# Parte 2

# Elementi di calcolo delle probabilità

**Esperimento casuale** (esperimento dall'esito **incerto**)

I suoi possibili esiti (**definibili** in anticipo) sono gli **eventi elementari**

Esperimento **ripetibile** o **non ripetibile**

**Spazio campionario $\Omega$**

**Insieme** di tutti gli **eventi elementari** (indicati con $\omega$)

Non necessariamente di tipo numerico, ma eventualmente **numerizzati**

| Natura di $\Omega$ | Numero eventi elementari | Rappresentazione di $\Omega$ | |
|---|---|---|---|
| Discreto **finito** | $N$ | $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$ | Esempi 1 e 2 |
| Discreto **infinito numerabile** | Infinito **numerabile** | $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$ | Esempio 3 |
| **Continuo** | Infinito **non numerabile** | $\Omega$ insieme non numerabile | Esempio 4 |

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2): x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

# Evento

**Insieme** di eventi elementari (e dunque s**ottoinsieme** di Ω)

Eventi denominati con $A, B, C, \cdots$

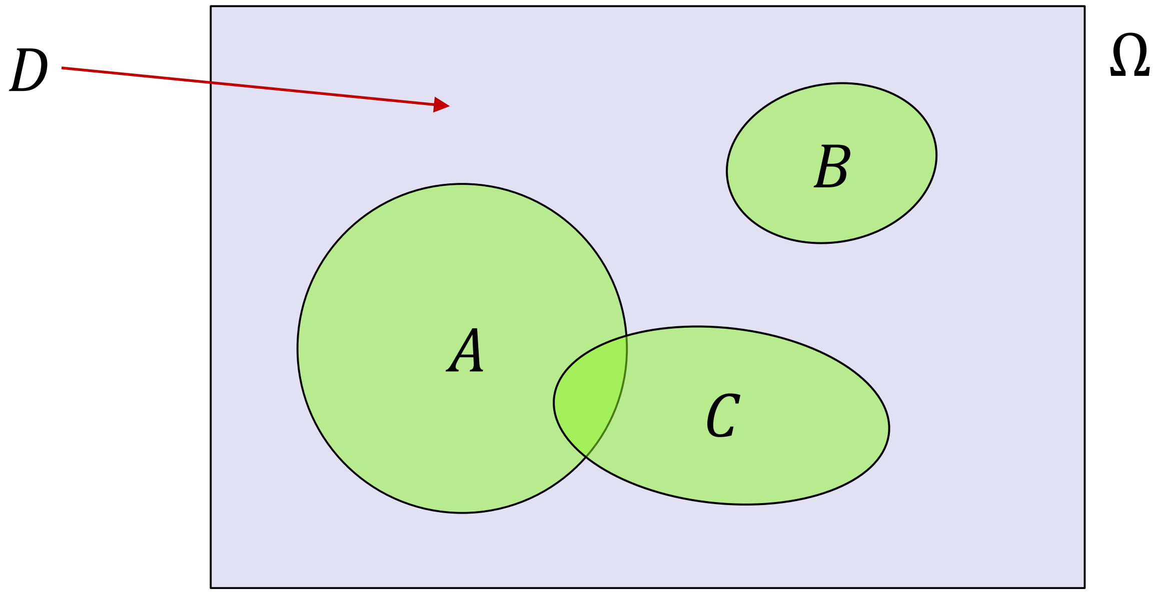



Diagramma di **Venn**

Un evento si verifica se l'esito dell'esperimento casuale è **uno** degli eventi elementari che appartengono all'evento

Esempio 1
Parte 1, pag 18

Evento $A$: "osservare un campione con una femmina" $A = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

Sono eventi anche l'**insieme vuoto** $\phi$ (sottoinsieme di Ω senza alcun evento elementare) e lo stesso **spazio campionario** Ω (sottoinsieme di Ω coincidente con esso stesso e contenente tutti gli eventi elementari)

# Spazio degli eventi

**Collezione** degli eventi dei quali è possibile **calcolare la probabilità**

**Non è necessariamente** la collezione di **tutti i possibili** sottoinsiemi di Ω

Lo è solo se lo spazio campionario Ω è **discreto**

**Quali eventi sono contenuti nello spazio degli eventi?**

Gli eventi che consentono di eseguire su di essi alcune operazioni fondamentali (**negazione**, **unione** e **intersezione** di eventi) ottenendo, da tali operazioni, eventi **anch'essi appartenenti** allo spazio degli eventi

Inoltre, lo spazio degli eventi contiene sempre l'**insieme vuoto** $\phi$ e lo **spazio campionario** Ω

**Non contiene necessariamente gli eventi elementari**

Li contiene solo se lo spazio campionario Ω è **discreto**

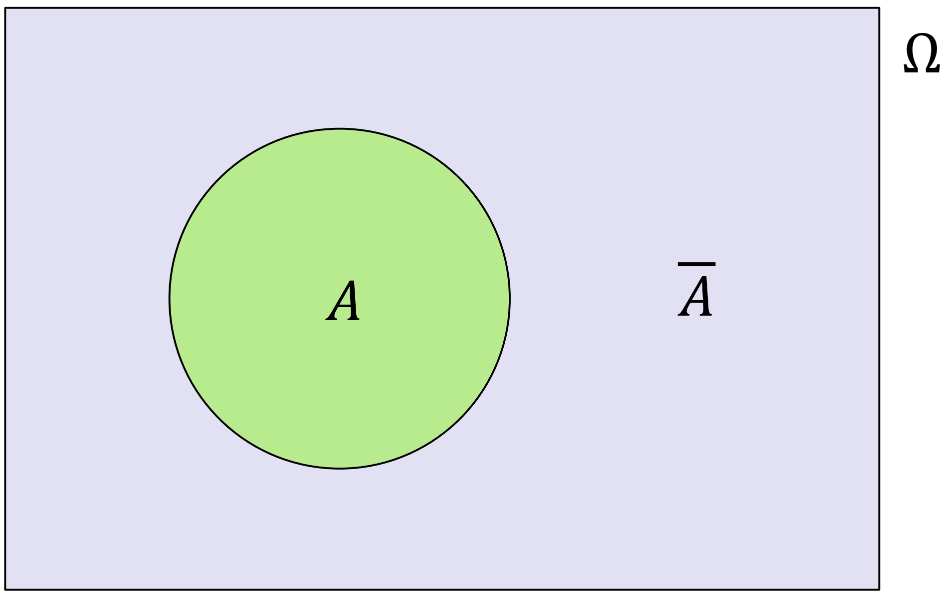
Un **evento** può considerarsi tale **solo se** appartiene allo **spazio degli eventi**

