Теорема 1 Если ф-я $f(x)$ непр. и неотриц. на $[a,b]$, то объем тела вращ. G сущ. и равен $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

□ Поскольку ф-я $\varphi(x)=\pi f^2(x)$ непр, то она инт. на $[a,b]$.
Это означает, что пределы верх. и ниж. суммы Дарбу сущ. и равны:

$$\lim_{\ell(T)\to 0} s(\varphi,T)=\lim_{\ell(T)\to 0} S(\varphi,T)=\int_a^b \varphi(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Заметим, что объемы внут. и внеш. ступ. тел равны соот. нижней и верх. суммам Дарбу для ф-и $\varphi(x)$:

$$V(q(f,T))=\sum_{i=1}^{I} V(q_i)=\pi\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\Big(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{I}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\varphi(x)=s(f,T)$$

Аналогично, $V(Q(f,T))=S(\varphi,t)$.

След-но,

$$\lim_{\ell(T)\to 0} V(q(f,T))=\lim_{\ell(T)\to 0} V(Q(f,T))=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad ■$$

3) Длина кривой

Пусть кривая Γ зад. непр. в-ф. $\bar r(t)$: $\Gamma=\{\bar r(t): t\in[a,b]\}$.
Вспомним, что ломаной P_T', вписанной в кривую Γ и соот. разб. $T=\{t_i\}_{i=0}^{I}$ наз упоряд. набор отр $P_T=\{[\bar r(t_0),\bar r(t_1)],\dots,[\bar r(t_{I-1}),\bar r(t_I)]\}$
Длина ломаной P_T равна $|P_T|=\sum_{i=1}^{I}|\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})|$, а длиной кр. Γ наз $|\Gamma|=\sup_T|P_T|$ — супремум длин лом. по всем разб T отр $[a,b]$

Теорема 2 Если кр. $\Gamma=\{\bar r(t): t\in[a,b]\}$ зад. непр. диф. в-ф $\bar r(t)$, (т.е произв. $\bar r'(t)$ непр на $[a,b]$), то $|\Gamma|=\int_a^b|\bar r'(t)|\,dt$.

□ Рассм. перем. длину дуги $s(t)=|\Gamma_t|$, где $|\Gamma_t|=\{\bar r(\xi): \xi\in[a,t]\}$.
Вспомним, что $s'(t)=|\bar r'(t)|$ $\forall t\in[a,b]$.
По ф Н-Л:

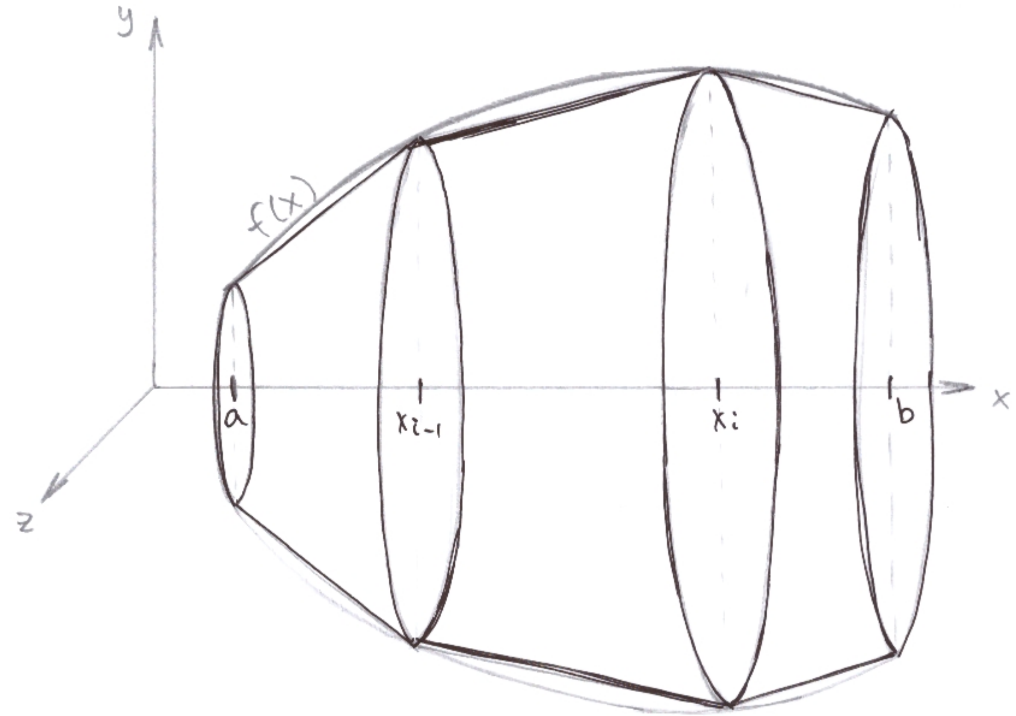
$$|\Gamma|=s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)\,dt=\int_a^b|\bar r'(t)|\,dt \quad ■$$

4) Площадь поверхности вращения.

Пусть на $[a,b]$ задана неотриц. ф-я $f(x)$. Мн-во

$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}$

наз поверхностью вращения графика ф-и f вокруг оси Ox.



Обозн. через Γ крив., совпад. с гр. ф-и f: $\Gamma = \{ \bar{r}(x) : x \in [a,b]\}$, где $\bar{r}(x) = (x, 0, f(x))$

Пусть P_T – ломаная, впис. в Γ и соот. разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ $[a,b]$.

Через Q_T об. поверх., получ. вращ. лом P_T вокруг оси Ox.

Поверх Q_T состоит из I бок. поверх. усечен. конусов $q_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$
$x \in [x_{i-1}, x_i], \sqrt{y^2+z^2} = f_i(x)\}$,

где ф-я $f_i(x)$ зад i-й отр. лом P_T.

Как изв., плоц. бок. пов-ти усеч. конуса q_i равна $S(q_i) = \frac{b_i(l_{i-1}+l_i)}{2}$,

где b_i – длина i-го звена лом P_T, явл. образующей усеч. кон. q_i.

