№1

$$A \subseteq (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{cases}$$

1) $(x \in A) \to (x \in (B \cup C))$

2) $x \notin A \vee x \in B \vee x \in C$

3) $(x \notin A \vee x \notin B) \vee (x \notin A \vee x \in C)$

4) $(x \in A \to x \in B) \vee (x \in A \to x \in C)$

5) $A \subseteq B \vee A \subseteq C$

переход $4 \to 5$ не равносильный, $5 \Rightarrow 4$, но $4 \not\Rightarrow 5$

№2

1) $a \to b = 1$
2) $d \vee e = 1$
3) $b \oplus c = 1$
4) $c \equiv d = 1$
5) $e \to a \wedge d = 1$

a, b, c, d, e – A, B, C, D, E смотрит телевизор

если $d=0$, то из 2) $e=1$, из 5) $a \wedge d = 1$, но $d=0$ невозможно

значит $d=1$, тогда $2)=1$ из 4) $c=1$, из 3) $b=0$, из 1) $a=0$,

тогда из 5) $a \wedge d = 0 \Rightarrow e = 0$

a	0
b	0
c	1
d	1
e	0

№3

$x^2 - 6x + 5 \,\vdots\, 2 \Rightarrow x \not\vdots\, 2$, $x \in \mathbb{Z}$

$\exists\, x \vdots 2$, тогда $x^2 \vdots 2$, $-6x \vdots 2$, т.е. $x^2 - 6x \vdots 2 \Rightarrow x^2 - 6x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x^2 - 6x + 5 = 2k + 5 \,\vdots\, 2$ получим противоречие $\Rightarrow x \not\vdots\, 2$ $\blacksquare$

№4

$\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 0$, $i \in \mathbb{I}$, $i > 0$

$\exists\, \alpha i = k$, $k \in \mathbb{Q}$

тогда $i = \frac{k}{\alpha}$, но $\frac{k}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, а $i \in \mathbb{I}$ получим противоречие $\Rightarrow \alpha i \in \mathbb{I}$ $\blacksquare$

№5

$$\begin{cases} C \setminus A \subseteq B \\ C \setminus B \subseteq A \end{cases} \qquad B = A \cap C$$

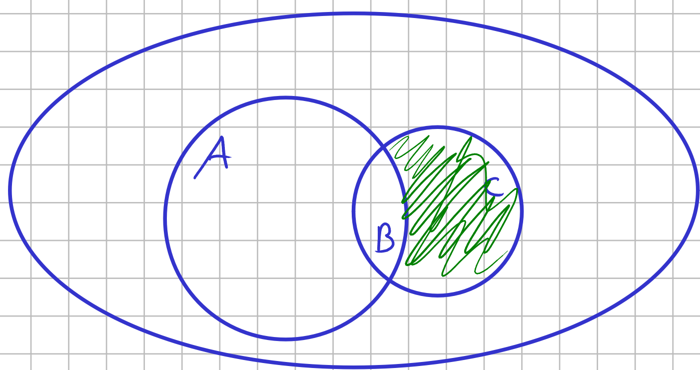
$x \in A - a$
$x \in B - b$
$x \in C - c$

$\exists\, B = A \cap C$, $B \neq \varnothing$ по усл.

1) в такой картинке

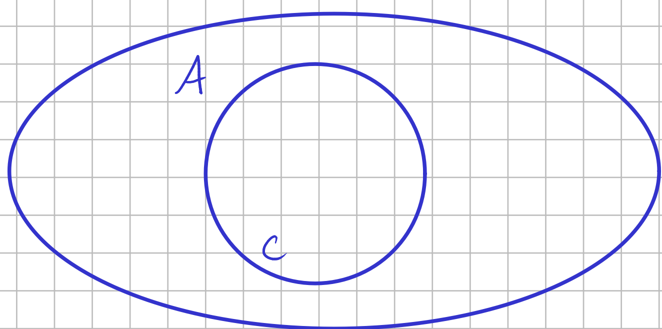
$C \setminus A$

никак не может $\subseteq B$



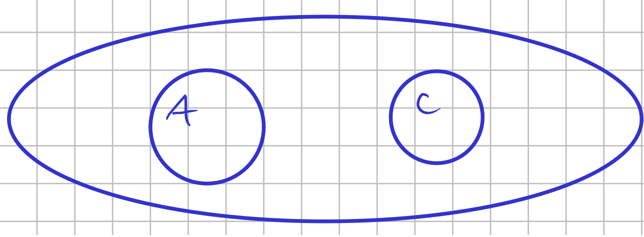
2) в такой картинке

$A \cap C = C = B$, но мн-ва попарно неравны



3) $B = A \cap C = \varnothing$

противоречит усл.



Значит B не может быть $A \cap C$

№6 б)

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(nx + \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

при $n=1$:
$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cancel{2\sin\frac{x}{2}}\cos x}{\cancel{2\sin\frac{x}{2}}} = \cos x$$

$\exists$ верно при $n=k$

$$S_{k+1} = S_k + \cos((k+1)x) = \frac{\sin(kx+\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + \cos(kx+x) = \frac{\sin(kx+\frac{x}{2}) - \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx+x)}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sin(kx+\frac{x}{2})} - \sin\frac{x}{2} + \sin((k+1)x+\frac{x}{2}) + \cancel{\sin(-kx-\frac{x}{2})}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin((k+1)x+\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ формула верна $\forall n$ ■

№7

$\exists$ студент А вошёл первым, а студент Б зашёл последним, тогда либо А вышел из ауд. до входа Б (1) или после (2).

(1) каждый преп. поговорил с каждым студентом $\Rightarrow$ когда вошёл Б там еще были все препы.

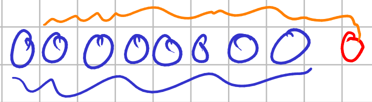
(2) $\Rightarrow$ все студенты в аудитории

■

№8

Выбранный шаг индукции не работает для перехода от $n=1$ до $n+1=2$, т.к.:

n лошадей одного цвета



n лошадей одного цвета

Между по размеру выбранными лошадьми есть пересечение

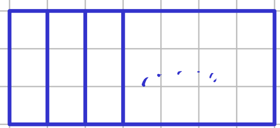
а при случае $n=1 \to n+1=2$

пересечения нет, а значит и один цвет лошадей не гарантируется.

№9

1) $n=1$ $\boxed{x\ y\ z}$ вып. x, y, z - цвета

2) $\exists$ $n=k$



\- можно расставить

3) при $n=k+1$: переставим фишки так, чтобы в последнем столбце были фишки x y z, откинем его, тогда у нас получится таблица $3\times n$, в которой можно правильно расставить фишки. После чего вернём столбец x, y, z - получим правильную расстановку.

ч.т.д.

№ 10

A — a_i - не квадрат

B — $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \notin Q$

$A \to B$ $\quad\quad$ $\overline{B} \to \overline{A}$

при $n=1$: $\sqrt{a_1} \in Q \Rightarrow a_i$ квадрат

$\exists$ при $n=k$: $\sum\limits_{i=1}^{k} \sqrt{a_i} \in Q \Rightarrow \forall i\ a_i$ - квадрат

при $n=k+1$ $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \sqrt{a_i} = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k} \sqrt{a_i}}_{\in Q} + \sqrt{a_{k+1}} \in Q \Rightarrow \sqrt{a_{k+1}} \in Q \Rightarrow a_{k+1}$ - квадрат

а значит мы доказали $\overline{B} \to \overline{A}$ и по принципу контрпозиции

$A \to B$ $\boxtimes$