# **Negazione** di un evento

Dato un evento $A$,
la sua **negazione** (o suo **complemento**) $\overline{A}$ è l'**evento**
"l'evento $A$ **non si verifica**"

$$\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\}$$

Contiene gli **eventi elementari** che **non appartengono** ad $A$




Proprietà

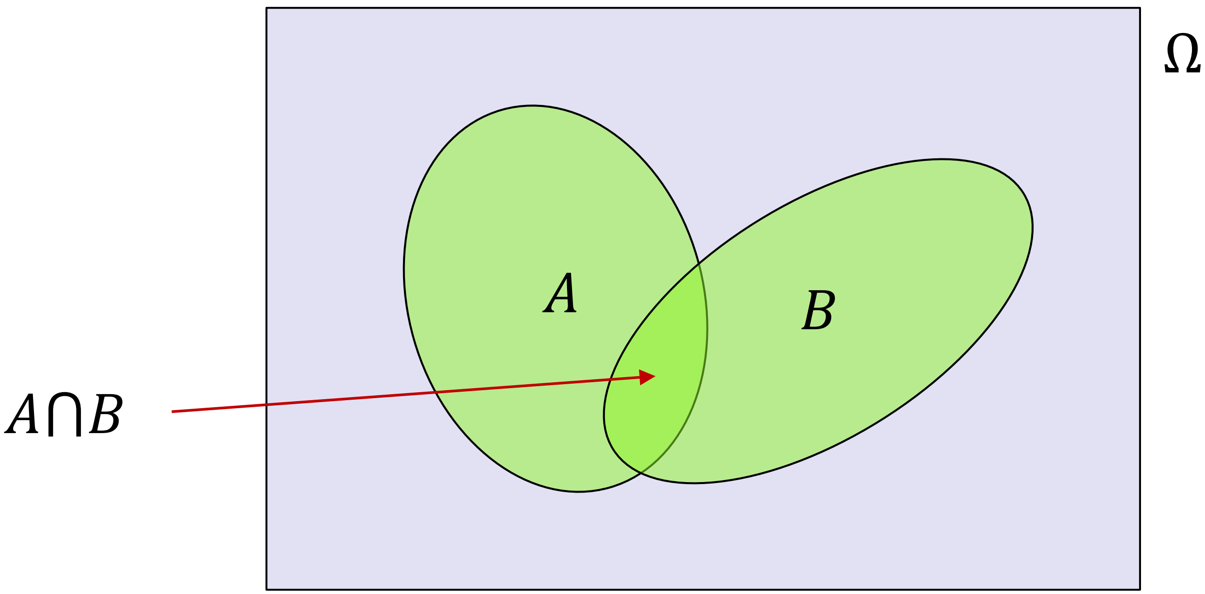
$$\phi = \overline{\Omega}$$
$$\Omega = \overline{\phi}$$
$$A = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

# **Intersezione** di eventi

Dati due eventi $A$ e $B$, la loro **intersezione** $A \cap B$ è l'**evento** "gli eventi $A$ e $B$ si verificano **contemporaneamente** (si verificano **entrambi**)"

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

Contiene gli **eventi elementari** che appartengono **sia** ad $A$, **sia** a $B$ (appartengono a **entrambi**)



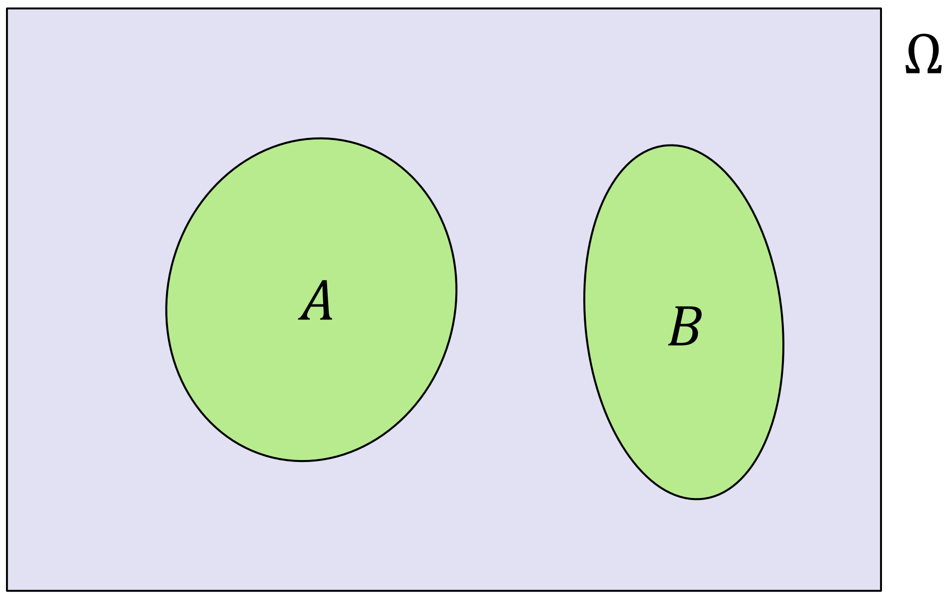
# Eventi **incompatibili**

Dati due eventi $A$ e $B$, essi sono **incompatibili** (o **disgiunti**) se la loro intersezione è l'evento **insieme vuoto**

Gli eventi $A$ e $B$ **non** si verificano **contemporaneamente** (si verifica **solo** $A$, oppure **solo** $B$)

$$A, B \text{ incompatibili } \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

Gli eventi $A$ e $B$ **non hanno eventi elementari in comune**



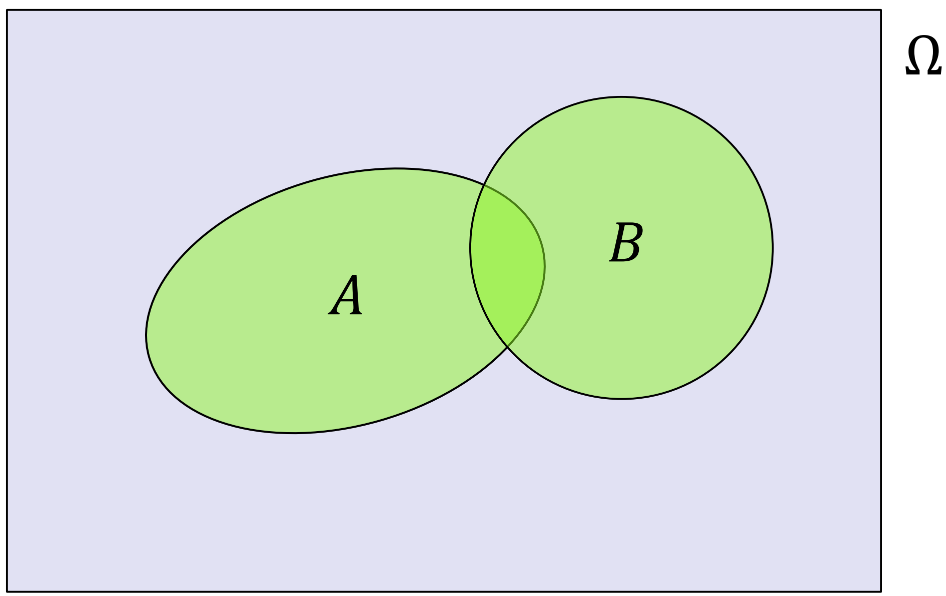
# **Unione** di eventi

Dati due eventi $A$ e $B$, la loro **unione** $A \cup B$ è l'**evento** "**almeno uno** degli eventi $A$ e $B$ si verifica" **ovvero** "si verifica $A$ **oppure** si verifica $B$"

