $0 < \theta < 1$, что выполнено следующее равенство:

$$\frac{f(\alpha + \Delta x)}{g(\alpha + \Delta x)} = \frac{f(\alpha + \Delta x) - f(\alpha)}{g(\alpha + \Delta x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha + \theta \Delta x)}{g'(\alpha + \theta \Delta x)}.$$

При $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства существует (см. условие 4) теоремы)[4.3], следовательно, существует предел левой части равенства и эти пределы равны. $\triangle$

Замечание 4.17. Если в условиях теоремы 4.17 функции $y = f_1(x) = f'(x)$ и $y = g_1(x) = g'(x)$ непрерывны в точке α и $g'(\alpha) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$.

Более того, если

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0,$$
$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

[4.3] Выполнены все условия теоремы о пределе суперпозиции функций 3.6: $x = \varphi(t) = \alpha + \theta t$ и $y = \psi(x) = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Для функции $F(t) = \psi(\varphi(t)) = \dfrac{f'(\alpha + \theta t)}{g'(\alpha + \theta t)}$ существует предел при $t \to 0$.

и функции $y = f_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$, $y = g_{n-1}(x) = g^{(n-1)}(x)$ удовлетворяют всем условиям 1) — 4) теоремы 4.17, то верно равенство $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Замечание 4.18. В формулировке теоремы 4.17 можно точку α заменить символами $\alpha \pm 0$ или $\pm\infty$.

Сформулируем и докажем теорему для $x \to +\infty$.

Теорема 4.18. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$*;*
2) *функции дифференцируемы на некотором множестве* $X = \{x\colon\ 0 < \alpha < x < +\infty\}$*;*
3) $g'(x) \neq 0$ *всюду на множестве* X*;*
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует.*

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Введем замену $x = 1/t$. Тогда функции $y = F(t) = f(1/t)$ и $y = G(t) = g(1/t)$ удовлетворяют условиям 1) — 4) теоремы 4.17.

Действительно, если $x \in X$, то $t \in (0,\, \beta)$, где $\beta = 1/\alpha$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+0} F(t) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{t\to+0} G(t) = 0$. При этом функции $y = F(t)$ и $y = G(t)$ дифференцируемы на интервале $(0,\, \beta)$ и $G'(t) \neq 0$ для всех $t \in (0,\, \beta)$.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F'(t)}{G'(t)}$ существует, поэтому имеет место равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \triangle$$

Пример 4.24. С помощью правила Лопиталя легко вычислить первый замечательный предел и его модификации, а также некоторые модификации второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos^2 x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+x)\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}a^x\ln a=\ln a.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\beta-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\beta(1+x)^{\beta-1}=\beta.$

6.2. Раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Рассмотрим вычисление пределов $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ для случая, когда $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — бесконечно большие функции при $x\to\alpha$. Нахождение этого предела будем называть *раскрытием неопределенности вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскрыть неопределенности такого вида позволяет следующее утверждение, которое так же будем называть *правилом Лопиталя*.

Теорема 4.19. *Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены на интервале $(\alpha,\,\beta)$ и удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{x\to\alpha+0}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+0}g(x)=+\infty$;
2) *функции дифференцируемы на интервале* $(\alpha,\,\beta)$;
3) $g'(x)\neq 0$ *всюду на данном интервале*;
4) $\lim\limits_{x\to\alpha+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует.*

Тогда $\lim\limits_{x\to\alpha+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и* $\lim\limits_{x\to\alpha+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Из условия 1) следует: найдется положительное число $\Delta<\beta$, что для всех $x\in(\alpha,\,\alpha+\Delta)$ выполняется $g(x)>1$. Таким образом, можем считать, что функция $y=g(x)$ положительна на интервале $(\alpha,\,\alpha+\Delta)$.

Обозначим $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) < \Delta$, что для всех таких точек x, что $\alpha < x < \alpha + \delta_0$, справедливо

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.22}$$

Зафиксируем $x_0 = \alpha + \delta_0$. Возьмем точку $\alpha < x < x_0$. Для функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ выполнены все условия теоремы Коши 4.13. Поэтому найдется такая точка $\overline{x}$: $x < \overline{x} < x_0$, что верно равенство $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})}$. Таким образом, из (4.22) получаем

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} < b + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.23}$$

Далее используем тождество, которое можно проверить непосредственно:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - b = \frac{f(x_0) - b\cdot g(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\cdot\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - b\right).$$

Учитывая, что функция $y = g(x)$ положительна на интервале $(\alpha, \alpha + \Delta)$, оценим полученное выражение:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - b\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0) - b\cdot g(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - b\right|.$$

Второе слагаемое меньше $\varepsilon/2$ (см. неравенства (4.23)).

Из условия 1) находим, что для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что, как только любая точка x удовлетворяет неравенствам $\alpha < x < \alpha + \delta_1$, выполняется $\left|\dfrac{f(x_0) - b\cdot g(x_0)}{g(x)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, пусть $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, тогда для всех x: $\alpha < x < \alpha + \delta$ верно неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - b\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\alpha+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = b$. $\triangle$

Замечание 4.19. Теорема 4.19 сформулирована и доказана для правой полуокрестности точки α, но утверждение также справедливо и для левой полуокрестности этой точки. Вместо $\alpha \pm 0$ может быть символ $\pm\infty$. Теорема 4.19 также справедлива, если условие 1) имеет вид: $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha+0} g(x) = -\infty$.

Замечание 4.20. Если функция $y = f_1(x) = f'(x)$ и функция $y = g_1(x) = g'(x)$ в свою очередь удовлетворяют условиям 1) — 4) теоремы 4.19, то $\lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Далее, если $y = f_k(x) = f^{(k)}(x)$ и $y = g_k(x) = g^{(k)}(x)$, где $k = 1, \ldots, n-1$, и для каждого фиксированного k удовлетворяют условиям теоремы 4.19, то $\lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha+0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

С помощью правила Лопиталя легко находятся следующие пределы.

Пример 4.25. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, где α и β — фиксированные положительные действительные числа, причем α удовлетворяет неравенству: $\alpha < n$, где $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{\beta x^\beta} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)}{\beta^n x^\beta \ln^{n-\alpha} x} = 0.$$

Пример 4.26. Пусть $a > 1$ и $\beta > 0$, причем $\beta < n$, $n \in \mathbb{N}$, найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{a^x}$. Применяя n раз правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta x^{\beta-1}}{a^x \ln a} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(\beta-1)\ldots\big(\beta-(n-1)\big)}{x^{n-\beta} a^x \ln^n a} = 0.$$

Замечание 4.21. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{x^2+\sin x}$ нельзя вычислить по правилу Лопиталя, поскольку предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}$$

не существует. Тем не менее справедливо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ (см. пример 3.53).

6.3. Раскрытие других неопределенностей. Теперь рассмотрим неопределенности других типов, раскрытие которых сводится к раскрытию неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

6.3.1. *Неопределенность вида* $0\cdot\infty$ *и* $\infty-\infty$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to\alpha}h(x)=+\infty$. Тогда вычисление предела $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)\cdot g(x)$ сводится к вычислению предела $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g_1(x)}$, здесь неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)}{f_1(x)}$, здесь неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

При выполнении условий 1) — 4) теорем 4.17 и 4.19 для функций f и g_1, а также g и f_1 к полученным пределам можно применить правило Лопиталя.

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\alpha}\big[g(x)-h(x)\big]$ имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Эту неопределенность можно свести к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$:

$$g(x)-h(x)=\frac{1}{1/g(x)}-\frac{1}{1/h(x)}=\frac{\big(1/h(x)\big)-\big(1/g(x)\big)}{\big(1/g(x)\big)\cdot\big(1/h(x)\big)}.$$

Пример 4.27. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^\beta\ln^\alpha(1/x)$, $\beta>0$ и $\alpha>0$. Имеет место неопределенность $0\cdot\infty$, тогда

$$\lim_{x\to+0}x^\beta\ln^\alpha(1/x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^\alpha(1/x)}{(1/x)^\beta}=\Big[\frac{\infty}{\infty}\Big]=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^\alpha t}{t^\beta}=0$$

(см. пример 4.25).

Пример 4.28. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. Здесь неопределенность вида $\infty-\infty$. Справедливо

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

6.3.2. *Неопределенности вида* 1^∞, ∞^0, 0^0. Эти выражения, прежде чем искать пределы, необходимо прологарифмировать. Рассмотрим функцию $y=h(x)=f(x)^{g(x)}$, тогда логарифм этой функции $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$ представляет собой неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.29. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}x^{1/(x-1)}$. Имеет место неопределенность вида 1^∞. Обозначим $y=x^{1/(x-1)}$, тогда $\ln y=\dfrac{\ln x}{x-1}$ и $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. Поскольку $\ln e=1$, то $\lim\limits_{x\to1}x^{1/(x-1)}=e$.

Пример 4.30. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}x^{1/\ln\operatorname{sh}x}$. Неопределенность вида 0^0. Пусть $y=x^{1/\ln\operatorname{sh}x}$ и $\ln y=\dfrac{\ln x}{\ln\operatorname{sh}x}$. Тогда выполняется $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\ln\operatorname{sh}x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=1$. Следовательно, этот предел равен $\lim\limits_{x\to+0}x^{1/\ln\operatorname{sh}x}=e$.

Пример 4.31. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}$ (неопределенность вида ∞^0). Обозначим $y=\sin x\ln(1/x)$ (неопределенность вида $0\cdot\infty$). Тогда

$$\lim_{x\to+0}\sin x\ln(1/x)=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}=0$$

и $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}=1$.

Пример 4.32. Функция $y = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет производную любого порядка.

Действительно, $f^{(k)}(x) = P_{3k}\,(1/x)\,e^{-1/x^2}$, где $P_{3k}(1/x)$ — многочлен степени $3k$ от $1/x$. Производную в точке $x = 0$ будем искать по определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0.$$

Здесь сделана замена $t = 1/x^2$ и применен результат примера 4.26 при $\beta = 1/2$.

Далее по методу математической индукции предполагаем, что $f^{(k)}(0) = 0$, и найдем $f^{(k+1)}(0)$:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{P_{3k+1}(\sqrt{t})}{e^t} = 0,$$

сделана замена $t = 1/x^2$ и использован результат примера 4.26.

§ 7. Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную порядка n. Многочлен $y = P_n(x)$ степени n такой, что $P_n(x_0) = f(x_0)$ и $\big(P_n\big)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, называется *многочленом Тейлора* функции $y = f(x)$ в точке x_0. Этот многочлен имеет следующий вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \tag{4.24}$$

Если функция $y = f(x)$ не является многочленом, то многочлен Тейлора P_n задает приближение функции $y = f(x)$. Нас будет интересовать *остаточный член*

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x), \tag{4.25}$$

который и дает информацию о том, насколько точно многочлен Тейлора P_n функции $y = f(x)$ приближает ее значение в некоторой точке $x \neq x_0$.

Формула

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \tag{4.26}$$

носит название *формулы Тейлора* функции $y = f(x)$ в точке x_0. При $x_0=0$ формулу Тейлора называют *формулой Маклорена.*

Выясним, при каких условиях функция $y = f(x)$ представляется в некоторой окрестности точки x_0 формулой Тейлора с остаточным членом в той или иной форме.

7.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Для представления функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа недостаточно n раз дифференцируемости функции в заданной точке.

Теорема 4.20. *Пусть в некоторой Δ-окрестности точки x_0 функция $y = f(x)$ имеет производную $(n+1)$ порядка. Предположим далее, что точка x принадлежит Δ-окрестности, тогда найдется точка $\overline{x}$, лежащая между точками x_0 и x, такая, что имеет место формула Тейлора* (4.26) *с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.27}$$

Доказательство. Заметим, что для остаточного члена $r_n(x)$ выполняются равенства (см. выражение (4.25)):

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{4.28}$$

Обозначим $y = g(x) = r_n(x)$ и $y = h(x) = (x-x_0)^{n+1}$. К введенным функциям g и h применим $n+1$ раз теорему Коши 4.13, поскольку эти функции и их производные до n-го порядка удовлетворяют условиям этой теоремы.

Найдется точка x_1, лежащая между точками x и x_0, что

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n}.$$

Далее, существует такая точка x_2, лежащая между точками x_1 и x_0, что

$$\frac{r_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \frac{r_n''(x_2)}{(n+1)n(x_2-x_0)^{n-1}}.$$

Продолжая этот процесс, на $n+1$ шаге найдется точка $\overline{x}$, лежащая между точками x_n и x_0 такая, что справедливо следующее равенство: $\dfrac{r_n^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-x_0)} = \dfrac{r_n^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}$.

Из (4.24) и (4.25) следует, что $r_n^{(n+1)}(\overline{x}) = f^{(n+1)}(\overline{x})$. Поэтому

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!},$$

откуда и получаем выражение (4.27). $\triangle$

7.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Этот остаточный член называют еще *асимптотическим членом*.

Теорема 4.21. *Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную n-го порядка, тогда имеет место формула Тейлора* (4.26) *с остаточным членом в форме Пеано*:

$$r_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0. \tag{4.29}$$

Доказательство. Так как существует $f^{(n)}(x_0)$, то в некоторой Δ-окрестности точки x_0 у функции $y = f(x)$ определена производная порядка $n-1$. Введем обозначения: $y = g(x) = r_n(x)$ и $y = h(x) = (x-x_0)^n$. При этом выполнены равенства (4.28).

Функции $y = g(x)$ и $y = h(x)$ и их производные до порядка $n-1$ включительно удовлетворяют всем условиям теоремы Коши (4.13), которую применим $n-1$ раз.

Итак, найдется такая точка x_1, лежащая на интервале с концами x и x_0, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_n'(x_1)}{n(x_1-x_0)^{n-1}}.$$

Далее, найдется точка x_2, лежащая между точками x_1 и x_0, такая, что выполнено равенство

$$\frac{r_n'(x_1)}{n(x_1-x_0)^{n-1}} = \frac{r_n''(x_2)}{n(n-1)(x_2-x_0)^{n-2}}.$$

На $n-1$ шаге найдется такая точка $\overline{x}$, лежащая между точками x_{n-2} и x_0, что выполняется следующее равенство:

$$\frac{r_n^{(n-2)}(x_{n-2})}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot(x_{n-2}-x_0)^2} = \frac{r_n^{(n-1)}(\overline{x}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(\overline{x}-x_0)}.$$

Заметим, что точка $\overline{x}$ лежит на интервале с концами x и x_0. Окончательно получаем

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_n^{(n-1)}(\overline{x}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(\overline{x}-x_0)}. \tag{4.30}$$

Точка $\overline{x}$ лежит между точками x и x_0, тогда $\overline{x} \to x_0$ при $x \to x_0$. Следовательно, при $x \to x_0$ правая часть равенства (4.30) стремится к $\dfrac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$ (см. равенства (4.28)). Поэтому справедливо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, т. е. $r_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$. $\triangle$

Теорема 4.22. *Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную n-го порядка. Если справедливо асимптотическое равенство $f(x) = Q_n(x) + \big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$, где Q_n — многочлен степени не выше n, то $Q_n(x) = P_n(x)$.*

Доказательство. Из теоремы 4.21 следует равенство $f(x) = P_n(x) + o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$. Тогда для многочлена $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$ выполняется: $R_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$.

Пусть $R_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} R_n(x) = 0$ и $a_0 = 0$. Итак, при $x \to x_0$ верно

$$R_n^1(x) = a_1 + a_2(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-1} = o\big((x-x_0)^{n-1}\big).$$

Далее верно $\lim\limits_{x\to x_0} R_n^1(x) = 0$ и, следовательно, $a_1 = 0$.

Таким образом, последовательно получаем, что все коэффициенты a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, многочлена R_n равны нулю. $\triangle$

Пример 4.33. *Если для функции f имеет место асимптотическое представление: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, то функция f дважды дифференцируема в точке $x = 0$.*

Утверждение неверно, имеет место следующий контрпример: для функции $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ справедливо асимптотическое представление $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$, но функция f не является дважды дифференцируемой в нуле, поскольку верно

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

а предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\Big(3x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\Big)$ не существует, т. е. функция f не является дважды дифференцируемой в нуле.

7.3. Разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Формулы Тейлора при $x_0 = 0$ еще называют *формулами Маклорена.*

7.3.1. *Показательная функция.* Для $y = f(x) = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$, выполняется $f^{(k)}(x) = a^x \ln^k a$ (см. пример 4.19), поэтому $f^{(k)}(0) = \ln^k a$.

Таким образом, $a^x = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln^k a}{k!}\, x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$. В частности,

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0,$$
$$e^{-x} = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + o(x^{2n}), \quad x \to 0. \tag{4.31}$$

7.3.2. *Гиперболические функции.* Из выражений для гиперболических функций

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-1}}{2}$$

и разложений (4.31) находим

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), \quad \operatorname{ch} x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

при $x \to 0$. Также справедливы следующие представления при $x \to 0$:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1}),\ \operatorname{ch} x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Замечание 4.22. Если для функции $y = f(x)$ многочлен Тейлора $y = P_{2n}(x)$ в нуле представляет собой многочлен четных степеней, т. е. $P_{2n}(x) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\, x^{2k}$, это означает, что $f^{2k-1}(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда функция $y = f(x)$ по формуле Маклорена может быть представлена следующим образом:

$$f(x) = P_{2n}(x) + o(x^{2n}) \text{ или } f(x) = P_{2n}(x) + o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для функций $y = f(x)$, для которых многочлены Тейлора $P_{2n-1}(x)$ в нуле представляют собой многочлены нечетных степеней, т. е. $f(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Для функции $y = f(x)$ справедливы представления по формуле Маклорена при $x \to 0$:

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + o(x^{2n-1}) \text{ или } f(x) = P_{2n-1}(x) + o(x^{2n}).$$

7.3.3. *Тригонометрические функции.* Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ найдены производные n-го порядка (см. пример 4.19): $\sin^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2)$ и $\cos^{(n)}(0) = \cos(n\pi/2)$.

Таким образом, справедливы представления

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1} + o(x^{2n}), \quad x \to 0,$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

Пример 4.34. Найдем разложение функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x = 0$ до $o(x^5)$ при $x \to 0$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}\, x^4 + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\, x^5 + o(x^5).$$

7.3.4. *Логарифмическая функция.* Для логарифмических функций $y = f(x) = \ln(1+x)$ и $y = g(x) = \ln(1-x)$ выполняется $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ и $g^{(k)}(0) = -(k-1)!$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + o(x^n), \quad x \to 0,$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

7.3.5. *Степенная функция.* Для функции $y = (1+x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, в примере 4.16 вычислены производные n-го порядка.

Если обозначить $C_\beta^k = \dfrac{\beta(\beta-1)\ldots\big(\beta-(k-1)\big)}{k!}$, то имеет место представление

$$(1+x)^\beta = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\beta^k\, x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{4.32}$$

В частности,

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

7.3.6. *Обратные тригонометрические функции.* Приведем несколько примеров разложения функций $y = f(x)$ по формуле Маклорена, используя известные разложения для функции $y = f'(x)$.

1. Пусть $y = \arcsin x$, $x \in (-1,\, 1)$, производная этой функции имеет вид: $y = f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Для разложения функции $y = f'(x)$ воспользуемся выражением (4.32) при $\beta = -\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{-1/2}^k (-x^2)^k + o(x^{2n-1})$$

при $x \to 0$[4.4].

[4.4]Использовано обозначение $C_\beta^0 = 1$ и замечание 4.22.

