СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ (3.6.1)

Солодилов Михаил Б01-306

30 октября 2024 г.

1 Аннотация

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров;

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

2 Теоретическое введение

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega_1 t) + b_n\sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\dfrac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0\frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(n\Omega_1 t)dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\frac{\tau}{2})}{n\Omega_1\frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

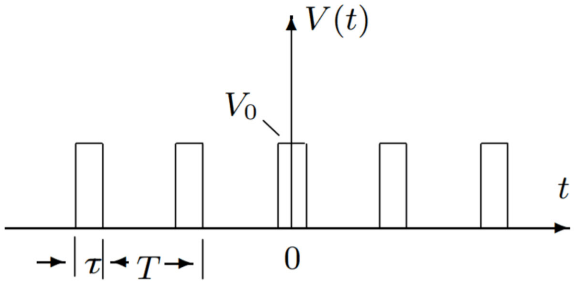


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

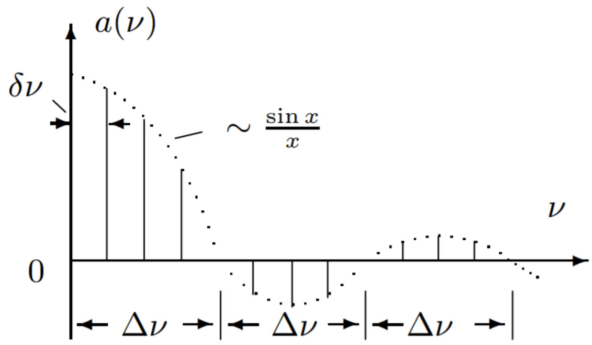


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \backsimeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \backsimeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

   Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(\omega_0 t)\cos(n\Omega_1 t)dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right)$$

   Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0.

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$)) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos\Omega t]\cos\omega_0 t$$