Si verifica **solo** $A$, oppure **solo** $B$, oppure si verificano **entrambi**

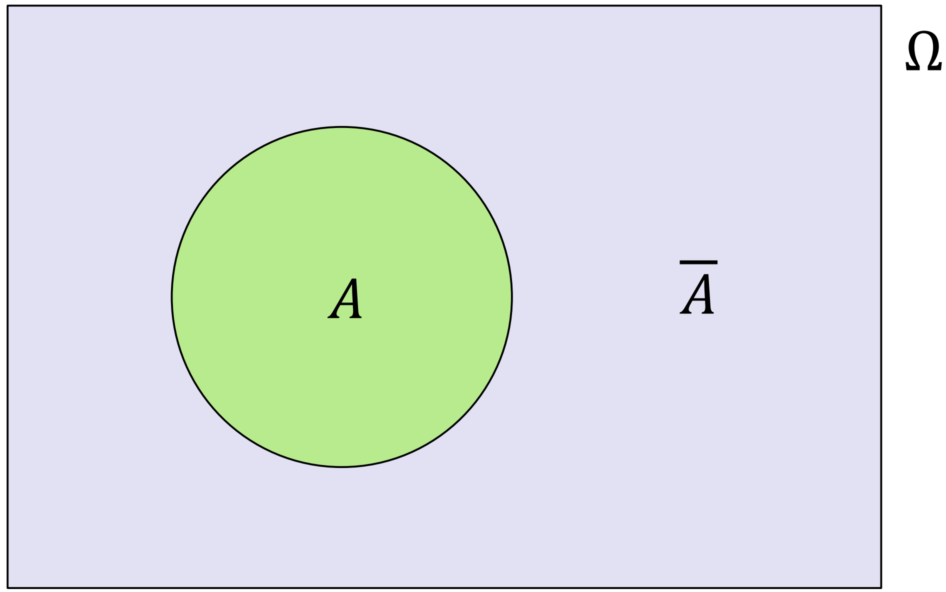
$$A \cup B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ oppure } \omega \in B\}$$

Contiene gli **eventi elementari** che appartengono **solo** ad $A$, oppure **solo** a $B$, oppure a **entrambi**



## **Unione** e **intersezione** di eventi

Ulteriori proprietà




**Ω elemento neutro** della **intersezione**

$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

**$\phi$ elemento neutro** della **unione**

$A$ e $\overline{A}$ generano una **partizione** di Ω

Valgono, inoltre, le proprietà commutativa, associativa e distributiva

## Spazio degli eventi

$\Omega$ discreto **finito** (con $N$ eventi elementari)

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ coincide con la collezione di **tutti i possibili sottoinsiemi** di $\Omega$

Eventi appartenenti ad $\mathcal{A}$:

- L'**insieme vuoto** $\phi$ (evento composto da 0 eventi elementari)
- Ciascuno degli $N$ **eventi elementari** (eventi composti da 1 evento elementare)
- Gli eventi composti da 2 eventi elementari

  $\vdots$

- Lo **spazio campionario** $\Omega$ (evento formato da $N$ eventi elementari)

**Numero complessivo** di eventi appartenenti ad $\mathcal{A} \Longrightarrow 2^N$

Le operazioni di **negazione**, **unione** e **intersezione** di eventi di $\mathcal{A}$ producono eventi **anch'essi appartenenti** ad $\mathcal{A}$

## Esempio 1 – **Sesso** osservato in un campione di $n = 3$ studenti

| **Campioni osservabili** | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$\Omega = \{(0,0,0), (0,0,1)(0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

$N = 8 \Rightarrow$ Lo spazio degli eventi $\mathcal{A}$ contiene $2^8 = 256$ eventi

Comando R

> choose(8,2)

Numero delle **combinazioni** di $N = 8$ oggetti di **classe** $k = 2$

(gli 8 eventi elementari sono **combinati** a 2 a 2)

Quantità analoghe negli altri casi

| **Eventi** di $\mathcal{A}$ |
|---|
| $\phi, \Omega$ |
| 8 eventi elementari |
| $\frac{8!}{2!6!} = 28$ eventi composti da **2** eventi elementari |
| $\frac{8!}{3!5!} = 56$ eventi composti da **3** eventi elementari |
| $\frac{8!}{4!4!} = 70$ eventi composti da **4** eventi elementari |
| $\frac{8!}{5!3!} = 56$ eventi composti da **5** eventi elementari |
| $\frac{8!}{6!2!} = 28$ eventi composti da **6** eventi elementari |
| $\frac{8!}{7!1!} = 8$ eventi composti da **7** eventi elementari |

# Spazio degli eventi

$\Omega$ discreto **infinito numerabile**

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ coincide con la collezione di **tutti i possibili sottoinsiemi** di $\Omega$

Eventi appartenenti ad $\mathcal{A}$:

- L'**insieme vuoto** $\phi$ (evento composto da 0 eventi elementari)
- Ciascuno degli $N$ **eventi elementari** (eventi composti da 1 evento elementare)
- Gli eventi composti da 2 eventi elementari

  $\vdots$

- Lo **spazio campionario** $\Omega$ (evento composto dall'**infinità numerabile** di eventi elementari in $\Omega$)

**Numero complessivo** di eventi appartenenti ad $\mathcal{A} \Longrightarrow$ **infinito numerabile**

Le operazioni di **negazione**, **unione** e **intersezione** di eventi di $\mathcal{A}$
producono eventi **anch'essi appartenenti** ad $\mathcal{A}$

## Spazio degli eventi

$\Omega$ **continuo** (infinità **non numerabile** di eventi elementari)

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ **non è** la collezione di **tutti i possibili** **sottoinsiemi** di $\Omega$

Essa è infatti **troppo ampia**

**Impossibile** definire e calcolare per ciascuno dei sottoinsiemi la corrispondente **probabilità**

$\mathcal{A}$ è la **collezione ristretta** di **sottoinsiemi** di $\Omega$
che soddisfa le proprietà di una **algebra di eventi**

Le operazioni di **negazione**, **unione** e **intersezione** di eventi di $\mathcal{A}$
producono eventi **anch'essi appartenenti** ad $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ contiene gli eventi di **interesse pratico** nelle applicazioni e nella teoria

**Numero complessivo** di eventi appartenenti ad $\mathcal{A}$ $\Longrightarrow$ **infinito non numerabile**

$\mathcal{A}$ **non contiene gli eventi elementari**

**Non sarà possibile calcolarne la probabilità**

**Caso speciale – $\Omega$ continuo** rappresentato da un **insieme di numeri reali**

Ogni **numero reale** dell'insieme è un **evento elementare**

**Osservazione del valore $x$ di una variabile casuale continua $X$**

**Valori** di $X$ (**eventi elementari**) appartenenti ad un **insieme di numeri reali**

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ contiene i **sottoinsiemi di numeri reali** (intervalli reali) del tipo:

$[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ $\quad a, b$ appartenenti all'insieme dei valori di $X$

**Non contiene i singoli valori** di $X$ (eventi elementari)

**Impossibile calcolarne la probabilità**

Esempio 4 – Osservazione della **durata** $X$ di una lampada $(n = 1)$

| Valori di $X$ (**eventi elementari**) |
| --- |
| $x \in [0, \infty)$<br>**numeri reali** $x \geq 0$ |

Impossibile calcolare la probabilità di **singole durate**

Possibile per **intervalli** di durate

## Obiettivo

Assegnare **probabilità** (un **numero reale**) a ciascuno degli **eventi** (gli elementi dello **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$), attraverso una funzione reale **opportuna**

Il **dominio** della funzione è lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ (collezione di **insiemi**)

La funzione è una funzione di insieme

Definizione **assiomatica** di probabilità

Andrej Kolmogorov
(1903 – 1987)