Поскольку $l_i = 2\pi f(x_i)$, $b_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, то

плоц. пов-ти усеч кон. q_i равна

$$S(q_i) = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

След, плоц. пов-ти Q_T, получ. вращ. лом P_T вокруг оси Ox, равна

$$S(Q_T) = \sum_{i=1}^{I} S(q_i) = \pi \sum_{i=1}^{I} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Опр. число S наз. площадью поверхности вращения Q, если $S = \lim\limits_{\ell(T)\to 0} S(Q_T)$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ Пусть на $[a,b]$ зад. неотриц., непр. диф. ф. $f(x)$

Тогда площ. пов. вр. Q сущ и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\boxed{8.1}$ Криволинейный интеграл первого рода.

Определения с 1-го семестра

Опр. Вектор-функцией в $\mathbb{R}^3$ наз. ф-я f такая, что $D(f)\subset\mathbb{R}$, $E(f)\subset\mathbb{R}^3$.
Если аргум. в-ф. обозн. через t, то в-ф можно записать как $\vec{r}=\vec{r}(t)$

Опр Пусть x, y, z — ф-и перем $t\in I$ (I—неком. промеж.)
Тогда мн-во точек пр-ва
$\Gamma=\{(x,y,z): x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in I\}$
наз. кривой в пр-ве
Кривая наз. непр (диф, непр. диф, т.д), если таковой же явл. в-ф
$\vec{r}$ с коор. ст $(x(t), y(t), z(t))^T$ на I.

Опр. Кривая $\Gamma:\{\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I\}$ наз. гладкой, если она непр. диф на I
и $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$ $\forall t\in I$ (в концах I рассм. одност. пр-ые)

Опр. Пусть одна и та же кривая параметризуется двумя способами:
$x=x_1(t), y=y_1(t), z=z_1(t)$ (т.е $\vec{r}=\vec{r}_1(t)$), $t\in I_1$
и
$x=x_2(u), y=y_2(u), z=z_2(u)$ (т.е $\vec{r}=\vec{r}_2(t)$), $u\in I_2$
причем ф-я $u=u(t)$ отображ. I_1 на I_2
Если ф-я $u(t)$ непр. диф. на I_1 и $u'(t)\neq 0$ $\forall t\in I_1$, то ф-я $u(t)$ наз.
допустимой заменой параметра (ДЗП)

Опр. Пусть $\Gamma=\{\vec{r}: \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))^T, t\in[a,b], a<b\}$ — гладкая крив;
ф-я f непр на мн-ве точек кривой Γ.
Тогда криволинейным интегралом первого рода *
$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ наз опред. инт. Римана:
$\int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\cdot|\vec{r}\,'(t)|\,dt$

Теорема 1 Значение $\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ не измен. при ДЗП на крив. Γ

□ Пусть $u=u(t)$ — непр. диф. ф-я; $u'(t)\neq 0$; отображ. промеж. I_1 на I_2.
(т.е допуст. зам. пар-ра ДЗП)
ф-я $u'(t)$ непр и отлична от 0 на I_1
По теор. Больцано-Коши или $u'(t)>0$ $\forall t\in I_1$, или $u'(t)<0$ $\forall t\in I_1$ (иначе
сущ. бы точка, в кот $u'(t_0)=0$). Т.е ф-я $u(t)$ моном.
Из этого отобр. I_1 на I_2 вз-од.

Тогда при первой парам-и ($t\in[\alpha,\beta]$):
$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta f(x_1(t), y_1(t), z_1(t))\,|\vec{r}_1\,'(t)|\,dt \qquad (1)$$
при второй ($u\in[a;b]$)
$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int\limits_a^b f(x_2(u), y_2(u), z_2(u))\,|\vec{r}_2\,'(u)|\,du \qquad (2)$$
Сделаем в (2) замену $u=u(t)$

$\vec{r}'(t) = \vec{r}'(u)\, u'(t)$

Получим

$$\pm\int_{\alpha}^{\beta} f(x_2(u(t)), y_2(u(t)), z_2(u(t))) \cdot |\vec{r}_2'(u(t))| \cdot u'(t)\, dt$$

Знак „+" при $u'(t) > 0$ (возраст. ф-и)

$u(\alpha) = a$; $u(\beta) = b$.

Знак „−" при $u'(t) < 0$ (убыв. ф-и)

$u(\alpha) = b$; $u(\beta) = a$

Т.к $\pm u'(t) = |u'(t)|$, то интеграл преобр. к виду

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \cdot |\vec{r}_2'(u(t)) \cdot u'(t)|\, dt$, т.е совп. с (1). ■

Из св-в опред. инт. Римана:

Св-ва крив. инт:

1) Линейность ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; Γ – глад. кр)

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\, ds = \alpha \int_{\Gamma} f(x,y,z)\, ds + \beta \int_{\Gamma} g(x,y,z)\, ds$$

2) Аддитивность от-но кривой интегр-я:

если $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a,b]\}$,

$\Gamma_1 = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a,c]\}$,

$\Gamma_2 = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [c,b]\}$; $a < c < b$, Γ – глад. кр., то

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\, ds = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\, ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\, ds$$

$\boxed{8.2}$ Криволинейный интеграл второго рода

Опр. Пусть $\Gamma = \{\vec{r} : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a,b], a < b\}$ – ориентир. гладкая кривая;

$\vec{\tau}$ – единич. век. касат. к Γ, соот. выбр. ориент.

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ – непр. в-ф от перем x, y, z на мн-ве точек Γ.

Тогда криволинейным интегралом второго рода $\int_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r})$ наз.

крив. инт. первого рода $\int_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau})\, ds$

Символ $\int_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r})$ м/б записан в коорд. виде:

$$\int_{\Gamma} (P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz)$$

<u>Замеч</u> Интеграл первого рода опред. без учета ориент. кривой; при смене ориент. вект $\vec{\tau}$ замен. на $(-\vec{\tau})$, поэтому при смене ориен. гл. кр. значение инт. второго рода изменится на противопол.

При ДЗП знач. инт 1-го р. не изм. Вектор $\vec{\tau}$ для ориент. кр. фиксир. Поэтому знач. инт 2-го р. не зав. от ДЗП.

9.1 Несобственный интеграл.

