Parte 3

Variabili casuali

Variabile casuale

Parte 1, pag. 14 Esempi 1-2-3-4

Variabile **numerica** (eventualmente **codificata**) il cui valore (assunto tra i suoi possibili valori) è **incerto**, in quanto determinato dall'esito del **campionamento casuale**

Per un dato **esperimento casuale** (come il campionamento casuale), *una* **variabile casuale** è definita *associando* agli **eventi elementari** (elementi dello spazio campionario Ω) un **numero reale** (non uno ed uno solo, ndr)

Traduzione numerica degli eventi elementari (più o meno complessa)

Funzione che associa agli **eventi elementari** (elementi dello spazio campionario Ω) un **numero reale** (funzione non necessariamente *biunivoca*)

Dominio	Funzione	Codominio
Spazio campionario Ω	→	Asse reale ℝ
	Variabile casuale	

L'**insieme** dei valori (numerici) che una variabile casuale *può assumere* è lo **spazio campionario** (numerico) *generato* dalla variabile casuale

Supporto della variabile casuale (*immagine* della funzione)

I **valori** della variabile casuale sono i *nuovi* **eventi elementari** di interesse

Variabili casuali (v.c.) denominate con $X, Y, Z, \cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots, Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$

Il valore corrispondente (assunto *tra quelli appartenenti* al supporto) è $x, y, z, \cdots, x_1, x_2, x_3, \cdots, y_1, y_2, y_3, \cdots$

Tipo **supporto** di *X*	Numero valori di *X*	Tipologia di *X*
(Discreto) **finito**	**Finito** $(2,3,\cdots)$	**Discreta** con supporto **finito**
(Discreto) infinito **numerabile**	Infinito **numerabile**	**Discreta** con supporto infinito **numerabile**
Continuo	Infinito **non numerabile**	**Continua**

(retta reale, semiretta positiva, o intervallo limitato, ndr)

Esempio 5

Esperimento casuale

Lancio di un dado equilibrato (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Variabile casuale di interesse

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado

X *funzione identità* (ovviamente *biunivoca*) degli eventi elementari

(traduce gli eventi elementari in essi stessi)

Il supporto di X **coincide** con lo spazio campionario Ω

$x = 1,2,3,4,5,6$ alternativamente $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$

X variabile casuale **discreta** con supporto **finito**

Altra **variabile casuale** di interesse

Y = "**Numero** ottenuto (sulla faccia che *tocca il tavolo*)" nel lancio del dado

Eventi elementari in Ω		**Valori di *Y***
1	⇒	6
2		5
3		4
4		3
5		2
6		1

La somma dei numeri sulle facce *opposte* è sempre 7

Y traduce gli eventi elementari nei loro *complementi* a 7
(Y *funzione biunivoca* degli eventi elementari)

Y variabile casuale **discreta** con supporto **finito**

$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\boxed{Y = 7 - X}$$ (v.c. Y **funzione** della v.c. X, ndr)

Esempio 1

Popolazione finita

Classe di $N = 50$ studenti universitari

v.c. X di popolazione

Esperimento casuale

Selezione casuale di $n = 3$ studenti dalla classe e osservazione del loro **sesso**

Campionamento casuale $(n = 3)$

$\Longleftarrow$ **Eventi elementari** in Ω $\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$ **non codificati**

codificati $\Longrightarrow$

Campioni osservabili		
M	M	M
M	M	F
M	F	M
M	F	F
F	M	M
F	M	F
F	F	M
F	F	F

Campioni osservabili		
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Variabile casuale di interesse

X_1 = "**Sesso** (a valori 0/1) dello studente selezionato alla **prima** estrazione"

Campioni osservabili			⇒	**Valori di X_1**
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

X assume la denominazione di X_1

X_1 funzione *univoca* (ma *non biunivoca*) degli eventi elementari

X_1 variabile casuale **discreta** con supporto **finito** (binario)

v.c. *binaria* (o *dicotomica*)

$x_1 \in \{0,1\}$

X assume anche la denominazione di X_2, X_3

Variabili casuali *analoghe* a X_1

X_2 = "**Sesso** (a valori 0/1) dello studente selezionato alla **seconda** estrazione"

X_3 = "**Sesso** (a valori 0/1) dello studente selezionato alla **terza** estrazione"

Medesime considerazioni anche per X_2, X_3

Altra **variabile casuale** di interesse

Y = "**Somma** dei numeri (valori codificati di sesso) nel campione"

Somma campionaria

In questo caso, rappresenta il **numero delle femmine** nel campione

Numero dei *successi* nel campione

Campioni osservabili			⇒	Valori di Y
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		2
1	0	0		1
1	0	1		2
1	1	0		2
1	1	1		3

Y *non* è una funzione *biunivoca* degli eventi elementari

Y variabile casuale **discreta** con supporto **finito**

$y \in \{0,1,2,3\}$

Ancora un'altra **variabile casuale** di interesse

$\overline{X}$ = "**Media aritmetica** dei numeri (valori codificati di sesso) nel campione"

Media campionaria

In questo caso, rappresenta la proporzione **delle femmine** nel campione

Proporzione campionaria dei *successi* (frequenza relativa o percentuale)

Campioni osservabili			$\Rightarrow$	Valori di $\overline{X}$
0	0	0		0
0	0	1		1/3
0	1	0		1/3
0	1	1		2/3
1	0	0		1/3
1	0	1		2/3
1	1	0		2/3
1	1	1		1

$\overline{X}$ *non* è una funzione *biunivoca* degli eventi elementari

$\overline{X}$ variabile casuale **discreta** con supporto **finito**

$$\bar{x} \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

Esempio 3

Popolazione infinita

Popolazione virtuale degli infiniti **intervalli temporali di un'ora**, nei quali un centralino *riceve telefonate* (nelle **stesse condizioni**, ndr)

Possibilità di **popolazione finita**

Esperimento casuale

Selezione **casuale** di $n = 4$ intervalli orari (uno alla volta, ndr) e osservazione, per ciascuno di essi, del **numero di telefonate ricevute** (≥ 0)

Campionamento casuale ($n = 4$)

v.c. X di popolazione

Spazio campionario Ω formato da una infinità **numerabile** di eventi elementari (i *campioni osservabili* di ampiezza $n = 4$)

Variabile casuale di interesse

X_1 = "**Numero di telefonate** ricevute nel **primo** intervallo orario selezionato"

Anche interesse per le variabili casuali *analoghe* X_2, X_3, X_4

Campioni osservabili				$\Rightarrow$	**Valori di X_1**
0	0	0	0		0
0	0	0	1		0
0	0	0	2		0
0	0	0	3		0
0	0	0	4		0
0	0	0	5		0
0	0	0	6		0
0	0	0	⋮		0
…					…

X assume la denominazione di X_1 (e anche di X_2, X_3, X_4)

X_1 *non* è una funzione *biunivoca* degli eventi elementari

X_1 variabile casuale **discreta** con supporto **numerabile**

$$x_1 \in \{0,1,2,\cdots,\infty\}$$

Medesime considerazioni anche per X_2, X_3, X_4

Esempio 4

Popolazione finita

Lotto di $N = 1000$ lampade prodotte in un processo produttivo
in un **dato arco temporale** di lavorazione (nelle **stesse condizioni**, ndr)

Possibilità di **popolazione infinita**

Esperimento casuale

Estrazione casuale di $n = 2$ lampade (una alla volta, e ammettendo che una lampada possa essere estratta più di una volta, ndr) e osservazione, per ciascuna di esse, della **durata**