Справедливы равенства:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

(см. гл. 5, § 3). Заметим, что для функции $y = f(x)$ выполняется $f(0) = 0$, тогда

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k C_{-1/2}^k}{2k+1}\, x^{2k+1} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

2. Получим разложение функции $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$. Для нее выполняется $y = f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Воспользуемся формулой (4.33) и замечанием 4.22, получаем

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

7.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Приведем утверждение, которое позволяет находить некоторые пределы функций, используя разложение по формуле Тейлора.

Предложение. *Если выполняются условия:*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) = A \neq 0,$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(m)}(x_0) = B \neq 0,$$

то верно $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A\,(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{B\,(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)}$ *при* $x \to x_0$. *При этом если*

1) $n = m$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$;

2) $n > m$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

3) $n < m$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Это предложение простое следствие из теоремы 4.21.

Пример 4.35. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\sin x - \arcsin x}$.

Для нахождения этого предела воспользуемся полученными разложениями:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\sin x - \arcsin x} = \frac{\bigl(x + x^3/3\bigr) - \bigl(x - x^3/3\bigr) + o\bigl(x^3\bigr)}{(x - x^3/6) - (x + x^3/6) + o\bigl(x^3\bigr)} =$$

$$= \frac{2x^3/3 + o\bigl(x^3\bigr)}{-x^3/3 + o\bigl(x^3\bigr)} \to -2, \qquad x \to 0.$$

§ 8. Исследование функций с помощью дифференциального исчисления

Применим результаты этой главы к исследованию поведения произвольной функции на множестве ее определения.

8.1. Монотонность функции и точки экстремума. Теорема 4.15 дает необходимое и достаточное условия монотонности функции на множестве (см. определение 3.9).

Достаточное условие строгой монотонности функции (см. определение 3.10) сформулировано в теореме 4.16.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором множестве, то для того, чтобы найти участки монотонности этой функции, надо исследовать знак ее производной.

Исследуем вопрос о нахождении точек локального экстремума (см. определение 4.14) функции.

В теореме Ферма (см. теорему 4.10) приводится необходимое условие существования точек экстремума. Таким образом, точки, в которых либо производная функции равна нулю, либо производная функции не существует, являются возможными точками экстремума, и нам потребуется дополнительное их исследование. А именно, нужны достаточные условия существования точек экстремума.

Будем использовать следующую терминологию: если для функции $y = f(x)$ в точке x_0 либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует, то такую точку x_0 будем называть *точкой возможного локального экстремума*.

Теорема 4.23. *Пусть точка x_0 — точка возможного локального экстремума функции $y = f(x)$, и эта функция дифференцируема в некоторой проколотой Δ-окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Если в пределах этой Δ-окрестности:*

1) *$f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального минимума функции $y = f(x)$;*
2) *$f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального максимума функции $y = f(x)$;*
3) *$f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то в точке x_0 нет экстремума функции $y = f(x)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1), утверждение 2) доказывается аналогично.

Пусть $x \in (x_0-\Delta,\ x_0+\Delta)$, к отрезку с концами x и x_0 применим теорему Лагранжа 4.12. Найдется такая точка $\overline{x}$, принадлежащая интервалу с концами x и x_0, что выполняется равенство $f(x) - f(x_0) = f'(\overline{x})(x - x_0)$.

Из условий теоремы и указанного равенства получаем: если $x < x_0$, то правая часть равенства положительна и, следовательно, $f(x) > f(x_0)$. Далее, если $x > x_0$, то правая часть равенства снова положительна и $f(x) > f(x_0)$.

Таким образом, в пределах Δ-окрестности точки x_0 значение $f(x_0)$ является наименьшим и точка x_0 является точкой локального минимума (см. определение 4.14).

Докажем утверждение 3) теоремы. Если в пределах проколотой Δ-окрестности $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$, то функция $y = f(x)$ возрастает [убывает] на $(x_0 - \Delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0 + \Delta)$ (см. теорему 4.16). Поэтому точка x_0 не может быть точкой локального экстремума. $\triangle$

Пример 4.36. Функция $y = f(x) = |x|$ дифференцируема на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$, и непрерывна в этой точке. При $x < 0$ выполняется $f'(x) = -1 < 0$, и для $x > 0$ верно $f'(x) = 1 > 0$. Из теоремы 4.23 следует, что точка $x = 0$ является точкой локального минимума функции $y = f(x)$.

Пример 4.37. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(см. рис. 4.10) дифференцируема в каждой точке числовой прямой $\mathbb{R}$ и $f'(0) = 0$ (см. пример 4.23). Однако в любой как угодно малой полуокрестности точки $x = 0$ ее производная $y = f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ принимает отрицательные и положительные значения. Следовательно, в точке $x = 0$ нет локального экстремума.

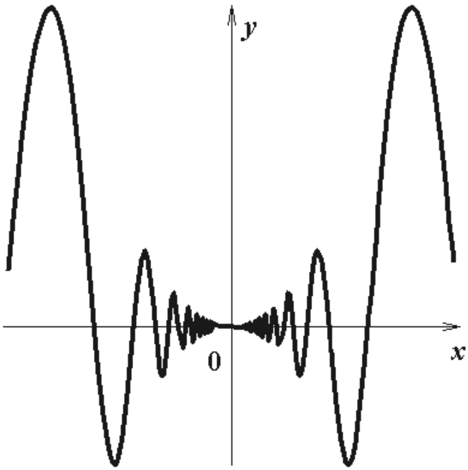

Рис. 4.10

Сформулируем и докажем достаточные условия существования локальных экстремумов на языке производных высших порядков.

Теорема 4.24. *Пусть $f'(x_0) = 0$ и в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет производную второго порядка. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума функции $y = f(x)$. Если же $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума для $y = f(x)$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(x_0) > 0$. Случай $f''(x_0) < 0$ доказывается аналогично.

Поскольку функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, то в некоторой Δ-окрестности точки x_0 функция дифференцируема.

Из теоремы 4.16 следует, что функция $y = f'(x)$ возрастает в точке x_0. Кроме этого, известно, что $y = f'(x)$ обращается в этой точке в нуль. Поэтому найдется такое число $0 < \delta < \Delta$, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ выполняется $f'(x) < 0$, а на интервале $(x_0,\, x_0 + \delta)$ — неравенство $f'(x) > 0$. Таким образом, $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный минимум (см. теорему 4.23). $\triangle$

Замечание 4.23. Теорема 4.24 не решает вопрос о существовании локального экстремума функции в случае $f''(x_0) = 0$. Поэтому надо рассматривать производные (если они существуют) более высокого порядка, чем порядок 2.

Теорема 4.25. *Пусть для функции $y = f(x)$ выполняются условия*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

для *н е ч е т н о г о* *числа* $n > 2$.

Если выполнено неравенство $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то x_0 является точкой локального минимума функции $y = f(x)$.

Если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то x_0 является точкой локального максимума функции $y = f(x)$.

Доказательство. Для неравенства $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ докажем теорему, для другого неравенства доказательство аналогично.

Функция $y = f^{(n)}(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки x_0, возрастает в этой точке (теорема 4.16) и $f^{(n)}(x_0) = 0$. Следовательно, существует такое положительное число $\delta < \Delta$, что на интервале $(x_0 - \delta,\, x_0)$ выполняется $f^{(n)}(x) < 0$, а на интервале $(x_0,\, x_0 + \Delta)$ верно неравенство $f^{(n)}(x) > 0$.

Пусть $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$. Функцию $y = f'(x)$ разложим по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 4.20): найдется такая точка $\overline{x}$, лежащая между точками x и x_0, что

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}.$$

Тогда $f'(x) = \dfrac{f^{(n)}(\overline{x})}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$, это следует из условий теоремы. Поэтому если $x < \overline{x} < x_0$, то $f'(x) < 0$, если $x_0 < \overline{x} < x$, то

$f'(x) > 0$. Таким образом, точка x_0 является точкой локального минимума (теорема 4.23). $\triangle$

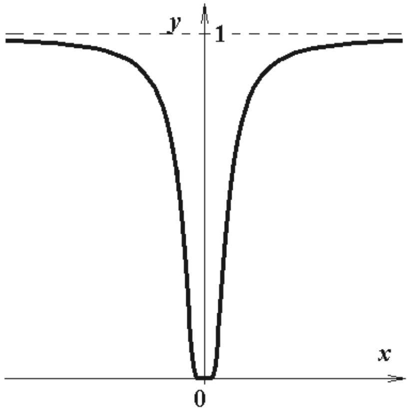

Рис. 4.11

Пример 4.38. Функция $y = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (см. пример 4.32) в точке $x = 0$ имеет производную любого порядка: $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому нельзя применить теорему 4.25. Тем не менее точка $x = 0$ является точкой минимума для функции $y = f(x)$. Поскольку для всех точек $x \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0$ выполняется $f(x) > 0$ (см. рис. 4.11).

8.2. Выпуклые вверх (вниз) функции и точки перегиба. Будем предполагать, что функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b).

Определение 4.15. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, выполняется следующее неравенство: $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ при всех неотрицательных числах α и β таких, что $\alpha + \beta = 1$.

Определение 4.16. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, выполняется следующее неравенство:

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ при всех неотрицательных числах α и β таких, что $\alpha + \beta = 1$.

Определения 4.15 и 4.16 в логических символах:

$$\bigl[\, y = f(x) \quad \text{выпукла вверх на интервале} \quad (a,\, b) \,\bigr] \quad \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \quad \bigl[(\forall x_1, x_2 \in (a,\, b)\colon\ x_1 < x_2)\,\&\,(\forall \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0\colon \alpha + \beta = 1) \longmapsto \\ \longmapsto f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)\bigr]. \tag{4.34}$$

$$\bigl[\, y = f(x) \quad \text{выпукла вниз на интервале} \quad (a,\, b) \,\bigr] \quad \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \quad \bigl[(\forall x_1, x_2 \in (a,\, b)\colon\ x_1 < x_2)\,\&\,(\forall \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0\colon \alpha + \beta = 1) \longmapsto \\ \longmapsto f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)\bigr]. \tag{4.35}$$

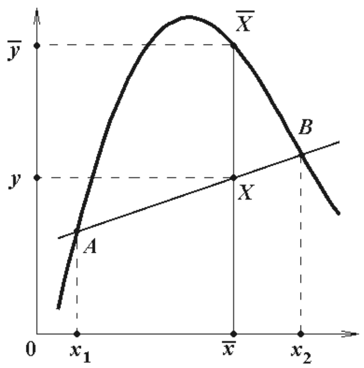

Рис. 4.12

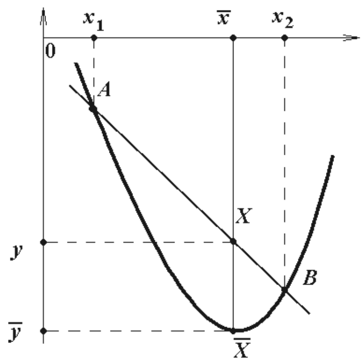

Рис. 4.13

Выясним геометрический смысл определений (4.34) и (4.35). Обратим внимание на тот факт, что любая точка $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ при условиях, наложенных на коэффициенты α и β, лежит на отрезке $[x_1,\, x_2]$. Обратно, если x лежит на отрезке $[x_1,\, x_2]$, то она может быть представлена в виде $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $\alpha = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $\beta = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Учитывая это, можно неравенства определений (4.34) и (4.35) переписать для любой точки $x \in [x_1,\, x_2]$ следующим образом:

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \leqslant 0 \tag{4.36}$$

для функции *выпуклой вверх* и соответственно

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0 \qquad (4.37)$$

для функции *выпуклой вниз*.

Введем обозначения: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Неравенство в определении (4.34) означает, что точка $\overline{X}(\overline{x}, \overline{y})$ с координатами $\overline{x} = \alpha x_1 + \beta x_2 \in [x_1, x_2]$ и $\overline{y} = f(\overline{x})$, лежащая на графике функции $y = f(x)$, имеет большую ординату, чем точка $X(\overline{x}, y)$ с координатами $\overline{x}$ и $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, лежащая между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на прямой, проходящей через точки A и B графика функции (см. рис. 4.12).

Соответственно, неравенство в определении (4.35) означает, что ордината точки $\overline{X}$, лежащей на графике функции $y = f(x)$, меньше ординаты точки X, лежащей на секущей, проходящей через точки A и B графика этой функции (см. рис. 4.13).

Поэтому выпуклую вверх функцию можно охарактеризовать следующим образом: *все точки любой дуги графика выпуклой вверх функции лежат выше или на секущей, проходящей через концы этой дуги.*

Соответственно, *все точки любой дуги графика выпуклой вниз функции лежат ниже или на секущей, проходящей через концы этой дуги.*

Замечание 4.24. Обратим внимание на тот факт, что линейная функция $y = kx + b$ является одновременно выпуклой вверх и выпуклой вниз на всей числовой прямой.

Направления выпуклости графика функции исследуем с помощью производных. Справедлива теорема.

Теорема 4.26. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b).*

1) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпукла вверх на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f'(x)$ была невозрастающей на этом интервале.*
2) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпукла вниз на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f'(x)$ была неубывающей на интервале (a, b).*

Доказательство. Докажем утверждение 1), утверждение 2) доказывается аналогично.

Необходимость. Неравенство (4.36) перепишем для любой точки $x_1 < x < x_2$ в следующем виде:

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}. \tag{4.38}$$

Из (4.38) получаем следующие неравенства при $x \to x_1$ и $x \to \to x_2$ соответственно:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_1); \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant f'(x_2). \tag{4.39}$$

Таким образом, для любых точек x_1 и x_2 интервала $(a,\, b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется $f'(x_2) \leqslant f'(x_1)$, т. е. функция $y = f'(x)$ является невозрастающей на интервале $(a,\, b)$ (см. определение (3.6)).

Достаточность. К функции $y = f(x)$ применим теорему Лагранжа 4.12 на отрезках $[x_1,\, x]$ и $[x,\, x_2]$. Тогда найдутся такие точки $x_1 < \overline{x}_1 < x$ и $x < \overline{x}_2 < x_2$, что справедливы следующие равенства: $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\overline{x}_2)$ и $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\overline{x}_1)$. Из условия теоремы следует, что $f'(\overline{x}_2) \leqslant f'(\overline{x}_1)$, и поэтому имеет место неравенство (4.38). Таким образом, функция $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a,\, b)$. $\triangle$

Теорема 4.27. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируемая на интервале $(a,\, b)$.*

1) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпукла вверх на интервале $(a,\, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leqslant 0$ для всех точек $x \in (a,\, b)$.*
2) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпукла вниз на интервале $(a,\, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ для всех точек x из интервала $(a,\, b)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1).

Условие $f''(x) \leqslant 0$ на интервале $(a,\, b)$ равносильно (см. теорему 4.15) тому, что функция $y = f'(x)$ является невозрастающей на этом интервале. Условие, что функция $y = f'(x)$ является невозрастающей на интервале $(a,\, b)$, эквивалентно (см. теорему 4.26) тому, что функция $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале.

Доказательство утверждения 2) аналогично. $\triangle$

Замечание 4.25. Условие $f''(x) > 0$ для всех x из интервала $(a,\, b)$ не является необходимым для того, чтобы функция $y = f(x)$ была выпукла вниз на этом интервале.

Например, функция $y = f(x) = x^4$ выпукла вниз на интервале $(-1,\, 1)$, поскольку $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$ и $f''(0) = 0$.

Приведем еще один геометрический критерий выпуклости вверх (вниз) функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\, b)$, который использует дифференциальные свойства функции и геометрический смысл производной.

Теорема 4.28. *Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\, b)$.*

1) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпуклой вверх на интервале $(a,\, b)$, необходимо и достаточно, чтобы все точки графика этой функции лежали под касательной, построенной к графику функции в любой точке интервала $(a,\, b)$, или на ней.*
2) *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была выпуклой вниз на интервале $(a,\, b)$, необходимо и достаточно, чтобы все точки графика этой функции лежали над касательной, построенной к графику функции в любой точке интервала $(a,\, b)$, или на ней.*

Доказательство. Докажем утверждение 1), доказательство утверждения 2) аналогично.

Касательная к графику функции в точке $\overline{X}(\overline{x},\, f(\overline{x}))$ имеет угловой коэффициент $f'(\overline{x})$, поэтому ее уравнение

$$y = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}).$$

Заметим, что для любых точек $x,\, \overline{x} \in (a,\, b)$, неравенство

$$f(x) \leqslant f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \tag{4.40}$$

равносильно неравенствам

$$\frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} \leqslant f'(\overline{x}), \qquad x > \overline{x}, \tag{4.41}$$

$$\frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} \geqslant f'(\overline{x}), \qquad x < \overline{x}, \tag{4.42}$$

Полагая в неравенстве (4.41) $\overline{x} = x_1$, $x = x_2$ и полагая в (4.42) $\overline{x} = x_2$, $x = x_1$, где $x_1 < x_2$, произвольные точки интервала $(a,\, b)$, приходим к неравенствам (4.39). Эти выражения были получены для произвольных $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$, $x_1 < x_2$.

Следовательно, $f'(x_2) \leqslant f'(x_1)$ для любых таких точек x_1, x_2 из $(a,\, b)$, что $x_1 < x_2$, т. е. функция $y = f'(x)$ является невозрастающей. По теореме 4.26 это эквивалентно выпуклости вверх на интервале $(a,\, b)$ рассматриваемой функции $y = f(x)$. △

В дальнейшем нас будут интересовать точки, в которых функция $y = f(x)$ меняет направление выпуклости.

Определение 4.17. Назовем точку $x_0 \in (a,\, b)$ *точкой перегиба* функции $y = f(x)$, если слева и справа от точки x_0 на интервале $(a,\, b)$ функция $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости.

На рис. 4.14 точки x_1 и x_2 есть точки перегиба функции $y = f(x)$. Слева от точки x_1 функция $y = f(x)$ выпукла вниз, а справа от точки x_1 — выпукла вверх, слева от точки x_2 функция выпукла вверх, а справа — выпукла вниз.

Справедливо следующее необходимое условие существования точки перегиба.

Теорема 4.29. *Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и точка x_0 является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Функция $y = f'(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки x_0. Найдется такое положительное число $\delta < \Delta$, что функция $y = f'(x)$ неубывающая [невозрастающая] на интервале $(x_0 - \delta,\, x_0)$ и невозрастающая [неубывающая] на интервале $(x_0,\, x_0 + \delta,)$ (см. определение 4.17 и теорему 4.26).

Следовательно, функция $y = f'(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум, а поэтому (см. теорему Ферма 4.10) выполняется равенство $f''(x_0) = 0$. △

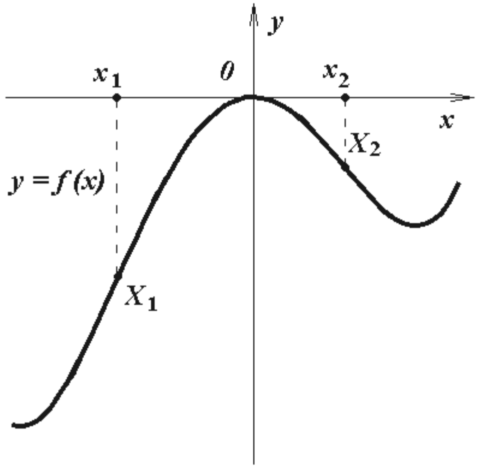

Рис. 4.14

Замечание 4.26. Равенство нулю второй производной не является достаточным условием существования точки перегиба. Например, для функции $y = f(x) = x^4$ в точке $x = 0$ выполняется $f''(0) = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой перегиба, поскольку на любом интервале $(-a, a)$, $a > 0$, функция выпукла вниз.