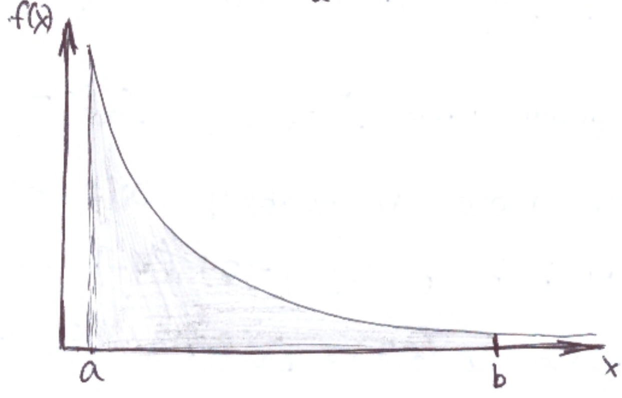
Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр. на луче $[a,+\infty)$ и для любого числа $b>a$ ф-я f инт на отр $[a,b]$.

Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ наз. $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

Если сущ. конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то говорят, что несоб. инт. $\int^{\infty} f(x)dx$ сходится, иначе расходится.

(Аналогично для $\int_{-\infty}^b f(x)dx$)

Интег. Римана буд. наз. собственным интегралом.



Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опр. на полуинтервале $[a,b)$ и инт. в собств. смысле на любом отр $[a,b']\subset[a,b)$. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ наз $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)dx$

(Аналогично опр. $\int_a^b f(x)dx$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{a'\to a+0}\int_{a'}^b f(x)dx$)

Лемма 1 Если сущ. собст. инт. $\int_a^b f(x)dx$, то несобст. инт. $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)dx$ и $\lim\limits_{a'\to a+0}\int_{a'}^b f(x)dx$ сущ. и равны собст. инт.

□ Поскольку ф-я f инт. в соб. см. на $[a,b]$, то она огр., т.е $\exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\le M$.

Поэтому $\left|\int_{b'}^b f(x)dx\right| \le M|b-b'| \to 0$ при $b'\to b-0$.

След-но, $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{\lim\limits_{b'\to b-0}\int_{b'}^b f(x)dx}_{=0} = \int_a^b f(x)dx$.

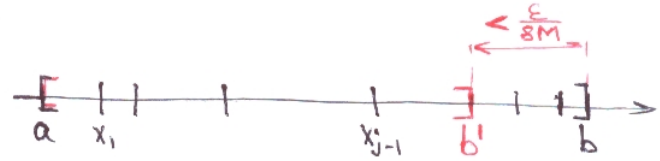
Аналогично, $\lim\limits_{a'\to a+0}\int_{a'}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ ■

Теорема 1 Пусть ф-я $f(x)$ опр. и огранич. на $[a,b]$, а на любом $[a,b']\subset[a,b)$ ф-я $f(x)$ инт-ма. Тогда сущ. собств. инт. $\int_a^b f(x)dx$.

□ Поскольку ф-я огр. на $[a,b]$, то $\exists M\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b] \hookrightarrow |f(x)|\le M$

Зафикс. произ. $\varepsilon>0$ и определим $b'\in[a,b)$ так, чтобы $b-b'<\frac{\varepsilon}{8M}$

Любому разб. $T=\{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр $[a,b]$ сопоставим разб. T' отр $[a,b']$, составл. из точек разб T, попавших на отр. $[a,b']$ и т. b': $T'=\{x_0,x_1,\dots,x_{j-1},b'\}$, где j опр. из усл. $x_{j-1}<b'\le x_j$.



Разобьем разность сумм Дарбу $\Delta(f,T)$ на два слагаемых:

$$\Delta(f,T) = \sum_{i=1}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f) = \Delta_{[a,x_{j-1}]} + \Delta_{[x_{j-1},b]}\text{, где}$$

$$\Delta_{[a,x_{j-1}]} = \sum_{i=1}^{j-1}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f) \quad ; \quad \Delta_{[x_{j-1},b]} = \sum_{i=j}^{I}(x_i - x_{i-1})\,\omega_i(f).$$

Заметим, что $\Delta_{[a,x_{j-1}]} \le \Delta(f,T')$

Кроме того, поскольку $\omega_i(f) \le 2M$, то $\Delta_{[x_{j-1},b]} \le 2M(b - x_{j-1}) =$

$= 2M(b - b' + b' - x_{j-1}) \le 2M(b - b' + \ell(T)) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + \ell(T)\right) = \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T).$

След-но, $\Delta(f,T) \le \Delta(f,T') + \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T).$

Поскольку ф-я f инт. на $[a,b']$, то в силу крит. инт.

$\exists \delta_0 > 0 : \forall T' : \ell(T') \le \delta_0 \mapsto \Delta(f,T') \le \frac{\varepsilon}{4}$

Определив $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{8M}\}$, получ., что для любого разб. T отр $[a,b]$ такого, что $\ell(T) \le \delta$, вып. $\ell(T') \le \ell(T) \le \delta \le \delta_0$, след-но, $\Delta(f,T') \le \frac{\varepsilon}{4}$

Поэтому

$$\Delta(f,T) \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall T : \ell(T) \le \delta \mapsto \Delta(f,T) \le \varepsilon.$

Отсюда по кр. инт. получаем сущ-е $\int_a^b f(x)\,dx$ в собств. смыс. ■

<u>Замечание</u> Аналог. можно док., что если огран. ф. на $(a,b]$ инт. на любом $[a',b] \subset (a,b]$, то эта ф-я инт на $[a,b]$.

Опр. Точка a наз. особой точкой несоб. инт. $\int_b^c f(x)\,dx$, если $b \le a \le c$ и ф-я f неогр. в любой окрес. т. a. Для несобств. инт. $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ символы $\pm\infty$ всегда счит. особ. т.

<u>Следствие</u> из леммы 1 и теоремы 1 след, что несобств. инт. $\int_a^b f(x)\,dx$ без особых т. всегда сход. В этом случ. сущ. собст. инт $\int_a^b f(x)\,dx$, равный несобств.

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ (Принцип локализации)
Пусть заданы $a, a_1 \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < a_1 < b$.
Пусть на $[a,b)$ опр. ф. $f(x)$, интег. в собст. смысле на $\forall [a,b'] \subset [a,b)$.
Тогда несобств. инт. $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{a_1}^b f(x)dx$ сход. или расх. одноврем.,
а в случае их сход-ти: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^b f(x)dx$. (1)

$\square$ Поскольку при $b' \in [a,b)$ имеет место
$\int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b'} f(x)dx$, то конеч. пред $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx$
и $\int_{a_1}^b f(x)dx = \lim\limits_{b' \to b-0} \int_{a_1}^{b'} f(x)dx$ сущ. или не сущ. одноврем., и в случае
их сущ. справедл. (1). $\blacksquare$

<u>Замечание</u> Принцип локализации состоит в том, что сход. несоб. инт. определяется поведением подынтегр. ф-и лишь в окрес-ти особой т.