Campionamento casuale $(n = 2)$

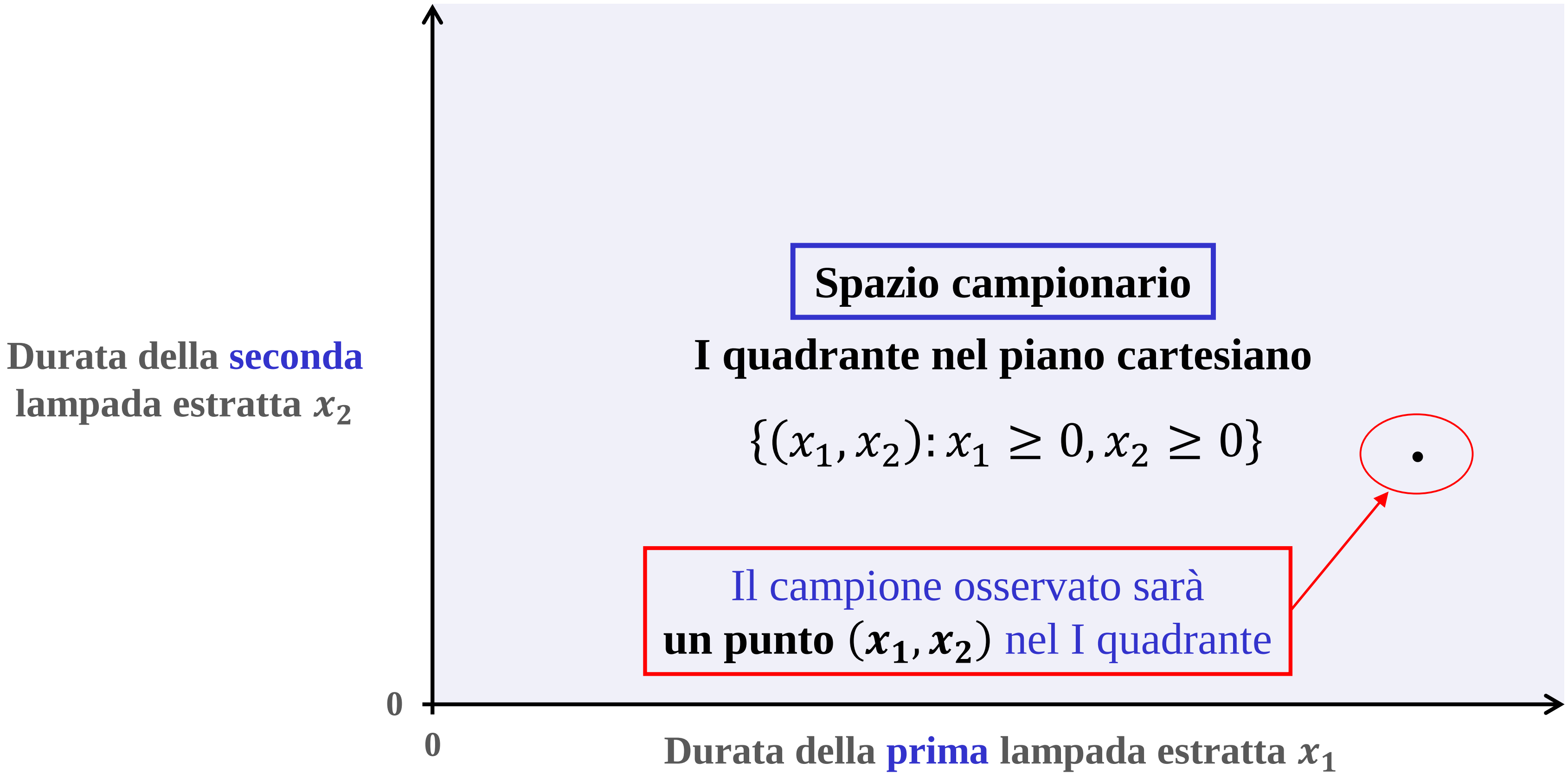
v.c. X di popolazione

X v.c. **continua** (a valori reali ≥ 0)

$$x \in [0, \infty)$$

Spazio campionario Ω formato da una infinità **non numerabile** di eventi elementari (i *campioni osservabili* di ampiezza $n = 2$)

I quadrante nel piano cartesiano



X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta"

X assume la denominazione di X_1

In modo *analogo* si definisce X_2

X_1 v.c. **continua**

$x_1 \in [0, \infty)$

X_1 *non* è una funzione *biunivoca* degli eventi elementari

Ad ogni **punto** del I quadrante associa la corrispondente **ascissa**

Una variabile casuale *è utile* se si può calcolare
la **probabilità** degli **eventi** *generati* da essa

I **valori** della variabile casuale, contenuti nel suo **supporto**,
sono gli **eventi elementari** di riferimento

Un **evento** è un **insieme di valori** della v.c. (e dunque **sottoinsieme** del supporto)

(insieme numerico)

Esempi di denominazione degli **eventi** (per la v.c. X)

$X = 1$	$X \geq 1$	$X < 10$
$2 \leq X \leq 4$	$9 < X < 11$	$0 < X \leq 3$

Spazio degli eventi

Collezione degli eventi (**sottoinsiemi** del supporto)
dei quali *è possibile* calcolare la **probabilità**

Contiene sempre l'**insieme vuoto** ϕ (evento impossibile) e il **supporto** della v.c. (evento certo)

Supporto **discreto** (finito o numerabile)

Lo **spazio degli eventi** è la collezione di **tutti i possibili** sottoinsiemi del supporto

Inclusi i **singoli valori** della v.c., ndr

Numero complessivo di eventi appartenenti allo spazio degli eventi

- Supporto **finito** (con N valori della v.c. X) $\Longrightarrow 2^N$
- Supporto **numerabile** $\Longrightarrow$ Infinito **numerabile**

Calcolo di probabilità degli eventi

Necessita (in entrambi casi) della **conoscenza** della **probabilità** dei **singoli valori** della variabile casuale

La probabilità di un **evento** (**insieme di valori** della v.c.) è la **somma delle probabilità** dei **singoli valori** di cui l'evento si compone

(Parte 2, pag. 19)

Esempio 5

Lancio di un dado equilibrato (non truccato) e osservazione del **numero** ottenuto

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado

v.c. **discreta** con supporto **finito**

$$x \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

cfr Parte 2, pag. 22

Distribuzione di probabilità di X

Valori di X x	**Probabilità** $f(x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6} \quad \forall x$$

Funzione di probabilità di X

(funzione *costante*)

Modello di probabilità **Uniforme discreto**

($\Longrightarrow$ Parte 5)

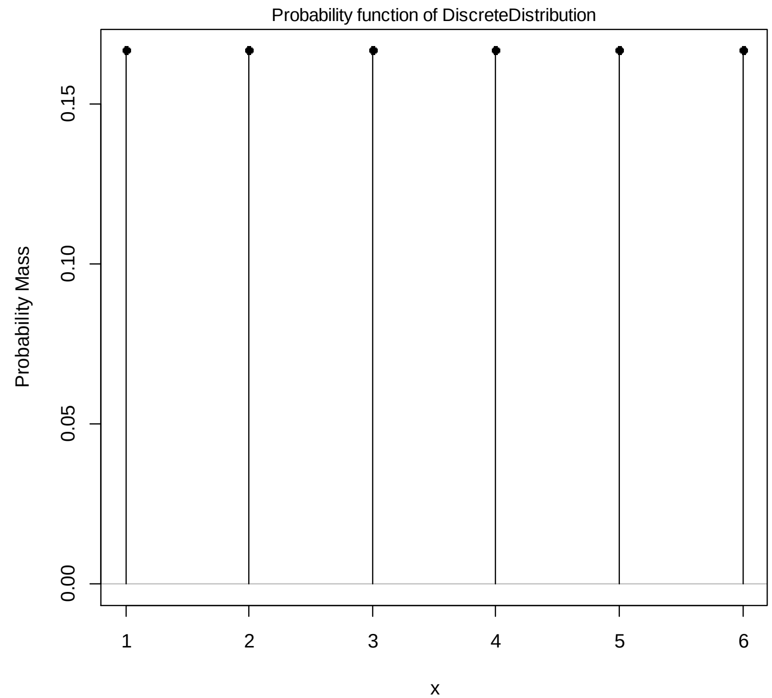
$$\sum_x f(x) = 1$$

Probabilità dell'evento certo

x	$f(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{6} \quad \forall x}$$

$f(x) = 0 \quad altrove$



Calcolo della probabilità di alcuni eventi

Lo **spazio degli eventi** contiene $2^6 = 64$ eventi

$$A = \{2,4,6\} = \text{"Numero pari"}$$

$$P(A) = P\big((X=2) \cup (X=4) \cup (X=6)\big) = 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

cfr Parte 2, pag. 22

$$B = \{5,6\}$$

$$P(B) = P(X \geq 5) = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$P(A \cap B) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Esempio 1

