二叉树性质证明

张海鹏

University of JiangNan

zhpmatrix@gmail.com

2017 年 4 月 2 日

性质一

一棵非空二叉树的第 i 层上最多有 $2^{(i-1)}$ 个节点 $(i \geq 1)$

证明:
(1) 第 1 层有 1 个节点
(2) 第 2 层有 2 个节点
(3) 假设第 k 层有 2^{k-1} 个节点，则第 $k+1$ 层的节点数目为:

$$2^{k-1} * 2 = 2^k \tag{1}$$

性质成立

性质二

一棵深度为 k 的二叉树中，最多具有 $2^k - 1$ 个节点 $(k \geq 1)$

证明:

(1) 假设第 i 层的节点数为 X_i, 则由性质一有:

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1 \tag{2}$$

性质三

对于一棵非空二叉树，如果叶子节点数为 n_0，度为 2 的节点数为 n_2，则有 $n_0 = n_2 + 1$

证明:
设 n 为二叉树的节点总数，n_1 为二叉树中度为 1 的节点数，则有 $n = n_0 + n_1 + n2$，另一方面，在二叉树中，除根节点外，其余所有节点有唯一的一个进入分支。设 B 为为二叉树中的分支树，那么有:
$B = n - 1$，这些分支是由度为 1 和度为 2 的节点发出的，所以有:
$B = n_1 + 2 * n_2$，综上可得，性质三成立

性质四

具有 n 个节点的完全二叉树的深度 k 为 $[log_2 n] + 1$

证明如下:
假设一颗完全二叉树的深度为 k, 节点个数为 n 时，有:

$$2^{k-1} - 1 < n \leq 2^k - 1 \tag{3}$$

即:

$$2^{k-1} \leq n < 2^k \tag{4}$$

不等式取对数， k 是整数

性质五

对于具有 n 个节点的完全二叉树，如果按照从上至下和从左到右的顺序对二叉树中的所有节点成功 1 开始顺序编号，则对于任意的序号为 i 的节点，有:

(1) 如果 $i > 1$, 则序号为 i 的节点的双亲节点的序号为 $i/2$; 如果 $i = 1$, 则序号为 i 的节点是根节点, 无双亲节点。

(2) 如果 $2i \leq n$, 则序号为 i 的节点的左孩子节点的序号为 $2i$, 如果 $2i > n$, 则序号为 i 的节点无左孩子。

(3) 如果 $2i + 1 \leq n$, 则序号为 i 的节点的右孩子节点的序号为 $2i + 1$, 如果 $2i + 1 > n$, 则序号为 i 的节点无右孩子。

The End