Точка x_0 функции $y = f(x)$ такая, что у функции в точке x_0 не существует вторая производная или выполняется равенство $f''(x_0) = 0$, может быть точкой перегиба. Поэтому требуются дополнительные исследования функции, чтобы выяснить, является ли x_0 ее точкой перегиба.

Дадим достаточные условия существования точки перегиба.

Теорема 4.30. *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой Δ-окрестности точки x_0 и $f''(x_0) = 0$. Если в пределах указанной Δ–окрестности точки x_0 функция $y = f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0, то точка x_0 является точкой перегиба.*

Доказательство. Утверждение следует из определения 4.17 и теоремы 4.27. $\triangle$

Можно использовать производные высших порядков для того, чтобы определять точки перегиба, подобно тому, как ранее определяли точки локального экстремума.

Теорема 4.31. *Если для функции $y = f(x)$ выполняются условия $f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, для четного числа $n \geqslant 2$, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$.*

Доказательство. Функция $y = f^{(n)}(x)$ определена в некоторой Δ-окрестности точки x_0 и возрастает или убывает в точке x_0, в зависимости от знака $f^{(n+1}(x_0)$ (см. теорему 4.16). По условию $f^{(n)}(x_0) = 0$, поэтому найдется такая δ-окрестность точки x_0 при $\delta < \Delta$, что в пределах этой окрестности слева и справа от точки x_0 функция $y = f^{(n)}(x)$ принимает значения разного знака.

Функцию $y = f''(x)$ разложим по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки x_0: найдется такая точка $\overline{x}$, лежащая между точками x и x_0, что

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}.$$

Следовательно, функция $y = f''(x)$ слева и справа от точки x_0 принимает значения разного знака, поэтому точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$(см. теорему 4.30). $\triangle$

Опишем одно интересное геометрическое свойство точек перегиба.

Теорема 4.32. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой Δ-окрестности точки x_0 и ее производная непрерывна в x_0.*

Если точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$, то касательная к графику в точке x_0 пересекает его, т. е. в пределах некоторой δ-окрестности точки x_0 график функции слева и справа от точки x_0 лежит по разные стороны от этой касательной.

Доказательство. Предположим, что $0 < \delta < \Delta$, и, для определенности, будем считать, что функция выпукла вверх на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вниз. Поэтому справедливы следующие неравенства (см. теорему 4.28) для любых точек x и $\overline{x}$ из указанных интервалов соответственно:

$$f(x) \leqslant f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}), \qquad x < \overline{x} < x_0,$$
$$f(x) \geqslant f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}), \qquad x > \overline{x} > x_0.$$

Перейдем к пределу при $\overline{x} \to x_0$ в полученных неравенствах. Тогда, в силу непрерывности функции $y = f'(x)$ в точке x_0, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x < x_0,\\ f(x) &\geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x > x_0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Таким образом, слева от x_0 точки графика функции лежат ниже касательной, проходящей через точку x_0, или на ней. Справа от x_0 точки графика лежат выше рассматриваемой касательной или на ней. △

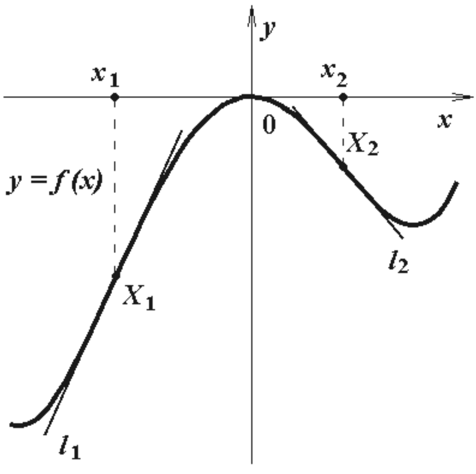

Рис. 4.15

На рис. 4.15 прямые l_1 и l_2 — касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках x_1 и x_2 соответственно.

Замечание 4.27. Следует отметить тот факт, что если в точке x_0 график функции $y = f(x)$ пересекает касательную, то из этого еще не следует, что точка x_0 является точкой перегиба.

Пусть $y = f(x) = \begin{cases} x^5\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ В точке $x = 0$ она имеет горизонтальную касательную и пересекает ее, поскольку функция нечетна (см. рис. 4.16). Функция $y = f''(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right) - 8x^2\sin\dfrac{2}{x} + 2x\cos\dfrac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

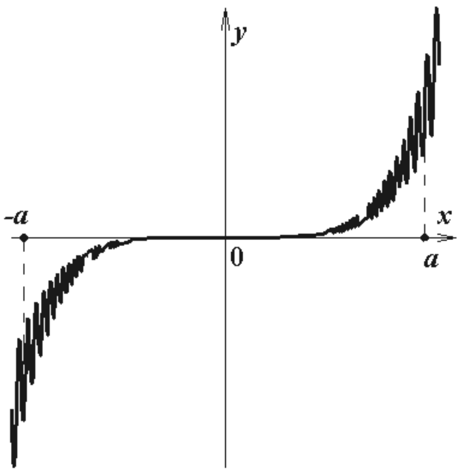

Рис. 4.16

В частности, в точках $x_n = \frac{2}{\pi n}$ для $n \in \mathbb{N}$ функция $y = f''(x)$ принимает следующие значения:

$$f''(x_n) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}\left(1+\dfrac{40}{(\pi n)^2}\right), & n \text{ — четное}, \\ -\dfrac{4}{\pi n}\left(1-\dfrac{80}{(\pi n)^2}\right), & n \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Таким образом, в любой как угодно малой правой полуокрестности нуля функция $y = f''(x)$ бесконечное число раз меняет знак. Это же справедливо и для любой левой полуокрестности точки $x = 0$.

Точка $x = 0$ не является точкой перегиба рассматриваемой функции $y = f(x)$.

8.3. Общая схема исследования функции. Упорядочим процесс исследования функций.

8.3.1. *Область определения.* Функцию $y = f(x)$ начнем исследовать с нахождения ее области определения. При этом функция может быть определена на бесконечном множестве или на множестве, из которого выброшено конечное число точек. Нас будет в первую очередь интересовать поведение функции при $x \to \pm\infty$ или в окрестностях выколотых из области определения точек.

Кроме этого, надо выяснить, не является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной (см. определение 3.11 и замечание 3.1), что, учитывая симметричность графика такой функции, позволит уменьшить объем исследования функции.

Надо найти, по возможности, точки пересечения графика с осями координат.

8.3.2. *Асимптоты графика функции.* Функция $y = f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0.

Определение 4.18. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 4.39. Функция $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ не определена в точках $x_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этих точках выполняется $\lim\limits_{x\to x_k\pm 0} = \mp\infty$. Следовательно, прямые $x = x_k$, $k \in \mathbb{Z}$ — вертикальные асимптоты и их счетное число.

Далее предположим, что функция $y = f(x)$ определена на неограниченном множестве X, например $X = (c, +\infty)$.

Определение 4.19. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl[f(x) - (kx + b)\bigr] = 0.$$

Для нахождения наклонных асимптот можно использовать следующий критерий.

Теорема 4.33. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие равенства:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - kx\big] = b. \tag{4.44}$$

Доказательство. Необходимость. Прямая $y=kx+b$ — наклонная асимптота функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Функцию можно представить в следующем виде: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, тогда $\dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x} \to k$ при $x \to +\infty$, соответственно, $f(x) - kx \to b$ при $x \to +\infty$.

Достаточность. Выполнены равенства (4.44), тогда из второго получаем, что $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$. Таким образом (см. определение 4.19), прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$. $\triangle$

Замечание 4.28. Аналогично можно определить наклонную асимптоту при $x \to -\infty$ и доказать критерий.

Пример 4.40. Функция $y = f(x) = e^{1/x}$ не определена при $x = 0$, при этом $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$, и, следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой функции. Далее, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, поэтому прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой функции при $x \to \pm\infty$ (см. рис. 4.17).

Замечание 4.29. Результаты пунктов 8.3.1 и 8.3.2 позволяют построить эскиз графика функции $y = f(x)$.

8.3.3. *Схема применения дифференциального исчисления при исследовании функций.* Определяем множество, на котором функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. Особое внимание уделяем точкам области определения, в которых функция не является дифференцируемой, и корням уравнения $f'(x) = 0$. Это точки возможного локального экстремума.

Дальнейшее исследование знака производной функции слева и справа от точек возможного локального экстремума позволяет найти интервалы возрастания (убывания) функции и точки локального экстремума.

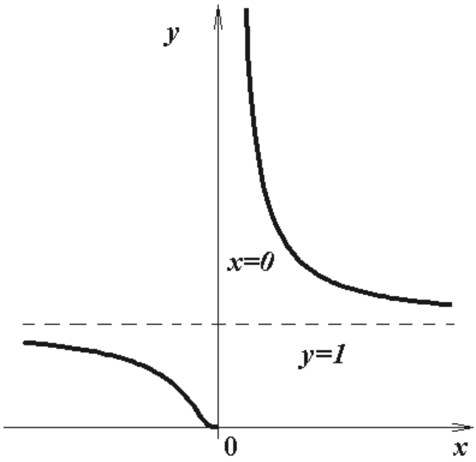

Рис. 4.17

Определяем множество, на котором функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема. Выделяем точки области определения функции, в которых функция не является дважды дифференцируемой и корни уравнения $f''(x) = 0$. Эти точки могут быть точками перегиба.

Для уточнения надо исследовать знак второй производной слева и справа от полученных точек. Тем самым находим интервалы выпуклости вверх и вниз функции и точки перегиба.

Замечание 4.30. Можно использовать производные высших порядков при исследовании функции. Например, при определении точек локального экстремума и точек перегиба.

Пример 4.41. Пусть $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 9}{x + 1}$. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = -1$. При этом выполняется $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, следовательно, $x = -1$ — вертикальная асимптота. Наклонная асимптота $y = x$ при $x \to \pm\infty$. Точка пересечения с осью ординат — точка $(0,\, 9)$.

Найдем первую и вторую производные функции $y = f(x)$: $f'(x) = \dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{18}{(x+1)^3}$.

Первая производная функции обращается в нуль в точках $x = -4$ и $x = 2$. Исследуем знак первой производной: при $x < -4$ и $x > 2$ производная положительна, а при $-4 < x < 2$ — отрицательна. Таким образом, точка $A(-4, -7)$ является точкой максимума, а точка $B(2,\,5)$ — точкой минимума функции.

Точек перегиба у функции нет. При $x < -1$ вторая производная отрицательна, а при $x > -1$ положительна. Поэтому при $x < -1$ функция выпукла вверх, а при $x > -1$ выпукла вниз.

График функции изображен на рис. 4.18.

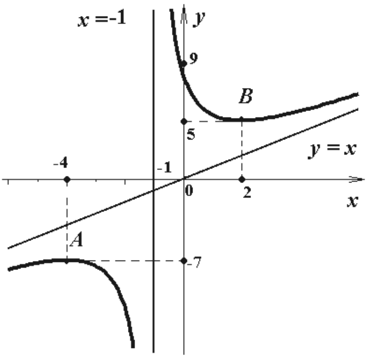

Рис. 4.18

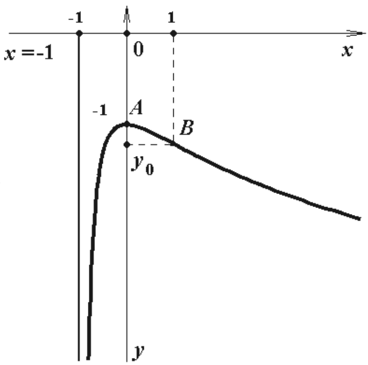

Рис. 4.19

Пример 4.42. Построим график следующей функции:

$$y = f(x) = -\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

Функция определена при $x > -1$ и $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$. Поэтому прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Первая и вторая производные равны: $f'(x) = -\dfrac{x}{(x+1)^2}$ и $f''(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^3}$. Точка $A(0,\,-1)$ — точка максимума функции $y = f(x)$. Точка $B\big(1,\,y_0\big)$ — точка перегиба, где введено обозначение $y_0 = -\ln 2 - 1/2$.

При $-1 < x < 1$ функция $y = f(x)$ выпукла вверх, а при $x > 1$ выпукла вниз.

График функции изображен на рис. 4.19.

8.4. Анализ функций, заданных параметрически. Применим полученную схему исследования функций к построению плоской кривой $\Gamma = \{x(t),\, y(t),\, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$.

Пример 4.43. $x(t) = \dfrac{t(2t-3)}{t-1}$, $y(t) = \dfrac{(t+1)(t-2)}{2(t-3)}$. Функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ не определены при $t = 1$ и $t = 3$ соответственно.

Первая и вторая производные функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют следующий вид:

$$x'(t) = \frac{2t^2-4t+3}{(t-1)^2}, \quad x''(t) = -\frac{2}{(t-1)^3},$$
$$y'(t) = \frac{t^2-6t+5}{2(t-3)^2}, \quad y''(t) = \frac{4}{(t-3)^3}.$$

Воспользуемся результатами раздела 3.3 главы 4 и примера 4.21 для нахождения первой и второй производной функции y как функции переменной x:

$$y'_x = \frac{(t-5)(t-1)^3}{2(t-3)^2(2t^2-4t+3)}, \; y''_{xx} = \frac{3(t-1)^4(3t^2-8t+9)}{(t-3)^3(2t^2-4t+3)^3}.$$

Результаты исследования функций и их производных сведем в следующих таблицах[4.5].

Таблица 1

t	$(-\infty,\, 1)$	$(1,\, 3)$	$(3,\, 5)$	$(5,\, +\infty)$
y'_x	$+$	$-$	$-$	$+$
y''_{xx}	$-$	$-$	$+$	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$y(x)$	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

Таблица 2

t	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$x(t)$	$-\infty$	$\pm\infty$	$9/2$	$35/4$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$1/2$	$\mp\infty$	$9/2$	$+\infty$

[4.5] Здесь символами $\nearrow$ и $\searrow$ обозначены возрастание и убывание функции, а символами $\smile$ и $\frown$ обозначена соответственно выпуклость вниз и вверх.

В таблице 1 указаны интервалы монотонности и выпуклости вверх и вниз y как функции переменной x.

Из таблицы 2 находим, что имеются три асимптоты: $x = 9/2$, $y = (x+5)/4$ (при $t \to \pm\infty$, вычислена по формуле (4.44)) и $y = 1/2$, на рис. 4.20 они обозначены пунктирными прямыми.

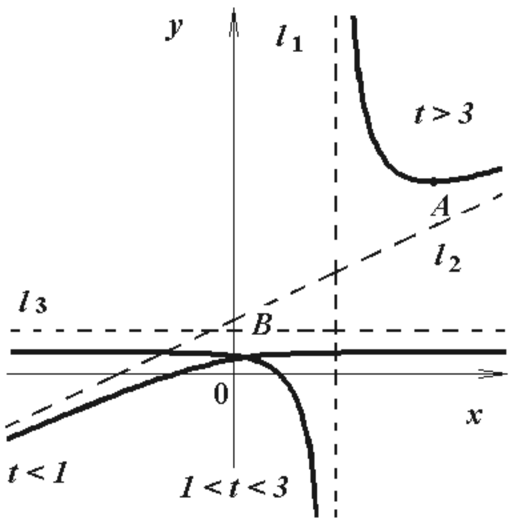

Рис. 4.20

Кривая изображена на рис. 4.20. Точка $A\big(35/4,\ 9/2\big)$ — точка локального минимума при $t = 5$, а $B\big(1/2,\ 3/8\big)$ — точка самопересечения кривой. Ей соответствуют два значения параметра: $t_1 = \dfrac{7+\sqrt{33}}{8}$ и $t_2 = \dfrac{7}{4} - \dfrac{7+\sqrt{33}}{8}$.

ГЛАВА 5

Элементы дифференциальной геометрии

Дифференциальная геометрия изучает внутренние свойства кривых и поверхностей, которые не зависят от выбора системы координат.

В этой главе мы применим дифференциальное исчисление (результаты гл. 4) к исследованию пространственных кривых и, как частный случай, плоских кривых.

Сначала определим пространственную кривую, так как это наш основной объект изучения. Затем приведем некоторые предварительные сведения о векторных функциях и их дифференциальных свойствах, ибо эти векторные функции используются при задании параметризации кривой.

Отметим, что радиус-вектор не инвариантен относительно преобразования координат, однако его производные инвариантны. Поэтому мы будем заниматься построением таких инвариантов и выяснением их геометрического смысла.

§ 1. Кривые

В гл. 4 п. 3.3 определена плоская кривая. В этом параграфе определим пространственную кривую. Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$.

1.1. Определение. Предположим, что на отрезке $[\alpha,\, \beta]$ заданы непрерывные функции:

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{5.1}$$

Переменную t будем называть *параметром*.

Если x, y и z рассматривать как координаты точки в пространстве, то каждому $t \in [\alpha,\, \beta]$ соответствует точка $M(t)$ пространства, имеющая координаты $(x,\, y,\, z)$.

Обозначим множество таких точек пространства через Γ. На этом множестве введем порядок: *точка* $M_1\big(t_1\big)$ *предшествует точке* $M_2\big(t_2\big)$, если $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, причем точки, отвечающие разным значениям параметра, считаются различными.

Полученное упорядоченное множество точек пространства называют *кривой* или *пространственной кривой* и обозначают

$$\Gamma = \{\, x = u(t),\ y = v(t),\ z = w(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \,\}.$$

Уравнения (5.1) называются *параметрическими уравнениями* (или *параметризацией*) *кривой* Γ.

Если $z \equiv 0$, то кривая Γ называется *плоской* кривой.

Замечание 5.1. Если точки, соответствующие различным значениям параметра t, но имеющие одни и те же координаты, не считать различными, то множество точек пространства, заданных параметрическими уравнениями (5.1), уже не рассматривается как упорядоченное значениями t.

Дж. Пеано были открыты такие непрерывные функции $x = u(t)$, $y = v(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что множество точек с координатами x и y, определяемых этими функциями, заполняют квадрат $\Pi = \{(x,\, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$[5.1].

Поскольку непрерывный образ отрезка может быть довольно сложным, то для наших целей только непрерывности функций (5.1) недостаточно. Будем предполагать, что эти функции являются *дифференцируемыми* на отрезке $[\alpha,\, \beta]$. В этом случае кривая Γ называется *дифференцируемой* кривой.

Если функции (5.1) *непрерывно дифференцируемы*, то кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой* кривой. Если при этом функции (5.1) обладают свойством $\big[u'(t)\big]^2 + \big[v'(t)\big]^2 + \big[w'(t)\big]^2 > 0$, то кривая Γ называется *гладкой* кривой.

Точка $M\big(t_0\big) = M\big(x_0,\, y_0,\, z_0\big)$, где $x_0 = u\big(t_0\big)$, $y_0 = v\big(t_0\big)$ и $z_0 = w\big(t_0\big)$, такая, что $u'\big(t_0\big) = v'\big(t_0\big) = w'\big(t_0\big) = 0$, называется *особой* точкой кривой Γ.

Таким образом, *гладкая* кривая — это непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек[5.2].

[5.1] Эти кривые называют кривыми Пеано.

[5.2] Об особых точках плоской кривой см. также замечание 4.9.

Пример 5.1. Кривая (см. рис. 5.1)

$$\Gamma = \{x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$$

называется *кардиоидой*. Это непрерывно дифференцируемая кривая, имеющая особую точку $M(0) = (1,\, 0)$, т. к. имеют место следующие равенства: $x' = 2(\sin 2t - \sin t)$ и $y' = 2(\cos t - \cos 2t)$ и $x'(0) = y'(0) = 0$. Кривая не является гладкой.