Classe di $N = 50$ studenti universitari

Selezione casuale di $n = 3$ studenti dalla classe e osservazione del loro **sesso**

X_1 = "**Sesso** dello studente selezionato alla **prima** estrazione"

v.c. **discreta** con supporto **finito** (binario)

$$x_1 \in \{0,1\}$$

x_1	$f(x_1)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$

Si assuma che nella classe di $N = 50$ studenti,
vi siano $n(0) = 20$ **maschi** e $n(1) = 30$ **femmine**

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$f(1) = P(X = 1) = 0.6$$

cfr Parte 2, pagg. 35 – 37

x_1	$f(x_1)$
0	$\mathbf{0.4}$
1	$\mathbf{0.6}$

$f(x_1) = 0 \quad altrove$

Lo **spazio degli eventi** contiene $2^2 = 4$ eventi
(numero minimo di eventi)

Modello di probabilità **di Bernoulli**

X variabile casuale **discreta** (supporto **finito** o **numerabile**)

Funzione di probabilità di X

Funzione (di **massa**) di probabilità

$$f(x) = P(X = x) \qquad x \text{ valore di } X$$

$P(\cdot)$ è la **funzione di probabilità** secondo la **definizione assiomatica**

Dominio	Funzione	Codominio
Supporto di X	$\longrightarrow$	Intervallo [0,1]
$f(x) = 0$ *altrove*	Funzione di probabilità	

- Supporto **finito** (con N valori della v.c. X) $\Longrightarrow x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$
- Supporto **numerabile** $\Longrightarrow x \in \{x_1, x_2, \cdots, \infty\}$

Proprietà della funzione di probabilità $f(x)$

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ — **Assioma 2** di $P(\cdot)$ (di non-negatività)
- $\sum_x f(x) = 1$ — **Assioma 1** di $P(\cdot)$ (dell'evento certo)

Distribuzione di probabilità della v.c. discreta *X*

Si ottiene *associando* la **funzione di probabilità** *ad ogni valore* del supporto

Supporto **finito**

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_N	$f(x_N)$

Supporto **numerabile**

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$

Anche **grafico** della funzione di probabilità

Scenario tipico (cfr Parte 5)

$f(x)$ è una funzione **analitica**

Modello di probabilità per *variabili casuali* **discrete**

Nel caso di esperimento casuale **ripetibile** (come il **campionamento casuale**)

Definizione **frequentista** della probabilità $f(x)$

Distribuzione di probabilità di *X* **assimilabile** alla **distribuzione di frequenze** (relative) dei valori di *X* ottenuti in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento (**distribuzione empirica** dei valori di *X*)

Supporto **continuo**

Rappresentato da un insieme **non numerabile** di numeri reali

(retta reale, semiretta positiva, o intervallo limitato, ndr)

Spazio degli eventi

Collezione **non numerabile** degli **intervalli reali** del tipo:

$[a, b]$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$

(intervalli chiusi, aperti, semi-aperti)

a, b appartenenti al supporto della v.c. **continua** X (anche $-\infty$ e ∞)

È una **algebra** di eventi

Non contiene i singoli valori di X (eventi elementari)

Impossibile calcolarne la probabilità

Gli intervalli $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ hanno la **medesima probabilità**

Inclusione/esclusione degli **estremi** dell'intervallo **irrilevante**

Come calcolare la probabilità di un intervallo reale?

È necessario disporre di una *speciale* **funzione** reale da **integrare** (*sommare nel continuo*) **tra gli estremi** dell'intervallo

$f(x) \quad x$ valore di X

Funzione di densità (di probabilità) della v.c. continua X

Non è la **funzione** (di massa) **di probabilità**

(tale funzione caratterizza una v.c. **discreta**, ndr)

$$\underset{\text{Supporto di } X}{\text{Dominio}} \xrightarrow[\text{Funzione di densità}]{\text{Funzione}} \underset{\text{Intervallo } [0,\infty]}{\text{Codominio}}$$

$f(x) = 0$ *altrove*

Sia $[a, b]$ l'intervallo reale di riferimento

(*indifferente* includere/escludere gli estremi, ndr)

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$P(\cdot)$ è la **funzione di probabilità** secondo la **definizione assiomatica**

$f(x)$ è *necessariamente* una funzione **analitica** (cfr Parte 6)

Modello di probabilità per *variabili casuali* **continue**

Rappresentazione grafica di grande importanza (ndr)

L'**integrale definito** che misura la *probabilità di un intervallo reale* corrisponde all'**area sottesa dalla funzione di densità** sull'intervallo medesimo

Proprietà della funzione di densità $f(x)$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Assioma 2 di $P(\cdot)$ (di non-negatività)

Se $f(x) < 0 \Longrightarrow P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx < 0$

Può essere $f(x) > 1$

Non è una probabilità

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Assioma 1 di $P(\cdot)$ (dell'evento certo)

Integrazione *estesa* all'intero **supporto** di X
(area sottesa da $f(x)$ è uguale a 1)

X supposta definita sull'intera retta reale

Non si perde in generalità

Distribuzione di probabilità della v.c. continua X

Si ottiene *associando* la **funzione di densità** *ad ogni valore* del supporto

Grafico della funzione di densità

Nel caso di esperimento casuale **ripetibile** (come il **campionamento casuale**)

Definizione **frequentista** della probabilità
(di un qualsiasi *intervallo reale*)

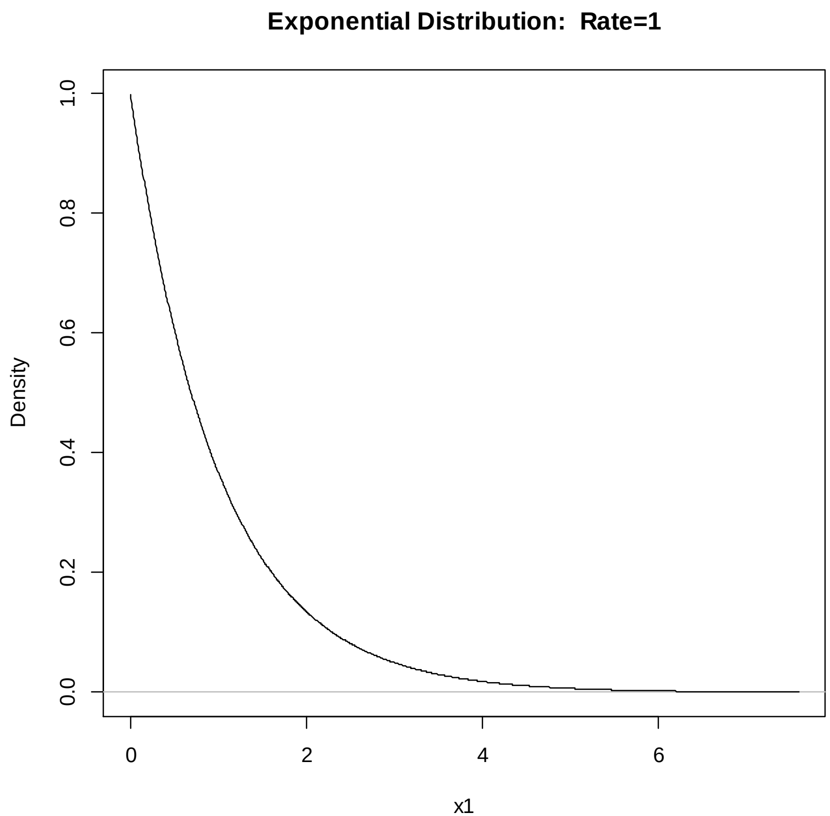
Distribuzione di probabilità di X **assimilabile** alla **distribuzione di densità** (densità di frequenze relative) dei valori di X (opportunamente *raggruppati*) ottenuti in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento (**distribuzione empirica** dei valori di X)

Grafico della funzione di densità **assimilabile** all'**istogramma di frequenze** corrispondente