La **probabilità** è il valore (**numero reale**) di una funzione reale $P(\cdot)$, definita su $\mathcal{A}$ e denominata **funzione di probabilità**, che soddisfa le seguenti **proprietà assiomatiche**:

- **[Assioma 1]** $P(\Omega) = 1$ **$\Omega$ evento certo**
- **[Assioma 2]** $P(A) \geq 0$ per ogni evento $A \in \mathcal{A}$
- **[Assioma 3]** $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$
  per ogni successione (finita o eventualmente infinita) di eventi $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ a due a due incompatibili, cioè tali che $A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j$

| | |
|---|---|
| **Assioma 1** | Assioma **dell'evento certo** |
| **Assioma 2** | Assioma **di non-negatività** |
| **Assioma 3** | Assioma **della sommabilità** (completa) |

**Osservazione**

L'argomento di $P(\cdot)$ è sempre un **evento** (elemento di $\mathcal{A}$)

**Assioma 3** nel caso di due eventi $A$ e $B$ incompatibili, cioè tali che $A \cap B = \phi$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

I **tre assiomi** della **funzione di probabilità** rappresentano i **requisiti sufficienti** (essenziali) che una funzione reale, definita su $\mathcal{A}$, deve avere per essere considerata una funzione di probabilità

Dai tre assiomi derivano **ulteriori proprietà** della **funzione di probabilità**

- **[Proprietà 1]** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ per ogni evento $A \in \mathcal{A}$
- **[Proprietà 2]** $P(A) \leq 1$ per ogni evento $A \in \mathcal{A}$
- **[Proprietà 3]** $P(\phi) = 0$ $\boxed{\phi \text{ evento impossibile}}$
- **[Proprietà 4]** $P(A) \leq P(B)$ per ogni coppia di eventi $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B$
- **[Proprietà 5]** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  per ogni coppia di eventi $A, B \in \mathcal{A}$

| | |
|---|---|
| **Proprietà 1** | Regola **dell'evento negato** |
| **Proprietà 5** | Regola **della somma** |

**Assioma 2 + Proprietà 2**

$0 \leq P(\cdot) \leq 1$

# Calcolo delle probabilità

Come calcolare il **valore** della funzione di probabilità $P(\cdot)$ per gli eventi in $\mathcal{A}$?

**Dipende dalla natura dello spazio campionario Ω**

Uniche **probabilità note** (indipendentemente dalla natura di Ω)

| $P(\phi) = 0$ | $P(\Omega) = 1$ |
|---|---|

Ω discreto **finito** (con $N$ eventi elementari)

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$$

Lo spazio degli eventi $\mathcal{A}$ contiene $2^N$ eventi

Inclusi i singoli **eventi elementari** $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$

Un evento è un **insieme di** $n(A)$ **eventi elementari** $(n(A) = 0,1, \cdots, N)$

**Unione di** $n(A)$ **eventi** a due a due **incompatibili** (gli $n(A)$ eventi elementari)

$$\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_N$$

Gli **eventi elementari** generano una **partizione** di Ω

Sia $A \in \mathcal{A}$ un evento formato da $n(A)$ **eventi elementari** $(n(A) = 0,1,\cdots,N)$

$$A = \bigcup_{\omega_i \in A} \omega_i$$

**Unione** di $n(A)$ eventi elementari
(eventi a due a due **incompatibili**)

**(Assioma 3)**

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \omega_i\right) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

**Casi particolari**

| | | |
|---|---|---|
| $n(A)$ | 0 | $P(\phi) = 0$ |
| | 1 | $P(\omega_i)$ |
| | $N$ | $P(\Omega) = 1$ |

**Per ogni altro evento**

La **probabilità di un evento** $A$ è la **somma delle probabilità dei singoli eventi elementari** di cui $A$ si compone

**Richiede la conoscenza delle singole probabilità** $P(\omega_i)$

In generale, uso di **opportuni** modelli matematici denominati **modelli di probabilità**

$\Omega$ discreto **infinito numerabile** Trattazione **analoga**

Il caso di $\Omega$ **continuo** richiede ulteriori **approfondimenti**

# Caso speciale

$\Omega$ discreto **finito** (con $N$ eventi elementari **equiprobabili**)

Gli **eventi elementari** $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ hanno tutti (per ipotesi) la **stessa probabilità**

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_N) = K$$

$$\boxed{\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_N}$$

**(Assioma 1)** **(Assioma 3)** **(Equiprobabilità)**

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_N) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_N) = N \times K$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{N} \qquad \boxed{P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}}$$

Modello di probabilità **uniforme**

Sia $A \in \mathcal{A}$ un evento formato da $n(A)$ **eventi elementari** $(n(A) = 0,1, \cdots, N)$

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{n(A)}{N}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{N}}$$

$$\frac{\text{Numero degli eventi elementari } \textbf{di cui } A \textbf{ si compone}}{\text{Numero } \textbf{totale} \text{ degli eventi elementari di } \Omega}$$

$$\frac{\text{Numero dei } \textbf{casi favorevoli} \text{ ad } A}{\text{Numero dei } \textbf{casi} \text{ (ugualmente) } \textbf{possibili}}$$

Definizione **classica** di probabilità

**È una regola pratica di calcolo**

Circoscritta agli esperimenti casuali con Ω **finito** ed eventi elementari **equiprobabili**

**Applicabilità** tipica ⇒ **Giochi di sorte**

(lancio di monete, lancio di dadi, estrazione da un mazzo di carte, lotterie, ecc.)

Ha determinato (nel XVII secolo) la nascita del **Calcolo delle Probabilità**

(ad opera di Gerolamo Cardano, Galileo Galilei e, soprattutto, Blaise **Pascal** e Pierre de **Fermat**)

Non richiede che l'esperimento casuale sia **ripetibile**

Eventi elementari **equiprobabili** ⇒ **"Vizio" logico**

Esempio 5

In seguito sarà una **variabile casuale**

**Esperimento casuale**

**Lancio di un dado equilibrato** (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Spazio campionario **finito** con $N = 6$ eventi elementari **equiprobabili**

Considerato l'equilibrio fisico del dado

Modello **uniforme**

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ contiene $2^6 = 64$ eventi

$A =$ "Numero pari"

$$A = \{2,4,6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$B =$ "Numeri 5 o 6"

$$B = \{5,6\} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\bar{A} = \{1,3,5\} =$ "Numero dispari"

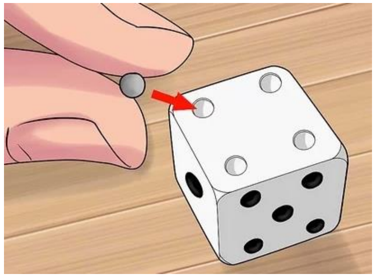
$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B = \{6\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$A \cup B = \{2,4,5,6\}$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



# Esempio 6

In seguito sarà una **variabile casuale**

**Esperimento casuale**

**Lancio di un dado truccato** e osservazione del **numero** ottenuto

Modello probabilistico

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(1) = \frac{1}{21} \quad P(2) = \frac{2}{21} \quad P(3) = \frac{3}{21} \quad P(4) = \frac{4}{21} \quad P(5) = \frac{5}{21} \quad P(6) = \frac{6}{21}$$