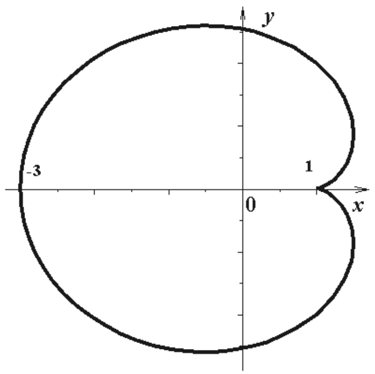

Рис. 5.1

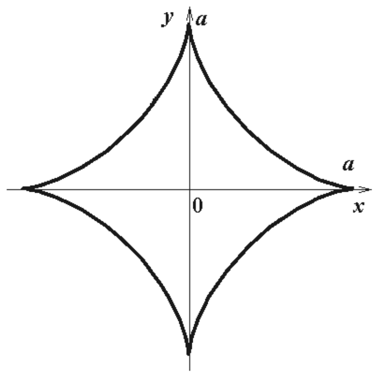

Рис. 5.2

Пример 5.2. Непрерывно дифференцируемая кривая, которая называется *астроидой* (см. рис. 5.2):

$$\Gamma = \{x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},$$

имеет особые точки:

$$M_1(0) = (a,\, 0),\ M_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,\, a),$$

$$M_3(\pi) = (-a,\, 0),\ M_4\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,\, -a),$$

в них производные функций, задающих параметризацию Γ, одновременно обращаются в нуль:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$x'(0) = y'(0) = 0, \quad x'(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0,$$

$$x'(\pi) = y'(\pi) = 0, \quad x'(3\pi/2) = y'(3\pi/2) = 0.$$

Следовательно, астроида не является гладкой кривой.

Если при $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, выполняется равенство $M\big(t_1\big) = M\big(t_2\big)$, то эта точка M называется точкой *самопересечения* кривой Г. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой* кривой.

Пример 5.3. Кривая (см. рис. 5.3)

$$\Gamma = \left\{ x = \frac{2a\,t^2}{1+t^2},\ y = \frac{a\,t(t^2-1)}{1+t^2},\ -\infty < t < +\infty \right\}$$

называется *строфоидой*. Точка $M(-1) = M(1) = M(a, 0)$ является ее точкой самопересечения.

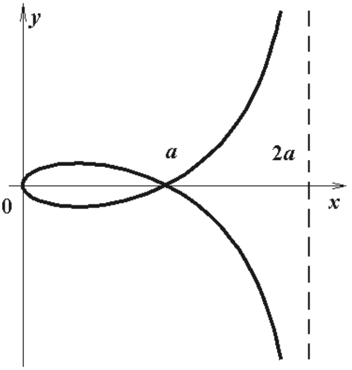

Рис. 5.3

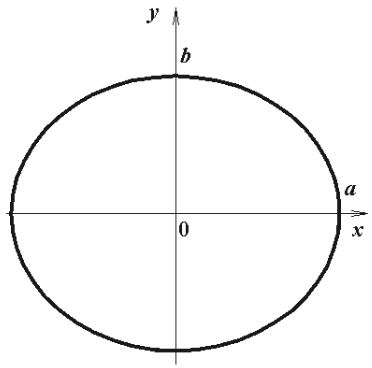

Рис. 5.4

Назовем точку $M(\alpha)$ *началом* кривой Г, а точку $M(\beta)$ — *концом* кривой Г. При $M(\alpha) = M(\beta)$ кривая Г называется *замкнутой* кривой. Простую замкнутую кривую назовем *контуром*.

Пример 5.4. Плоская кривая (см. рис. 5.4)

$$\Gamma = \{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},$$

где $a > b > 0$, есть простая замкнутая кривая, т. е. Г — контур. Точка $M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, описывает на плоскости Oxy эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, причем точка $M(0) = M(2\pi) = (a, 0)$ есть начало и конец кривой Г. Заметим, что эта кривая гладкая.

Пример 5.5. Кардиоида (кривая из примера 5.1, см. рис. 5.1) и астроида (кривая из примера 5.2, см. рис. 5.2) являются контурами. Конечно, эти контуры не являются гладкими.

Часть строфоиды (пример 5.3, см. рис. 5.3) при $t \in [-1, 1]$ также является контуром.

1.2. Допустимые параметризации кривой. Пусть

$$x = \widetilde{u}(\tau), \quad y = \widetilde{v}(\tau), \quad z = \widetilde{w}(\tau), \qquad \widetilde{\alpha} \leqslant \tau \leqslant \widetilde{\beta}. \tag{5.2}$$

Будем говорить, что уравнения (5.2) задают ту же кривую Γ, что и уравнения (5.1), если существует взаимно однозначная функция $t = \varphi(\tau)$ такая, что

1) φ отображает отрезок $\bigl[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\,\bigr]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$;
2) $\varphi\bigl(\widetilde{\alpha}\bigr) = \alpha$, $\varphi\bigl(\widetilde{\beta}\bigr) = \beta$;
3) $u\bigl(\varphi(\tau)\bigr) = \widetilde{u}(\tau)$, $v\bigl(\varphi(\tau)\bigr) = \widetilde{v}(\tau)$, $w\bigl(\varphi(\tau)\bigr) = \widetilde{w}(\tau)$.

Если, кроме того,

4) $t = \varphi(\tau)$ непрерывно дифференцируема и верно $\varphi'(\tau) \neq 0$ для всех $\tau \in \bigl[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\,\bigr]$,

то функцию $t = \varphi(\tau)$, удовлетворяющую приведенным условиям 1)–4), называют *допустимой заменой параметра*. Уравнения (5.2) называют *допустимой параметризацией* кривой Γ.

Пример 5.6. Рассмотрим функцию $y = x^3$, $x \in [-1, 1]$. График этой функции можно рассматривать как плоскую кривую Γ, и можно задать эту кривую следующим образом:

$$\Gamma = \{x = t,\, y = t^3,\ -1 \leqslant t \leqslant 1\},$$

Γ — простая гладкая кривая.

Эту же кривую Γ зададим другой параметризацией:

$$\Gamma = \{x = \tau^3,\, y = \tau^9,\ -1 \leqslant \tau \leqslant 1\}.$$

Заданная кривая также является простой, но она не является гладкой, так как $x'(0) = y'(0) = 0$.

Здесь использована замена переменных $t = \varphi(\tau) = \tau^3$, которая не является допустимой, так как $\varphi'(0) = 0$. При такой замене переменных гладкая кривая перестает быть гладкой. Поэтому такая замена и не является допустимой, гладкость кривой была «не сохранена» при указанной замене параметра.

§ 2. Векторные функции

Определим основные понятия анализа такие, как *предел*, *непрерывность*, *производная*, *дифференцируемость* для векторных функций, с помощью которых в дальнейшем и будем задавать кривые.

Определение 5.1. Пусть каждой точке t отрезка $[\alpha, \beta]$ по определенному правилу ставится в соответствие вектор $\overline{\boldsymbol{r}}$ пространства, тогда говорят, что задана *векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ *скалярного аргумента* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Замечание 5.2. Поскольку задание вектора означает задание трех его координат $(x,\, y,\, z)$ в пространстве $Oxyz$, то задание векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ эквивалентно заданию трех уравнений вида (5.1).

Если $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{OM}$ — это радиус-вектор точки M, то векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ описывает движение точки M в пространстве, когда аргумент t изменяется на отрезке $[\alpha,\, \beta]$.

2.1. Понятия предела и непрерывности в точке для векторных функций. В дальнейшем будем предполагать, что t_0 принадлежит отрезку $[\alpha,\, \beta]$, на котором определена векторная функция.

Определение 5.2. Векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ называется *бесконечно малой* при $t \to t_0$, если функция $\rho = \rho(t) = |\,\overline{\boldsymbol{r}}(t)|$ является бесконечно малой при $t \to t_0$.

Если $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \big(u(t),\, v(t),\, w(t)\big)$, то выполняется $|\overline{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)}$ и справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ *бесконечно малая при* $t \to t_0$ *в том и только в том случае, когда функции* (5.1) *являются при* $t \to t_0$ *бесконечно малыми.*

Доказательство. Если при $t \to t_0$ векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ бесконечно малая, то из неравенств

$$|u(t)| \leqslant \big|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\big|, \quad |v(t)| \leqslant \big|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\big|, \quad |w(t)| \leqslant \big|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\big|,$$

следует, что при $t \to t_0$ функции (5.1), задающие векторную функцию $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, являются бесконечно малыми.

Если функции (5.1) являются бесконечно малыми при $t \to t_0$, то из свойств бесконечно малых функций и равенства

$$\left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right|^2 = u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)$$

получаем, что функция $\rho = \rho(t) = \left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right|$ бесконечно малая при $t \to t_0$, следовательно, и векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ является бесконечно малой при $t \to t_0$. $\triangle$

Определение 5.3. Вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ называется пределом векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0, если векторная функция $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(t) = \overline{\boldsymbol{r}}(t) - \overline{\boldsymbol{a}}$ является бесконечно малой при $t \to t_0$.

Обозначение. $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{\boldsymbol{a}}$ или $\overline{\boldsymbol{r}}(t) \to \overline{\boldsymbol{a}}$ при $t \to t_0$.

Замечание 5.3. Из определения предела векторной функции в точке следует, что если векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ бесконечно малая при $t \to t_0$, то $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{\boldsymbol{0}}$.

Предел векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0 связан с пределами ее координатных представлений в этой точке следующим образом.

Предложение 5.2. *Вектор $\overline{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ является пределом векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0 в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = a_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} v(t) = a_2$ и $\lim\limits_{t \to t_0} w(t) = a_3$.*

Это простое следствие из определения 5.3 и предложения 5.1.

Замечание 5.4. Можно определить пределы слева и справа в точке t_0 векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, например, как пределы слева и справа в точке t_0 соответственно ее координатных функций (5.1).

Предложение 5.3. *Если $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{\boldsymbol{a}}$, то справедливо равенство $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right| = \left|\overline{\boldsymbol{a}}\right|$.*

Доказательство. Следует из неравенства треугольника

$$\Big|\left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right| - \left|\overline{\boldsymbol{a}}\right|\Big| \leqslant \left|\overline{\boldsymbol{r}}(t) - \overline{\boldsymbol{a}}\right|. \qquad \triangle$$

Для векторов определены операции сложения, умножения на число, а также скалярное и векторное произведения. Сформулируем утверждения о пределах для операций, определенных на векторных функциях.

Предложение 5.4. *Верны следующие утверждения.*

1) *Если* $\overline{\boldsymbol{r}}(t) \to \overline{\boldsymbol{a}}$ *и* $f(t) \to b$ *при* $t \to t_0$, *то выполняется* $f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t) \to b \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$ *при* $t \to t_0$.

Если $\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) \to \overline{\boldsymbol{a}}_1$ *и* $\overline{\boldsymbol{r}}_2(t) \to \overline{\boldsymbol{a}}_2$ *при* $t \to t_0$, *то*

2) $\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t) \to \overline{\boldsymbol{a}}_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_2$ *при* $t \to t_0$;

3) $\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big) \to \big(\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2\big)$ *при* $t \to t_0$;

4) $\big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big] \to \big[\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2\big]$ *при* $t \to t_0$.

Доказательство. 1) Обозначим $\overline{\boldsymbol{r}}(t) - \overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{p}}(t)$, где $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(t)$ — бесконечно малая векторная функция при $t \to t_0$ и $g = g(t) = f(t) - b$ — бесконечно малая функция при $t \to t_0$. Тогда $f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t) = b\,\overline{\boldsymbol{a}} + b\,\overline{\boldsymbol{p}}(t) + g(t)\,\overline{\boldsymbol{a}} + g(t)\,\overline{\boldsymbol{p}}(t) = b\,\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{q}}(t)$. Заметим, что $\big|\overline{\boldsymbol{q}}(t)\big| \leqslant |b|\,\big|\overline{\boldsymbol{p}}(t)\big| + |g(t)|\,\big|\overline{\boldsymbol{a}}\big| + |g(t)|\,\big|\overline{\boldsymbol{p}}(t)\big|$ и правая часть представляет собой бесконечно малую функцию. Следовательно, векторная функция $\overline{\boldsymbol{q}}(t) = f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t) - b\,\overline{\boldsymbol{a}}$ является бесконечно малой при $t \to t_0$.

Для доказательства утверждений 2) – 4) введем обозначения $\overline{\boldsymbol{r}}_j(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_j = \overline{\boldsymbol{p}}_j(t)$, где $\overline{\boldsymbol{p}}_j = \overline{\boldsymbol{p}}_j(t)$, $j = 1, 2,$ — бесконечно малые векторные функции при $t \to t_0$.

2) Очевидно, что

$$\big[\,\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big] - \big[\,\overline{\boldsymbol{a}}_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_2\big] = \big[\,\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_1\big] + \big[\,\overline{\boldsymbol{r}}_2(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_2\big] = \\ = \overline{\boldsymbol{p}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{p}}_2(t) = \overline{\boldsymbol{p}}(t).$$

Сумма бесконечно малых векторных функций есть бесконечно малая при $t \to t_0$ векторная функция.

3) Из свойств скалярного произведения следует

$$\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big) - \big(\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2\big) = \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_2\big) = \\ = \big(\overline{\boldsymbol{p}}_1(t), \overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\big) = f(t).$$

Поскольку $|\,f(t)| = \bigl|\bigl(\overline{\boldsymbol{p}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\bigr)\bigr| \leqslant \bigl|\overline{\boldsymbol{p}}_1(t)\bigr| \cdot \bigl|\overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\bigr|$, то функция $f = f(t)$ является бесконечно малой при $t \to t_0$.

4) Воспользуемся свойствами векторного произведения:

$$\bigl[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\bigr] - \bigl[\overline{\boldsymbol{a}}_1,\, \overline{\boldsymbol{a}}_2\bigr] = \bigl[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_1,\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t) - \overline{\boldsymbol{a}}_2\bigr] = \\ = \bigl[\overline{\boldsymbol{p}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\bigr] = \overline{\boldsymbol{p}}(t).$$

Из неравенства $\bigl|\overline{\boldsymbol{p}}(t)\bigr| = \bigl|\bigl[\overline{\boldsymbol{p}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\bigr]\bigr| \leqslant \bigl|\overline{\boldsymbol{p}}_1(t)\bigr| \cdot \bigl|\overline{\boldsymbol{p}}_2(t)\bigr|$ следует, что векторная функция $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(t)$ бесконечно малая при $t \to t_0$. △

Введем понятие *непрерывности в точке.*

Определение 5.4. Векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0\bigr)$.

Непрерывность векторной функции в точке следующим образом связана с непрерывностью ее координатных функций (5.1).

Предложение 5.5. *Векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ непрерывна в точке t_0 в том и только в том случае, когда функции* (5.1) *непрерывны в точке t_0.*

Это простое следствие предложения 5.2.

Для векторной функций условие непрерывности в точке можно сформулировать, используя понятие *приращения векторной функции в точке.*

Определение 5.5. *Приращением в точке t_0 векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, соответствующим приращению аргумента Δt*, называется векторная функция:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0,\, \Delta t\bigr) = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0 + \Delta t\bigr) - \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0\bigr).$$

Предложение 5.6. *Векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ непрерывна в точке t_0 в том и только в том случае, когда векторная функция $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0,\, \Delta t\bigr)$ является бесконечно малой при $\Delta t \to 0$.*

Предложение 5.7. *Верны следующие утверждения.*

1) *Если непрерывны в точке t_0 векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ и функция $f = f(t)$, то векторная функция*

$$\overline{\boldsymbol{\rho}} = \overline{\boldsymbol{\rho}}(t) = f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t)$$

непрерывна в точке t_0.

Если векторные функции $\overline{\boldsymbol{r}}_1 = \overline{\boldsymbol{r}}_1(t)$ *и* $\overline{\boldsymbol{r}}_2 = \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)$ *непрерывны в точке* t_0, *то*

2) *векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)$ *непрерывна в точке* t_0;
3) *функция* $f = f(t) = \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)$ *непрерывна в точке* t_0;
4) *векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big]$ *непрерывна в точке* t_0.

Утверждение следует из предложения 5.4 и определения 5.4.

2.2. Производная векторной функции. Введем понятие *производной в точке* для векторной функции.

Определение 5.6. Если существует при $\Delta t \to 0$ предел частного $\dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0, \Delta t\big)}{\Delta t}$, то этот предел называют *производной* в точке t_0 векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$.

Обозначение. $\overline{\boldsymbol{r}}\,'\big(t_0\big) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0, \Delta t\big)}{\Delta t}$.

Замечание 5.5. Существование производной $\overline{\boldsymbol{r}}\,'\big(t_0\big)$ эквивалентно существованию производных в точке t_0 функций (5.1).

Можно определить односторонние производные векторной функции в точке, например, как односторонние производные ее координатных функций (5.1).

Определение 5.7. Векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если ее приращение в точке t_0, соответствующее приращению аргумента Δt, имеет следующий вид:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0, \Delta t\big) = \Delta t \cdot \overline{\boldsymbol{q}} + \Delta t \cdot \overline{\boldsymbol{p}}\,(\Delta t), \tag{5.3}$$

здесь вектор $\overline{\boldsymbol{q}}$ не зависит от Δt, а векторная функция $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}\,(\Delta t)$ бесконечно малая при $\Delta t \to 0$.

Предложение 5.8. *Векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ *дифференцируема в точке* t_0 *тогда и только тогда, когда существует производная* $\overline{\boldsymbol{r}}\,'\big(t_0\big)$.

Доказательство следует из определения 5.6 и представления (5.3). При этом можно уточнить представление (5.3) следующим образом:

$$\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0, \Delta t\big) = \Delta t \cdot \overline{\boldsymbol{r}}\,'\big(t_0\big) + \Delta t \cdot \overline{\boldsymbol{p}}\,(\Delta t). \tag{5.4}$$

Предложение 5.9. *Если векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она непрерывна в этой точке.*

Это простое следствие предложения 5.6 и представления (5.4).

Опишем правила дифференцирования операций над векторными функциями.

Предложение 5.10. *Если функция $f = f(t)$ и векторные функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, $\overline{\boldsymbol{r}}_1 = \overline{\boldsymbol{r}}_1(t)$, $\overline{\boldsymbol{r}}_2 = \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)$ дифференцируемы в точке t, то справедливы следующие правила дифференцирования:*

1) $\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)' = \overline{\boldsymbol{r}}_1'(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t)$;
2) $\big(f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t)\big)' = f'(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}\,'(t)$;
3) $\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)' = \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1'(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big) + \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t)\big)$;
4) $\big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big]' = \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1'(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big] + \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t),\, \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t)\big]$.

Доказательство. Для доказательства утверждений будем использовать определение *производной* и свойства пределов.