Esempio 4

X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta"

v.c. **continua** con supporto $[0, \infty)$



Funzione di densità *ipotizzata*

$$f(x_1) = e^{-x_1} \qquad x_1 \in [0, \infty)$$

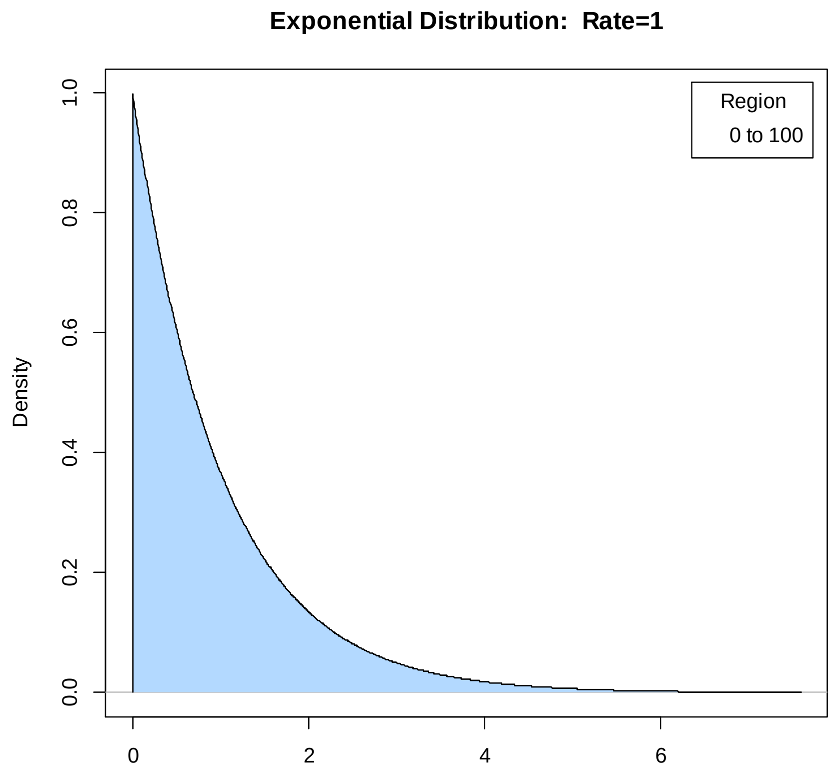
$f(x_1) = 0$ *altrove*

Modello di probabilità **Esponenziale**

È un *tipico* **modello di durata**

Il **grafico** della funzione di densità *descrive* la **distribuzione di probabilità** di X_1

Distribuzione Esponenziale



Verifica delle **proprietà** della funzione di densità

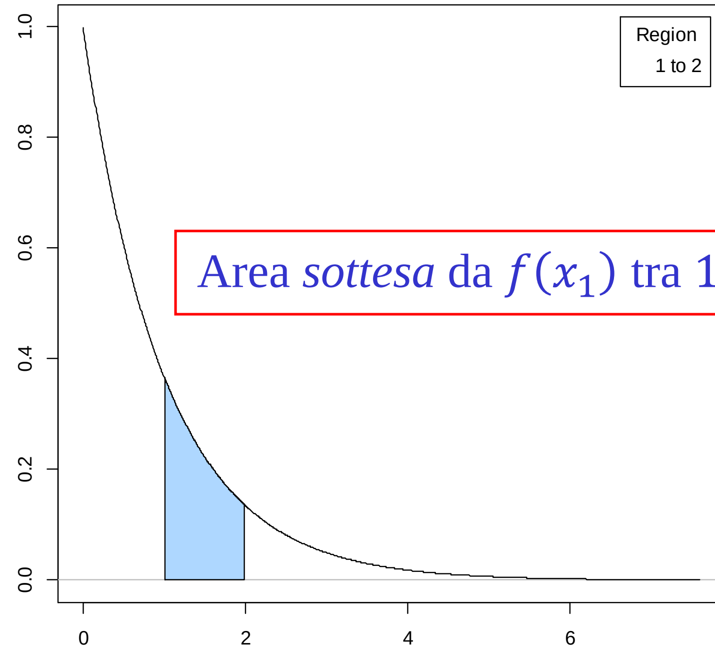
$$f(x_1) = e^{-x_1} \geq 0$$

In *questo caso* $f(x_1) \leq 1$

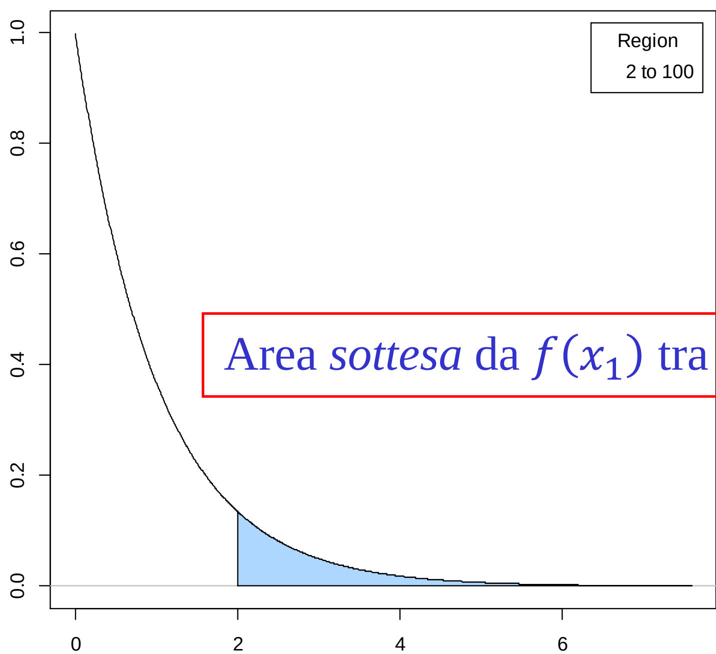
$$\int_0^{\infty} e^{-x_1} dx_1 = 1$$

Area *sottesa* da $f(x_1)$ tra 0 e ∞ **pari a 1**

$$P(1 \leq X_1 \leq 2) = \int_1^2 e^{-x_1} dx_1 \cong \mathbf{0,233}$$



Area *sottesa* da $f(x_1)$ tra 1 e 2



Area *sottesa* da $f(x_1)$ tra 2 e ∞

$$P(X_1 \geq 2) = \int_2^\infty e^{-x_1} dx_1 \cong \mathbf{0,135}$$

Ovviamente $P(X_1 \leq 2) = 1 - P(X_1 \geq 2)$

Funzione di ripartizione di una v.c. X (*discreta* o *continua*)

x *numero reale* **qualsiasi** (*non esclusivamente* valore di X)

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

Funzione di **probabilità cumulata**

Esprime una **probabilità** (compresa tra 0 e 1)

Probabilità dell'intervallo reale $(-\infty, x]$, per ogni numero reale x

Dominio	Funzione	Codominio
Asse reale $\mathbb{R}$	$\longrightarrow$ Funzione di ripartizione	Intervallo $[0,1]$

Anche **grafico** di $F(x)$

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$$

$F(x)$ funzione **non-decrescente** in x

Cumulo progressivo di probabilità

$$F(-\infty) = 0 \qquad F(\infty) = 1$$

$F(x)$ funzione **limitata** in $[0,1]$

Assume valori di **probabilità** (tra 0 e 1)

Proprietà *generali* della funzione di ripartizione $F(x)$

Assume valori **non-decrescenti**, **a partire da 0 e fino a 1**

Funzione di ripartizione

Variabile casuale X **continua**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Corrisponde all'area sottesa dalla funzione di densità sull'intervallo $(-\infty, x]$

Proprietà *addizionale* della funzione di ripartizione di una v.c **continua**

$F(x)$ è una funzione **assolutamente continua** (e dunque anche *continua*)