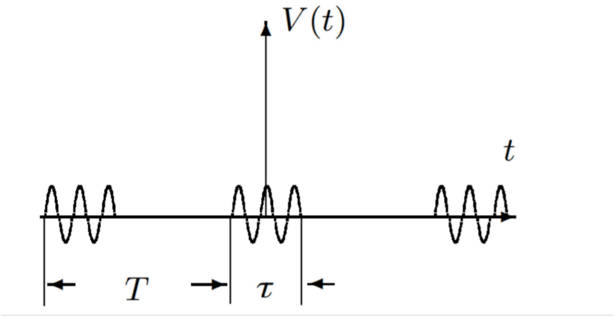


Рис. 3: Последовательность цугов

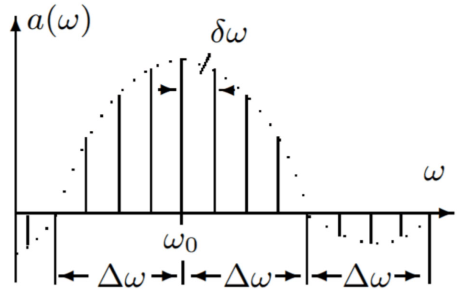


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

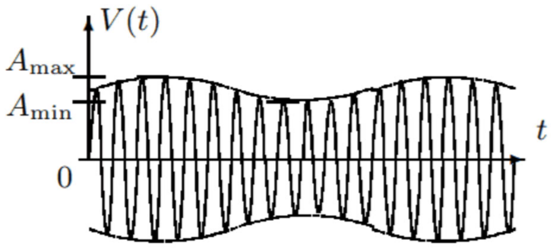


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

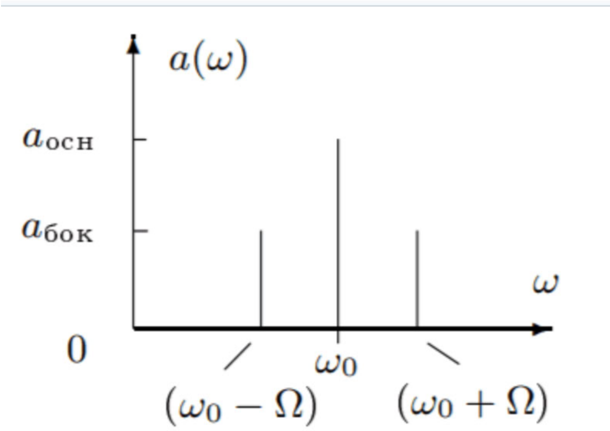


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

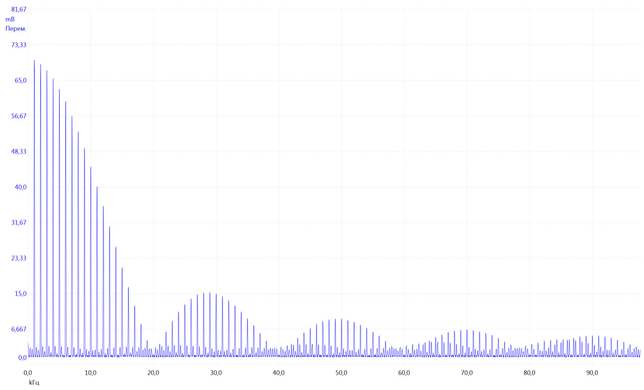
3 Ход работы

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

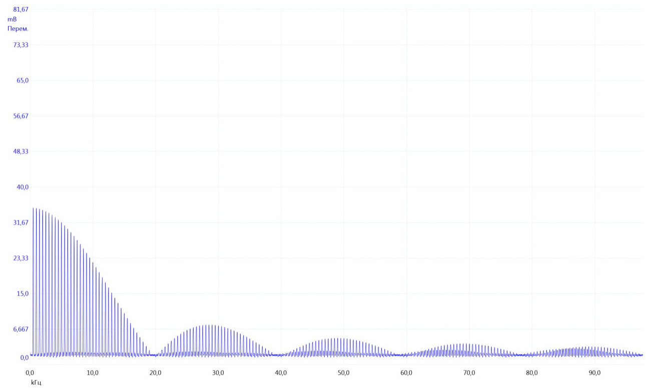
1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс.

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.

а. Изменяем $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированном $\tau = 50$ мкс и получаем.



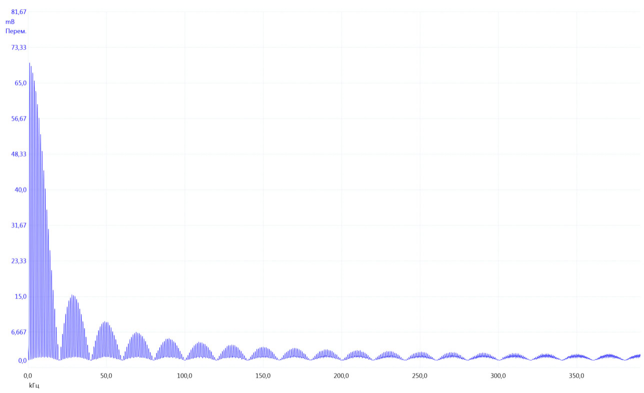
$\nu_{\text{повт}} = 1000$ Гц



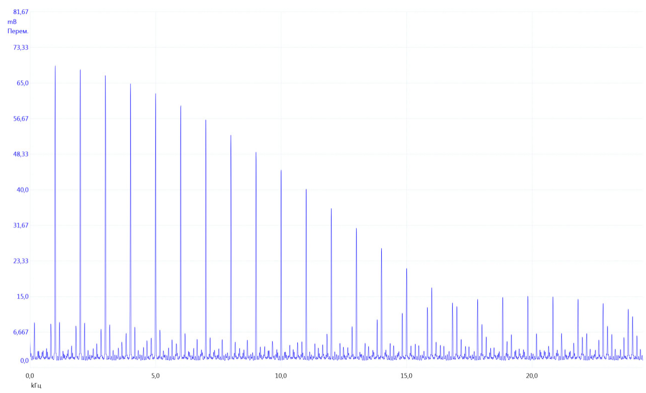
$\nu_{\text{повт}} = 500$ Гц

При уменьшении частоты повторения сигнала уменьшается амплитуда.