1) Производная суммы векторных функций. По определению $\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)'$ получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t+\Delta t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t)\big) - \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{\boldsymbol{r}}_1\big(t,\, \Delta t\big)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{\boldsymbol{r}}_2\big(t,\, \Delta t\big)}{\Delta t} = \overline{\boldsymbol{r}}_1'(t) + \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t).$$

2) Производная произведения функции на векторную функцию:

$$\big(f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t)\big)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \overline{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) +$$
$$+ f(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\big(\overline{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}(t)\big)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) +$$
$$+ f(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t} = f'(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}_1(t) + f(t) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}\,'(t).$$

3) Производная скалярного произведения $\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)'$:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t+\Delta t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t)\big) - \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{r}}_1(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}_1(t)}{\Delta t}, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t)\right) +$$
$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \frac{\overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)}{\Delta t}\right) =$$
$$= \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1'(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big) + \big(\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t)\big).$$

4) Производная векторного произведения

$$\big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big]' =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t+\Delta t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t)\big] - \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big]}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\overline{\boldsymbol{r}}_1(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}_1(t)}{\Delta t}, \overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t)\right] +$$
$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\left[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \frac{\overline{\boldsymbol{r}}_2(t+\Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)}{\Delta t}\right] =$$
$$= \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1'(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2(t)\big] + \big[\overline{\boldsymbol{r}}_1(t), \overline{\boldsymbol{r}}_2'(t)\big]. \qquad \triangle$$

Определение 5.8. *Дифференциалом* векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0 называется главная линейная относительно приращения аргумента Δt часть приращения векторной функции $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0, \Delta t\big)$ в точке t_0, соответствующая приращению аргумента Δt.

Учитывая, что дифференциал независимой переменной dt есть любое число, в качестве которого берем приращение переменной Δt, получаем следующее выражение для дифференциала векторной функции:

$$d\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big) = \overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\, dt. \tag{5.5}$$

Замечание 5.6. Из выражения (5.5) для дифференциала векторной функции в точке получаем следующее выражение для ее производной: $\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big) = \dfrac{d\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big)}{dt}$.

Определим производные высших порядков для векторных функций.

Предположим, что векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки t_0. Таким образом, в этой окрестности точки t_0 определена векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}}' = \overline{\boldsymbol{r}}'(t)$.

Определение 5.9. *Производной второго порядка* в точке t_0 векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ называется предел частного

$$\frac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0,\, \Delta t\big)}{\Delta t} = \frac{\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0 + \Delta t\big) - \overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)}{\Delta t}$$

при $\Delta t \to 0$.

Обозначение. $\overline{\boldsymbol{r}}''\big(t_0\big) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0,\, \Delta t\big)}{\Delta t}$. Для производной второго порядка будем использовать также обозначения:

$$\overline{\boldsymbol{r}}''\big(t_0\big) = \overline{\boldsymbol{r}}^{(2)}\big(t_0\big) = \frac{d^2\, \overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big)}{dt^2}.$$

Аналогично можно определять производные третьего, четвертого и т. д. порядков. Предположим, что в некоторой δ-окрестности точки t_0 определена производная векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ порядка $n-1$, тогда

$$\overline{\boldsymbol{r}}^{(n)}\big(t_0\big) = \frac{d^n\, \overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big)}{dt^n} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}^{(n-1)}\big(t_0,\, \Delta t\big)}{\Delta t}.$$

2.3. Некоторые свойства дифференцируемых векторных функций. Докажем утверждение о дифференцируемости векторных функций при замене переменных.

Предложение 5.11. *Если функция $t = t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0 и $t_0 = t\big(\tau_0\big)$, а векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то суперпозиция — векторная функция $\overline{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{q}}(\tau) = \overline{\boldsymbol{r}}\big(t(\tau)\big)$ — дифференцируема в точке τ_0 и верно: $\overline{\boldsymbol{q}}'\big(\tau_0\big) = t'\big(\tau_0\big) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)$.*

Доказательство. Функция $t = t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0, следовательно, она непрерывна в этой точке (теорема 4.2) и $\Delta t\big(\tau_0,\, \Delta\tau\big) \to 0$ при $\Delta\tau \to 0$ (теорема 3.12).

Из выражения 5.4 находим

$$\frac{\Delta\overline{\boldsymbol{q}}(\tau_0,\,\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \frac{\Delta t(\tau_0,\,\Delta\tau)}{\Delta\tau}\cdot\overline{\boldsymbol{r}}\,'(t_0) + \frac{\Delta t(\tau_0,\,\Delta\tau)}{\Delta\tau}\cdot\overline{\boldsymbol{p}}\,(\Delta t),$$

откуда и получаем при $\Delta\tau\to 0$ требуемое утверждение и равенство. $\triangle$

Не все утверждения, справедливые для дифференцируемых функций, переносятся на дифференцируемые векторные функции. Например, не справедливы теоремы Ролля и Лагранжа.

Пример 5.7. Пусть $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \big(\cos t,\,\sin t\big)$. Эта векторная функция непрерывна на $[0,\,2\pi]$ и дифференцируема на интервале $(0,\,2\pi)$. Причем $\overline{\boldsymbol{r}}'(t) = (-\sin t,\,\cos t)$ и $\big|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\big|\equiv 1$.

Выполняется $\overline{\boldsymbol{r}}(0) = \overline{\boldsymbol{r}}(2\pi) = (1,\,0)$, но на интервале $(0,\,2\pi)$ не лежит нуль производной этой векторной функции (теорема Ролля для векторных функций неверна).

Для векторных функций неверна формула конечных приращений: не существует точки $t_0\in(0,\,2\pi)$ такой, что выполняется равенство $\overline{\boldsymbol{r}}(2\pi)-\overline{\boldsymbol{r}}(0) = 2\pi\cdot\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)$. Поскольку $\overline{\boldsymbol{r}}(2\pi)-\overline{\boldsymbol{r}}(0) = \overline{\mathbf{0}}$, но $\big|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\big|\equiv 1$.

Для дифференцируемых векторных функций справедлива следующая оценка.

Лемма 5.1. *Если векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha,\,\beta]$ *и дифференцируема на интервале* $(\alpha,\,\beta)$*, то найдется такая точка* $t_0\in(\alpha,\,\beta)$*, что выполнено следующее неравенство*:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)| \leqslant \big|\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\big|\cdot(\beta-\alpha). \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $f = f(t) = \big(\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha),\,\overline{\boldsymbol{r}}(t)\big)$. Функция $f = f(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\,\beta]$ и дифференцируема на интервале $(\alpha,\,\beta)$, поэтому по теореме Лагранжа (см. теорему 4.12) найдется такая точка $t_0\in(\alpha,\,\beta)$, что выполнено равенство $f(\beta)-f(\alpha) = f'\big(t_0\big)(\beta-\alpha)$. Итак, имеют место следующие выражения:

$$f(\beta)-f(\alpha) = \big(\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha),\,\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)\big) = \big|\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)\big|^2$$

и $f'\big(t_0\big) = \big(\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha),\,\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\big)$ (утверждение 3) предложения 5.10). Таким образом, выполнено равенство

$$\left|\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)\right|^2=\left(\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha),\,\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\right)\cdot(\beta-\alpha). \tag{5.7}$$

Если $\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)=\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)$, то неравенство (5.6) справедливо.

Если $\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)\neq\overline{\mathbf{0}}$, то воспользуемся неравенством $\left|\left(\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha),\,\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\right)\right|\leqslant\left|\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{r}}(\beta)-\overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)\right|$ и из равенства (5.7) получим неравенство (5.6). $\triangle$

Приведем еще один важный результат для дифференцируемых векторных функций.

Предложение 5.12. *Если дифференцируемая на отрезке* $[\alpha,\,\beta]$ *векторная функция* $\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ *такова, что на этом отрезке выполняется* $\left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right|\equiv C=\mathrm{const}$, *то верно* $\left(\overline{\boldsymbol{r}}(t),\,\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right)=0$ *для всех* $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Доказательство. Поскольку для векторной функции имеет место равенство $\left(\overline{\boldsymbol{r}}(t),\,\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right)=\left|\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right|^2=C^2$ для любого параметра $t\in[\alpha,\,\beta]$, то, продифференцировав это выражение по t, получаем: $\left(\overline{\boldsymbol{r}}(t),\,\overline{\boldsymbol{r}}(t)\right)'=2\left(\overline{\boldsymbol{r}}(t),\,\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right)=0$ для всех t из отрезка $[\alpha,\,\beta]$. Здесь использовано утверждение 3) предложения 5.10. $\triangle$

Замечание 5.7. Смысл предложения 5.12 заключается в том, что если модуль векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, равен тождественно постоянной, то при каждом фиксированном t векторы $\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ и $\overline{\boldsymbol{r}}'(t)$ ортогональны.

§ 3. Спрямляемые кривые

В дальнейшем для задания параметризации кривой Γ будем использовать векторные функции:

$$\Gamma=\left\{\,\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\,\right\}, \tag{5.8}$$

при этом для векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ ее координатные функции имеют вид (5.1).

3.1. Определение. Пусть задана кривая Γ (5.8). Введем разбиение отрезка $[\alpha,\,\beta]$ произвольными точками t_j, $j=0,\,1,\,\ldots,\,n$: $T=\left\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\right\}$. Тогда $\overline{OM_j}=\overline{\boldsymbol{r}}\big(t_j\big)$, и через точки M_j кривой Γ проведем ломаную $L_T=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\left[M_{j-1},\,M_j\right]$. Эту

ломаную будем называть *вписанной в кривую* Γ, и ее длина равна $\sigma_T = \sum\limits_{j=1}^{n} \left| \overline{\boldsymbol{r}}\left(t_j\right) - \overline{\boldsymbol{r}}\left(t_{j-1}\right)\right|$.

Определение 5.10. Если существует точная верхняя грань множества длин ломаных $\left\{\sigma_T\right\}$, вписанных в кривую Γ, то это число $\sigma = \sup\left\{\sigma_T\right\}$ называется *длиной кривой*, сама кривая Γ называется *спрямляемой кривой*.

3.2. Достаточное условие спрямляемости кривой. Приведем достаточное условие спрямляемости кривой Γ (5.8).

Теорема 5.2. *Если кривая* Γ (5.8) *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема, и для ее длины* σ *справедлива оценка*

$$\sigma \leqslant \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right| (\beta - \alpha). \tag{5.9}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \left\{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\right\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Тогда для каждого интервала $\Delta_j = \left(t_{j-1}, t_j\right)$, $j = 1, \ldots, n$, разбиения T, в силу леммы (5.1), найдется такая точка $\tau_j \in \Delta_j$, что справедливо неравенство

$$\left|\overline{\boldsymbol{r}}\left(t_j\right) - \overline{\boldsymbol{r}}\left(t_{j-1}\right)\right| \leqslant \left|\overline{\boldsymbol{r}}'\left(\tau_j\right)\right| \cdot \left(t_j - t_{j-1}\right).$$

Поскольку векторная функция $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то на этом отрезке непрерывна функция $f = f(t) = \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right|$ и имеет место неравенство

$$\left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right| \leqslant C = \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right|.$$

Длина σ_T ломаной L_T, вписанной в кривую Γ, удовлетворяет оценке

$$\sigma_T = \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{\boldsymbol{r}}\left(t_j\right) - \overline{\boldsymbol{r}}\left(t_{j-1}\right)\right| \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \left(t_j - t_{j-1}\right) = C \cdot (\beta - \alpha).$$

Откуда, в силу произвольности разбиения T, множество длин ломаных, вписанных в кривую Γ, ограничено сверху. Из теоремы 1.4 следует, что существует точная верхняя грань этого множества, т. е. кривая Γ спрямляема и для ее длины справедлива оценка (5.9). $\triangle$

3.3. Натуральный параметр кривой. Пусть кривая Γ (5.8) непрерывно дифференцируема, а следовательно, Γ является спрямляемой кривой (см. теорему 5.2). Введем функцию $s = s(t)$, представляющую собой длину дуги кривой Γ, когда параметр кривой меняется на отрезке $[\alpha,\, t]$. Предположим, что $\overline{OM_\alpha} = \overline{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ и $\overline{OM} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, тогда $s(t)$ — это длина дуги $M_\alpha M$. Функцию $s = s(t)$ будем называть *переменной длиной дуги* непрерывно дифференцируемой кривой Γ (5.8).

Теорема 5.3. *Переменная длина дуги* $s = s(t)$ *непрерывно дифференцируемой кривой* Γ (5.8) *представляет собой дифференцируемую на отрезке* $[\alpha,\, \beta]$ *функцию, и ее производная имеет следующий вид*: $s'(t) = \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right|$.

Доказательство. Обозначим $\overline{OM_t} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$, $\overline{OM} = \overline{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t)$, Δ — отрезок с концами t и $t+\Delta t$ и

$$\Delta s(t, \Delta t) = s(t+\Delta t)-s(t).$$

Заметим, что $\Delta s(t,\, \Delta t) > 0$, если $\Delta t > 0$, и $\Delta s(t,\, \Delta t) < 0$, если $\Delta t < 0$, так как функция $s = s(t)$ — возрастающая функция на отрезке $[\alpha,\, \beta]$. Если $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t,\, \Delta t) = \overline{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t) - \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \overline{M_t M}$, то из оценки (5.9) следует $\left|\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t,\, \Delta t)\right| \leqslant |\Delta s(t,\, \Delta t)| \leqslant \max\limits_{t\in\Delta}\left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right| \cdot |\Delta t|$.

Поэтому справедливо $\left|\dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t,\, \Delta t)}{\Delta t}\right| \leqslant \dfrac{\Delta s(t,\, \Delta t)}{\Delta t} \leqslant \max\limits_{t\in\Delta}\left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right|$.

Векторная функция $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{r}}'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\, \beta]$, следовательно, найдется точка τ на отрезке Δ, что $\max\limits_{t\in\Delta}\left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right| = \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(\tau)\right|$. Итак, выполнены следующие неравенства:

$$\left|\frac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t,\, \Delta t)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s(t,\, \Delta t)}{\Delta t} \leqslant \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(\tau)\right|.$$

При $\Delta t \to 0$ верно $\tau \to t$ и $s'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s(t,\, \Delta t)}{\Delta t} = \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right|$. △

Замечание 5.8. Если кривая Γ (5.8) гладкая, то выполняется $s'(t) = \left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\right| > 0$ и функция $s = s(t)$ возрастающая на отрезке $[\alpha,\, \beta]$.

По теореме 4.4 об обратной функции на отрезке $[0,\, \sigma]$ определена непрерывно дифференцируемая и возрастающая функция

$t = t(s)$, причем $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)} > 0$. Здесь σ — длина кривой Γ. Поэтому $t = t(s)$ — допустимая замена параметра для кривой Γ.

Кривая Γ может быть задана следующим образом:

$$\Gamma = \left\{ \overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \sigma \right\}, \tag{5.10}$$

здесь $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(s) = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t(s)\bigr)$. При этом параметр s называется *натуральным параметром*.

Пример 5.8. Найдем натуральную параметризацию цепной линии $\Gamma = \{\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, если $\overline{\boldsymbol{r}} = \{t,\, \operatorname{ch} t\}$.

Для векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ выполняется

$$s'(t) = \bigl|\overline{\boldsymbol{r}}'(t)\bigr| = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t.$$

Следовательно, $s(t) = \operatorname{sh} t + C$. Поскольку $s(0) = 0$, то $C = 0$. Окончательно находим: $s = \operatorname{sh} t$.

Из последнего выражения найдем t как функцию параметра s: $t = \ln\bigl(s + \sqrt{s^2+1}\bigr)$. Тогда

$$\overline{\boldsymbol{p}}(s) = \left\{ \ln\bigl(s + \sqrt{s^2+1}\bigr),\ \frac{s^2 + s\sqrt{s^2+1} + 1}{s + \sqrt{s^2+1}},\ 0 \leqslant s \leqslant \sigma \right\}.$$

§ 4. Сопровождающий трехгранник Френе кривой

Потребуем, чтобы кривая Γ (5.8) была трижды дифференцируемой кривой без особых точек. Пусть точка $M_0 = M\bigl(t_0\bigr)$, $t_0 \in [\alpha,\, \beta]$, принадлежит кривой Γ и $\overline{OM_0} = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0\bigr)$. Трехгранник Френе будем строить в точке M_0.

4.1. Касательная и нормальная плоскость. Предположим, что $M = M(t_0 + \Delta t)$ и $\overline{OM} = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0 + \Delta t\bigr)$. Тогда приращение $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0,\, \Delta t\bigr) = \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0 + \Delta t\bigr) - \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0\bigr)$ векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0, соответствующее приращению аргумента Δt, в силу равенства (5.4) и условия $\overline{\boldsymbol{r}}'\bigl(t_0\bigr) \neq \overline{\boldsymbol{0}}$, является ненулевым вектором при каждом фиксированном значении Δt для всех $0 < |\Delta t| < \delta$. Здесь δ — некоторое число, и при всех $0 < |\Delta t| < \delta$ выполняется $t_0 + \Delta t \in [\alpha,\, \beta]$. Таким образом, $\overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0 + \Delta t\bigr) \neq \overline{\boldsymbol{r}}\bigl(t_0\bigr)$ при $0 < |\Delta t| < \delta$.

Проведем через точки M_0 и M прямую L. Прямая является для кривой Γ секущей, причем ненулевой вектор $\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t_0,\,\Delta t)$ параллелен секущей. Прямой L параллелен также и вектор $\overline{\boldsymbol{a}}(t_0,\,\Delta t) = \dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{r}}(t_0,\,\Delta t)}{\Delta t}$. Уравнение секущей L имеет вид

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t_0) + \lambda\cdot\overline{\boldsymbol{a}}(t_0,\,\Delta t), \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Поскольку существует $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\overline{\Delta\boldsymbol{r}}(t_0,\,\Delta t)}{\Delta t} = \overline{\boldsymbol{r}}'(t_0) \neq \overline{\boldsymbol{0}}$, то при $\Delta t\to 0$ секущая, занимая свое предельное положение, становится касательной. *Уравнение касательной* к кривой Γ в точке M_0 получаем из уравнения секущей:

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t_0) + \lambda\cdot\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0), \qquad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Плоскость Π_1, проходящая через точку M_0 кривой Γ, перпендикулярная касательной, проведенной к этой кривой в точке M_0, называется *нормальной плоскостью* кривой Γ в точке M_0.

Пусть M — произвольная точка построенной нормальной плоскости Π_1 к кривой Γ в точке M_0 и $\overline{OM} = \overline{\boldsymbol{r}}$, тогда вектор плоскости $\overline{M_0M} = \overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}(t_0)$ перпендикулярен касательной, т. е. вектору $\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)$. Поэтому *уравнение нормальной плоскости* имеет следующий вид:

$$\big(\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}(t_0),\,\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)\big) = 0. \tag{5.12}$$

Пример 5.9. Найдем все нормальные плоскости кривой $\Gamma = \big\{\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\big\}$, где

$$\overline{\boldsymbol{r}}(t) = \big\{a\sin^2 t,\, a\sin t\cos t,\, a\cos t\big\}.$$

Очевидно, что $\overline{\boldsymbol{r}}'(t) = \big\{a\sin 2t,\, a\cos 2t,\, -a\sin t\big\}$, и из (5.12) находим уравнение нормальной плоскости в любой точке кривой $0\leqslant t_0\leqslant 2\pi$: $x\sin 2t_0 + y\cos 2t_0 - z\sin t_0 = 0$.

Заметим, что все нормальные плоскости кривой Γ проходят через начало координат.

Пример 5.10. Для конической винтовой линии, которая задается векторной функцией $\overline{\boldsymbol{r}} = \big\{t\cos t,\, -t\sin t,\, a\,t\big\}$ (см. изображение кривой на рис. 5.5 для $0\leqslant t\leqslant 2\pi$), найдем нормальную плоскость в начале координат.

Поскольку $\overline{\boldsymbol{r}}(0) = (0,\,0,\,0)$, то $\overline{\boldsymbol{r}}'(0) = (1,\,0,\,a) = \overline{\boldsymbol{a}}$ и из выражения (5.12) получаем уравнение нормальной плоскости Π_1: $x + az = 0$. Вектор нормали $\overline{\boldsymbol{a}}$ полученной плоскости Π_1 изображен на рис. 5.5.