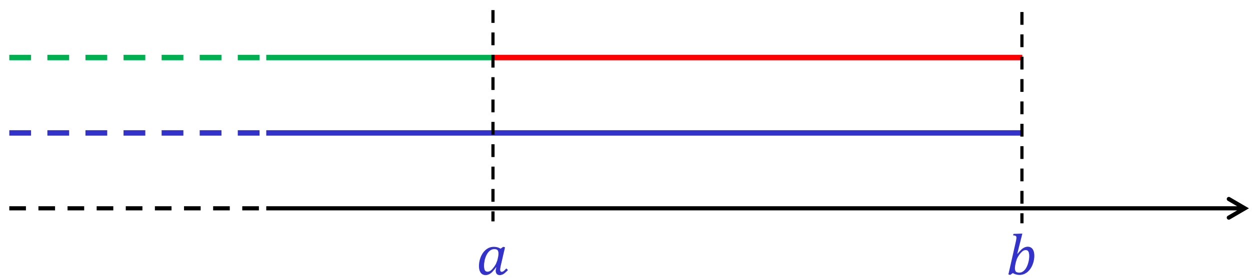
È uguale all'integrale della sua derivata

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

La **funzione di densità** può ottenersi mediante *derivazione* della **funzione di ripartizione**

Probabilità di un qualsiasi intervallo reale $[a, b]$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$



$A = \{X \leq b\}$ $\quad$ $B = \{X < a\}$ $\quad$ $C = \{a \leq X \leq b\}$

$A = B \cup C$ $\quad$ $B \cap C = \emptyset$

Assioma 3 di $P(\cdot)$ (della sommabilità)

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

$$P(X \leq b) = P(X < a) + P(a \leq X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P(X < a) + P(a \leq X \leq b)$$

X v.c **continua**

$$\boxed{P(X < a) = P(X \leq a) = F(a)}$$

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X \leq b)$$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

La **probabilità** di un *qualsiasi intervallo reale* può calcolarsi mediante il ricorso alla **funzione di ripartizione**

Differenza tra i valori di $F(x)$ corrispondenti agli **estremi** dell'intervallo

Esempio 4

X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta"

Funzione di densità *ipotizzata*

$$\boxed{f(x_1) = e^{-x_1} \qquad x_1 \in [0, \infty)}$$

$$f(x_1) = 0 \quad altrove$$

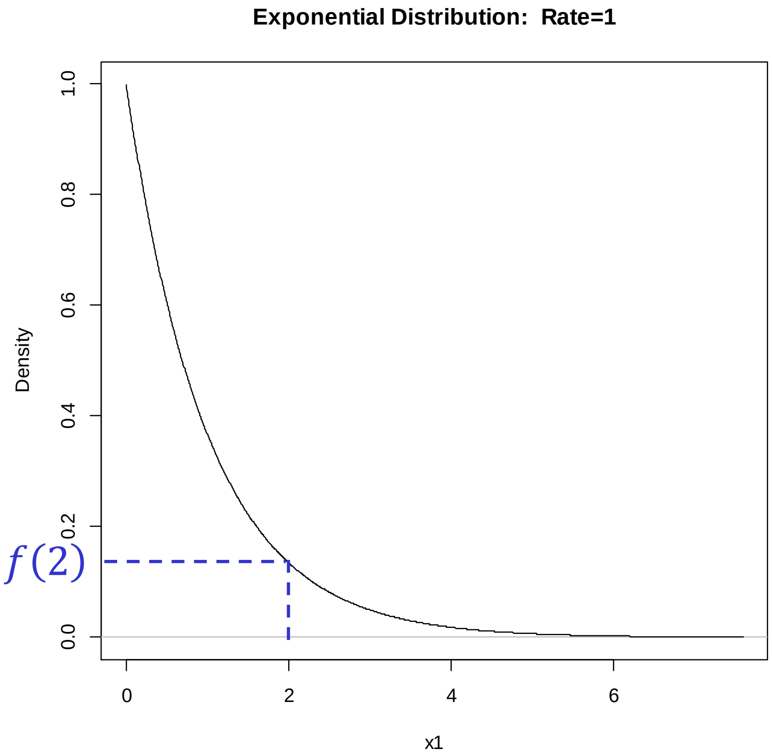
Modello **Esponenziale**

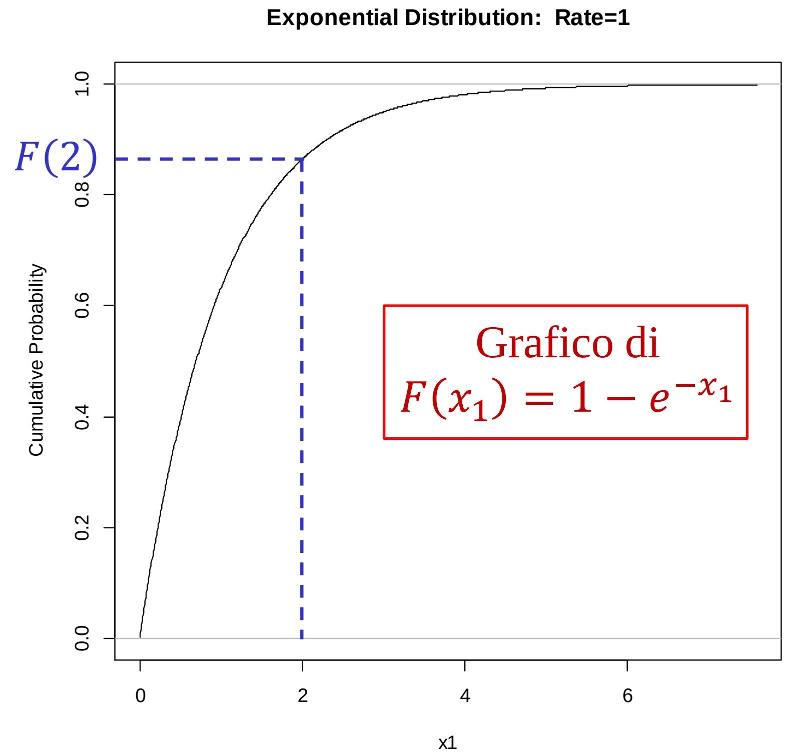
Funzione di ripartizione $x_1 \in [0, \infty)$

$$F(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt =$$

$$= \int_0^{x_1} e^{-t} dt = 1 - e^{-x_1}$$

$$F(x_1) = 0 \quad altrove$$





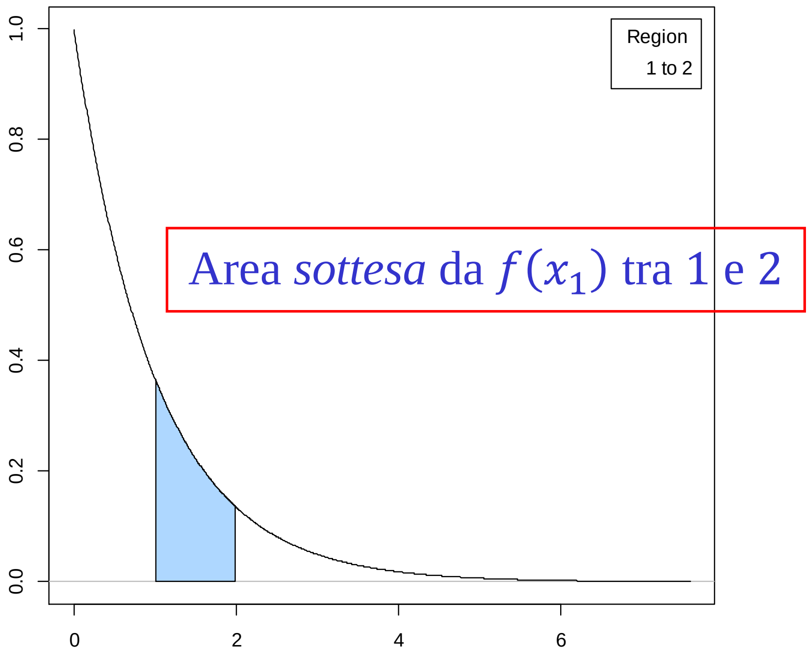
$$F(2) = P(X_1 \leq 2) = 1 - e^{-2} \cong \mathbf{0.865}$$