б. Изменяем τ при фиксированном $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц и получаем:



$\tau = 50$ мкс



$\tau = 25$ мкс

Как видно из графиков, при уменьшении длительности сигнала увеличивается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды a_n и частоты ν_n спектральных гармоник при фиксированных $\nu_{\text{повт}} = 3$кГц и $\tau = 50$ мкс.

n гармоники	1	2	3	4	5	6
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	0.952	1.991	3.030	3.989	5.028	6.067
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	1	2	3	4	5	6
$\lvert a_n\rvert^{\text{эксп}}$, усл.ед	69.9800	69.2600	67.6200	65.6800	63.2200	60.2400
$\lvert a_n/a_1\rvert_{\text{эксп}}$	1	0.9897	0.9663	0.9386	0.9034	0.8608
$\lvert a_n/a_1\rvert_{\text{теор}}$	1	0.9877	0.9674	0.9393	0.9040	0.8619

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$
$$|a_n|_{\text{теор}} = \frac{\left|\sin\frac{\pi n \tau}{T}\right|}{\pi n}$$

4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала $T = 1$мс, $\nu_{\text{повт}} = 1$кГц. Изменяя длительность импульса τ в диапазоне от $\tau = T/50$ до $\tau = T/5$, измерим полную ширину спектра сигнала $\Delta\nu$ — от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$ и установим зависимость между $\Delta\nu$ и τ, полученную из формулы **??**.

τ, мкс	20	50	80	110	140	170	200
$\Delta\nu$, кГц	50.00	20.05	12.54	9.01	6.98	5.91	4.93
$1/\tau \cdot 10^3$, с$^{-1}$	50.0	20.0	12.5	9.1	7.1	5.9	5.0

Таблица 1: Исследование зависимости $\Delta\nu$ и τ

Построим график $\Delta\nu\left(\frac{1}{\tau}\right)$. Используя МНК, получим $k = 1.002 \pm 0{,}003$, откуда с хорошей точностью можем заключить, что $\Delta\nu\frac{1}{\tau} = 1$, что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.7

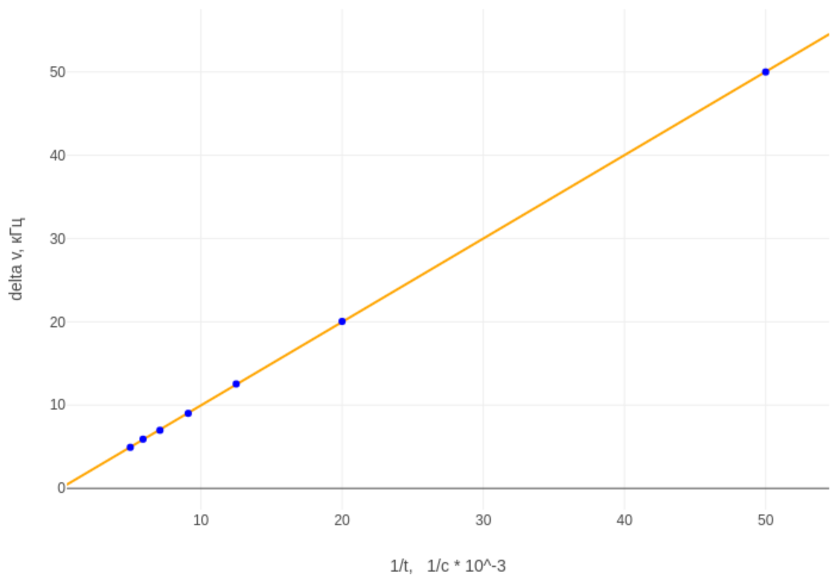


Рис. 7: Зависимость $\Delta\nu$ от $1/\tau$

5. Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала $\tau = 100$мкс. Изменяя период повторения T в диапазоне от 2τ до 50τ измерим расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$ между соседними гармониками спектра.