Опр. Пусть на конечном или беск. промеж. (a,b) задана ф. $f(x)$, за исключ. т. x_i $(i = 0,\dots,I)$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_I = b$.
Пусть ф-я f инт. в собст. смысле на любом отр $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, не содерж. т. x_i.
Выберем произвольным образом т $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1,\dots,I)$.
Будем гов, что несоб. инт $\int_a^b f(x)dx$ сходится, если все несоб. инт с одной особ.
$\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx$ и $\int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx$ сход. В прот. случае $\int_a^b f(x)dx$ расход.
Если $\int_a^b f(x)dx$ сход, то опред. его знач. как сумму нес. инт с одной особ:
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx \right).$$

<u>Св-ва несоб. инт.</u>
1) Линейность несобст. инт.
Если ф-и f и g инт. в собств. смысле на любом отр. из $[a,b)$ и несобс. инт. $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сход, то $\forall$ чисел α, β несоб. инт. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ сход. и равен $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

2) Замена переменной.

Пусть непр. дифф., строго возр. ф-я $x(t)$ переводит промеж. $[t_0, \beta)$ в промеж. $[x_0, b)$. Пусть ф-я $f(x)$ непр на $[x_0, b)$. Тогда $\int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx = \int\limits_{t_0}^{\beta} f(x(t))x'(t)dt$, означ., что если хотя бы один из указан. интегралов сход, то другой сход. и их знач. равны.

9.2 Критерий Коши сходимости интеграла.

Теорема 1. (Крит. Коши)

Пусть ф-я f инт. в собст. смысле на любом отр. из пром $[a, b)$. Несобств. инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сх $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi \in (a, b): \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \mapsto$

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

□ Определим ф-ю $F(t) = \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$.

По опр. несоб. инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сход, если $\exists$ конеч. предел $\lim\limits_{t \to b-0} F(t)$.

Из. кр. Коши сущ. предела ф-и следует, что сущ. кон. $\lim\limits_{t \to b-0} F(t)$ экв-но тому, что для любого $\varepsilon > 0$ сущ. левая полуокр. (ξ, b) т. b такая, что $\forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \mapsto |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$.

Использ. ф. Ньютона-Лейбница и получаем требуемое ■

9.3 Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения.

Теорема 1 (Крит. сход-ти несоб. инт. от неотр. ф-и)

Пусть ф-я f инт. в собст. см. на любом отр. из $[a, b)$ и $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b)$. Тогда сх-ть инт. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ экв-на условию

$$\sup\limits_{b' \in [a,b)} \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx < +\infty$$

□ Поскольку $f(x) \geq 0$, то ф-я $F(b') = \int\limits_{a}^{b'} f(x)dx$ нестр. возр на $[a, b)$.

По теор. об одностор. пред. мон. ф-и. сущ. конеч. или бескон. пред. $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b') = \sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b')$

Нес. инт. ~~сх.~~ $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сх $\iff \exists$ конеч. $\lim\limits_{b' \to b-0} F(b')$, т.е когда

$$\sup\limits_{b' \in [a,b)} F(b') < +\infty \quad ■$$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Первый признак сравн)

Пусть ф-и f и g инт. в соб. см. на любом отр. из $[a,b)$ и $\forall x\in[a,b) \longrightarrow 0\le f(x)\le g(x)$. Тогда

а) Нес. инт $\int_a^b g(x)dx$ сх $\Rightarrow$ нес. инт. $\int_a^b f(x)dx$ сх.

б) Нес. инт $\int_a^b f(x)dx$ расх $\Rightarrow$ нес инт $\int_a^b g(x)dx$ расх.

□ Из $f(x)\le g(x)$ след, что $\sup\limits_{b'\in[a,b)} \int_a^{b'} f(x)dx \le \sup\limits_{b'\in[a,b)} \int_a^{b'} g(x)dx$.

Если $\int_a^b g(x)dx$ сх, то $\sup\limits_{b'\in[a,b)} \int_a^{b'} g(x)dx < +\infty$.

След-но, $\sup\limits_{b'\in[a,b)} \int_a^{b'} f(x)dx < +\infty$

По теор. 1 $\int_a^b f(x)dx$ сх. Пункт а) доказан.

Док-во б) след из док-ва а). ■

Опр. Буд. говорить, что неотр. ф-и $f(x)$ и $g(x)$ экв-ны в смысле сх-ти инт. при $x\to b-0$ и писать $f(x) \overset{cx}{\sim} g(x)$ при $x\to b-0$, если сущ. числа $m>0$, $M>0$, $b_1<b$ такие, что для любого $x\in[b_1,b)$ вып.

$m\,g(x)\le f(x)\le M g(x)$.

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (Второй признак сравнения)

Пусть неотр. ф-и f и g инт в соб. см. на любом отр из $[a,b)$ и экв-ны в смысле сх-ти инт. при $x\to b-0$. Тогда несоб. инт $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сх или расх. одновр.

□ Поскольку $f(x) \overset{cx}{\sim} g(x)$ при $x\to b-0$, то

$\exists m,M>0,\ \exists b_1\in[a,b): \forall x\in[b_1,b) \longrightarrow m\,g(x)\le f(x)\le M g(x)$.

В силу принц. локализ (лемма 2 $\boxed{9.1}$) сход. или расх. интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ не изм, если промеж. инт. $[a,b)$ зам. на $[b_1,b)$.

Пусть инт. $\int_a^b g(x)dx$ сх, тогда сх. и $\int_{b_1}^b g(x)dx$, и, след-но, сх. $\int_{b_1}^b M g(x)dx$.

Из теор. 2 след, что $\int_{b_1}^b f(x)dx$ сх., а значит, и $\int_a^b f(x)dx$ сх.

Аналог., из сх-ти $\int_a^b f(x)dx$ след. сх. инт $\int_a^b g(x)dx$ ■

9.4 Интегралы от знакопеременных функций, сходимость и абсолютная сходимость.