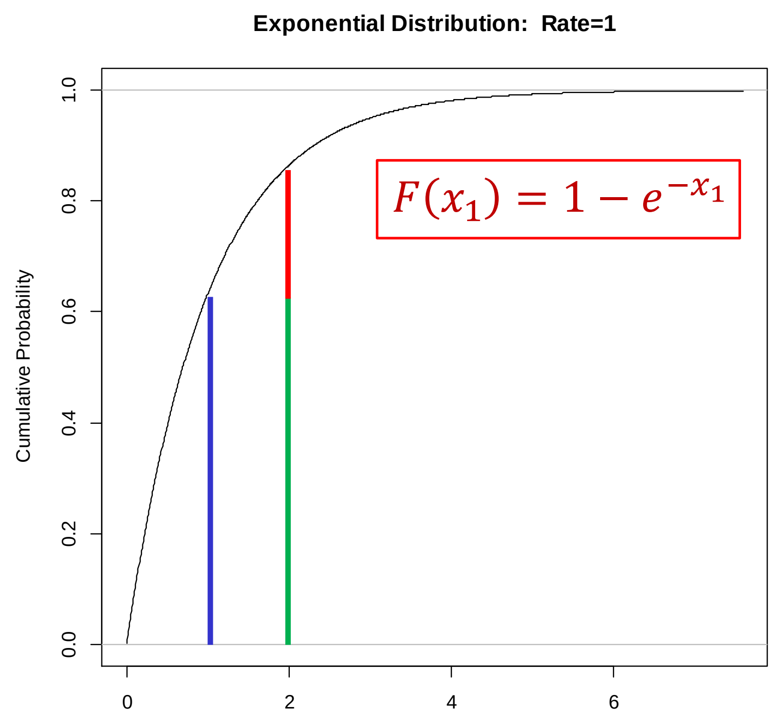
$f(2) = e^{-2} \cong \mathbf{0.135}$ (**densità** di probabilità del valore 2 di X)

$$F(x_1) = 1 - e^{-x_1} \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x_1}) = e^{-x_1}$$

Funzione di densità ricavata dalla **funzione di ripartizione**

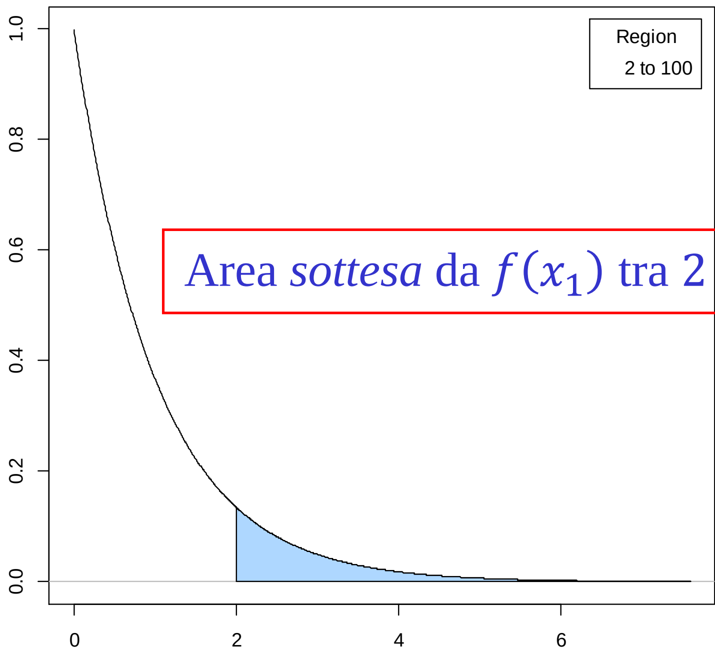
$$P(1 \leq X_1 \leq 2) = \int_1^2 e^{-x_1} dx_1 \cong \mathbf{0,233}$$



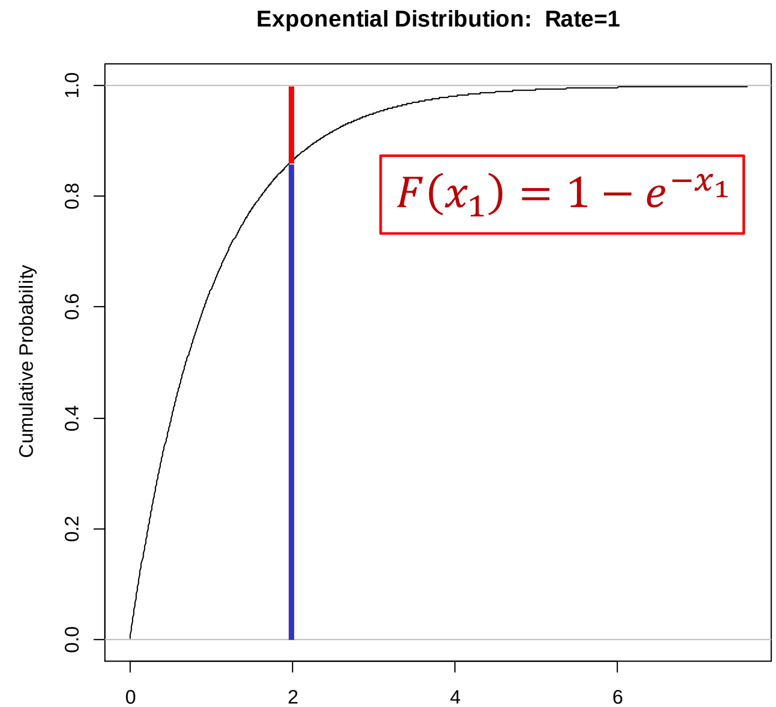


$$\boxed{P(1 \leq X_1 \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \cong \mathbf{0,233}}$$

$$P(X_1 \geq 2) = \int_2^{\infty} e^{-x_1} dx_1 \cong \mathbf{0,135}$$



Area *sottesa* da $f(x_1)$ tra 2 e ∞



$$P(X_1 \geq 2) = P(2 \leq X_1 \leq \infty) = F(\infty) - F(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} \cong \mathbf{0,135}$$

Valore di sintesi della v.c. (tiene conto della *distribuzione di probabilità*)

Media di una variabile casuale X

Valore atteso, aspettativa, speranza matematica

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

X v.c. **discreta** con supporto **finito** o **numerabile**

Somma estesa ai valori x della v.c X

- Supporto **finito** (con N valori della v.c. X) $\Longrightarrow x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$
- Supporto **numerabile** $\Longrightarrow x \in \{x_1, x_2, \cdots, \infty\}$

Nel caso di supporto **numerabile**, la somma (infinita) definisce una **serie**

La media può **non** esistere (se la serie **non converge**)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

X v.c. **continua** con supporto rappresentato *genericamente* dall'intero asse reale $\mathbb{R}$

La media può **non** esistere (se l'integrale **non è** $< \infty$)

Esempio 5

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado

Distribuzione di probabilità

x	$f(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Funzione di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{6} \qquad x \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \mathbf{3.5}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \mathbf{3.5}$$

Media (valore atteso) del **numero** ottenuto nel lancio del dado

Esempio 4

X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta"

Funzione di densità

$$f(x_1) = e^{-x_1} \qquad x_1 \in [0, \infty)$$

$$E(X_1) = \int_0^{\infty} x_1 e^{-x_1}\, dx_1 = \mathbf{1}$$

Integrazione *per parti*

Media (valore atteso) della **durata** della prima lampada estratta

Nel caso di esperimento casuale **ripetibile** (come il **campionamento casuale**)

Media della variabile casuale X **assimilabile** alla **media aritmetica** dei valori di X ottenuti in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento

Media aritmetica della **distribuzione empirica** dei valori di X

Esempio 5

$E(X) = \mathbf{3.5}$

Media (valore atteso) del **numero** ottenuto nel lancio del dado

Assimilabile alla **media aritmetica** dei **numeri** ottenuti in un *grande numero* di lanci del dado

Esempio 4

$E(X_1) = \mathbf{1}$

Media (valore atteso) della **durata** della prima lampada estratta

Assimilabile alla **media aritmetica** delle **durate** della prima lampada estratta, ottenute in un *grande numero* di ripetizioni del campionamento casuale