**Probabilità** di un numero **proporzionale al numero stesso** (mediante il fattore $1/21$)

**6** è **6 volte** più probabile di **1**, **3 volte** più probabile di **2**, **2 volte** più probabile di **3**, ...

**Osservazione** $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{21}{21} = 1 = P(\Omega)$

$A =$ "Numero pari"

$A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = 0.571 > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$\overline{A} = \{1,3,5\} =$ "Numero dispari"

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.571 = 0.429 < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

# Esempio 7

**Coppia dei numeri**

In seguito sarà una coppia di **variabili casuali**

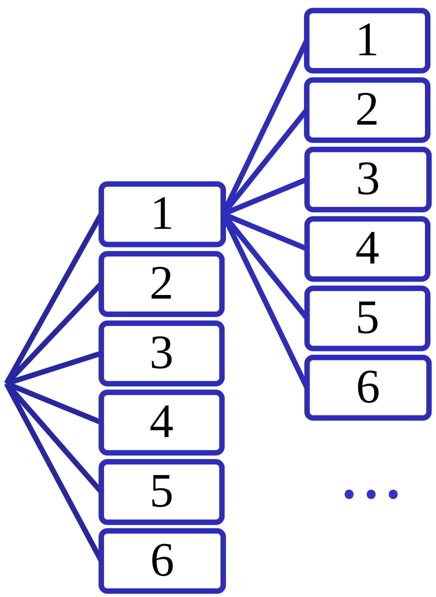
**Esperimento casuale**

**Lancio di due dadi equilibrati** (o anche **duplice lancio di un dado equilibrato**) e osservazione della **coppia dei numeri** ottenuti

Come ricavare lo **spazio campionario** $\Omega$?

Albero degli eventi

Consente di **disporre a 2 a 2** (con ripetizione) i 6 **numeri** 1,2,3,4,5,6




$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,5),(6,6)\}$$

$\Omega$ **finito** composto da $N = 6^2 = 36$ eventi elementari

**36 coppie di numeri**

Numero delle **disposizioni** (con ripetizione) di $k = 6$ oggetti di **classe** $n = 2$

## **Enumerazione** degli eventi elementari in una **tabella a doppia entrata**

| | **Numero Dado2** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero Dado1** | **1** | | **2** | | **3** | | **4** | | **5** | | **6** | |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 |
| **2** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 |
| **3** | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| **4** | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 |
| **5** | 5 | 1 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| **6** | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 |

Eventi elementari (coppie di numeri) **equiprobabili**

Considerato l'equilibrio fisico dei due dadi (o dell'unico dado nel caso di duplice lancio)

Ciascuno di essi ha probabilità $\frac{1}{36}$ Modello **uniforme**

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ contiene $2^{36} = 68719476736$ eventi (circa 69 miliardi!)

## **Enumerazione** degli eventi elementari in una **tabella a doppia entrata**

| | **Numero Dado2** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero Dado1** | **1** | | **2** | | **3** | | **4** | | **5** | | **6** | |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 |
| **2** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 |
| **3** | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| **4** | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 |
| **5** | 5 | 1 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| **6** | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 |

$A =$ "Numero **1** in Dado1"

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

## **Enumerazione** degli eventi elementari in una **tabella a doppia entrata**

| | **Numero Dado2** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero Dado1** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 | 1 5 | 1 6 |
| **2** | 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 | 2 5 | 2 6 |
| **3** | 3 1 | 3 2 | 3 3 | 3 4 | 3 5 | 3 6 |
| **4** | 4 1 | 4 2 | 4 3 | 4 4 | 4 5 | 4 6 |
| **5** | 5 1 | 5 2 | 5 3 | 5 4 | 5 5 | 5 6 |
| **6** | 6 1 | 6 2 | 6 3 | 6 4 | 6 5 | 6 6 |

$B$ = "Numero **almeno uguale a 3** in Dado2"

$$P(B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

## **Enumerazione** degli eventi elementari in una **tabella a doppia entrata**

| | **Numero Dado2** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero Dado1** | **1** | | **2** | | **3** | | **4** | | **5** | | **6** | |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 |
| **2** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 |
| **3** | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| **4** | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 |
| **5** | 5 | 1 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| **6** | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 |

$C$ = "Numero **2** in Dado1 e numero **pari** in Dado2"

$$P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

**Osservazione**

$A$ = "Numero **2** in Dado1"

$B$ = "Numero **pari** in Dado2"

$C = A \cap B$

**Somma dei numeri** nel lancio di due dadi (o nel duplice lancio di un dado)

| | **Numero Dado2** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numero Dado1** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |

In giallo le somme **pari**

**Somma dei numeri** $= 2,3,\cdots,12$

In seguito sarà una **variabile casuale**

$D$ = "Somma dei numeri è **7**"

$$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$E$ = "Somma dei numeri è **pari**"

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = P(\bar{E})$$

$F$ = "Somma dei numeri **almeno uguale a 8**"

$$P(F) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Esempio 8

**head** or **tail** // **navis** aut **caput**

**testa** o **croce**

**Esperimento casuale**

**Lancio di una moneta bilanciata** (non truccata) e osservazione della **faccia** ottenuta

$$\Omega = \{C, T\}$$

Spazio campionario **finito** con $N = 2$ eventi elementari **equiprobabili**

Considerato che la moneta è bilanciata

**Possibilità** $\Rightarrow$ Codifica **numerica** degli eventi elementari $T$ e $C$

- 0 se $C$ 0 è l'**insuccesso**
- 1 se $T$ 1 è il **successo**

La **faccia** ottenuta assume la natura di **variabile casuale** $X$ con valori $x = 0{,}1$

Nel caso di codifica $\Rightarrow \Omega = \{0{,}1\}$

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ contiene $2^2 = 4$ eventi

$\phi, \Omega$ e i due eventi elementari

$$P(T) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \textbf{ovvero} \quad P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$$

Modello **uniforme**

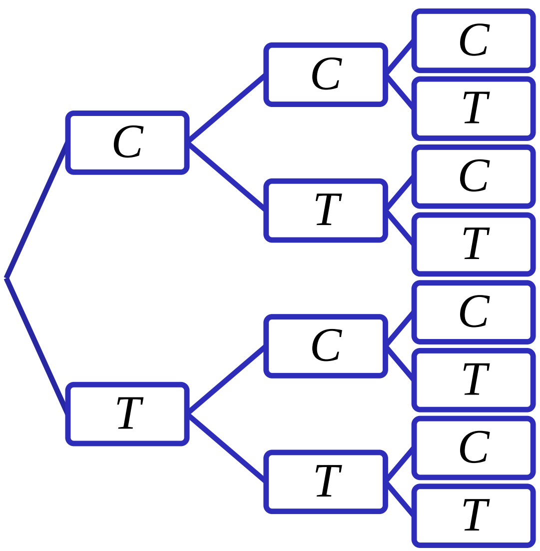
# Esempio 9

**Esperimento casuale**

**Lancio di tre monete bilanciate** (o anche **triplice lancio di una moneta bilanciata**)
e osservazione della **terna delle facce** ottenuta

L'**albero degli eventi** conduce a **tutte le possibili terne** (eventi elementari)

Consente di **disporre a 3 a 3** (con ripetizione) le 2 **etichette** $C$ e $T$




$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (C,C,C),(C,C,T),(C,T,C),(C,T,T), \\ (T,C,C),(T,C,T),(T,T,C),(T,T,T) \end{matrix} \right\}$$

