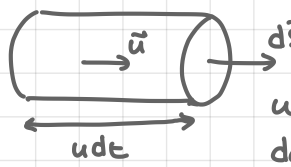
8) Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда.

электрический ток – упорядоченное движение зарядов (электронов и ионов)
постоянный ток – неизменное во времени движение зарядов
Пусть ток течёт по проводнику.
тогда

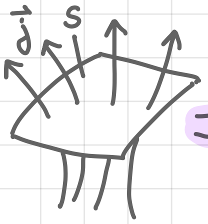
definition
сила тока – количество заряда, переносимого ч/з сечение проводника за ед. времени
плотностью тока наз. количество заряда, переносимого за единицу времени через единичную площадку

$\rho = e\underset{|}{n}$ – объёмная пл-ть заряда
число носителей с зарядом e в единице объёма.

Пусть в малом объёме нах. N носителей. их средняя (дрейфовая) скорость: $\vec{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i$



за время dt площадку $d\vec{S}$ ($d\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{u}$) пересекут носители, нах. в цилиндре $dV = u\,dt\,dS$
их число равно $dN = nu\,dt\,dS$, а перенесут они заряд:
$dq = \underbrace{enu}_{j}\,dt\,dS = \rho u\,dt\,dS$. тогда



$J = \int_S \vec{j}\,d\vec{S}$

$$j = \frac{enu\,dt\,dS}{dt\,dS} = enu = \rho u$$

плотность тока
$\vec{j} = \rho\vec{u}$

если ток течёт по поверхности, то удобно вводить

$dJ\,\{\Rrightarrow\updownarrow dl$

definition
линейную плотность тока – заряд, пересекающий участок контура единичной длины за единицу времени
$i = dJ/dl$

выберем произвольную замкнутую поверхность $S(V)$
огр. объём V
ч/з площадку $d\vec{S}$ за единицу времени переносится заряд $\vec{j}\,d\vec{S}$
если в объёме V находится заряд Q, то

закон сохранения заряда
$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S \vec{j}\,d\vec{S}$$

$Q = \int_V \rho\,dV$

$-\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,dV$

ввиду произвольности выбора V:

уравнение непрерывности
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$
(ЗСЗ в дифференциальной форме)

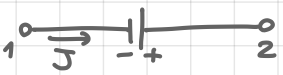
в стационарном случае, когда $\partial\rho/\partial t = 0$,
$\operatorname{div}\vec{j} = 0$ и $\oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ из объёма, ограниченного замкнутой поверхностью S, вытекает заряда столько же, сколько втекает.

закон Ома $J = U/R$

1. **дифференциальная форма**
опыт: $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, где λ – **проводимость среды**. $\rho_c = \frac{1}{\lambda}$ – **удельное сопротивление**
при наличии сторонних сил: $\vec{E}_{стор} = \vec{F}_{стор}/e$

закон Ома
$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{стор})$

2. **интегральная форма**



Пусть S – площадь поперечного сечения проводника.
$J = jS$
$j = \lambda(E + E_{стор}) \Rightarrow E + E_{стор} = \frac{j}{\lambda} = \frac{J}{\lambda S}$
предполагая, что ток во всех участках цепи одинаков: $\int_{(1)}^{(2)}(E + E_{стор})\,dl = J\int_{(1)}^{(2)}\frac{dl}{\lambda S}$

обозначим $R=\int\limits_{(1)}^{(2)}\frac{dl}{\lambda S}$ — полное сопротивление участка

также $\int\limits_{(1)}^{(2)} E\,dl=\varphi_1-\varphi_2$

введём $\mathcal{E}=\int\limits_{(1)}^{(2)} E_{стор}\,dl$ — электродвижущая сила источника

$\mathcal{E}>0$ — прохождение источника от "−" к "+"

$\mathcal{E}<0$ — прохождение источника от "+" к "−"

в итоге закон Ома в интегральной форме для участка цепи

$$\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}=JR$$

Закон Джоуля-Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах.

$e \to \vec v$, $\vec F=e\vec E$

$\vec v=\vec u+\vec v_{сл}$, $\overline{\vec v_{сл}}=0$

$\vec u$ — дрейфовая скорость; $\vec v_{сл}$ — обусл. столкновениями

$$dA=\vec F\vec v\,dt=\vec F(\vec u+\vec v_{сл})$$

$$\overline{\vec F\vec v_{сл}}=0$$

если в единице объёма нах. n зарядов, то над ними за единицу времени соверш. работа:

закон Джоуля-Ленца в локальной форме

$$w=n\vec F\vec u=\vec j\vec E=j^2/\lambda=\lambda E^2$$

$[\vec j=en\vec u=\rho\vec u]$ $[\vec j=\lambda\vec E]$

при наличии объёмных токов

$$W=\int\limits_V w\,dV=\int\limits_V\frac{\vec j^2}{\lambda}dV$$

применим это к току в проводнике. если площадь его — S, а длина — l и ток в нём J, то $j=J/S$, $dV=S\,dl$

$$W=\int\frac{1}{\lambda}\left(\frac{J}{S}\right)^2 S\,dl=J^2\int\frac{dl}{\lambda S}=J^2R$$

закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

$$W=J^2R$$

взаимная ёмкость системы электродов:

$$C=\frac{q}{\varphi_A-\varphi_B}.$$

для A: $\oint\vec E\,d\vec S=\frac{4\pi}{\varepsilon}q$ (из th Гаусса)

по вн. поверхности

$$\oint\vec E\,d\vec S=\frac{4\pi}{\varepsilon}C(\varphi_A-\varphi_B)$$

$\vec j=\lambda\vec E$, где $\vec E$ — напр. поля вблизи поверхности A

$$J=\oint\vec j\,d\vec S=\lambda\oint\vec E\,d\vec S=\lambda\frac{4\pi}{\varepsilon}C(\varphi_A-\varphi_B)$$

с A

$$R=\frac{\varphi_A-\varphi_B}{J}=\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}$$

сопротивление среды между электродами

если $d\gg r$ $\Rightarrow$ C не зависит от d, а зависит только от C_A и C_B $\Rightarrow$ R не зависит от положения A и B

d — расстояние м/у A и B; r — размер электрода