Proprietà di **internalità** della media

La **media** di una qualsiasi variabile casuale X *è sempre compresa* tra il valore **minimo** e il valore **massimo** del supporto di X

Espressa nella *medesima* unità di misura della v.c. X

Esempio 5	$1 \leq E(X) = \mathbf{3.5} \leq 6$
Esempio 4	$0 \leq E(X_1) = \mathbf{1} \leq \infty$

Media di un valore **costante**

$X \equiv c$
Variabile casuale **degenere** (pari ad una **costante**)
v.c. **discreta** con un *unico* valore c con *probabilità* $f(c) = P(X = c) = 1$
$E(c) = c \times f(c) = c$

La media di una **costante** è la **costante medesima**

Media di una *funzione* della variabile casuale X

$g(X)$ *funzione* della v.c. X

$g(x)$ valore di $g(X)$ **corrispondente** al valore x di X

Anche $g(X)$ è una variabile casuale, ndr

Media di $g(X)$ *basata sulla distribuzione di probabilità* della v.c. X

$$E\left(g(X)\right) = \sum_x g(x) f(x)$$

X v.c. **discreta** con supporto **finito** o **numerabile**

Somma estesa ai valori x della v.c X (in numero **finito** o **numerabile**)

Nel caso di supporto **numerabile**, la media può **non** esistere (se la serie **non converge**)

$$E\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

X v.c. **continua** con supporto rappresentato *genericamente* dall'intero asse reale $\mathbb{R}$

La media può **non** esistere (se l'integrale **non è** $< \infty$)

Media di $g(X)$ compresa tra **minimo** e **massimo** dei valori di $g(X)$

Nel caso di esperimento casuale **ripetibile** (come il **campionamento casuale**)

Media della funzione $g(X)$ della variabile casuale X **assimilabile** alla **media aritmetica** dei valori di $g(X)$ ottenuti in un **grande numero di ripetizioni** dell'esperimento

Media aritmetica della **distribuzione empirica** dei valori di $g(X)$

Momenti (non centrali) di una variabile casuale X

$$g(X) = X^r \quad r = 1,2,3,\cdots$$

$Potenza\ r - esima$ della v.c. X

$$X^1, X^2, X^3, \cdots$$

Media della $potenza\ r - esima$ della v.c. X

X v.c. **discreta**	X v.c. **continua**
$E(X^r) = \sum_x x^r f(x)$	$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$

Momento $r - esimo$ della v.c. X

Momento primo (la media, ndr), **momento secondo**, ecc.

Media di una *funzione lineare* della variabile casuale X

$g(X) = a + bX \quad a, b$ costanti reali
Calcolo *diretto* della **media** di $a + bX$ *non necessario*
Proprietà di **linearità** della media
$E(a + bX) = a + bE(X)$
Richiede il previo calcolo di $E(X)$

Media **invariante** a *trasformazioni lineari*

Casi speciali

$a = 0$	$b = 1$
$g(X) = bX$	$g(X) = X + a$
Cambiamento di scala	*Traslazione*
$E(bX) = bE(X)$	$E(X + a) = E(X) + a$

Media **invariante** (a *cambiamenti di scala* e a *traslazioni*)

Esempio 5

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado

$$E(X) = \mathbf{3.5}$$

Y = "**Numero** ottenuto (sulla faccia che *tocca il tavolo*)" nel lancio del dado

Y traduce i valori di X nei loro *complementi* a 7

$$\boxed{Y = 7 - X}$$

Y *funzione lineare* della v.c. X

$$Y = g(X) = a + bX \qquad (a, b) = (7, -1)$$

$$E(Y) = 7 - 1E(X) = \mathbf{3.5}$$

$E(X) = \mathbf{3.5}$ precedentemente calcolata

Variabile casuale **scarto**

È una speciale *traslazione* della v.c. X

Notazione usuale	$\mu = E(X)$
$g(X) = X + a \quad a = -\mu$	
$g(X) = X - \mu$	
$g(X)$ v.c. **scarto** (scarto di X dalla *propria media*)	
Media della v.c. **scarto**	
$E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mathbf{0}$	

Momenti centrali di una variabile casuale X

Equivalgono ai **momenti** (non centrali) della corrispondente v.c. **scarto**

$E(X-\mu)^r \qquad r = 1,2,3,\cdots$
Momento centrale $r - esimo$ della v.c. X
$E(X-\mu)^1, E(X-\mu)^2, E(X-\mu)^3, \cdots$

Momento centrale primo ($=0$, media della v.c. scarto), **momento centrale secondo**, ecc.

Misura di variabilità della v.c. (tiene conto della *distribuzione di probabilità*)

Varianza di una variabile casuale X

È il **momento centrale secondo** della v.c. X

Momento secondo della v.c. **scarto**

Media della *potenza seconda* (del *quadrato*) della v.c. **scarto**

$V(X) = E(X-\mu)^2 \geq 0$	
X v.c. **discreta**	X v.c. **continua**
$V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$	$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$
Notazione usuale	$\sigma^2 = V(X)$

Espressa nel *quadrato* dell'unità di misura della v.c. X

Deviazione standard di una variabile casuale X

Radice quadrata (principale) della **varianza** della v.c. X

$SD(X) = \sigma = \sqrt{V(X)} \geq 0$ *Medesima* unità di misura della v.c. X

$$V(X) = 0 \iff X \equiv c$$

X v.c. **degenere** (pari ad una **costante** c)

v.c. **discreta** con un *unico* valore c con *probabilità* $f(c) = P(X = c) = 1$

$E(c) = c$	$X \equiv c \implies V(c) = (c - c)^2 f(c) = \mathbf{0}$

La varianza di una **costante** è pari a **0**

Calcolo *alternativo* della varianza di una v.c. X

$$V(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Differenza tra il momento secondo della v.c. X e il *quadrato* del suo momento primo

… tra la media del *quadrato* della v.c. X e il *quadrato* della sua media

Calcolo eseguito *senza introdurre* la v.c. **scarto**

Se esiste la varianza di una v.c. X	Esiste anche la sua media
Se esiste la media di una v.c. X	Non esiste *necessariamente* la sua varianza

Esempio 5

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado | $E(X) = \mathbf{3.5}$

x	$f(x)$	$(x-3{,}5)^2$
1	1/6	
2	1/6	
3	1/6	
4	1/6	
5	1/6	
6	1/6	
		17.5

$$V(X) = \sum_x (x-3{,}5)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_x (x-3{,}5)^2 = \frac{17.5}{6} = \mathbf{2.917}$$

Alternativamente

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{91}{6} = \mathbf{15.17}$$

$$V(X) = 15.17 - 3.5^2 = \mathbf{2.917}$$

$$SD(X) = \sqrt{2.917} = \mathbf{1.708}$$

$V(X) = 3.919$ e $SD(X) = 1.708$ **assimilabili** alla **varianza** e alla **deviazione standard** dei **numeri** ottenuti in un *grande numero* di lanci del dado

Esempio 4

X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta" $E(X_1) = \mathbf{1}$

$$f(x_1) = e^{-x_1} \qquad x_1 \in [0, \infty)$$

Integrazione *per parti*

$$V(X_1) = \int_0^{\infty} (x_1 - 1)^2 e^{-x_1}\, dx_1 = \mathbf{1}$$

Alternativamente

Integrazione *per parti*

$$E(X_1^2) = \int_0^{\infty} x_1^2 e^{-x_1}\, dx_1 = \mathbf{2}$$

$$V(X_1) = 2 - 1^2 = \mathbf{1} \qquad \boxed{SD(X_1) = \sqrt{1} = \mathbf{1}}$$

$V(X_1) = 1$ e $SD(X_1) = 1$ **assimilabili** alla **varianza** e alla **deviazione standard** delle **durate** della prima lampada estratta, ottenute in un *grande numero* di ripetizioni del campionamento casuale

Varianza di una *funzione lineare* della variabile casuale X

$g(X) = a + bX \qquad a, b$ costanti reali
Calcolo *diretto* della **varianza** di $a + bX$ *non necessario*
La **varianza** *non gode* della proprietà di **linearità**
$V(a + bX) = b^2 V(X)$
Richiede il previo calcolo di $V(X)$