Опр. Гов., что несоб. инт. $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если
скод. несоб. инт $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 1 Пусть ф-я f инт в собс. см. на любом отр из $[a,b)$.
Если нес. инт $\int_a^b f(x)dx$ ск. абс, то этот несоб. инт скод.

□ Т.к $\int_a^b |f(x)|dx$ ск, то вып усл. Коши его ск-ти:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \xi\in(a,b): \forall b_1,b_2\in(\xi,b) \hookrightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

Поскольку $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|$ (см. теор. „интег. модуля"), то
вып. усл. Коши ск-ти $\int_a^b f(x)dx$, след-но, он скод ■

Замечание.
Для собств. инт. из инт. модуля ф-и не след. инт. самой ф-и.
Например, ф-я Дирихле.

Опр. Если несобственный интеграл скод, но не явл. абсол. скод.,
то говорят, что этот несоб. инт. сходится условно.

9.5 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема 1 (Признак Дирихле)
Пусть ф-я $f(x)$ непр., а ф-я $g(x)$ непр. диф. на $[a,b)$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Пусть вып. усл:
1) первообразная ф. $f(x)$ ограничена на $[a,b)$
2) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$
3) ф-я $g(x)$ нестрого убывает на $[a,b)$, т.е $g'(x)\le 0\ \forall x\in[a,b)$.

Тогда несоб. инт $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ скод.

□ По усл. пер-я $F(x)$ ф-и $f(x)$ огр, т.е $\exists C\in\mathbb{R}: \forall x\in[a,b) \hookrightarrow |F(x)|\le C$. (1)
Для произ. $b'\in(a,b)$ воспольз. форм. интег. по частям:

$$\int_a^{b'} f(x)g(x)dx = \int_a^{b'} g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x)g'(x)dx. \qquad (2)$$

Заметим, что в силу ф. Н-Л. $\lim\limits_{b'\to b-0}\int_a^{b'} g'(x)dx = \overbrace{\lim\limits_{b'\to b-0} g(b')}^{=0} - g(a) = -g(a)$.

$\Rightarrow$ нес. инт $\int_a^b g'(x)\,dx$ скод.

Отсюда ~~след.~~ и из рав-ва $|g'(x)| = -g'(x)$ след. сх-ть $\int_a^b |g'(x)|\,dx$, а значит, и инт. $\int_a^b C|g'(x)|\,dx$.

Учит. усл (1), в силу призн. срав. получ. сх-ть $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$.

Отсюда по теор. 1 $\boxed{9.4}$ получ. сх-ть $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$.

Иными словами,

$$\exists \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} F(x)g'(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Поскольку ф-я $F(x)$ огр и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)F(x) = 0$, поэтому сущ. конеч. предел $\lim\limits_{b'\to b-0} g(x)F(x)\Big|_a^{b'} = -g(a)F(a)$.

Отсюда и из условий (2) и (3) получ. сущ-е конечн.:

$\lim\limits_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)g(x)\,dx$, т.е сх-ть $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ∎

Теорема 2 (Признак Абеля)

Пусть ф-я $f(x)$ непр., а ф-я $g(x)$ непр. диф. на $[a,b)$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Пусть вып. усл:

1) $\int_a^b f(x)\,dx$ сход.
2) ф-я g огр. на $[a,b)$
3) ф-я g нестрого убыв. на $[a,b)$, т.е $g'(x)\leq 0$ $\forall x\in[a,b)$.

Тогда несобст. инт $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сход.

□ Т.к ф-я g нестр. уб. и огр. на $[a,b)$, то $\exists \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$

Заметим, что ф-я $\tilde{g}(x) = g(x) - g_0$ нестр. уб на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0}\tilde{g}(x) = 0$

Поэтому в силу пр. Дирихле $\int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,dx$ сх.

Поскольку $f(x)g(x) = f(x)\tilde{g}(x) + f(x)g_0$, причем $\int_a^b f(x)\,dx$ сх. по усл., то по св-ву линейности $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сход. ∎

$\boxed{10.1}$ Числовые ряды

Опр. Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Число $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ наз. n-ой частичной суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Элементы посл-ти $\{a_k\}$ наз. членами этого ряда.
Суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. предел част. сумм:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. сходящимся, если сущ. конечный предел час. сумм
в противном случае ряд наз. расходящимся.

Теорема 1 (Необх. усл. сх. ряда)
Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

□ Поскольку ряд сх, то сущ. $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
След-но, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{=a_n} = S - S = 0$$
След-но, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

Лемма 1 (Принцип локализации)
$\forall k_0 \in \mathbb{N}$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сх. или расх. одновременно.

□ $\forall n \in \mathbb{N}: n > k_0$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$
Переходя к пределу при $n\to\infty$, получ. треб ■

Лемма 2 (Св-во линейности)
Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ сх

□
$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$
Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то предел правой части при $n\to\infty$ конечен
Переходя к пределу, получ. треб. ■

Следствие
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сх} \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ расх} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \text{ расх.}$$

10.2 Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 1 (Кр. Коши)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх $\Longleftrightarrow$ вып. усл. Коши: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|\leq \varepsilon$

□ По опр. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, если сх. посл-ть част. сумм $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

В силу кр. Коши для посл-тей сх-ть $\{S_n\}$ эквив. её фунд-ти:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow |S_{n+p}-S_n|\leq \varepsilon$

Т.к $S_{n+p}-S_n=\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$, то теор. доказана ■

10.3 Верхний и нижний пределы последовательности

Для посл-ти $\{a_n\}$ определим

$M_n=\sup\limits_{k\geq n} a_k := \sup\{a_k : k\geq n\}$

$m_n=\inf\limits_{k\geq n} a_k := \inf\{a_k : k\geq n\}$

Поскольку $\{a_k : k\geq n\}\supset\{a_k : k\geq n+1\}$, то $m_n\leq m_{n+1}\leq M_{n+1}\leq M_n$

т.е послед $\{m_n\}$ нестрого $\uparrow$, а $\{M_n\}$ нестрого $\downarrow$

Так что эти послед-ти всегда имеют пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ и след опр. корректны

Опр. Пусть $\{a_n\}$ – посл-ть.

