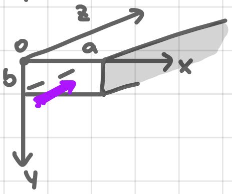
41) Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе. Простейшие типы волны в волноводе прямоугольного сечения. Дисперсионное уравнение, критическая частота, длина волн и фазовая скорость волны в волноводе. Объёмные электромагнитные резонаторы

Волновод – канал, способный поддерживать и направлять распространяющиеся в нём волны.
поверхность – идеальный проводник; внутри – диэлектрик ε, μ

граничные условия: $E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$ ← в стенках
$B_{1n} = B_{2n} = 0$ ←

$$\Rightarrow \begin{cases} E_\tau = 0 \\ B_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

кроме того, $\vec{B} = \vec{H}$ ($\mu \to 1$)



$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

решение (1) с гр. условиями (2) ищем в виде монохроматической волны $\vec{E}(x,y,z)\cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

уравнение Гельмгольца: (вывод. из волнового уравнения)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = 0$$

E_z, B_z – компоненты вдоль z:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - k^2\right)E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - k^2\right)B_z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} E_z|_s = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_s = 0 \end{array} \right. \quad \text{(гр. условия)}$$

эти гр. условия не м.б. выполнены одновременно.
⇓
в волноводе ∃ несколько типов волн

1. **TM-волна** (E-волна) – поперечно-магнитные волны
   $B_z = 0$ везде ($\vec{H} \perp z$)
   $E_z \neq 0$
2. **TE-волна** (H-волна) – поперечно-электр. волны
   $E_z = 0$ везде ($\vec{E} \perp z$)
   $B_z \neq 0$
3. **TEM** – поперечные э/м волны
   $E_z = 0$
   $B_z = 0$
   ↖ только в случае $k^2 = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 - k^2\right)E_z = 0$$

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2 - k^2$$

⇓

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = 0$$

← решения, удовлетворяющие граничным условиям, ∃ не при $\forall\gamma$, а только **при некоторых γ_λ** ← определяются геометрией волновода

1. $\gamma_\lambda^2 > 0$ (иначе – волны затухающие)
2. $k^2 > 0$

$$k_\lambda^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2 - \gamma_\lambda^2 > 0$$ **дисперсионное соотношение**

⇓

$$\omega_{гр} = c\frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$ – волны начинают распространяться только начиная от $\omega_{гр}$

$\Rightarrow$ γ_λ опред. геометрией, а

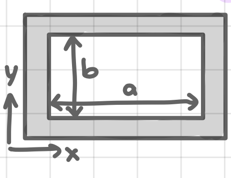
$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{гр}^2}$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}} > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

для переноса нужна группа волн:
групповая скорость (скорость переноса энергии)

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1 - \frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$



TE волна
вектор $\vec{E}$ может иметь компоненты, напр. вдоль осей x и y.
из th Гаусса: $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

рассмотрим волну, бегущую вдоль оси z: $\vec{E}=\vec{E}_0(x,y)e^{ik_z z-i\omega t}$

функция $\vec{E}_0(x,y)$ удовлетворяет ур-нию:

$$\frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)\vec{E}_0=0$$

это уравнение имеет решение вида

$$\begin{cases} E_x=A_x\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{ik_z z-i\omega t} \\ E_y=A_y\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{ik_z z-i\omega t} \end{cases}$$

чтобы решение удовлетворяло гр. условиям, ($E_x|_{y=0}=E_x|_{y=b}=0$ и $E_y|_{x=0}=E_y|_{x=a}$) необходимо:

$$k_x=\frac{\pi n}{a} \qquad k_y=\frac{\pi m}{b}$$

$\frac{\omega^2}{c^2}=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2+k_z^2$ m,n не м.б. $=0$ одновременно, т.к. тогда $\vec{E}\equiv 0$

$\exists\ a>b$

тогда критическая (минимальная) частота волны:

$$\omega_{кр}=\frac{\pi c}{a}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k_z}$$

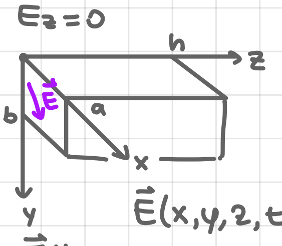
резонатор — устройство, в котором происх. накопление энергии колебаний, поставляемой из внешнего источника

объёмный резонатор — замкнутая (или почти замкнутая) полость с хорошо проводящими стенками.

резонатор ← волновод, в кот. вход и выход закрыты металлическими заглушками.

TE-волна вдоль z:

$E_z=0$



из-за наличия стенок результирующая волна — суперпозиция прямой и отражённой бегущих волн.

$\Downarrow$

$$f(z)=Ae^{ik_z z}+Be^{-ik_z z}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{F}(x,y)f(z)e^{-i\omega t}$$

$\vec{E}\parallel$ стенкам $z=0$ и $z=h$ $\Rightarrow$ $f(0)=0$, $f(h)=0$ (из гр. условий)

тогда $A+B=0$ $\quad Ae^{ik_z h}+Be^{-ik_z h}=0$

$\Downarrow$

$$f(z)=A\sin(k_z z) \qquad k_z=\frac{\pi p}{h}$$

тогда спектр волн в резонаторе:

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi p}{h}\right)^2$$