$\Omega$ **finito** composto da $N = 2^3 = 8$ eventi elementari

**8 terne (terne di etichette)**

Numero delle **disposizioni** (con ripetizione) di
$k = 2$ oggetti di **classe** $n = 3$

Eventi elementari **equiprobabili**

Considerato che le monete sono bilanciate

## Possibilità

Codifica **numerica** delle facce $C$ e $T$

La **faccia** ottenuta, per ciascuna moneta, assume la natura di **variabile casuale** a valori $0/1$

| **Terne numeriche** | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$\Leftarrow$ **Eventi elementari** (codificati) in $\Omega$

Eventi elementari **equiprobabili**

Ciascuno di essi ha probabilità $\frac{1}{8}$

Modello **uniforme**

Lo **spazio degli eventi** $\mathcal{A}$ contiene $2^8 = 256$ eventi

$A =$ "Croce nella prima moneta"

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$B =$ "Testa nelle prime due monete e croce nella terza"

$$P(B) = \frac{1}{8}$$

## **Somma dei numeri** (facce **codificate**) nel lancio di tre monete (o nel triplice lancio di una moneta)

| **Terne numeriche** | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$\Rightarrow$

| **Somma** |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 1 |
| 2 |
| 1 |
| 2 |
| 2 |
| 3 |

**Somma dei numeri** = 0,1,2,3

In seguito sarà una **variabile casuale**

Coincide con il **numero delle teste**

**Numero dei successi**

$C$ = "Numero di teste è **1**"

$$P(C) = \frac{3}{8}$$

$D$ = "Numero di teste $\leq$ **1**"

$$P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$E$ = "Numero di teste $\geq$ **1**"

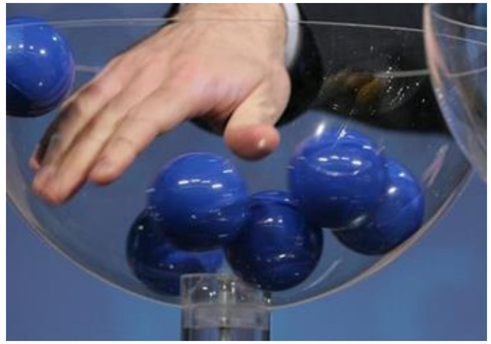
$$P(E) = \frac{7}{8}$$

Esempio 1

**Popolazione finita**

**Classe** di $N = 50$ studenti universitari

Caso speciale di campionamento $(n = 1)$



**Esperimento casuale**

**Selezione casuale** di un singolo studente dalla classe e osservazione del suo **sesso**

$$\Omega = \{M, F\}$$

**Possibilità** $\Rightarrow$ Codifica **numerica** degli eventi elementari $M$ e $F$

- 0 se $M$ — 0 è l'**insuccesso**
- 1 se $F$ — 1 è il **successo**

Il **sesso** assume la natura di **variabile casuale** $X$ con valori $x = 0{,}1$

Nel caso di codifica $\Rightarrow \Omega = \{0{,}1\}$

**Non vi è ragione** per assumere gli eventi elementari **equibrobabili**

$$P(M) \neq P(F) \quad \text{ovvero} \quad P(0) \neq P(1)$$

Modello **uniforme non applicabile**

Tuttavia, si può studiare **opportunamente** la **composizione numerica** della **classe**

Studiare la **composizione numerica** della **popolazione finita**

Si assuma, ad esempio, che nella classe di $N = 50$ studenti,
vi siano $n(M) = 20$ **maschi** e $n(F) = 30$ **femmine**

Nel caso di codifica, $n(0) = 20$ e $n(1) = 30$

In un'**urna** contenente $N = 50$ palline

$n(M) = 20$ recano l'**etichetta** $M$, e $n(F) = 30$ recano l'**etichetta** $F$

**ovvero**

$n(0) = 20$ recano il **numero** 0, e $n(1) = 30$ recano il **numero** 1

Le $N = 50$ **palline** possono essere considerate
**a prescindere** dall'**etichetta** (ovvero **numero**) che recano

In tale prospettiva, le $N = 50$ **palline** sono tra di esse **indistinguibili**

Gli **studenti** sono tra di essi **indistinguibili**

**Esperimento casuale** (riconsiderato)

$\boxed{\text{**Selezione casuale** di un singolo studente dalla **classe**}}$

**Estrazione casuale** di una singola pallina da un'**urna** contenente $N = 50$ palline

$\boxed{\text{Nuovo **spazio campionario**}}$

Gli **eventi elementari** sono rappresentati da **ciascuno** dei $N = 50$ **studenti**

(ovvero **ciascuna** delle $N = 50$ **palline)**

$$\Omega' = \{u_1, u_2, \cdots, u_{50}\}$$

$u_i \Rightarrow$ unità statistica

$\boxed{\text{Eventi elementari **equiprobabili**}}$

Perché tra di essi **indistinguibili**

$$\boxed{\text{Ciascuno di essi ha probabilità } \frac{1}{50}}$$

Modello **uniforme**

**Si può applicare la definizione classica di probabilità**

$F$ = "Lo studente estratto è **femmina**"

Nel caso di **codifica** $\Rightarrow F$ = "Il valore del **sesso** per lo studente estratto è **1**"

Nel linguaggio dell'urna $\Rightarrow F$ = "La pallina estratta reca l'**etichetta** $F$ (o il **numero** 1)"

Tra le $N = 50$ palline, $n(F) = n(1) = 30$ recano **etichetta** $F$ (ovvero **numero** 1)

L'evento $F$ (**evento elementare** in $\Omega$) coincide con l'**unione** delle 30 palline (ovvero dei 30 studenti) che recano **etichetta** $F$ (ovvero **numero** 1)

<u>Evento elementare</u> in $\Omega$ inteso come **unione** di <u>eventi elementari</u> **equiprobabili** in $\Omega'$

**(Assioma 3)**

$$F = \bigcup u_i \qquad\qquad P(F) = P\left(\bigcup u_i\right) = \sum P(u_i) = \frac{30}{50} = \mathbf{0.6}$$

**(Equiprobabilità)**

<u>**Proporzione** di **femmine** nella classe</u>

$$P(M) = \frac{20}{50} = \mathbf{0.4} = 1 - P(F)$$

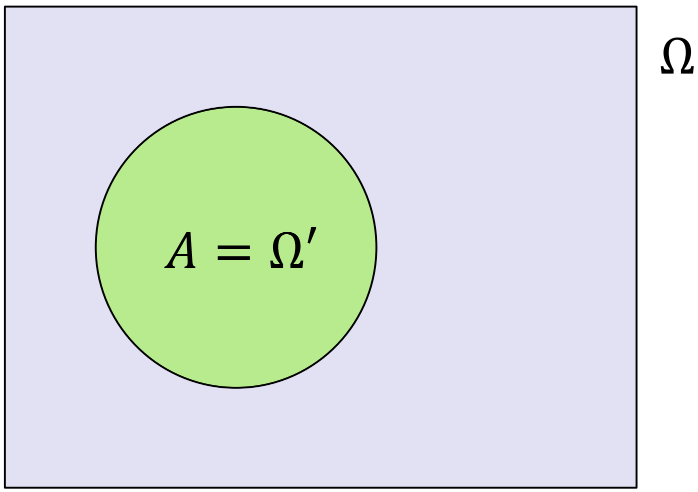
<u>**Proporzione** di **maschi** nella classe</u>

