Αριθμητική Ανάλυση Εργασία 1

Λογοθέτης Φακίνος

Απρίλιος 2024

1 Άσκηση 1

1.1 Υπολογισμός της Σειράς Taylor $\frac{1-cos(x)}{x^2}$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \implies \frac{1-cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k)!} \implies$$

$$\frac{1-cos(x)}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{8!} + ...$$

1.2 Όριο $\frac{1-cos(x)}{x^2}$ στο 0

$\lim_{x->0} \frac{1-cosx}{x^2} \overset{DLH\frac{0}{0}}{\implies} \lim_{x->0}\frac{sinx}{2x} = \frac{1}{2}$

1.3 Σύγκριση ακρίβειας Taylor vs Function

Θεωρούμε τις τιμές $\{0, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}\} = A$ και ως ακριβή τιμή της $f(x) = \frac{1-cos(x)}{x^2}$ στις παραπάνω τιμές το $\lim_{x->0}\frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$. Κατόπιν εκτελούμε τον υπολογισμό της f στις τιμές, πρώτα με τη σειρά Taylor, που κατασκευάσαμε και ύστερα απευθείας με τη συνάρτηση.

x	$f(x)$	Taylor(x)	Ακριβής
0	NaN	0.5	0.5
10^{-5}	0.500000041370185	0.499999999980760	0.5
10^{-6}	0.500044450291171	0.499999999999814	0.5
10^{-7}	0.499600361081320	0.499999999999999	0.5
10^{-8}	0	0.500000000000000	0.5

Παρατηρούμε οτι η σειρά Taylor δίνει καλύτερες προσεγγίσεις στην ακριβή τιμή της $f(x), x \in A$ και άρα την προτιμούμε. Αυτό ήταν και αναμενόμενο, διότι στην περίπτωση άμεσου υπολογισμού της f προκύπτει cancellation error (το οποίο στον υπολογισμό της τιμής $f(10^{-8})$ ευθύνεται για το αποτέλεσμα 0, που απέχει πολύ απο την πραγματική τιμή), αφού $cos(x) \approx 1$, αν $x \approx 0$ κι επιπλέον γίνονται περισσότερες πράξεις και υπολογισμοί, με αποτέλεσμα μεγαλύτερα σφάλματα σε σύγκριση με την εναλλακτική μέθοδο.

2 Άσκηση 3

Θεωρούμε την $f(x) := x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

2.1 Η f έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες στο $[-2, 2]$

Υπολογίζουμε, $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$ κι απο θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, εφόσον η f είναι συνεχής, $\exists\ \rho_1 \in (-1, 0)$ με $f(\rho_1) = 0$.

Παρατηρούμε οτι αν $\rho_2 = 1$, τότε $f(\rho_2) = 0$.

Τέλος $f(\frac{3}{2}) = -\dfrac{1}{8}$, $f(2) = 1$ κι απο θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, $\exists\ \rho_3 \in (\frac{3}{2}, 2)$ με $f(\rho_3) = 0$.
Προφανώς δεν υπάρχει άλλη ρίζα εφόσον το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού.

2.2 Υπολογισμός ρ_1, Newton-Raphson vs Secant

Εκτελώντας τις μεθόδους Newton-Raphson με $x_0 = -2$ και tolerance $= 10^{-8}$ και τέμνουσας με $x_0 = -2$, $x_1 = \dfrac{7}{4}$ και tolerance $= 10^{-8}$. Παρατηρούμε οτι και οι δύο αλγόριθμοι καταλήγουν στην ίδια προσέγγιση, αλλά η μέθοδος των Newton-Raphson χρειάζεται μόνο 7 βήματα, σε αντίθεση με τα 10 της τέμνουσας.