T, мкс	200	1160	2120	3080	4040	5000
$\delta\nu$, Гц	10000	870	471	335	198	196

Таблица 2: Зависимость $\delta\nu$ от T

Построим график $\delta\nu\left(\frac{1}{T}\right)$. Используя МНК, получим $k = 2.08 \pm 0.13$, что экспериментально не доказывает соотношение неопределённостей (из-за ошибкок в считывании данных). График приведён на рис.8.

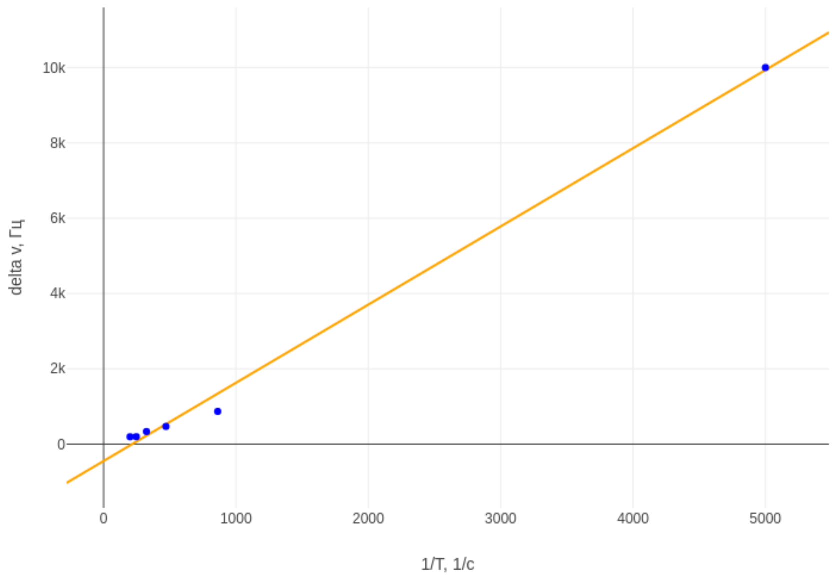


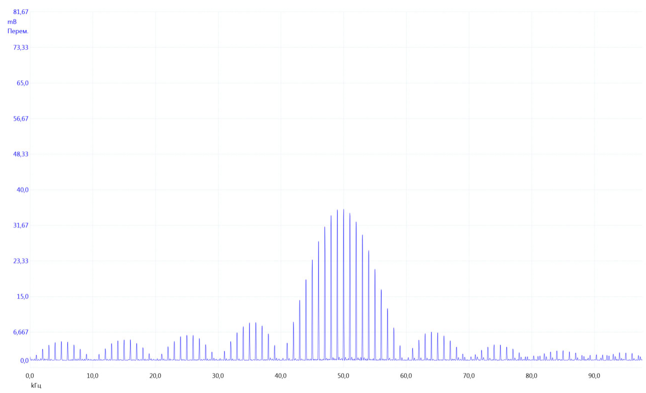
Рис. 8: Зависимость $\delta\nu$ от $1/T$

Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

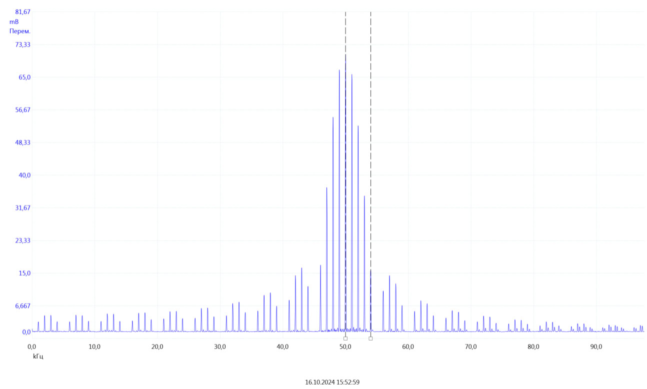
1. Настраиваем генератор на периодичные импульсы синусоидальной формы (цугов) с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$ (что соответствует длительности импульса $\tau = N/\nu_o = 100$ мкс).

