작도의 역사

조우상
2학년 3반 20번

I. 작도란?

작도는 고대 그리스 때 부터 시작된 눈금없는 자와 컴퍼스만을 이용해 여러가지 도형을 그리는 기하학의 한 분야이다. 아마 대부분의 학생들이 작도를 중학교 1학년 수학시간에 접해보았을 것이다. 그런데 작도의 역사는 수많은 수학자들의 고뇌와 노력들로 점철되어 있다.

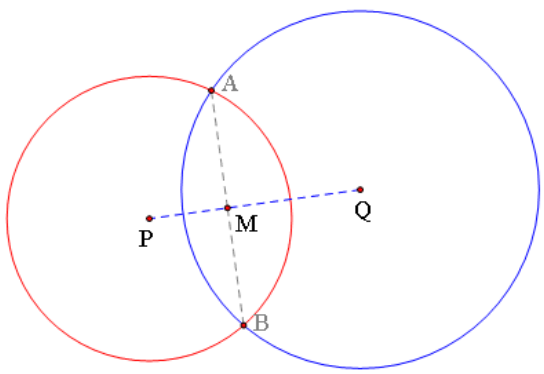

Fig. 1. 점으로부터 직선 위로의 수선의 발.

II. 작도의 규칙

작도의 규칙은 매우 간단하다. 그저 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 도형을 그리기만 하면 된다. 이때 눈금 없는 자는 직선을 긋는 용도로 사용되고, 컴퍼스는 원을 그리거나 선분의 길이를 옮기는 데에 사용된다.

III. 간단한 작도 문제들

이러한 규칙을 통해 다음과 같은 간단한 작도를 할 수 있다.

- 각의 이등분
- 선분의 수직 이등분선
- 동위각
- 수선
- 선분의 n등분
- 정삼각형
- 평행선
- 직각의 3등분

연습문제 1. 위의 작도 문제들을 작도하여라(하나 이상)(풀이를 학번과 함께 보내면 2층 과학정보부에서 소정의 상품 지급)

IV. 유클리드와 가우스

작도의 역사에는 수많은 수학자들이 연관되어 있지만, 우선 작도의 역사상 가장 깊고 큰 영향을 준 수학자는 유클리드와 가우스이다.

작도를 눈금없는 자와 컴퍼스만을 이용하는 이유는 고대 그리스에 유클리드가 자신의 저서 ’원론’에서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용한 작도법, 논증기하학, 정수론에 대한 내용을 체계적으로 정립했기 때문이다. 이는 후에 발달된 작도와 기하학에 매우 큰 영향을 미쳤다.

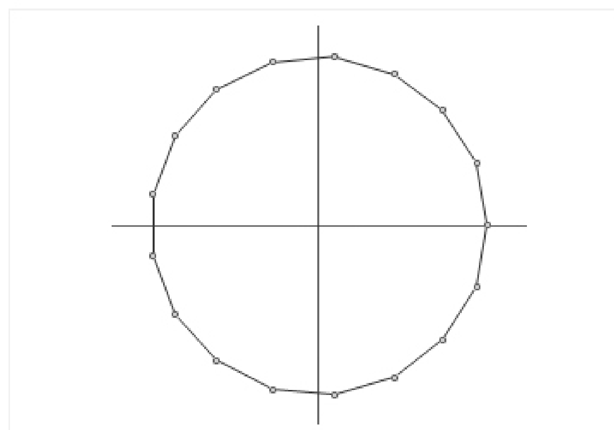

Fig. 2. 정 17각형.

가우스는 그의 나이 19살에 변의 개수가 페르마 소수이면 그 도형은 작도 가능하다는 것을 증명하였다. 또한 정 17각형이 작도 가능함을 수학적으로 보였다.

V. 정다각형과 가우스의 정 17각형

우리가 작도 가능한 정다각형에는 일련의 규칙들이 숨어있다.

정n각형을 작도하는 일은 방정식

$$x^n - 1 = 0 \tag{1}$$

의 해를 구하는 것과 같다. 따라서 다음과 같은 정다각형은 모두 작도 가능하다.

24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80,

85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192,

204, 240, 255, 256, 257, 272 $\cdots$

또한 가우스는 n이 홀수인 서로 다른 페르마 소수($F_n = 2^{2^n}+1$)의 곱으로 나타내어진다면, 그 도형은 작도 가능해진다는 것을 밝혔다. 또한 정 17각형에 대한 가우스의 증명은 부록으로 첨부한다.

VI. 3대 작도 불능 문제

3대 작도 불능 문제는 고대 그리스부터 내려온 문제들이다. 이 문제들은 눈금 없는 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여

1. 주어진 어떤 각이든지 삼등분하라.

2. 주어진 어떤 정육면체든지 그의 2배의 부피를 가지는 정육면체를 작도하라.

3. 주어진 어떤 원이든지 그와 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하라.

이다. 이 문제들은 고대 그리스 때 만들어졌지만 수학적인 증명은 19세기에 와서 이루어졌다. 자세한 증명은 부록으로 첨부한다.

Appendix A
부록 -컴퍼스만을 이용하여 작도를 할 수 있는가?(모어-마셰로니 정리)

작도란 눈금 없는 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여 평면에 도형을 그리는 것을 의미한다.

Mohr-Mascheroni의 정리는 컴퍼스만을 이용하여 작도를 할 수 있다는 정리이다. Mohr-Mascheroni의 정리에서는 컴퍼스만 사용하며 자를 사용하지 않기 때문에 선분이나 직선을 ”그을” 수 없다. 따라서 서로 다른 두 개의 점이 주어지면 그것으로 직선이 주어진 것으로 본다. Mohr-Mascheroni의 정리는 사실상 다음 세 가지 도형의 작도가 컴퍼스만으로 가능하다는 것이다.

