35 Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в однородном диэлектрике, их поперечность и скорость распространения

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec D = 4\pi \cancel{\rho_{out}}^{\,0} \\ \operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec B = 0 \\ \operatorname{rot}\vec H = \frac{4\pi}{c}\cancel{\vec j_{out}}^{\,0} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t} \end{cases}$$

рассмотрим частный случай:

$$\begin{cases} \rho_{out} = 0 \\ \vec j_{out} = 0 \end{cases}$$

$$\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec A = [\nabla,[\nabla,\vec A]] = \nabla(\nabla,\vec A) - \nabla^2\vec A = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec A - \nabla^2\vec A\right]$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec B = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec H = -\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec D}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec E}_{0,\ \text{т.к. } \operatorname{div}\vec D = 0} - \nabla^2\vec E = -\nabla^2\vec E$$

$\Rightarrow$ волновое уравнение

$$\boxed{\nabla^2\vec E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec H - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec H}{\partial t^2} = 0}$$

поперечность э/м волн

$$\vec E = \vec E_0 \exp(i\omega t - i\vec k\vec r)$$
$$\vec H = \vec H_0 \exp(i\omega t - i\vec k\vec r)$$

$$\frac{\partial\vec E}{\partial t} = i\omega\vec E$$

$$\frac{\partial\vec E}{\partial x} = -ik_x\vec E \quad \frac{\partial\vec E}{\partial y} = -ik_y\vec E \quad \frac{\partial\vec E}{\partial z} = -ik_z\vec E \ \Rightarrow\ \nabla = -i\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

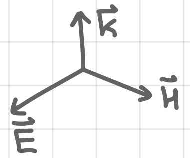
$$[\vec D = \varepsilon\vec E \quad \vec B = \mu\vec H]$$

$$\operatorname{div}\vec D = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec E = 0 \Rightarrow (\nabla,\vec E) = 0 \Rightarrow (\vec k,\vec E) = 0$$
$$\operatorname{div}\vec B = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec H = 0 \Rightarrow (\nabla,\vec H) = 0 \Rightarrow (\vec k,\vec H) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec k \perp \vec E} \quad \boxed{\vec k \perp \vec H}$$

$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} \Rightarrow [\nabla,\vec E] = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec H}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}i\omega\vec H$$

$$[\nabla,\vec E] = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -ik_x & -ik_y & -ik_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i[\vec k,\vec E]$$

$$\Rightarrow [\vec k,\vec E] = \frac{\mu}{c}\omega\vec H \Rightarrow \vec E, \vec H, \vec k \text{ — правая тройка}$$



$$kE = \frac{\mu}{c}\omega H \Rightarrow E = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\text{волновое сопротивление}} H$$

скорость распространения $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (билет 36)