Тогда

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{a_k : k\geq n\}=\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ – верхний предел $\{a_n\}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\{a_k : k\geq n\}=\lim\limits_{n\to\infty} m_n$ – нижний предел $\{a_n\}$

Теорема 1 Верхний пр (нижний пр) посл-ти – наибольший (соот, наим) из её частичных пределов в $\overline{\mathbb{R}}$.

□ Пусть $\{a_n\}$ – послед-ть.

Нужно показать, что верх. пр M и нижн. пр. m явл. част. пр. и все част пр лежат между m и M.

Случай 1 $M=\lim\limits_{n\to\infty} M_n=+\infty$

M_n нестрого $\downarrow$, т.е все $M_n=+\infty$

Поскольку $M_1=+\infty$, то $\exists n_1: a_{n_1}\geq 1$

Из усл. $M_{n_1+1}=+\infty$ вытекает сущ-е $n_2\geq n_1+1>n_1$ т, что $a_{n_2}\geq 2$ и т.д.

По инд. $\exists n_k : a_{n_k}\geq k$ и $\{n_k\}$ стр. $\uparrow$.

То есть мы построили п/п $a_{n_k}\to+\infty$ при $k\to\infty$.

Случай 2 $M=-\infty$

По опр $M_n\geq a_n\ \forall n\in\mathbb{N}$ и $M_n\to-\infty \Rightarrow a_n\to-\infty$

Случай 3 $-\infty<M<+\infty$

По опр. sup. $\exists n_1: M_1-1<a_{n_1}\leq M_1$

Далее, $\exists n_2\geq n_1+1>n_1$ т, что $M_{n_1+1}-\frac{1}{2}<a_{n_2}\leq M_{n_1+1}$ и т.д

Так что индуктивно опред. п/п $\{a_{n_k}\}$ с усл.

$M_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Т.к $M_{n_{k-1}+1} \to M$, $k \to \infty$, то по теор. о зажат. посл-ти $a_{n_k} \to M$.

Док-во того, что m явл ч.п аналогично.

Пусть $\{a_{n_k}\}$ – п/п $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a$

Т.к $n_k \geq k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $a_{n_k} \in \{a_m : m \geq k\}$ и, значит, выполн нер-во

$m_k \leq a_{n_k} \leq M_k$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получ. $m \leq a \leq M$ ∎

<u>Следствие</u> $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$

10.4 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.

Теорема 1 (Кр. сход-ти ряда с неотриц. чл)

Если $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эквив. огранич-ти его част.с:

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$

□ Поскольку посл. ч.сумм нестрого ↑, то ∃ кон. или беск. предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх $\iff$ этот предел конечен, т.е $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ ∎

Теорема 2 (Первый пр. сравн)

Если $0 \leq a_k \leq b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расх.

□ а) $a_k \leq b_k \Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k < +\infty$, поэтому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k < +\infty$

и по теор.1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) Аналогично ∎

~~Теорема 3~~

Опр. Буд. гов, что посл-ти с неотр. чл. $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ эквивалентны в смысле сходимости рядов и писать $a_k \overset{cx}{\sim} b_k$, если ∃ числа $m>0, M>0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$m b_k \leq a_k \leq M b_k \quad \forall k \geq k_0.$

$\boxed{\text{Теорема 3}}$ (Второй пр. сравн)

Пусть $\exists k_0: \forall k \geq k_0 \mapsto a_k \geq 0, b_k \geq 0$ и $a_k \overset{cx}{\sim} b_k$.

Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сх или расх. одновр.

$\square$ Док-во состоит в примен. 1-го пр. сравн. и принципа локализации (аналог., как у несобств. инт) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 4}}$ (Интегральный признак)

Пусть на луче $[1;+\infty)$ задана монот. ф. $f(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх или расх одновремен.

$\square$ Из монот. $f(x)$ след. сущ-е предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1) $A \neq 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ расх в силу НУ сх-ти ряда (теор 1 $\boxed{10.1}$);

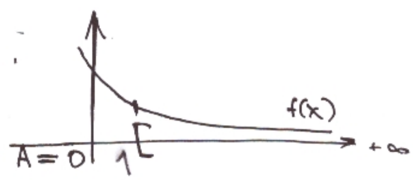
а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расх в силу 2-го пр. срав. (теор 3 $\boxed{9.3}$)

В случае $A \neq 0$ теор. справ.

2) $A = 0$

Пусть для опр-ти f нестрого $\downarrow$.

Тогда $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$



Проинтег. нер-ва $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$ по отр $[k,k+1]$, получим:

$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Просуммируем получ. нер-ва по k от 1 до n:

$$S_{n+1} - f(1) \leq F(n+1) \leq S_n, \text{ где} \qquad (1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k); \; F(t) = \int\limits_1^{t} f(x)dx$$

Поскольку $f(x) \geq 0$, то ф-я $F(t)$ нестр $\uparrow$

След-но, $F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1]$ (2)

Из (1) и (2):

$$S_n - f(1) \leq F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) \leq S_n \quad \forall x \in [n, n+1]$$

След-но, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n - f(1) \leq \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$, т.е $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty \sim \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$

В силу кр. сх. ряда с неотр. чл. (теор. 1 $\boxed{10.4}$) усл. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n < +\infty$ эквив. сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, а в силу кр. сх. инт. от зн/пост ф (теор 1 $\boxed{9.3}$) усл $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} F(x) < +\infty$ эквив. сх. инт $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интег $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх. или расх. одновр. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 5}}$ (Признак Даламбера)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

а) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ такие, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ $\forall k \geq k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх;

б) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх.

$\square$

а) По инд. $a_k \leq a_{k_0} q^{k-k_0}$ $\forall k \geq k_0$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сх. при $q \in (0,1)$, то ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0} q^{k-k_0}$ также сх.

и по пр. сравн. сх. ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

В силу пр. локализ. сх и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

б) Если $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ при $k \geq k_0$, то $a_k \geq a_{k_0}$, $k \geq k_0$

След-но, $a_k \not\to 0$ $(k \to \infty)$, т.е не вып НУ сх. ряда, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх $\blacksquare$

$\boxed{\text{Следствие}}$ (пр. Даламбера в пред. форме)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. и $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. Тогда

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх

в) при $q = 1$ ряд может сх, а может расх.

$\square$

а) Определим $q' = \frac{q+1}{2}$

Поскольку $q < 1$, то $q < q' < 1$.