**Si è verificato** un evento $A$

**Quali conseguenze** sulla probabilità di un altro evento $B$?

**Probabilità condizionata** dell'evento $B$ dato che si è verificato l'evento $A$

Notazione $\Rightarrow$ $P(B|A)$




Constatato che **si è verificato** l'evento $A$, esso assume il ruolo di **evento certo**, cioè diventa il **nuovo** spazio campionario

$$A = \Omega'$$

Gli esiti (eventi elementari) dell'esperimento casuale sono ora **ristretti** agli eventi elementari di $A$

Ogni evento elementare in $\overline{A}$ (e dunque ogni evento $\subseteq \overline{A}$) **non può più verificarsi**

Esempio 5

**Esperimento casuale**

**Lancio di un dado** **equilibrato** (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Si assuma che **si è verificato** l'evento $A =$ "Numero pari"

$$A = \{2,4,6\}$$

**Sotto questa condizione** $\Rightarrow\ \Omega' = A = \{2,4,6\}$

Sapendo che **si è verificato** un numero pari,
qual è la **probabilità** che si verifichi un numero che non sia tra i numeri pari?

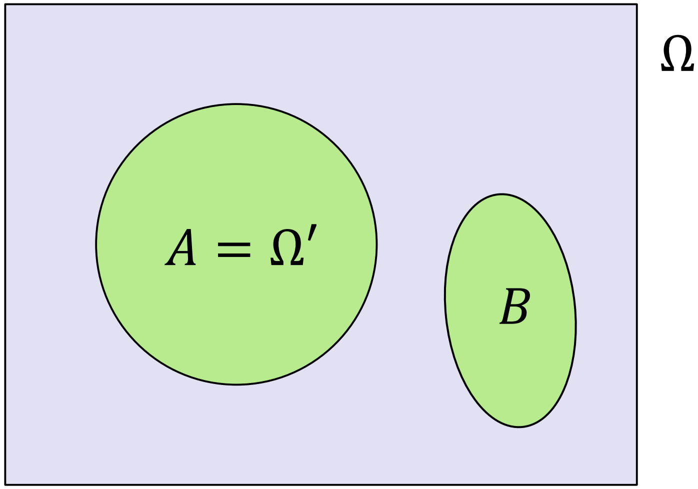
$$P(1|A) = P(3|A) = P(5|A) = \mathbf{0}$$

Se riferite allo spazio originario $\Omega \ \Rightarrow\ P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{6}$

E la **probabilità** che si verifichi il numero 6? $\quad B =$ "Numero **6**" $= \{6\}$

$$P(B|A) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

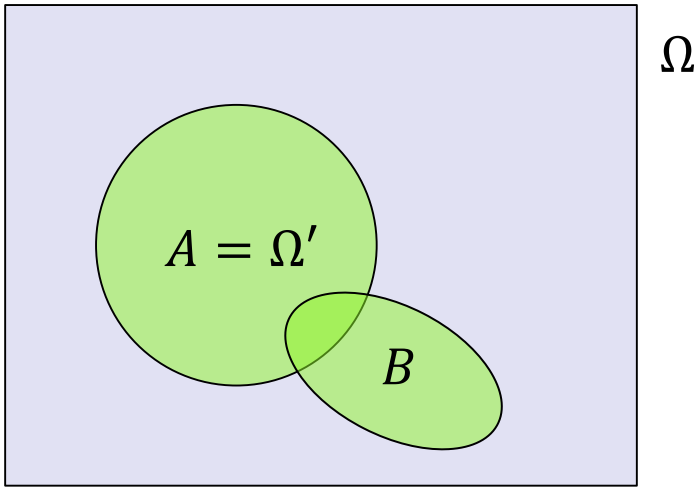
Se riferita ad $\Omega \ \Rightarrow\ P(B) = \frac{1}{6}$

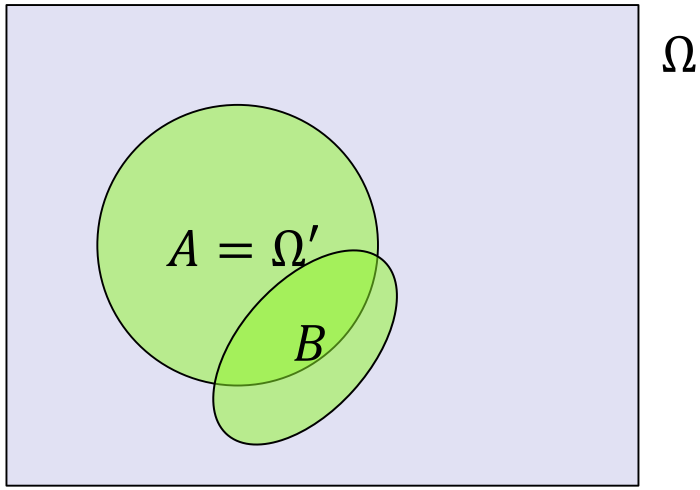



**Si è verificato** un evento $A$

Un qualsiasi evento $B$,
che sia **incompatibile** con l'evento $A$,
cioè tale che $A \cap B = \phi$, **non può più verificarsi**

$$P(B|A) = 0$$




Un evento $B$ **può verificarsi** solo se **ha intersezione** con l'evento $A$, cioè se $A \cap B \neq \phi$

**Probabilità condizionata** $P(B|A)$ **proporzionale** alla probabilità $P(A \cap B)$

$$P(B|A) = K \times P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = K \times P(A \cap B)$$

$\boxed{\text{Sia } B = A}$ $\Rightarrow$ $P(A|A) = 1 = K \times P(A \cap A) = K \times P(A)$

$$1 = K \times P(A) \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{P(A)}$$

Probabilità condizionata di $B|A$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Naturalmente, $P(A) > 0$ (l'evento $A$ **si è verificato**)

La **probabilità dell'intersezione** viene **riferita** (rapportata) alla probabilità dello spazio campionario **ristretto** rappresentato dall'**evento condizionante** $A$

Probabilità non condizionata $P(B)$ di un evento $B$ interpretata come **probabilità condizionata**

$$P(B|\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(\Omega)} = P(B)$$

## Esempio 5

**Esperimento casuale**

**Lancio di un dado equilibrato** (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Si assuma che **si è verificato** l'evento $A =$ "Numero **pari**"

$$A = \{2,4,6\}$$

**Probabilità condizionata** che si verifichi il numero 6

$B =$ "Numero **6**" $= \{6\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Già ricavata studiando $\Omega'$

**Probabilità condizionata** che si verifichi un numero $\geq 4$

$C =$ "Numero $\geq$ **4**" $= \{4,5,6\}$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(\{4,6\})}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B|A)}$$

Probabilità della **intersezione** di due eventi espressa tramite le probabilità dei **singoli eventi**

Scambiando il ruolo delle variabili

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

**(proprietà commutativa)**

Naturalmente, $P(B) > 0$
(l'evento $B$ **si è verificato**)

Regola del **prodotto**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)}$$

(anche per **più di due** eventi)

Le due fattorizzazioni sono **equivalenti**

Si usa **una delle due**

## Esempio 5

**Esperimento casuale**

**Lancio di un dado equilibrato** (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$A$ = "Numero **pari**" = $\{2,4,6\}$