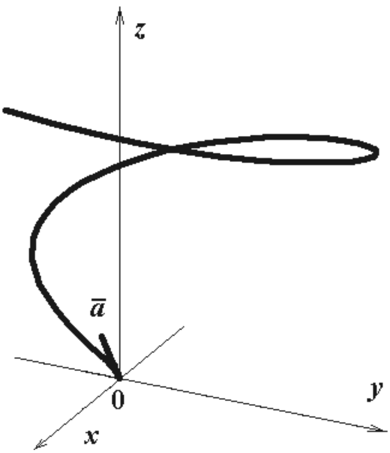

Рис. 5.5

Любая прямая, лежащая в нормальной плоскости Π_1, проходящая через точку M_0, является *нормалью* к кривой Γ в этой точке.

Если $s = s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ, причем $s_0 = s\big(t_0\big)$, а $t = t(s)$ — функция, обратная к переменной длине дуги (см. замечание 5.8), то выясним, как связаны между собой векторы $\overline{\boldsymbol{p}}'(s_0)$ и $\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)$ в точке M_0 данной кривой. Здесь $\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}(s)$ — натуральное уравнение кривой Γ и $\overline{\boldsymbol{p}}(s) = \overline{\boldsymbol{r}}\big(t(s)\big)$.

Дифференцируя векторную функцию $\overline{\boldsymbol{p}}(s) = \overline{\boldsymbol{r}}\big(t(s)\big)$, используя предложение 5.11, получаем вектор

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\overline{\boldsymbol{p}}}{ds} = t'\big(s_0\big) \cdot \overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big) = \frac{\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)}{s'\big(t_0\big)}. \qquad (5.13)$$

Замечание 5.9. Используя результат теоремы 5.3, получаем $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)}{\big|\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)\big|}$. Таким образом, $|\overline{\boldsymbol{\tau}}| \equiv 1$ на $[\alpha,\,\beta]$, и векторы $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ и $\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)$ коллинеарны.

4.2. Главная нормаль и спрямляющая плоскость. Из всех нормалей к кривой Γ в точке M_0 выделим одну, которую назовем главной нормалью.

Для того чтобы определить эту прямую, заметим, что вектор $\overline{\boldsymbol{\tau}}$, определенный в (5.13), ортогонален вектору $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$ (см. предложение 5.12). Поэтому прямая, проходящая через точку M_0 и параллельная вектору $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \dfrac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2} \neq \overline{\mathbf{0}}$, является нормалью к кривой Γ в точке M_0 и именно ее назовем *главной нормалью* кривой Γ в M_0.

Если обозначить $k(t_0) = \left|\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right|$, то $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = k\overline{\boldsymbol{\nu}}$. Единичный вектор $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ параллелен главной нормали. Кроме того, используя равенство (5.13), получаем

$$k(t_0)\,\overline{\boldsymbol{\nu}} = \frac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \frac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2} = t'(s_0)\cdot\left[\frac{\overline{\boldsymbol{r}}'(t)}{s'(t)}\right]'(t_0) =$$

$$= \frac{1}{s'(t_0)}\cdot\frac{s'(t_0)\cdot\overline{\boldsymbol{r}}''(t_0) - s''(t_0)\cdot\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)}{\left[s'(t_0)\right]^2}. \quad (5.14)$$

Плоскость Π_2, проходящая через точку M_0 кривой Γ, перпендикулярная главной нормали, называется *спрямляющей плоскостью.*

Определение 5.11. Число $k(t_0) = \left|\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right|$ называется *кривизной* кривой Γ в точке $M_0 = M(t_0)$.

В дальнейшем нас будут интересовать те точки M_0 кривой Γ, в которых кривизна не равна нулю.

4.3. Бинормаль и соприкасающаяся плоскость. Предположим, что вектор $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \neq \overline{\mathbf{0}}$. Обозначим $\overline{\boldsymbol{\beta}} = [\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}]$. Вектор $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ ортогонален вектору $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ касательной, поэтому он определяет нормаль к кривой. Однако у нас уже есть главная нормаль, а теперь получен вектор второй нормали — бинормали.

Прямая, проходящая через точку M_0 кривой Γ параллельно вектору $\overline{\boldsymbol{\beta}}$, называется *бинормалью.*

Плоскость Π_3, проходящая через точку M_0 кривой Γ перпендикулярно бинормали, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Из равенств (5.13) и (5.14) находим

$$\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big) = s'\big(t_0\big)\,\overline{\boldsymbol{\tau}}, \quad \overline{\boldsymbol{r}}''\big(t_0\big) = s''\big(t_0\big)\,\overline{\boldsymbol{\tau}} + \big[s'(t_0)\big]^2 k\,\overline{\boldsymbol{\nu}}.$$

Поскольку $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \neq \overline{\boldsymbol{0}}$, то векторы $\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)$ и $\overline{\boldsymbol{r}}''\big(t_0\big)$ не являются коллинеарными и они параллельны соприкасающейся плоскости Π_3, проходящей через точку M_0.

Предположим, что M — произвольная точка соприкасающейся плоскости Π_3, проходящей через точку M_0, и $\overline{OM} = \overline{\boldsymbol{r}}$, тогда вектор $\overline{M_0M} = \overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big)$ есть вектор плоскости Π_3. Следовательно, векторы $\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}\big(t_0\big)$, $\overline{\boldsymbol{r}}'\big(t_0\big)$ и $\overline{\boldsymbol{r}}''\big(t_0\big)$ параллельны плоскости Π_3. Таким образом, *уравнение соприкасающейся плоскости* в точке M_0 имеет вид

$$\big(\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)\big) = 0. \tag{5.15}$$

Пример 5.11. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости конической винтовой линии $\overline{\boldsymbol{r}} = \big\{t\cos t,\ -t\sin t,\ a\,t\big\}$ в начале координат, т. е. при $t = 0$.

Определим векторы $\overline{\boldsymbol{r}}'$ и $\overline{\boldsymbol{r}}''$ при $t = 0$: $\overline{\boldsymbol{r}}'(0) = \big(1,\ 0,\ a\big)$, $\overline{\boldsymbol{r}}''(0) = \big(0,\ -2,\ 0\big)$. Тогда из (5.15) находим

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad ax - z = 0.$$

На рис. 5.6 изображен вектор нормали $\overline{\boldsymbol{b}} = (a,\ 0,\ -1)$ соприкасающейся плоскости Π_3, проходящей через начало координат.

Замечание 5.10. Из определения вектора $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ и свойств векторного произведения следует

$$\overline{\boldsymbol{\beta}} = \big[\overline{\boldsymbol{\tau}},\, \overline{\boldsymbol{\nu}}\big], \qquad \overline{\boldsymbol{\tau}} = \big[\overline{\boldsymbol{\nu}},\, \overline{\boldsymbol{\beta}}\big], \qquad \overline{\boldsymbol{\nu}} = \big[\overline{\boldsymbol{\beta}},\, \overline{\boldsymbol{\tau}}\big]. \tag{5.16}$$

Таким образом, для векторов $\overline{\boldsymbol{\tau}}$, $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ и $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ получаем следующие выражения через производные векторной функции $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t)$ в точке t_0, задающей параметризацию функции Γ (5.8):

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)}{\left|\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)\right|}, \qquad \overline{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\left[\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)\right]}{\left|\left[\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)\right]\right|}, \\ &\overline{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\left[[\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)], \overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)\right]}{\left|\left[[\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)], \overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)\right]\right|}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

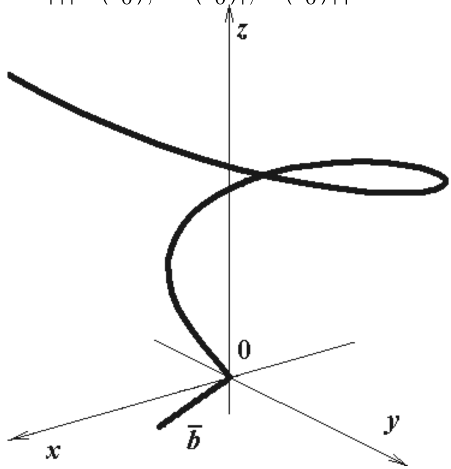

Рис. 5.6

С помощью полученного выражения (5.17) для вектора $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ выпишем *уравнение спрямляющей плоскости* Π_2 в точке M_0:

$$\left(\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}(t_0),\, \left[[\overline{\boldsymbol{r}}'(t_0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(t_0)],\, \overline{\boldsymbol{r}}'(t_0)]\right]\right) = 0. \tag{5.18}$$

Здесь вектор $\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r}}(t_0)$ — переменный вектор спрямляющей плоскости Π_2.

Пример 5.12. Определим для конической винтовой линии $\overline{\boldsymbol{r}} = \left\{t\cos t,\, -t\sin t,\, a\,t\right\}$ уравнение спрямляющей плоскости в начале координат.

В примере 5.11 определены векторы

$$\overline{\boldsymbol{r}}'(0) = (1,\, 0,\, a), \qquad \overline{\boldsymbol{r}}''(0) = (0,\, -2,\, 0),$$

тогда

$$\left[\overline{\boldsymbol{r}}'(0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(0)\right] = (2a,\, 0,\, -2),\ \left[\left[\overline{\boldsymbol{r}}'(0),\, \overline{\boldsymbol{r}}''(0)\right],\, \overline{\boldsymbol{r}}'(0)\right] = (0,\, 2 - 2a^2,\, 0).$$

Из выражения (5.18) находим уравнение спрямляющей плоскости Π_2: $y = 0$.

Замечание 5.11. Из выражений (5.16) и определения плоскостей Π_1, Π_2 и Π_3 в точке M_0 следует:

- нормальная плоскость Π_1 проходит через главную нормаль и бинормаль к кривой Г в точке M_0,
- спрямляющая плоскость Π_2 проходит через касательную и бинормаль к кривой Г в точке M_0,
- соприкасающаяся плоскость Π_3 проходит через касательную и главную нормаль к кривой Г в точке M_0.

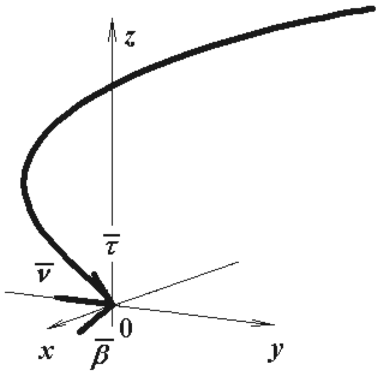

Рис. 5.7

4.4. Формулы Френе. Тетраэдр с вершиной в точке M_0 кривой Г с ребрами единичной длины, параллельными векторам $\overline{\boldsymbol{\tau}}$, $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ и $\overline{\boldsymbol{\beta}}$, называется *сопровождающим трехгранником Френе*.

При этом нормальная, спрямляющая и соприкасающаяся плоскости в точке M_0, пересекаясь, образуют грани сопровождающего трехгранника.

Когда точка M_0 перемещается, то трехгранник перемещается вместе с ней, ее «сопровождает», откуда следует и название трехгранника.

Пример 5.13. Определим сопровождающий трехгранник Френе для конической винтовой линии в начале координат. При этом используем выражения (5.17), (5.16) и полученные ранее результаты в примерах 5.11 и 5.12. Итак, находим

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$
$$\overline{\boldsymbol{\beta}} = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$
$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = \left[\overline{\boldsymbol{\beta}},\ \overline{\boldsymbol{\tau}}\right] = (0,\ -1,\ 0).$$

Ребра сопровождающего трехгранника Френе в начале координат для конической винтовой линии изображены на рис. 5.7.

Теорема 5.4. (Формулы Френе.) *Если для трижды дифференцируемой кривой* Γ (5.8) *точка* M_0 *не является особой и в этой точке кривизна не равна нулю, то в* M_0 *справедливы следующие формулы:*

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = k\,\overline{\boldsymbol{\nu}}, \tag{5.19}$$
$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds} = -\,k\,\overline{\boldsymbol{\tau}} + \varkappa\,\overline{\boldsymbol{\beta}}, \tag{5.20}$$
$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds} = -\,\varkappa\,\overline{\boldsymbol{\nu}}. \tag{5.21}$$

Доказательство. Формула (5.19) имеет место, она была введена для определения главной нормали.

Для доказательства (5.21) воспользуемся выражением (5.16) для вектора $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ и утверждением 4) предложения 5.10:

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds} = \left[\frac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds},\ \overline{\boldsymbol{\nu}}\right] + \left[\overline{\boldsymbol{\tau}},\ \frac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds}\right] = \left[\overline{\boldsymbol{\tau}},\ \frac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds}\right].$$

Поскольку векторы $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds}$ и $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ ортогональны (см. предложение 5.12), то вектор $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds}$ параллелен вектору $\overline{\boldsymbol{\nu}}$. Этот факт мы и запишем в виде (5.21).

Наконец, докажем формулу (5.20), основываясь на выражениях (5.19) и (5.21). Воспользуемся равенствами из (5.16):

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds}=\left[\frac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds},\,\overline{\boldsymbol{\tau}}\right]+\left[\overline{\boldsymbol{\beta}},\,\frac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right]=-\varkappa\left[\overline{\boldsymbol{\nu}},\,\overline{\boldsymbol{\tau}}\right]+k\left[\overline{\boldsymbol{\beta}},\,\overline{\boldsymbol{\nu}}\right]=-k\,\overline{\boldsymbol{\tau}}+\varkappa\,\overline{\boldsymbol{\beta}}.$$

Доказана формула (5.21). $\triangle$

Определение 5.12. Число $\varkappa$ в формулах Френе (5.20) и (5.21) называется *кручением* кривой Γ в точке M_0. Причем выполняется равенство $|\varkappa|=\left|\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds}\right|$.

§ 5. Кривизна и кручение кривой

Рассматриваем трижды дифференцируемую кривую Γ (5.8) или (5.10) без особых точек.

5.1. Геометрический смысл кривизны. В точках $M_0=M(s_0)$ и $M=M(s_0+\Delta s)$, $\Delta s>0$, кривой Γ (5.10) рассмотрим касательные векторы $\overline{\boldsymbol{\tau}}_0$ и $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ соответственно. Обозначим $\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}=\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}(s_0,\,\Delta s)=\overline{\boldsymbol{\tau}}-\overline{\boldsymbol{\tau}}_0$ и $\Delta\varphi$ — угол между отмеченными касательными векторами.

Степень искривленности кривой Γ на дуге M_0M можно определить с помощью величины угла $\Delta\varphi$. Этот угол назовем полной кривизной дуги M_0M кривой Γ. Тогда отношение $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ есть средняя кривизна, а предел этого отношения при $\Delta s\to 0$ называется *кривизной* кривой Γ в точке M_0.

Докажем, что это определение совпадает с ранее приведенным (см. определение 5.11). Справедливы следующие равенства: $\left|\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}\right|=2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ и $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{\left|\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}\right|}{\Delta\varphi}=1$. Тогда

$$k(s_0)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\left|\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}\right|}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\overline{\boldsymbol{\tau}}\right|}{\Delta s}=\left|\frac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right|.$$

5.2. Формулы для вычисления кривизны. Кривизна k кривой Γ в точке $M_0=M(t_0)$ есть модуль вектора $\dfrac{d\overline{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$, поэтому всегда $k\geqslant 0$.

Из свойств векторного произведения следует, что $k\big(t_0\big) = \left|\left[\dfrac{d\boldsymbol{\overline{\tau}}}{ds}, \boldsymbol{\overline{\tau}}\right]\right| = \left|\dfrac{d\boldsymbol{\overline{\tau}}}{ds}\right| \cdot |\boldsymbol{\overline{\tau}}|$, векторы $\boldsymbol{\overline{\tau}}$ и $\dfrac{d\boldsymbol{\overline{\tau}}}{ds}$ ортогональны, тогда, используя формулы (5.13), (5.14) и теорему 5.3, получаем

$$k\big(t_0\big) = \frac{\big|[\boldsymbol{\overline{r}}'(t_0), \boldsymbol{\overline{r}}''(t_0)]\big|}{\big|\boldsymbol{\overline{r}}'(t_0)\big|^3}. \tag{5.22}$$

Пример 5.14. Вычислим кривизну винтовой конической линии в начале координат (см. пример 5.11) и формулу (5.22).

Найдем $\big[\boldsymbol{\overline{r}}'(0), \boldsymbol{\overline{r}}''(0)\big] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\overline{i}} & \boldsymbol{\overline{j}} & \boldsymbol{\overline{k}} \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2a\boldsymbol{\overline{i}} - 2\boldsymbol{\overline{k}}$, длина полученного вектора равна $\big|\big[\boldsymbol{\overline{r}}'(0), \boldsymbol{\overline{r}}''(0)\big]\big| = 2\sqrt{1+a^2}$. Окончательно определяем: $k(0) = \dfrac{2}{1+a^2}$.

Приведем частные формулы (5.22) в случае плоских кривых, т. е. $z \equiv 0$.

Для плоской кривой Γ (5.8) векторная функция $\boldsymbol{\overline{r}} = \boldsymbol{\overline{r}}(t)$ имеет координаты $x = u(t)$, $y = v(t)$, кривизна в точке $M_0 = M(t_0)$ вычисляется по формуле

$$k\big(t_0\big) = \frac{\big|u'(t_0)\, v''(t_0) - u''(t_0)\, v'(t_0)\big|}{\Big[\big(u'(t_0)\big)^2 + \big(v'(t_0)\big)^2\Big]^{3/2}}. \tag{5.23}$$

Если плоская кривая Γ представляет собой график функции $y = f(x)$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, то кривизна кривой Γ в точке $M_0 = M(x_0)$ находится следующим образом:

$$k\big(x_0\big) = \frac{\big|f''(x_0)\big|}{\Big[1 + \big(f'(x_0)\big)^2\Big]^{3/2}}.$$

Замечание 5.12. Обратим внимание на тот факт, что если точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то в ней кривизна кривой равна нулю.

5.3. Радиус и центр кривизны кривой. Эволюта и эвольвента. Если кривизна кривой Γ (5.10) в точке $M_0 = M\big(s_0\big)$

имеет кривизну $k(s_0) \neq 0$, то в этой точке определим *радиус кривизны* $R(s_0) = \dfrac{1}{k(s_0)}$.

На главной нормали кривой Γ в точке M_0 в направлении вектора главной нормали $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ отложим отрезок M_0N_0 длины $R(s_0)$. Полученную точку N_0 назовем *центром кривизны* кривой Γ в точке M_0. Если обозначим $\overline{\boldsymbol{\rho}}(s_0) = \overline{ON}_0$, то выполняется

$$\overline{\boldsymbol{\rho}}(s_0) = \overline{\boldsymbol{r}}(s_0) + R(s_0)\overline{\boldsymbol{\nu}}.$$

Из (5.14) получаем другое выражение для определения центра кривизны:

$$\overline{\boldsymbol{\rho}}(s_0) = \overline{\boldsymbol{r}}(s_0) + \frac{1}{k^2(s_0)} \cdot \frac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2}(s_0). \tag{5.24}$$

Далее предположим, что для любого $0 \leqslant s_0 \leqslant \sigma$ кривой Γ (5.10) выполняется $k(s_0) \neq 0$, тогда множество центров кривизны (5.24) кривой Γ называется *эволютой* (разверткой) рассматриваемой кривой Γ.

