⑥ Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

$q \to \varphi$
$kq \to k\varphi$ $\Rightarrow$ отношение $\frac{\varphi}{q}$ характеризует проводник.

↑ т.к. по принципу суперпозиции работа по перемещению пробного заряда на бесконечность увеличится в k раз

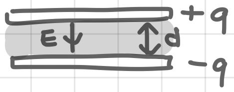
definition
$C = q/\varphi$ или $q = C\varphi$. C называется **ёмкостью проводника**

рассмотрим систему двух проводников.
] на одном проводнике заряд $-q$, а на другом $+q$.

$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- \propto q \Rightarrow$ ёмкость (взаимная ёмкость) определяется как

ёмкость пары проводников $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ или $q = C\Delta\varphi = C(\varphi_+ - \varphi_-)$

плоский конденсатор — две близко расположенные плоские пластины. поле внутри конденсатора однородное, а краевые эффекты слабо влияют на распределение зарядов и энергию, запасаемую в конденсаторе



если $\sqrt{S} \gg d$, то вне конденсатора поле практически отсутствует, а внутри оно почти всюду однородное с напряжённостью

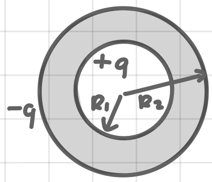
$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \text{ (по } \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \text{ от каждой пластины)}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{(+)}^{(-)} E\,dx = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} d = \frac{4\pi q}{\varepsilon S} d$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

сферический конденсатор — две концентрические проводящие сферы, одна из которых несёт положительный заряд, а другая — такой же по модулю, но отрицательный. пространство м/у сферами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε.

по th Гаусса поле вне $= 0$



$R_1 < r < R_2$:

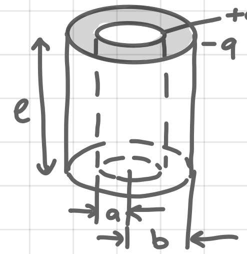
$$\varphi(r) = \frac{q}{\varepsilon r}$$

разность потенциалов м/у обкладками:

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{q}{\varepsilon R_1} - \frac{q}{\varepsilon R_2}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

цилиндрический конденсатор — система из двух коаксиальных проводящих цилиндрических оболочек, м/у которыми находится диэлектрик.



$$\oint \vec{D}\,d\vec{S} = 4\pi q$$

$$D \cdot 2\pi r\ell = 4\pi q \Rightarrow D = \frac{2q}{r\ell} \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{2q}{\varepsilon r\ell}$$

↑ поле напр. по радиусу

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{(+)}^{(-)} E\,dr = \frac{2q}{\varepsilon\ell}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon\ell}{2\ln(b/a)}$$

Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников

чтобы сблизить два заряда q_1 и q_2 до расстояния r_{12}, нужно совершить работу против сил поля $A_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

⇓

$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ — энергия, кот. обладает рассматриваемая пара

$\{q_1, \ldots, q_n\}$ — их **взаимная энергия**:

$$U = \sum_{\substack{i,k \\ i<k}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$$

потенциал поля в точке нахожд. i-го заряда, создаваемый всеми зарядами кроме i-го, равен $\varphi_i = \sum_{k, k\neq i} q_k/r_{ik}$

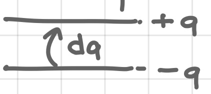
тогда потенциальная энергия всей системы зарядов:

$U=\frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\sum_{k\neq i}\frac{q_k}{r_{ik}}\right)=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$

если заряды непрерывно распределены в пр-ве с объёмной плотностью $\rho(\vec r)$ и по поверхностям с поверхностной плотностью $\sigma(\vec r)$, то

$$U=\frac{1}{2}\int_V\rho(\vec r)\varphi(\vec r)\,dV+\frac{1}{2}\int_S\sigma(\vec r)\,\varphi(\vec r)\,dS$$

рассмотрим плоский конденсатор (поле однородно и локализовано в конденсаторе)



работа по переносу dq: $dU=\varphi\,dq$, где $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$

$$dU=\frac{q}{C}dq\Rightarrow U=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}q\varphi=\frac{1}{2}C\varphi^2$$

$$C=\frac{q}{\varphi}$$

$U=\frac{1}{2}C\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{4\pi d}(Ed)^2=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}V$, где $V=Sd$ — объём конденсатора

тогда

объёмная плотность энергии

$$w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}=\frac{ED}{8\pi}=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$$

$dU=\varphi\,\delta q$

$D=4\pi\sigma=4\pi\frac{q}{S}\Rightarrow\delta D=\frac{4\pi}{S}\delta q\Leftrightarrow\delta q=\frac{S}{4\pi}\delta D$

$\Downarrow$

$dU=\varphi\,\delta q=Ed\,\frac{S}{4\pi}\delta D=\frac{\vec E\,\delta\vec D}{4\pi}V$

$\Downarrow$

$\delta w=\frac{\vec E\,\delta\vec D}{4\pi}$ — применима для расчёта энергии поля со сложной связью $\vec E$ и $\vec D$

общий вывод энергии эл. поля:

$\delta U=\int\delta\rho(\vec r)\varphi(\vec r)\,dV$ — вариация энергии системы зарядов

по th Гаусса $\delta\rho=\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\delta\vec D$

$$\delta U=\frac{1}{4\pi}\int\varphi\operatorname{div}\delta\vec D\,dV=\frac{1}{4\pi}\int[\operatorname{div}(\varphi\delta\vec D)-\delta\vec D\operatorname{grad}\varphi]\,dV$$

$$[\operatorname{div}a\vec A=(\vec A\nabla a)+a(\nabla\cdot\vec A)]$$

$$\int\operatorname{div}(\varphi\delta\vec D)\,dV=\oint_{S_\infty}(\varphi\delta\vec D)\,d\vec S=0$$

← замкнутая бесконечно удалённая пов-ть

$$\delta U=[\vec E=-\operatorname{grad}\varphi]=\int\frac{\vec E\,\delta\vec D}{4\pi}dV$$

собственная и взаимная энергия зарядов

$U_q=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\frac{q_iq_k}{r_{ik}}$ — м.б. как >0, так и <0.

$U_E=\int\frac{E^2}{8\pi}dV\geq 0$

при переходе от U_q к U_E мы включили в энергию часть, представляющую собой собственную энергию зарядов

q_1 $\cdot q_2$ $\quad U_1=\int\frac{E_1^2}{8\pi}dV\quad U_2=\frac{E_2^2}{8\pi}dV$

$U=\int\frac{(\vec E_1+\vec E_2)^2}{8\pi}dV=U_{собст}+U_{вз}$

$U_{собст}=U_1+U_2$

$U_{вз}=\int\frac{\vec E_1\cdot\vec E_2}{4\pi}dV$