По опр. предела $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q' < 1$

Из теор 5(а) след, что ряд $\sum a_k$ сх.

б) По опр. предела

$\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \mapsto \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$.

Из теор 5(б) след, что ряд $\sum a_k$ расх.

в) Пусть $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$

Тогда

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Однако при $\alpha \leq 1$ ряд $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ расх

при $\alpha > 1$ ряд $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ сх $\blacksquare$

$\boxed{\text{Теорема 6}}$ (Признак Коши)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Тогда

а) если сущ. $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ т, что $\sqrt[k]{a_k} \le q$ $\forall k \ge k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх.

б) если сущ $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \ge k_0 \hookrightarrow \sqrt[k]{a_k} \ge 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх.

□

а) Если $\sqrt[k]{a_k} \le q$ $\forall k \ge k_0$, то $a_k < q^k$ $\forall k \ge k_0$

В силу приз. срав. и прин. локал. из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ след. сх. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

б) Если $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ при $k \ge k_0$, то $a_k \ge 1$ при $k \ge k_0$.

т.е не вып НУ сх. ряда и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх ■

$\boxed{\text{Следствие}}$ (пр. Коши в пред. ф)

Пусть $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$. Тогда

а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх

б) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расх

в) при $q = 1$ ряд мож. сх, а мож. расх

□ Аналог. след. из пр. Даламбера ■

$\boxed{10.5}$ Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.

Опр. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ наз. условно сходящимся, если этот ряд сходится, но не явл. абсол. сход-ся.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Ряд абс. сх $\Rightarrow$ ряд сх.

□ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх. абс.

Тогда вып. усл. Коши сх. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge N$ $\forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| \le \varepsilon$

След-но,

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge N$ $\forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \le \varepsilon$,

т.е вып. усл. Коши сх. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, и он сх ■

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ абс. сх, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абс. сх.

□ В силу св-ва лин-ти из сх-ти рядов $\sum |a_k|$, $\sum |b_k|$ след. сх-ть ряда $\sum (|\alpha| \cdot |a_k| + |\beta| \cdot |b_k|)$

Поскольку $|\alpha a_k + \beta b_k| \le |\alpha||a_k| + |\beta||b_k|$, то $\sum |\alpha a_k + \beta b_k|$ сх в силу пр. срав ■

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Признак Дирихле)

Пусть послед-ть част. сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \mapsto \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq C ;$$

а послед-ть $\{b_k\}$ монот. стремится к нулю.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх.

$\square$ Для опр-ти пусть $\{b_k\}$ нестр. уб.: $b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}), \ A_0 = 0$$

Выполним преоб-я Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \overset{\text{т.к}}{\underset{A_0=0}{=}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

След-но,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad (1)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} b_1, \text{ т.е ряд } \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \text{ сх,}$$

след-но, сх. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C(b_k - b_{k+1})$

Поскольку $b_k - b_{k+1} \geq 0$ и $|A_k| \leq C$, то

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq C |b_k - b_{k+1}| = C(b_k - b_{k+1})$$

Из пр. сравн. получ. абс. сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$

В силу теор 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ сх.

Поскольку $\{A_n\}$ – огр. посл., а $\{b_n\}$ – б/м посл, то $\lim\limits_{n \to \infty} A_n b_n = 0$

Отсюда из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ и из ф-лы (1) след. сущ-е конечного предела

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{\lim_{n \to \infty} A_n b_n}_{=0} + \lim \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

т.е сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ∎

Теорема 3 (Признак Лейбница)
Если посл-ть $\{b_k\}$ монот. стрем. к нулю, то ряд Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сх.

$\square$ Заметим, что посл-ть част. сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ огран:

$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k = 0; \quad \sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k = -1 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

След-но, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

В силу пр. Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сх $\blacksquare$

Теорема 4 (Признак Абеля)
Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сх, послед. $\{b_k\}$ монот и огр.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сх.

$\square$ Т.к посл-ть $\{b_k\}$ монот и огр, то сущ $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b_0 \in \mathbb{R}$

Поэтому посл-ть $\{b_k - b_0\}$ монот. стрем к нулю.

Из сх-ти ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ след. огран. послед. част. сумм. этого ряда

Поэтому согл. пр. Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b_0)$ сх.

Отсюда и из сх-ти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ вытекает сх-ть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ $\blacksquare$

10.6 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Коммутативность сложения $(a+b=b+a)$ формулируется для 2-х слаг и по индукции распространяется на сумму конечного числа слаг. Если же число слаг. бесконечно, то такая „счетная ~~адд~~ коммут-ть" имеет место лишь для абсолютно сх-ся рядов.

Лемма 1 Если ряд с действ. <u>неотриц.</u> членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, составленный из тех же чисел u_n, но в другом порядке, сх-ся к той же сумме.

$\square$ Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Тогда $\forall m \to \sum\limits_{k=1}^{m} v_k \le S$

Т.к сх-ть ряда с неотр. чл. эквив. огр-ти его част. сумм (т.1 10.4), то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сх и его сумма $S' \le S$

Т.к ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ равноправны, то аналог. $S \le S'$. $\Rightarrow S' = S$ $\blacksquare$

Введем след. обознач:

$u^+ = \dfrac{u+|u|}{2}$; $u^- = \dfrac{|u|-u}{2}$, $u \in \mathbb{R}$ (полож. и отриц. часть числа u). Ясно, что

$u^+ = \begin{cases} u, & u \ge 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$; $u^- = \begin{cases} 0, & u > 0 \\ -u, & u \le 0 \end{cases}$

$u = u^+ - u^-$; $|u| = u^+ + u^-$

$u^+ \ge 0$, $u^- \ge 0$ $\forall u$

Лемма 2 Если ряд с действ. чл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. абс., то сход-ся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расх.

□ Ясно, что $0 \le u_n^+ \le |u_n|$
$0 \le u_n^- \le |u_n|$

Поэтому из сх-ти ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ след. сх-ть рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл.

Т.к $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ не могут одновремен. сх-ся

Но если один из них сх, другой расх, то из рав-ва $u_n = u^+ - u^-$ след расх-ть ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Значит, оба расх. ■

Теорема I (Незав-ть суммы абс. сх. ряда от пор. слаг)

Если ряд с действ. чл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абс. сх, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, состав. из тех же чисел u_n, но в др. пор, также сх. абс, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

□ Т.к ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сх., то по лемме 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n|$ также сх-ся, т.е ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сх. абс.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$$

Оба эти ряда с неотриц. чл. сх. по лемме 2.