Исходная кривая Γ по отношению к своей эволюте называется ее *эвольвентой.*

В случае плоской кривой Γ векторная функция, задающая эту кривую, имеет следующие координаты: $\overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r}}(t) = \{u(t),\, v(t)\}$. Найдем координаты центра кривизны $\overline{\boldsymbol{\rho}} = \overline{\boldsymbol{\rho}}(t) = \{U(t),\, V(t)\}$ для произвольного t такого, что $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Далее аргумент t у функций будем опускать.

Поскольку $\overline{\boldsymbol{r}}' = (u',\, v')$, $\overline{\boldsymbol{r}}'' = (u'',\, v'')$ и

$$s' = \sqrt{(u')^2 + (v')^2}, \qquad s'' = \frac{u'u'' + v'v''}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}},$$

то из формулы (5.14) находим векторную функцию

$$\frac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2} = \frac{v'u'' - u'v''}{\left[(u')^2 + (v')^2\right]^2} \cdot (v',\, -u').$$

Теперь подставим в формулу (5.24) полученную векторную функцию и выражение для кривизны из (5.23). Окончательно приходим к следующим выражениям для координатных функций, задающих множество точек, являющихся центрами кривизны плоской кривой Γ:

$$U = u + v' \frac{(u')^2 + (v')^2}{v'u'' - u'v''}, \; V = v - u' \frac{(u')^2 + (v')^2}{v'u'' - u'v''}. \qquad (5.25)$$

Пример 5.15. Найдем эволюту астроиды, заданной векторной функцией $\overline{\boldsymbol{r}} = \{a \cos^3 t,\, a \sin^3 t\}$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (см. рис. 5.2).

Производные заданной векторной функции:

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{r}}' &= \{-3a \cos^2 t \sin t,\, 3a \sin^2 t \cos t\}, \\ \overline{\boldsymbol{r}}'' &= \{6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t,\, 6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t\}. \end{aligned}$$

Полученные выражения подставим в (5.25), находим

$$U = a \cos t\,(2 - \cos 2t), \qquad V = a \sin t\,(2 + \cos 2t).$$

Это новая астроида, повернутая на угол $\pi/4$ и увеличенная в два раза.

Астроида и ее эволюта изображены на рис. 5.8.

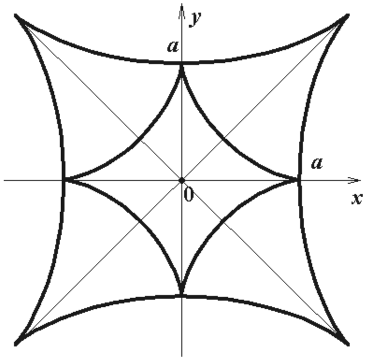

Рис. 5.8

5.4. Кручение кривой. В формулы Френе (5.19) — (5.21) входят две постоянные k и $\varkappa$ кривой Γ — кривизна и кручение соответственно.

Из выражений (5.14) и (5.20) для произвольного значения $0 \leqslant s \leqslant \sigma$ такого, что $k(s) \neq 0$, следует

$$\frac{d^3 \overline{\boldsymbol{r}}}{ds^3}(s) = k'(s)\,\overline{\boldsymbol{\nu}} + k(s)\,\frac{d\overline{\boldsymbol{\nu}}}{ds} = k'(s)\,\overline{\boldsymbol{\nu}} - k^2(s)\,\overline{\boldsymbol{\tau}} + k(s)\varkappa(s)\,\overline{\boldsymbol{\beta}}.$$

Применив равенства $(\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}, \overline{\boldsymbol{\beta}}) = 1$, $(\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}) = (\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}, \overline{\boldsymbol{\tau}}) = 0$, получаем $\left(\dfrac{d\overline{\boldsymbol{r}}}{ds}(s), \dfrac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2}(s), \dfrac{d^3\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^3}(s)\right) = k^2(s)\varkappa(s)$. Окончательно находим формулу для вычисления кручения кривой Γ в точке $M = M(s)$:

$$\varkappa(s) = \frac{1}{k^2(s)} \left(\frac{d\overline{\boldsymbol{r}}}{ds}(s), \frac{d^2\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^2}(s), \frac{d^3\overline{\boldsymbol{r}}}{ds^3}(s)\right). \tag{5.26}$$

5.5. Геометрический смысл кручения. Из выражения (5.26) следует, что знак $\varkappa(s)$ зависит от знака смешанного произведения последовательных трех производных векторной функции по параметру. Поэтому справедливо $\varkappa > 0$, если эти производные образуют правую тройку векторов.

В точках $M_0 = M(s_0)$ и $M = M(s_0 + \Delta s)$ кривой Γ (5.10) рассмотрим соприкасающиеся плоскости и $\Delta\psi$ — угол между плоскостями. Этот угол показывает, насколько отличается наша кривая на участке M_0M от плоской кривой. Назовем этот угол полным кручением дуги M_0M. Тогда отношение $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}$ есть среднее кручение на участке M_0M, а предел этого отношения при $\Delta s \to 0$ называется *кручением* кривой Γ в точке M_0.

Докажем, что это определение совпадает с ранее приведенным (см. определение 5.12). Отметим, что угол $\Delta\psi$ между соприкасающимися плоскостями равен углу между бинормалями $\overline{\boldsymbol{\beta}}_0$ и $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ в точках M_0 и M соответственно и $\Delta\overline{\boldsymbol{\beta}} = \Delta\overline{\boldsymbol{\beta}}(s_0, \Delta s) = \overline{\boldsymbol{\beta}} - \overline{\boldsymbol{\beta}}_0$.

Справедливы равенства: $|\Delta\overline{\boldsymbol{\beta}}| = 2\left|\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right|$ и $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\left|\dfrac{\Delta\overline{\boldsymbol{\beta}}}{\Delta\varphi}\right| = 1$. Тогда

$$|\varkappa(s_0)| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta\overline{\boldsymbol{\beta}}}\right| \cdot \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\overline{\boldsymbol{\beta}}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\overline{\boldsymbol{\beta}}}{ds}\right|.$$

Замечание 5.13. Заметим, что кручение плоской кривой Γ равно нулю, в этом случае $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ сохраняет постоянное направление.

ГЛАВА 6

Неопределенный интеграл

В этой главе будем рассматривать задачу, обратную той, которая изучалась в главе 4. Будем искать функцию $y = f(x)$ на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, если известна ее производная $y = f'(x)$ на этом множестве.

Введем необходимые для дальнейшего сведения о комплексных числах, а также сведения о разложении многочленов на множители и рациональных дробей на простейшие дроби.

§ 1. Комплексные числа

1.1. Определение комплексного числа. Дадим еще одно важное понятие *комплексного числа*, используя понятие *действительного числа*, введенное в гл. 1.

Определение 6.1. Назовем *комплексным числом* z упорядоченную пару действительных чисел $(x,\, y)$. Число x называется *действительной* частью комплексного числа z, а y — *мнимой* частью числа z.

Обозначение. $z = (x,\, y), \;\; x = \operatorname{Re} z, \;\; y = \operatorname{Im} z.$

При этом комплексные числа вида $(x,\, 0)$ называются *действительными числами* и обозначаются $x = (x,\, 0)$, а числа вида $(0,\, y)$ — *мнимыми числами*[6.1].

Для комплексных чисел нет понятия *больше* или *меньше*, однако можно говорить о равенстве двух комплексных чисел.

Определение 6.2. Два комплексных числа $z_1 = \big(x_1,\, y_1\big)$ и $z_2 = \big(x_2,\, y_2\big)$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

[6.1] Соответственно будем обозначать $0 = (0,\, 0)$.

1.2. Арифметические операции. Определим арифметические операции над комплексными числами. Пусть $z_1 = \bigl(x_1,\, y_1\bigr)$ и $z_2 = \bigl(x_2,\, y_2\bigr)$.

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число $z = (x,\, y)$, для которого $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$. Обозначается: $z = z_1 + z_2$.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 назовем комплексное число $z = (x,\, y)$, обозначим $z = z_1 - z_2$, для которого выполнены следующие равенства: $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$.

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = (x,\, y)$, для которого выполнены равенства: $x = x_1x_2 - y_1y_2$ и $y = x_1y_2 + x_2y_1$. Произведение обозначим $z = z_1 \cdot z_2$, или $z = z_1z_2$.

Частное комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ есть такое комплексное число $z = (x,\, y)$, для которого выполнены равенства

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 будем использовать следующее обозначение: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, или $z = z_1/z_2$.

Замечание 6.1. Обратим внимание на тот факт, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами $\mathbf{1^\circ} - \mathbf{10^\circ}$, определенными в гл. 1 для соответствующих операций над действительными числами.

Множество всех комплексных чисел, обладающих всеми введенными операциями, обозначим $\mathbb{C}$.

1.3. Алгебраическая форма записи. Особую роль играет число $i = (0,\, 1)$, которое назовем *мнимой единицей*, поскольку

$$i^2 = i \cdot i = (0,\, 1) \cdot (0,\, 1) = (-1,\, 0) = -1. \tag{6.1}$$

Поэтому для любого комплексного числа $z = (x,\, y)$ выполняется

$$z = (x,\, y) = (x,\, 0) + (0,\, y) = (x,\, 0) + (0,\, 1) \cdot (y,\, 0) = x + i\,y.$$

Таким образом, для любого комплексного числа $z = (x,\, y)$ имеет место следующее представление: $z = x + i\,y$, которое назовем *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Пусть $z = x + i\,y$, тогда комплексное число $\overline{z} = x - i\,y$ назовем *сопряженным* к комплексному числу z. Очевидно, что

$$z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z.$$

Замечание 6.2. Если использовать алгебраическую форму записи комплексного числа и равенство (6.1), то арифметические операции с комплексными числами можно производить так же, как операции с многочленами.

Для сопряженных комплексных чисел $z = x + i\,y$ и $\overline{z} = x - i\,y$ верно равенство $z \cdot \overline{z} = (x + i\,y) \cdot (x - i\,y) = x^2 + y^2$.

Найдем частное двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2} \cdot \frac{x_2 - i\,y_2}{x_2 - i\,y_2} = \\ = \frac{\big(x_1x_2 + y_1y_2\big) + i\big(x_2y_1 - x_1y_2\big)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Этот результат согласуется с введенным в предыдущем пункте понятием *частного двух комплексных чисел*.

1.4. Тригонометрическая форма записи. Пусть задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Тогда любое комплексное число $z = x + i\,y$ можно рассматривать как радиус-вектор $\overline{OM}$ с координатами $(x,\, y)$. Можно говорить о плоскости комплексных чисел, которую также будем обозначать буквой $\mathbb{C}$.

Сложение и вычитание комплексных чисел в их геометрической интерпретации есть сложение и вычитание соответствующих радиус-векторов.

Если ввести полярную систему координат, причем совместить полюс с началом O декартовой системы координат и полярную ось с осью Ox, то декартовы $(x,\, y)$ и полярные $(r,\, \varphi)$ координаты точки плоскости связаны следующими соотношениями: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Откуда находим $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и для $z \neq 0$ определим

$\varphi = \operatorname{artctg} \dfrac{x}{y}$, если $x > 0$, при $x < 0$ положим $\varphi = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{y} + \pi \operatorname{sgn} y$, и, наконец, $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y$ при $x = 0$.

Таким образом, получается следующая форма записи комплексного числа: $z = r\bigl(\cos\varphi + i\sin\varphi\bigr)$, которую назовем *тригонометрической* формой записи.

В этой записи число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$, а число φ — *аргументом* комплексного числа z, используется обозначение $\arg z$.

Если $z = r\bigl(\cos\varphi + i\sin\varphi\bigr)$, то $\overline{z} = r\bigl(\cos\varphi - i\sin\varphi\bigr)$.

Замечание 6.3. Обратим внимание на тот факт, что для числа $z = 0$ не определено понятие $\arg z$.

Для $z \neq 0$ его аргумент определен неоднозначно, а именно, наряду с φ любое число $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, является также аргументом числа z.

В тригонометрической форме записи легко представляются произведение и частное комплексных чисел.

Пусть $z_1 = r_1\bigl(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\bigr)$ и $z_2 = r_2\bigl(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\bigr)$, тогда произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\bigl(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\bigr), \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\bigl(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\bigr). \end{gathered} \tag{6.2}$$

Для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство: $z^n = r^n\bigl(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\bigr)$. Это равенство следует из формулы произведения комплексных чисел (6.2), если

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z, \quad z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n.$$

В частности, справедлива *формула Муавра*:

$$\bigl(\cos\varphi + i\sin\varphi\bigr)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

1.5. Показательная форма записи. Введем еще одну форму записи комплексного числа. Если обозначить

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{6.3}$$

то комплексное число $z = r\bigl(\cos\varphi + i\sin\varphi\bigr)$ представляется в следующем виде: $z = r\,e^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной*.

Очевидно, если $z = re^{i\varphi}$, то $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.

1.6. Функции комплексного переменного. Если каждому комплексному числу $z \in \mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ по некоторому правилу или закону ставится в соответствие единственное комплексное число w, то говорят, что задана функция комплексного переменного и обозначают $w = f(z)$ или $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$.

Приведем примеры функций, необходимых для дальнейшего.

1.6.1. *Функция* $w = e^{i\varphi}$. Из выражений (6.3) и (6.2) получаем $e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ и $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$. Таким образом, формула (6.3), которую называют *формулой Эйлера*[6.2], определяет для $\varphi \in \mathbb{R}$ комплекснозначную функцию $w = e^{i\varphi}$, обладающую рядом свойств, характерных для показательной функции. Кроме того, эта функция периодическая с периодом 2π: $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$, здесь $k \in \mathbb{Z}$.

С помощью этой функции можно найти корни следующего уравнения $z^n = z_0$, где $z_0 = r_0e^{i\varphi_0}$. Действительно, $z = \sqrt[n]{z_0}$, и, учитывая периодичность функции $w = e^{i\varphi}$, получаем для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ выражения $z_k = \sqrt[n]{r_0}\,e^{i(\varphi_0+2\pi k)/n}$. Итак, уравнение $z^n = z_0$ имеет ровно n различных корней.

1.6.2. *Многочлены и рациональные функции.* Поскольку для комплексных чисел были определены все арифметические операции, то можно рассмотреть следующую функцию:

$$w = f(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n,$$

где $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, которую назовем *алгебраическим многочленом* или *многочленом* степени n. Иногда используют обозначение для степени многочлена: $\deg f(z) = n$.

Замечание 6.4. Многочленом нулевой степени назовем любое комплексное число.

Определение 6.3. Число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *нулем* многочлена $w = f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

[6.2] Формула Эйлера доказывается в курсе теории функций комплексного переменного.

Как и для действительного переменного, многочлен $w = f(z)$ можно поделить на произвольный многочлен
$$w = g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m$$
при условии $m \leqslant n$. Получаем
$$f(z) = h(z)\, g(z) + p(z), \tag{6.4}$$
здесь $\deg h(z) = k$ и $\deg p(z) = s$, при этом $k + m = n$ и $s < m$.

Функцию вида
$$w = h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$$
назовем *рациональной* функцией или *рациональной дробью*. Эта функция определена во всей плоскости комплексных чисел, за исключение точек, являющихся нулями многочлена $w = g(z)$. Рациональная дробь $w = h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ называется *правильной*, если для степеней многочленов f и g выполняется следующее неравенство: $n < m$.

§ 2. Разложение многочленов и рациональных дробей

2.1. Разложение многочленов на множители. Решение вопроса о разложении многочлена на простейшие множители опирается на две следующие теоремы.

Теорема 6.1. (Безу.) *Число z_0 является нулем многочлена ненулевой степени в том и только в том случае, когда справедливо $f(z) = (z - z_0)\, g(z)$.*

Доказательство. Необходимость. Многочлен первой степени $w = z - z_0$ имеет своим нулем комплексное число z_0. Поэтому из равенства (6.4) получаем следующее выражение: $f(z) = (z - z_0)\, g(z) + h(z)$, где $w = h(z)$ — многочлен нулевой степени, т.е. $h(z) = c$ и $c \in \mathbb{C}$. Поскольку $f(z_0) = c$, но z_0 — нуль многочлена $w = f(z)$, то $c = 0$ и имеет место представление $f(z) = (z - z_0)\, g(z)$.

Достаточность. Утверждение очевидно, поскольку число z_0 является нулем многочлена $(z - z_0)\, g(z)$ и, следовательно, многочлена $w = f(z)$. $\triangle$

Теорема 6.2. (Основная теорема алгебры.)[6.3] *Всякий многочлен ненулевой степени с действительными или комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один нуль.*

Простое доказательство этой теоремы приводится в курсе теории функций комплексного переменного.

Последовательно применяя теоремы 6.2 и 6.1, можно доказать следующее утверждение.

Следствие. *Любой многочлен ненулевой степени n имеет ровно n комплексных нулей.*

Если $w = f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$, то справедливо $w = f(z) = c_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$.

Заметим, что среди нулей z_j, $j = 1, \ldots, n$, могут быть совпадающие, поэтому имеет место следующее более общее представление:

$$w = f(z) = c_0(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k} \tag{6.5}$$

и выполняется $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$.

Если $\alpha_j > 1$, то число z_j называется *кратным нулем* многочлена $w = f(z)$, а число α_j — *кратностью нуля z_j*.

Будем рассматривать далее многочлены с действительными коэффициентами:

$$w = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Предложение. *Если число z_0 — комплексный нуль многочлена $w = f(z)$ ненулевой степени с действительными коэффициентами, то число $\overline{z_0}$ также является нулем этого многочлена.*

Доказательство. Заметим, что $\overline{f(z)} = f\big(\overline{z}\big)$. Действительно, если $z = re^{i\varphi}$ и $z^n = r^n e^{in\varphi}$, то

$$\overline{z^n} = \overline{r^n e^{in\varphi}} = r^n e^{-in\varphi} = \big(re^{-i\varphi}\big)^n = \big(\overline{z}\big)^n,$$

[6.3] Название теоремы возникло в то время, когда алгебра представляла собой алгебру многочленов, и результат, сформулированный в этой теореме, являлся фундаментальным для нее.

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} =$$
$$= a_0 \overline{z^n} + a_1 \overline{z^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \overline{z} + a_n =$$
$$= a_0 (\overline{z})^n + a_1 (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{z} + a_n = f\big(\overline{z}\big).$$

Поэтому если $f\big(z_0\big) = 0$, то $\overline{f\big(z_0\big)} = f\big(\overline{z_0}\big) = 0$ и комплексное число $\overline{z_0}$ также является нулем многочлена $w = f(z)$. △

Теорема 6.3. *Зная все комплексные и действительные нули многочлена ненулевой степени с действительными коэффициентами:* $y = f(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$, *можно этот многочлен разложить на множители:*

$$y = f(x) = a_0 (x - x_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{\beta_k} \times \\ \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{\gamma_s}, \qquad (6.6)$$

где $\beta_1 + \dots + \beta_k + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_s = n$.

Доказательство. Из следствия получили для многочлена $y = f(x)$ представление (6.5). Если x_j — действительный нуль кратности β_j этого многочлена, то в разложении присутствует сомножитель $\big(x - x_j\big)^{\beta_j}$.

Если z_j — комплексный нуль многочлена $y = f(x)$, то (см. предложение) $\overline{z_j}$ также является нулем этого многочлена и

$$\big(x - z_j\big)\big(x - \overline{z_j}\big) = x^2 - \big(z_j + \overline{z_j}\big)x + z_j \overline{z_j} = x^2 + p_j x + q_j,$$

где $p_j = -2 \operatorname{Re} z_j$ и $q_j = \big|z_j\big|^2$.

Если z_j — комплексный нуль многочлена $y = f(x)$ кратности γ_j, то в разложении присутствует сомножитель $\big(x^2 + p_j x + q_j\big)^{\gamma_j}$.