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.

a. Изменяем N при фиксированных $\nu_0 = 50$ кГц и $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц:



N=5, $\delta\nu = 1$ кГц, $\Delta\nu = 19.5$ кГц



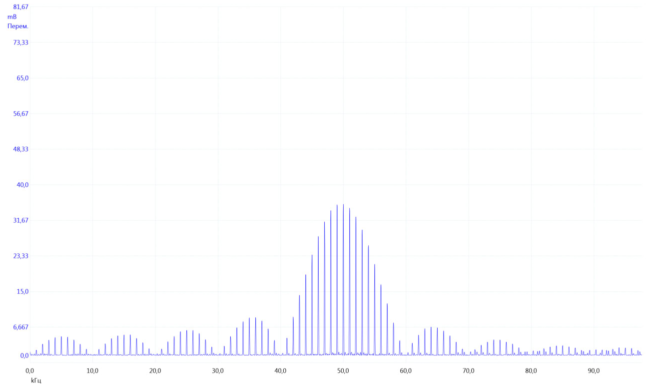
N=10, $\delta\nu = 1$ кГц, $\Delta\nu = 9.7$ кГц

Соотношение неопределённостей:

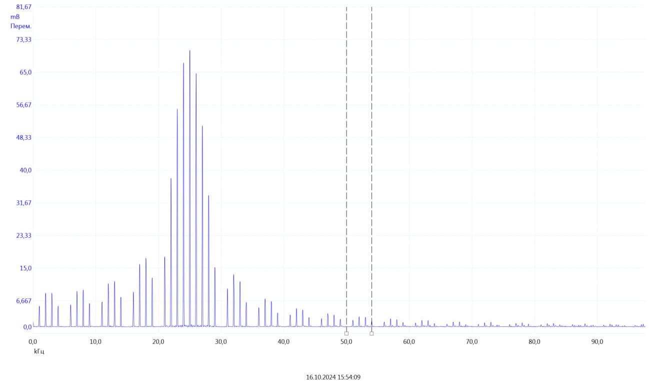
$$\Delta\nu \cdot \tau = 19.5 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 9.7 \cdot 10^3 \frac{10}{50 \cdot 10^3} \approx 1$$

Видим, что спектр остаётся симметричным относительно одной и той же точки, однако "сжимается"к ней при увеличении N.

б. Изменяем ν_0 при фиксированных $\mathrm{N} = 5$ и $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц:



$\nu_0 = 50$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц, $\Delta\nu = 19.5$ кГц



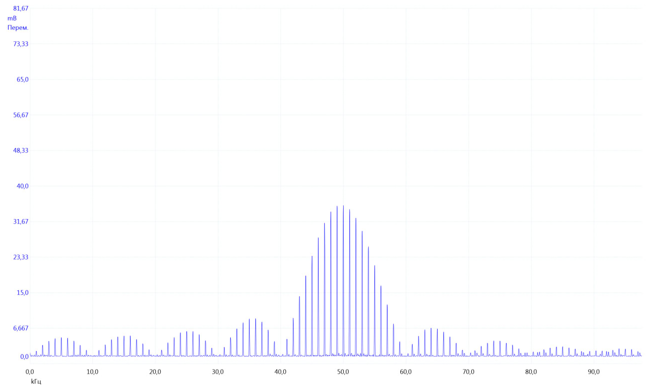
$\nu_0 = 25$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц, $\Delta\nu = 10$ кГц

Соотношение неопределённостей:

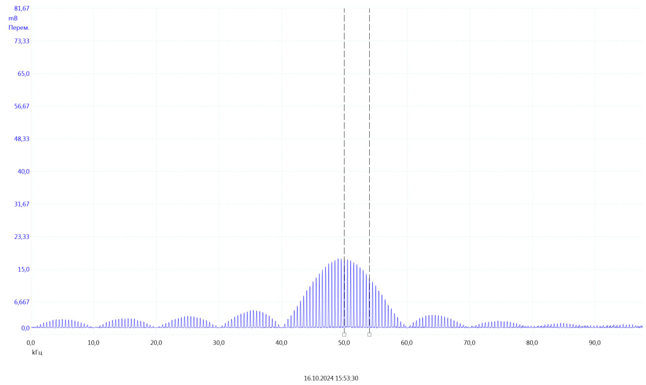
$$\Delta\nu \cdot \tau = 19.5 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{25 \cdot 10^3} = 1$$

Видим, что в этом случае спектр не меняет свою форму, однако его центр смещается в соответсвии с изменением частоты несущей.

в. Изменяем $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированных $\mathrm{N} = 5$ и $\nu_0 = 50$ кГц:



$\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц, $\Delta\nu = 19.5$ кГц



$\nu_{\text{повт}} = 0.5$ кГц, $\delta\nu = 0.5$ кГц, $\Delta\nu = 20$ кГц

Видно, что соотношение неопределённости выполняется:

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = \frac{1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = \frac{0.5 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^3} = 1$$

Также видно, что при стремлении частоты повторения к нулю, стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

1. Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц и глубиной модуляции $m = 0.5$.

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из графика получим $A_{max} = 318$мВ и $A_{min} = 111.3$мВ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{206.7}{429.3} \approx 0.5$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,503, то мы видим, что формула **??** верна.

3. Изменяя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$. Построим график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

m, %	10	25	40	55	70	85	100
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.0489	0.1265	0.1969	0.2730	0.3490	0.4223	0.4998

Таблица 3. Исследование зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m.

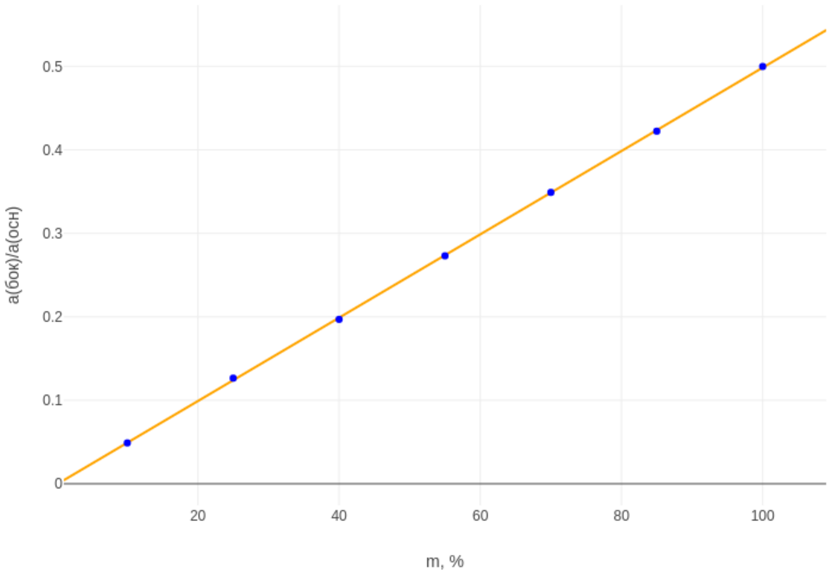


Рис. 9: Зависимость $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

Построим график $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$. Используя МНК, получим $k = 0.499x \pm 0{,}004$, что подтверждает $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$, т.е. совпадает с теоретическим предсказанием. График приведён на рис.9.

4 Выводы

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.