Т.к v_n^+ и v_n^- — это те же u_n^+ и u_n^-, но в др. пор, то по лемме 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} v_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n^+ - v_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad ■$$

10.7 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда (без доказательства)

Теорема II Если ряд с действ. членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сх. усл, то $\forall$ числа $S \in \mathbb{R}$ найдется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, составленный из тех же чисел u_n, но в др. пор, такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S$

□ :Р ■

+ см. комм-й к теор. (Петрович с 209-210)

$\boxed{10.8}$ Произведение абсолютно сходящихся рядов.

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Пусть ряды с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абс. сх.
Тогда ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$, составленный из всевозможных попарных произведений $u_i v_j$, также сх. абс.

При этом $S = S_1 \cdot S_2$, где $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

□ По теор 1 $\boxed{10.6}$ сх-ть ряда $\sum u_i v_j$ и значение $S = \sum u_i v_j$ не зав от пор. слаг. Поэтому достат. доказать абс. сх-ть ряда при некот. фиксир. порядке суммирования, напр, „по квадратам" (см. рис)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
u_1 v_1 & \to & u_1 v_2 & & u_1 v_3 & \to & \dots & u_1 v_n & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \\
u_2 v_1 & \leftarrow & u_2 v_2 & & u_2 v_3 & & \dots & u_2 v_n & \dots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & & & \\
u_3 v_1 & \to & u_3 v_2 & \to & u_3 v_3 & & \dots & u_3 v_n & \dots \\
\dots & & & & & & & & \\
u_n v_1 & & u_n v_2 & & u_n v_3 & & \dots & u_n v_n & \dots \\
\dots & & & & & & & &
\end{array}
$$

При таком порядке для част. сумм ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$:

$$S^*_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} |u_i v_j| = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |v_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |v_j| \equiv A$$

т.к посл-ть S^*_n возр. и её п/п $S^*_{n^2}$ огр., то и посл. S^*_n огр, значит, сх-ся.

Поэтому ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |u_i v_j|$ сх при суммир-и „по квадр", а значит, и любым другим способом.

Итак, ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ сх. абс., и его сумма S не зав. от пор. слагаемых ~~сум-ст~~.

Тогда для частичных сумм этого ряда при сум-и „по квадр"

$$S_{n^2} = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \sum_{j=1}^{n} v_j \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n^2} = S_1 S_2$$

Но посл-ть S_n сх к пределу $S = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$, тогда $S = S_1 S_2$ ■

$\boxed{\text{П.1}}$ Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Опр. Пусть на мн-ве X заданы функции $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$

Буд. гов, что функциональная послед-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к ф-и $f(x)$ на мн-ве X и писать $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$ при $n\to\infty$, если $\forall x\in X \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т.е

$$\boxed{\forall x\in X}\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \qquad (1)$$

Опр. Буд. гов, что функ-я послед-ть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к ф-и $f(x)$ на мн-ве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} ; \forall n\geq N\ \boxed{\forall x\in X} \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \qquad (2)$$

Замеч1 Отличие условий (1) и (2) в том, что в усл.(1) число N свое для каждого x (т.е $N=N(x,\varepsilon)$); а в усл (2) число N не зав. от x (т.е $N=N(\varepsilon)$)

Поэтому из р.сх. след. поточ. сх.

Замеч2 Если $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$ при $n\to\infty$, но $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$,

то посл-ть $\{f_n(x)\}$ не мож. сх. равн к другой ф-и $g(x)$

(т.к $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} g(x), n\to\infty \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[X]{} g(x), n\to\infty$)

В этом случае гов, что послед-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и $f(x)$ неравномерно на мн-ве X.

Теорема 1 (Крит. р.сх ф-й посл-ти)

$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty \iff \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$

$\square$ Поскольку условие $\forall x\in X \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ эквив-но усл $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, то усл (2) эквив. усл:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N \hookrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$,

т.е $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$ ■

Следствие 1

Посл-ть $\{f_n(x)\}$ сх. к ф-и равном на мн $X \iff$

$\exists$ числовая посл. $\{a_n\}$:

$$\forall x\in X\ \forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq a_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad (3)$$

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$

Определим $a_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. Из теор1 получ. усл (3)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (3). Тогда

$\forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow 0 \leq \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \leq a_n$

Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ по теор о зажат. посл-ти получ.
$\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$
По теор 1 это равносильно тому, что $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ ▪

$\boxed{\text{Следствие 2}}$
$f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ $\iff \exists\{x_n\}\subset X:\ f_n(x_n)-f(x_n) \not\to 0$ при $n\to\infty$ (4)

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.
Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим $M_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$.
По опр. sup: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in X$:

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| > \begin{cases} M_n - \frac{1}{n}, & M_n\in\mathbb{R} \\ 1, & M_n = +\infty \end{cases} \quad (5)$$

Предпол, что $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$ при $n\to\infty$.
Тогда $\exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N \mapsto |f_n(x_n)-f(x_n)|<1$.
След-но, согл. (5), получ. $M_n\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$.
Отсюда и из (5) получ, что $M_n \le \underbrace{|f_n(x_n)-f(x_n)|}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} \to 0,\ n\to\infty$

Последнее соотношение в силу теор 1 противоречит усл. $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x), n\to\infty$.
Поэтому предположение $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0,\ n\to\infty$ неверно.
Значит, вып. усл. (4)
$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть вып. усл (4).
Тогда $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)| \not\to 0,\ n\to\infty$.
След-но, $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \not\to 0$ и по теор 1 $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ ▪

Опр. Пусть на мн-ве X задана функц-я посл-ть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.
Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ наз. равномерно сходящимся на мн-ве X, если посл-ть его част. сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сх. равн. на мн. X к сумме $S(x)$ этого ряда.
Аналогично опред. поточечная сходимость ряда.

Опр. Остатком поточечно сх-ся ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ наз
$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ (Крит. р.сх ф. ряда)
Поточ. сх. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сх. равн. на $X \iff r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$,
т.е $\sup\limits_{x\in X}|r_n(x)| \to 0,\ n\to\infty$

□ След. из опр. и теор 1 ▪