Таким образом, справедливо разложение вида (6.6). △

2.2. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби. Пусть задана правильная дробь

$$y = h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m},$$

здесь выполнено $n < m$, а $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, и $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Лемма 6.4. *Если x_0 — действительный нуль многочлена $y = g(x)$ кратности β, т. е. $y = g(x) = \bigl(x - x_0\bigr)^\beta r(x)$ и $r\bigl(x_0\bigr) \neq 0$, то для дроби $y = h(x)$ справедливо следующее представление:*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{\bigl(x - x_0\bigr)^\beta} + \frac{s(x)}{\bigl(x - x_0\bigr)^{\beta-\alpha} r(x)},$$

здесь $\alpha \geqslant 1$, и последняя дробь в этом представлении является правильной.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{\bigl(x - x_0\bigr)^\beta} = \frac{f(x) - A\,r(x)}{\bigl(x - x_0\bigr)^\beta r(x)} = \frac{\Phi(x)}{\bigl(x - x_0\bigr)^\beta r(x)}.$$

Число A выберем так, чтобы $\Phi\bigl(x_0\bigr) = 0$, т. е. $A = \dfrac{f\bigl(x_0\bigr)}{r\bigl(x_0\bigr)}$. Поэтому существует такое натуральное число $\alpha \geqslant 1$, что выполнено $\Phi(x) = \bigl(x - x_0\bigr)^\alpha s(x)$ и $s\bigl(x_0\bigr) \neq 0$.

Таким образом,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{\bigl(x - x_0\bigr)^\beta} = \frac{s(x)}{\bigl(x - x_0\bigr)^{\beta-\alpha} r(x)},$$

а разность правильных дробей есть правильная дробь. $\triangle$

Лемма 6.5. *Если z_0 — комплексный нуль кратности β многочлена $y = g(x)$, т. е. $y = g(x) = \bigl(x^2 + px + q\bigr)^\beta r(x)$ и $r\bigl(z_0\bigr) \neq 0$, $r\bigl(\overline{z_0}\bigr) \neq 0$, то для дроби $y = h(x)$ справедливо представление*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax + B}{\bigl(x^2 + px + q\bigr)^\beta} + \frac{s(x)}{\bigl(x^2 + px + q\bigr)^{\beta-\alpha} r(x)},$$

здесь $\alpha \geqslant 1$, $p = -2\operatorname{Re} z_0$ и $q = \bigl|z_0\bigr|^2$, а последняя дробь в этом представлении является правильной.

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}}=\frac{f(x)-(Ax+B)r(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}r(x)}=$$
$$=\frac{\Phi(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}r(x)}.$$

Числа A и B найдем из уравнения $f\left(z_0\right)-\left(Az_0+B\right)r\left(z_0\right)=0$. Эти числа определяются из равенств $\operatorname{Re}\Phi(z_0)=0$ и $\operatorname{Im}\Phi(z_0)=0$,

$$A=\frac{1}{\operatorname{Im}z_0}\operatorname{Im}\left[\frac{f\left(z_0\right)}{r\left(z_0\right)}\right],\quad B=\operatorname{Re}\left[\frac{f\left(z_0\right)}{r\left(z_0\right)}\right]-\frac{\operatorname{Re}z_0}{\operatorname{Im}z_0}\operatorname{Im}\left[\frac{f\left(z_0\right)}{r\left(z_0\right)}\right].$$

Поскольку $\Phi\left(z_0\right)=0$, то найдется такое натуральное число $\alpha\geqslant 1$, что $\Phi(x)=\left(x^2+px+q\right)^{\alpha}s(x)$ и $s\left(z_0\right)\neq 0$ и $s\left(\overline{z_0}\right)\neq 0$. Следовательно,

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}}=\frac{s(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta-\alpha}r(x)},$$

разность правильных дробей есть правильная дробь. △

Последовательное применение лемм 6.4 и 6.5 позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 6.6. *Если $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами степени n и m соответственно, причем $n<m$ и*

$$y=g(x)=\left(x-x_1\right)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\left(x-x_s\right)^{\beta_s}\times$$
$$\times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{\gamma_k},$$

то справедливо следующее разложение правильной дроби:

$$y = h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A^1_{\beta_1}}{\big(x - x_1\big)} + \dots + \frac{A^{\beta_1}_{\beta_1}}{\big(x - x_1\big)^{\beta_1}} + \\ + \dots + \frac{A^1_{\beta_s}}{\big(x - x_s\big)} + \dots + \frac{A^{\beta_s}_{\beta_s}}{\big(x - x_s\big)^{\beta_s}} + \\ + \frac{C^1_{\gamma_1} x + B^1_{\gamma_1}}{\big(x^2 + p_1 x + q_1\big)} + \dots + \frac{C^{\gamma_1}_{\gamma_1} x + B^{\gamma_1}_{\gamma_1}}{\big(x^2 + p_1 x + q_1\big)^{\gamma_1}} + \\ + \dots + \frac{C^1_{\gamma_k} x + B^1_{\gamma_k}}{\big(x^2 + p_k x + q_k\big)} + \dots + \frac{C^{\gamma_k}_{\gamma_k} x + B^{\gamma_k}_{\gamma_k}}{\big(x^2 + p_k x + q_k\big)^{\gamma_k}}.$$

§ 3. Первообразная и неопределенный интеграл

3.1. Определения. В дальнейшем будем считать, что функции определены на интервале $(a,\, b)$.

Определение 6.4. Дифференцируемая на интервале $(a,\, b)$ функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любой точки x интервала $(a,\, b)$.

В разделе 1.3 гл. 4 и примерах 4.6 – 4.11 определены производные некоторых элементарных функций. Поэтому, зная производные рассмотренных функций, легко найти первообразную для каждой такой функции. Естественно возникает вопрос о единственности первообразной функции $y = f(x)$, нет ли у нее других первообразных. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.7. *Если функции $y = F_1(x)$ и $y = F_2(x)$ являются первообразными функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\, b)$, то всюду на этом интервале выполняется $F_1(x) - F_2(x) = C = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Обозначим $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда для любой точки $x \in (a,\, b)$ выполняется

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По следствию из теоремы Лагранжа (см. теорему 4.14) получаем, что $F(x) = C$ на интервале $(a,\, b)$. $\triangle$

Следствие. *Если функция $y = F_0(x)$ является первообразной функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\, b)$, то любая другая первообразная $y = F(x)$ этой функции имеет вид $y = F_0(x) + C$, здесь* $C = \mathrm{const}$.

Описаны все первообразные функции $y = f(x)$ на $(a,\, b)$.

Определение 6.5. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на интервале $(a,\, b)$ называется *неопределенным интегралом*.

Если функция $y = F(x)$ является первообразной функции $y = f(x)$ на $(a,\, b)$ и $C = \mathrm{const}$, то используют следующее обозначение неопределенного интеграла:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{6.7}$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла называется *интегрированием*.

Замечание 6.5. Обратим внимание на тот факт, что

$$d\big(F(x)\big) = f(x)\,dx. \tag{6.8}$$

3.2. Свойства неопределенного интеграла. Определим и докажем простейшие свойства неопределенного интеграла.

1. $d\Big(\displaystyle\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx, \quad \dfrac{d}{dx}\Big(\displaystyle\int f(x)\,dx\Big) = f(x).$

Доказательство. Получаем из равенства (6.7):

$$d\big(F(x) + C\big) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$
$$\frac{d}{dx}\big(F(x) + C\big) = F'(x) = f(x). \qquad \triangle$$

2. $\displaystyle\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$

Доказательство. Указанное равенство следует из выражений (6.8) и (6.7). $\triangle$

3. Для любых чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\int \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Равенство понимается с точностью до постоянной.

Доказательство. Если $y = F(x)$ и $y = G(x)$ являются первообразными функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соответственно на интервале $(a,\, b)$, то функция $y = \alpha F(x) + \beta G(x)$ есть первообразная функции $y = \alpha f(x) + \beta g(x)$ на интервале $(a,\, b)$. $\triangle$

Приведем таблицу неопределенных интегралов, используя полученные результаты в разделе 1.3 гл. 4 и в примерах 4.6—4.13.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int x^\beta\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C,\ \ \beta \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arcctg} x + C_2,$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\big(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\big) + C.$$

3.3. Методы интегрирования. Имеются два метода интегрирования, приведем их.

3.3.1. *Замена переменных.* Если функция $z = g(y)$ определена на интервале $(a,\, b)$, а функция $y = f(x)$ определена на интервале

$(\alpha,\, \beta)$, при этом $f\big((\alpha,\, \beta)\big) = (a,\, b)$, то на интервале $(\alpha,\, \beta)$ определена суперпозиция функций $z = g \circ f$ или $z = g\big(f(x)\big)$.

Теорема 6.8. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(\alpha,\, \beta)$ и функция $z = G(y)$ есть первообразная функции $z = g(y)$ на интервале $(c,\, d)$, где $(c,\, d)$ — множество значений функции f, т. е. справедливо равенство $\displaystyle\int g(y)\, dy = G(y) + C$, тогда функция $z = G\big(f(x)\big)$ является первообразной функции $z = g\big(f(x)\big)\, f'(x)$ на интервале $(\alpha,\, \beta)$ и имеет место следующее равенство:*

$$\int g\big(f(x)\big)\, f'(x)\, dx = G\big(f(x)\big) + C.$$

Доказательство. То, что функция $z = G\big(f(x)\big)$ является первообразной функции $z = g\big(f(x)\big)\, f'(x)$ на интервале $(\alpha,\, \beta)$, следует из теоремы о производной суперпозиции функций 4.5. Равенство получается из выражения (6.7). $\triangle$

Замечание 6.6. Теорема 6.8 описывает один из основных методов интегрирования — метод замены переменных, который еще называют *методом подстановки*.

С учетом метода подстановки, проинтегрируем следующие элементарные функции:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_2,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C_1 = -\arccos \frac{x}{a} + C_2.$$

Пример 6.1. Найти $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$.

Очевидно, что $\sqrt{x^2 - 2x + 10} = \sqrt{(x-1)^2 + 9}$, и справедливо равенство $d(x-1) = dx$. Введем замену $y = x - 1$, тогда (см. пример 4.13) выполняется

$$I = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 9}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 9}} =$$
$$= \ln\big(y + \sqrt{y^2 + 9}\,\big) + C = \ln\big(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 10}\big) + C.$$

Пример 6.2. Интеграл $I = \int \int \frac{t\,dt}{1+t^4}$ заменой переменных $z = t^2$ сводится к интегралу $I = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2}$, который является табличным, и

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t^2 + C.$$

Пример 6.3. Вычислить интеграл $J = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Заметим, что $\operatorname{tg}^2 x = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \frac{1}{\cos^2 x}$ и $d\bigl(\operatorname{tg} x\bigr) = \frac{dx}{\cos^2 x}$ (см. пример 4.6). Сделаем замену $y = \operatorname{tg} x$, тогда

$$J = \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \\ = y - \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Здесь использованы результаты примера 4.9 и п. 1.3.5 гл. 4.

3.3.2. *Интегрирование по частям.*

Теорема 6.9. *Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы на интервале $(a,\, b)$. Если $y = u(x)v'(x)$ имеет на интервале $(a,\, b)$ первообразную, то функция $y = u'(x)v(x)$ также имеет на этом интервале первообразную и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \tag{6.9}$$

Доказательство. Поскольку $\bigl($см. формулу (4.6)$\bigr)$

$$\bigl[u(x)v(x)\bigr]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x),$$

а $\int \bigl[u(x)v(x)\bigr]' dx = u(x)v(x) + C$ и существует первообразная функции $y = u(x)v'(x)$, тогда существует первообразная функции $y = u'(x)v(x)$ и справедлива формула (6.9). $\triangle$

Замечание 6.7. Учитывая определение дифференциала и инвариантность формы первого дифференциала, формулу (6.9) можно переписать в следующем виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{6.10}$$

Пример 6.4. Найти $I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

Из формулы (6.10) следует:

$$I = \left|\begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2-a^2} & dv = dx \\ du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & v = x \end{array}\right| =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \left(\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) dx =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Окончательно получаем $I = \dfrac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$.

Пример 6.5. Получим рекуррентное соотношение для вычисления интегралов: $J_k = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$, $k > 1$.

Для $k = 1$ верно $J_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. Для $k > 1$ находим

$$J_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^k}\,dx = \frac{1}{a^2}J_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\,d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^k}.$$

По формуле (6.10) определяем

$$\int \frac{x\,d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^k} = \left|\begin{array}{ll} u = x & dv = \dfrac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^k} \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{k-1}} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}J_{k-1}.$$

Следовательно,

$$J_k = \frac{1}{2a^2(k-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\, J_{k-1}. \tag{6.11}$$

Пример 6.6. Рассмотрим, как применяется рекуррентное соотношение (6.11) для нахождения следующего интеграла: $J = \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

$$J = \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Пример 6.7. Найти $J = \int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$, здесь α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Используем (6.10):

$$J = \begin{vmatrix} u = e^{\alpha x} & dv = \sin(\beta x)\, dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\, dx & v = -\dfrac{\cos(\beta x)}{\beta} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) +$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx = \begin{vmatrix} u = e^{\alpha x} & dv = \cos(\beta x)\, dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\, dx & v = \dfrac{\sin(\beta x)}{\beta} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^2}\, e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\, J.$$

Тогда $J = \left[\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \cos(\beta x)\right] e^{\alpha x}$.

§ 4. Интегрирование некоторых элементарных функций

4.1. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование правильной рациональной дроби

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}, \quad n < m,$$

в силу теоремы 6.6, сводится к интегрированию простейших дробей вида: $\frac{1}{(t-a)^k}$, $\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ и $\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, здесь $k \in \mathbb{N}$, поскольку от выражения $x^2 + px + q$, стоящего в знаменателях разложения теоремы 6.6, выделением полного квадрата можно прийти к выражению $t^2 + a^2$:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2 = t^2 + a^2.$$

Если (см. лемму 6.5) обозначить $z_0 = x_0 + iy_0$, то $q = \left|z_0\right|^2 = x_0^2 + y_0^2$ и $p = -2\,\mathrm{Re}\,z_0 = -2x_0$, таким образом, приходим к равенству: $q - \dfrac{p^2}{4} = y_0^2 = a^2$.

1°. Для $k = 1$ находим

$$\int \frac{dt}{t-a} = \ln|t-a| + C, \qquad \int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \ln\sqrt{t^2+a^2} + C,$$
$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

2°. Для $k > 1$ получаем

$$\int \frac{dt}{(t-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(t-a)^{k-1}} + C,$$
$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + C.$$

Интегралы $J_k = \displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ находятся с помощью рекуррентного соотношения (6.11), найденного в примере 6.5.

Неопределенный интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции: рациональные дроби, логарифмическую функцию и арктангенс. Конечно, основную трудность составляет разложение знаменателя рациональной функции на множители. Но как только это разложение осуществлено, то представить рациональную функцию в виде линейной комбинации простейших дробей можно, например, с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Приведем примеры интегрирования некоторых рациональных функций.

Пример 6.8. Найти $J = \int \frac{4x^3 - 2x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2\big(x^2 - 2x + 10\big)}\,dx.$

Знаменатель подынтегральной функции разложен на множители, поэтому надо подынтегральную функцию разложить на простейшие дроби, для этого воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2\big(x^2 - 2x + 10\big)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 10},$$

тогда, приравнивая числители левой и правой частей, получаем равенство

$$4x^3 - 2x^2 + 14x + 7 = A(x+1)\big(x^2 - 2x + 10\big) + \\ + B\big(x^2 - 2x + 10\big) + (Cx + D)(x+1)^2. \quad (6.12)$$

Продифференцируем равенство (6.12), находим

$$12x^2 - 4x + 14 = A\big(x^2 - 2x + 10\big) + 2A\big(x^2 - 1\big) + \\ + 2B(x-1) + C(x+1)^2 + 2(Cx + D)(x+1). \quad (6.13)$$

Подставляя в равенство (6.12) значение $x = -1$, приходим к равенству $-13 = 13\,B$, следовательно, $B = -1$. Аналогично, подставляя в выражение (6.13) это же значение $x = -1$, находим $A = 2$. Далее, при $x = 0$ из (6.12) и (6.13) получаем $D = -3$ и $C = 2$ соответственно.

Таким образом, получено следующее разложение рациональной функции на дроби:

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 14x + 7}{(x+1)^2\big(x^2 - 2x + 10\big)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 10}.$$

Следовательно,

$$J = 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \\ + \int \frac{d\big(x^2 - 2x + 10\big)}{x^2 - 2x + 10} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 9} = \\ = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \ln\big(x^2 - 2x + 10\big) - \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.$$

Пример 6.9. Вычислим $I = \int \frac{x^3+2x^2+x}{\left(x^2+2x+5\right)^2}\,dx$. Заметим, что

$$\frac{x^3+2x^2+x}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{x}{x^2+2x+5} - \frac{4x}{\left(x^2+2x+5\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{(x+1)^2+4} -$$
$$- 2\cdot\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2} + 4\cdot\frac{1}{\left((x+1)^2+4\right)^2}.$$

Поэтому

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{x^2+2x+5} - \int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} -$$
$$- 2\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} + 4\int\frac{d(x+1)}{\left((x+1)^2+4\right)^2} =$$
$$= \ln\sqrt{x^2+2x+5} - \frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+5}{x^2+2x+5} + C.$$

Для нахождения последнего интеграла был использован результат примера 6.6.

4.2. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций. В литературе хорошо описаны подстановки, которые используются при интегрировании иррациональных и трансцендентных функций: подстановки Эйлера и Чебышёва, универсальная тригонометрическая подстановка и т. п. При таких подстановках интегрирование сводится к интегрированию рациональных функций, которое подробно рассмотрено в этой главе[6.4].

[6.4] Для справки см., например, [**8**], [**13**].

Список литературы

[1] *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. 4-е изд. испр. и доп. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020. 476 с.

[2] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. Москва : Мир, 1967. 252 с.

[3] *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. 5 изд. Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 48 с.

[4] *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. В 2 ч. Ч 1. 3-е изд. испр. и доп. Москва : МФТИ, 2011. 318 с.

[5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. В 2 ч. Ч 1. 5-е изд. Москва : Наука. Физматлит, 1998. 616 с.

[6] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. 2-е изд. перераб. и доп. Москва : Высшая школа, 1988. 576 с.

[7] *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. 2-е изд. перераб. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

[8] *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. 2-е изд. перераб. и доп. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 504 с.

[9] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I. 3-е изд. перераб. и доп. Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 464 с.

[10] *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. I. Введение в математический анализ. 2-е изд. испр. и дополн. Москва : МФТИ, 2017. 276 с.

[11] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. Москва : Изд-во МФТИ, 2000. 720 с.

[12] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1. 8-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 680 с.

[13] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. 9-е изд. стер. Санкт Петербург : Издательство «Лань», 2009. 800 с.

[14] *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. В 2 т. Т. I. 7-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.

[15] *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. В 2 ч. Ч. 1. Москва : Издательство физико-математической литературы, 2001. 400 с.

Предметный указатель

Учебное издание

Знаменская Людмила Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Редакторы: *И. А. Волкова*, *О. П. Котова*
Дизайн обложки *Е. А. Казённовой*

Подписано в печать 23.03.2024. Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 18,5.
Уч.-изд. л. 17,5. Тираж 100 экз. Заказ № 52.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригиналом-макетом
ООО «Печатный салон ШАНС» 127412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2
Тел. (495) 484-26-55

Л. Н. Знаменская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ISBN 978-5-7417-0838-5
9 785741 708385