$B$ = "Numero **6**" = $\{6\}$

Calcolo di $P(A \cap B)$ tramite la regola del **prodotto**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{6} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{1}{6}$$

Da calcolare studiando $\Omega'$

Alternativamente $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{6} \times \mathbf{1} = \frac{1}{6}$

## Regola del **prodotto**

Particolarmente utile per gli **esperimenti casuali composti**, cioè condotti tramite lo svolgimento di due o più **sottoprove**

**Caso speciale** (è il caso del campionamento casuale, ndr)

Le **sottoprove** sono **indipendenti** (cioè svolte **in modo indipendente** l'una dall'altra)

Esempio 7

**Esperimento casuale**

**Lancio di due dadi equilibrati** (o anche **duplice lancio di un dado equilibrato**) e osservazione della **coppia dei numeri** ottenuti

**L'esperimento si compone di due sottoprove**

1. Lancio del **primo dado** (o anche **primo lancio** del dado)
2. Lancio del **secondo dado** (o anche **secondo lancio** del dado)

**Le due sottoprove sono indipendenti**

$C$ = "Numero **2** in Dado1 e numero **pari** in Dado2"

$$\boxed{P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$$

Già calcolata con il metodo diretto

$$C = A \cap B$$

$A$ = "Numero **2** in Dado1"

$B$ = "Numero **pari** in Dado2"

- Evento $A$ generato dalla **Sottoprova1**
- Evento $B$ generato dalla **Sottoprova2**

Dal momento che le sottoprove sono **indipendenti**, esse generano **eventi indipendenti**

**Condizione 1**

L'evento $B$ è **indipendente** dall'evento $A$ $\Leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$

La condizione che si è verificato l'evento $A$ **non modifica** la probabilità dell'evento $B$

**Implicazioni sulla regola del prodotto** $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

**Condizione 2** **Condizione 3**

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)P(A|B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

Anche $A$ è **indipendente** da $B$

Le tre condizioni sono **equivalenti**

L'indipendenza è una relazione **reciproca** tra gli eventi

$A$ e $B$ sono **eventi indipendenti**
se e solo se si verifica una delle seguenti tre condizioni equivalenti

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

## **Definizione** (usuale) **di indipendenza**

$A$ e $B$ sono **eventi indipendenti** $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Caso speciale della **regola del prodotto**

Applicabile negli esperimenti casuali composti da due **sottoprove indipendenti**

Esempio 7

$A$ = "Numero **2** in Dado1"

$B$ = "Numero **pari** in Dado2"

$$P(B|A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

La definizione di **indipendenza** può essere estesa al caso di **tre o più eventi**
(eventi generati da corrispondenti **sottoprove indipendenti**)

**Caso di tre eventi**

$A, B$ e $C$ sono **eventi indipendenti**
se se solo se si verificano tutte le seguenti condizioni

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Devono anche essere indipendenti **a due a due**

**Osservazione**

$A, B, C$ **eventi indipendenti** $\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Condizione **necessaria** ma non sufficiente per l'indipendenza

**Generalizzazione**

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ **eventi indipendenti** $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

## Esempio 9

**Esperimento casuale**

**Lancio di tre monete bilanciate** (o anche **triplice lancio di una moneta bilanciata**)
e osservazione della **terna delle facce** ottenuta

L'esperimento si compone di **tre sottoprove indipendenti**,
rappresentate dal **lancio delle tre monete** (o dai **tre lanci della moneta**)

| **Terne numeriche** | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$B$ = "Testa nelle prime due monete"

$$B = \{(1,1,0)\} = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

$B_1$ = "Testa in Lancio1"

$B_2$ = "Testa in Lancio2"

$B_3$ = "Croce in Lancio3"

$B_1, B_2, B_3$ **eventi indipendenti**

$$\Rightarrow \; P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

Già calcolata senza considerare l'**indipendenza** delle estrazioni

Calcolo analogo (e **stessa probabilità**) per tutte le altre **terne**

## Definizione **classica** di probabilità

Circoscritta agli esperimenti casuali con Ω **finito** ed eventi elementari **equiprobabili**

Nel caso di esperimento casuale assimilabile alla **estrazione da un'urna**

Si può studiare la **composizione** numerica **dell'urna** per ricondursi ad uno spazio campionario (finito) equivalente, formato da eventi elementari **equiprobabili**

**Campionamento da popolazione finita**

(ma anche, ad esempio, estrazione da un mazzo di carte)

Negli ambiti in cui è applicabile

La definizione **classica** di probabilità è una **regola** pratica **di calcolo**

**Non applicabile** negli esperimenti casuali con:

- Ω **finito** ed eventi elementari **non equiprobabili**
  (a parte il caso assimilabile all'estrazione da un'urna)
- Ω **infinito ma numerabile**
- Ω **continuo** (infinito non numerabile)

## Definizione **frequentista** di probabilità

Applicabilità **generale**

(tranne che in alcuni tipi di esperimenti casuali, ndr)

Naturalmente, è applicabile **anche nei casi** in cui è valida la definizione **classica**

Richiede che l'esperimento casuale sia **ripetibile**

Esempio 8

**Esperimento casuale**

**Lancio di una moneta bilanciata** (non truccata) e osservazione della **faccia** ottenuta

Esperimento **ripetibile**

La moneta è (e resta) **bilanciata**

$\Rightarrow$ Le condizioni dell'esperimento sono **le stesse** in tutte le **ripetizioni**

Nel caso di codifica $\Rightarrow \Omega = \{0,1\}$

Evento di interesse

$A = \{1\} =$ "**Testa** nel lancio della moneta"

**Ripetizione** dell'esperimento

Si effettuano, complessivamente, $N = 10000$ lanci della moneta

App **Random numbers**//Coin Flips

Per alcuni valori intermedi di $N$, si registra la **frequenza relativa** dell'evento $A$

| $N$ | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenza relativa di $A$ | 0.517 | 0.513 | 0.504 | 0.498 | 0.5004 | 0.4993 | 0.4981 | 0.4991 | 0.5004 | 0.5009 |

All'aumentare del numero di lanci,
la **frequenza relativa** di $A$ si stabilizza attorno al **valore 0,5**

Il **valore 0,5** è la **probabilità** dell'evento $A$

Valore cui **tende** la frequenza relativa di $A$ in un **grande numero** di lanci

È una **evidenza empirica**

Legge empirica dei **grandi numeri** (o del **caso**)

## Definizione **frequentista** di probabilità

Fondata sulla legge empirica dei grandi numeri

In un esperimento casuale **ripetibile**,
la **probabilità** di un evento $A$ è il **valore cui tende** la **frequenza relativa** di $A$
in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento

L'approssimazione della probabilità con la frequenza relativa
aumenta generalmente all'aumentare del numero di ripetizioni dell'esperimento

**Definizione operativa**

In un esperimento casuale **ripetibile**,
la **probabilità** di un evento $A$ è **assimilabile** alla **frequenza relativa** di $A$
in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento

La definizione **frequentista** di probabilità, naturalmente, consente di **calcolare** la probabilità di un evento, **ma soprattutto ne fornisce la concezione (l'interpretazione)**

La definizione **frequentista** di probabilità genera
l'approccio **frequentista** (o **classico**) all'**inferenza statistica**