1. 두 원의 교점

2. 한 원과 한 직선의 교점

3. 두 직선의 교점

연습문제 2. 컴퍼스만을 이용하여 다음을 작도하여라.

2.1. 선분의 중점, 선분의 길이의 자연수배 연장

2.2. 직선과 원의 교점 (직선이 원의 중심을 지나지 않는 경우)

2.3. 직선과 원의 교점 (직선이 원의 중심을 지나는 경우)

2.4. 점으로부터 직선 위로의 수선의 발

2.5. 두 직선의 교점

Appendix B
가우스의 정 17각형 작도 증명

19세의 가우스는 정 17각형이 작도 가능함을 대수적으로 증명하였다.

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z + 1 = 0 \tag{2}$$

의 풀이를 16차방정식을 2차방정식을 네 번 푸는 문제로 바꾸는 것 이다.

이 값을 대수적으로 구하는 것이 목표이고, $2^{22} = 16$이므로, 두 번 치환하면 이차식이 된다.

$$(3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9, 3^{10}, 3^{11}, 3^{12}, 3^{13}, 3^{14}, 3^{15}, 3^{16}) \equiv (3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1) \pmod{17} \tag{3}$$

이 순서대로 2로 나눈 나머지에 따라서 분류하면

$\mathrm{A}_1 = \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^5 + \zeta^{11} + \zeta^{14} + \zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta^6$

$\mathrm{A}_0 + A_1 = -1, A_0A_1 = -4, A_0 > A_1$

$\mathrm{A}_0 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, A_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

이고, 4로 나눈 나머지에 따라서 분류하면

$\mathrm{B}_1 = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{14} + \zeta^{12}$

$\mathrm{B}_2 = \zeta^9 + \zeta^{15} + \zeta^8 + \zeta^2$

$\mathrm{B}_3 = \zeta^{10} + \zeta^{11} + \zeta^7 + \zeta^6$

$\mathrm{B}_0 + B_2 = A_0, B_0B_2 = -1, B_0 > 0$

$\mathrm{B}_0 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}, B_2 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

$\mathrm{B}_1 + B_3 = A_1, B_1B_3 = -1, B_1 > 0$

$\mathrm{B}_1 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}, B_3 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$

이다. 이번엔 8로 나눈 나머지에 따라서 분류하면,

$C_0 + C_4 = B_0, C_0C_4 = B_1$

$C_0 = \frac{B_0+\sqrt{B_0^2-4B1}}{2}$

$$= \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-4\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{8} \tag{4}$$

(5)

$$C_4 = \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - 4B_1}}{2} \tag{6}$$

(7)

이고,

$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-4\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{16}$

APPENDIX C
3대 작도 불능 문제 증명

다음 정리의 대우명제를 통하여 증명하게 된다.

작도가능수의 성질

1. 작도가능수는 대수적 수이다.

2. $\gamma \notin \mathbb{Q}$ 이 작도가능하면 $i = 2, \cdots, n$ 에 대해 $[\mathbb{Q}(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i) : \mathbb{Q}(a_1, \cdots, a_{i-1})] = 2$과 $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(a_1, \cdots, a_n)$ 를 만족하는 유한수열 $a_{i\,i=1}^{\,n}$ 이 존재해서 어떤 $r \in \mathbb{N}$ 에 대해 $[\mathbb{Q}(\gamma)\mathbb{Q}] = 2^r$

1. 주어진 어떤 각이든지 삼등분하라.

• 크기가 $60°$ 인 각이 반례가 됨을 보이면 충분하다.

$\cos 60 = \frac{1}{2}, \alpha := cos20, 4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}$

즉 α는 $(8x^3 - 6x - 1) \in \mathbb{Q}[x]$의 영이다. 이 정수계수 다항함수의 인수가 될 수 있는 후보는 $(8x \pm 1), (4x \pm 1), (2x \pm 1),)(x \pm 1)$ 이다. 그러나 실제로 계산해보면 $\mp\frac{1}{8}, \mp\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}, 1$ 중 영이 되는 것은 없다. $(8x^3 - 6x - 1)$가 1 차항으로 인수분해되지 않는다는 것은 2 차항을 인수로 갖지도 않는다는 것이다. 정리하면 $2r = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$이고, $2^r = 2$을 만족시키는 $r \in \mathbb{N}$은 존재하지 않는다. 따라서 $\cos 20$ 는 작도불능이 되어 크기가 $60°$ 로 주어진 각을 삼등분 할 수 없다. □

2. 주어진 어떤 정육면체든지 그의 2배의 부피를 가지는 정육면체를 작도하라.

• 부피가 1인 정육면체가 반례가 됨을 보이면 충분하다.

정육면체의 부피가 2 가 되도록 하려면 한 모서리의 길이가 3√2 이어야한다. 그러나 $2r = [\mathbb{Q}(3\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$을 만족시키는 $r \in \mathbb{N}$은 존재하지 않는다. 따라서 $3\sqrt{2}$ 는 작도불능이다. □

3. 주어진 어떤 원이든지 그와 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하라.

• 넓이가 π인 원이 반례가 됨을 보이면 충분하다.

정사각형의 넓이가 π 가 되도록 하려면 한 변의 길이가 $\sqrt{\pi}$이어야한다. 그러나 π는 $\mathbb{Q}$상에서 초월수이므로, (1)의 대우명제에 따라 작도불능이다. 따라서 $\sqrt{\pi}$는 작도불능이다. □

REFERENCES

[1]Wantzel, Pierre-Laurent. ”Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.” Journal de Mathématiques pures et appliquées 2.1 (1837): 366-372.