Varianza **non invariante** a *trasformazioni lineari*

Casi speciali

$a = 0$	$b = 1$	
$g(X) = bX$	$g(X) = X + a$	
Cambiamento di scala	*Traslazione*	v.c. **scarto**
$V(bX) = b^2 V(X)$	$V(X + a) = V(X)$	$V(X - \mu) = V(X)$

Varianza **non invariante** (a *cambiamenti di scala* e a *traslazioni*)

Esempio 5

X = "**Numero** ottenuto (sulla faccia in alto)" nel lancio del dado

$$V(X) = \mathbf{2.917}$$

Y = "**Numero** ottenuto (sulla faccia che *tocca il tavolo*)" nel lancio del dado

Y traduce i valori di X nei loro *complementi* a 7

$$\boxed{Y = 7 - X}$$

Y *funzione lineare* della v.c. X

$$Y = g(X) = a + bX \qquad (a, b) = (7, -1)$$

$$V(Y) = (-1)^2 V(X) = V(X) = \mathbf{2.917}$$

$V(X) = \mathbf{2.917}$ precedentemente calcolata

Variabile casuale **standardizzata**

È una speciale *funzione lineare* della v.c. X

$$\mu = E(X) \qquad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$g(X) = a + bX \qquad (a, b) = \left(-\frac{\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$g(X) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}X = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$g(X)$ v.c. **standardizzata**

Ottenuta mediante *standardizzazione* della v.c. X

Cambiamento di scala della v.c. **scarto** (fattore di scala $1/\sigma$)

Notazione usuale	$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Media e **varianza** di una v.c. **standardizzata**

$E(Z) = -\dfrac{\mu}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma}\mu = \mathbf{0}$	$V(Z) = \left(\dfrac{1}{\sigma}\right)^2 \sigma^2 = \mathbf{1} = SD(Z)$

Z v.c. *adimensionale* (rapporto tra grandezze *omogenee*)

Momenti di una variabile casuale **standardizzata**

Momento primo Media	$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \mathbf{0}$
Momento secondo *Coincide* con la varianza (ovvero con il momento centrale secondo)	$E(Z^2) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = \mathbf{1}$
$V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2 = E(Z^2)$	
Momento terzo Coefficiente di **asimmetria**	$E(Z^3) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$
Momento quarto	$E(Z^4) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4}$
Coefficiente di **curtosi**	$E(Z^4) - 3$

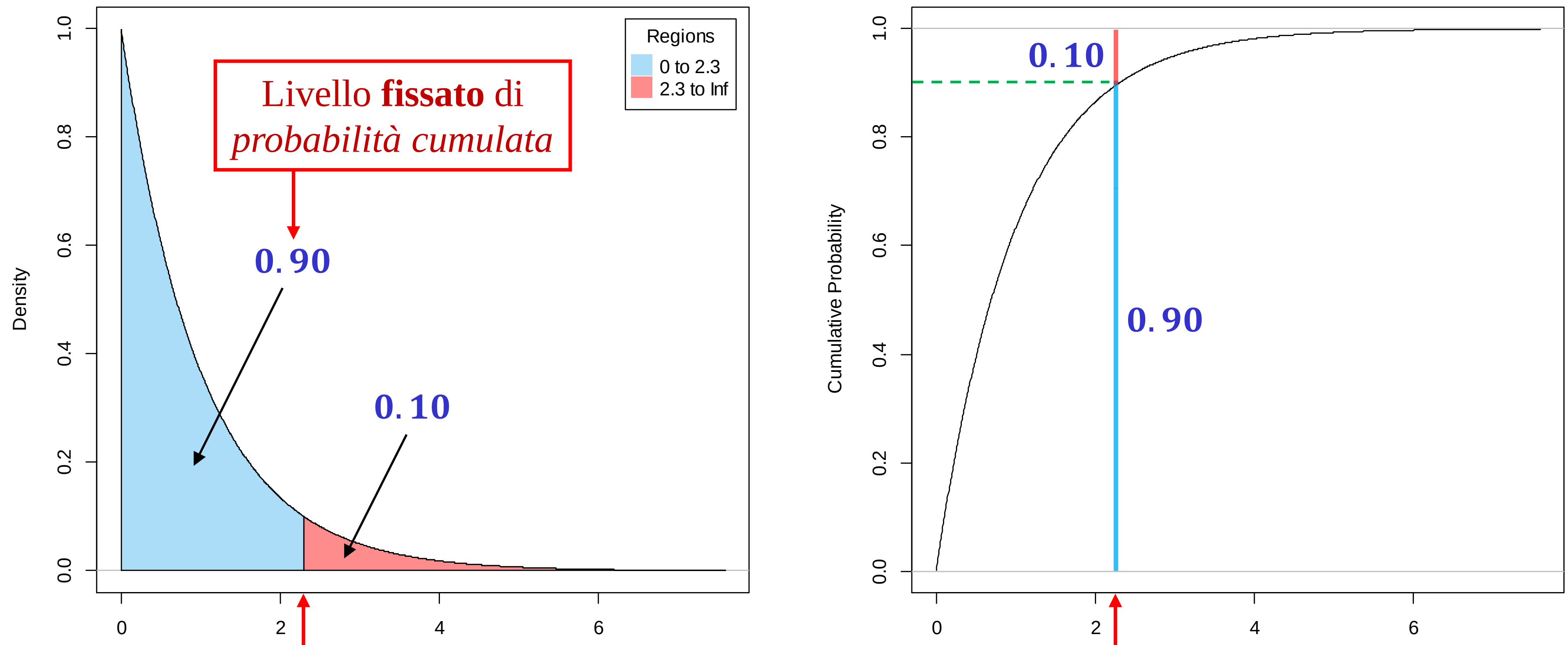
Quantili di una variabile casuale

Interesse per v.c. **continue**

Esempio 4

X_1 = "**Durata** della **prima** lampada estratta"	
$f(x_1) = e^{-x_1}$	$x_1 \in [0, \infty)$
$F(x_1) = 1 - e^{-x_1}$	
$f(x_1) = F(x_1) = 0$ altrove	

La v.c. X_1 segue un **modello esponenziale** (per *ipotesi*)



2.3 è il **quantile** di livello **0.90** della v.c. X_1 (della distribuzione di X_1)

2.3 è tale che	$F(2.3) = P(X \leq 2.3) = 0.90$	$1 - F(2.3) = P(X \geq 2.3) = 0.10$

Valore che la v.c. X_1 **non supera** con probabilità **0.90** (e che **supera** con probabilità **0.10**)

Notazione: $x_{0.90} = 2.3$ Anche $90 - \textit{esimo}$ **centile** (o **percentile**) (o di livello 90)

<table>
<tr><td rowspan="2">X v.c. continua</td><td>Funzione di ripartizione di X</td><td>$0 < p < 1$</td></tr>
<tr><td>$F(X) = P(X \leq x)$</td><td>Livello fissato di probabilità cumulata</td></tr>
<tr><td rowspan="3">x_p è compreso nel supporto di X</td><td colspan="2">Quantile di livello p della v.c. X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valore x_p tale che</td><td>$F(x_p) = P(X \leq x_p) = p$</td></tr>
<tr><td>$1 - F(x_p) = P(X \geq x_p) = 1 - p$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Valore che la v.c. X non supera con probabilità p (e che supera con probabilità $1 - p$)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Anche $100 \times p -$ esimo centile (o percentile) (o di livello $100 \times p$)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Primo quartile</td><td colspan="2">Mediana</td><td colspan="2">Terzo quartile</td></tr>
<tr><td>$p = 0.25 \Longrightarrow x_{0.25} = Q_1$</td><td colspan="2">$p = 0.50 \Longrightarrow x_{0.50} = Me$</td><td colspan="2">$p = 0.75 \Longrightarrow x_{0.75} = Q_3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valori usuali di p</td><td>0.005</td><td>0.01</td><td>0.025</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>0.95</td><td>0.975</td><td>0.99</td><td>0.995</td></tr>
</table>

x_p **assimilabile** al **quantile** di livello p della **distribuzione empirica** corrispondente