Αυτό ήταν κι αναμενόμενο, καθώς για την μέθοδο της τέμνουσας ισχύει οτι η ταχύτητα σύγκλισης στη ρίζα είναι της τάξης του ϕ (χρυσή τομή), εφόσον $f \in C^2(\mathbb{R})$ και η ρ_1 είναι απλή ρίζα ($f(\rho_1) = 0, f'(\rho_1) \neq 0$), σύμφωνα με `https://en.wikipedia.org/wiki/Secant_method#Convergence` .

Απο την άλλη η μέθοδος Newton-Raphson έχει τετραγωνική τάξη σύγκλισης, σε αυτή την περίπτωση καθώς $f'(\rho_1) \neq 0$ (η ρ_1 είναι απλή ρίζα), $f \in C^2(\mathbb{R})$ κι άρα απο θεωρία υπάρχει γειτονιά του ρ_1 όπου η μέθοδος συγκλίνει τετραγωνικά στο ρ_1.

2.3 Υπολογισμός $\rho_2 = 1$, Newton-Raphson vs Secant

Εκτελώντας τις μεθόδους Newton-Raphson με $x_0 = \dfrac{4}{3}$ και tolerance $= 10^{-8}$ και τέμνουσας με $x_0 = \dfrac{4}{3}$, $x_1 = \dfrac{5}{4}$ και tolerance $= 10^{-8}$. Παρατηρούμε οτι η μέθοδος της τέμνουσας καταλήγει ακριβώς στη ρίζα ρ_2 σε μόλις 8 βήματα. Όμως η μέθοδος των Newton-Raphson αποτυγχάνει, αυτό συμβαίνει διότι $f'(\frac{4}{3}) = 0$ και άρα η μέθοδος δεν μπορεί να λειτουργήσει καθώς προκύπτει διαίρεση με το 0.

2.4 Υπολογισμός ρ_3, με τη μέθοδο της διχοτόμησης

Εκτελώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $[\frac{3}{2}, 2]$ με tolerance $= 10^{-8}$ χρειαζόμαστε στη πράξη 26 επαναλήψεις, για να βρούμε τη προσέγγιση της ρίζας, με την επιθυμητή μας ακρίβεια. Στη θεωρία, θα διχοτομούμε το διάστημα στα 2 έως ότου το πλάτος w του γίνει μικρότερο ή ίσο του 10^{-8},

$$w_0 = x_r - x_l = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$w_n = \frac{w_0}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}},\ n \geq 1$$

όπου w_n το πλάτος του n διαστήματος, με w_1 το πλάτος του αρχικού.

Θέλουμε $w_n \leq 10^{-8} \implies 2^{-n-1} \leq 10^{-8} \implies -n - 1 \leq -8 \cdot log_2 10 \implies n \geq 8 \cdot log_2 10 - 1 \approx 25.5754247591$. Δηλαδή ο πρώτος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχυεί η ανίσωση είναι ο ceil($8 \cdot log_2 10$ - 1) = 26.

Συμπεραίνουμε ότι θεωρητικά χρειάζονται 26 επαναλήψεις το οποίο ταυτίζεται με το πρακτικό αποτέλεσμα.

2.5 Υπολογισμός της ρ_3 με τη μέθοδο των Newton-Raphson

Εκτελώντας τις μεθόδους Newton-Raphson με $x_0 = 2$ και tolerance $= 10^{-8}$, για τον υπολογισμό της ρ_3. Καταλήγουμε σε μία προσέγγιση r ύστερα απο 6 επαναλήψεις με απόλυτο σφάλμα $e_a = |\rho_3 - r| = 4.440892098500626 \cdot 10^{-16}$ και σχετικό σφάλμα $e_r = \dfrac{|\rho_3 - r|}{\rho_3} = 2.744622257244233 \cdot 10^{-16}$.

3 Άσκηση 4

Θεωρόυμε την εξίσωση $f(x) := x^3 - 5x = 0$
Εκτελώντας την μέθοδο των Newton-Raphson με $x_0 = -1$ και tolerance $= 10^{-5}$, παρατηρούμε οτι αποτυχγάνει και μάλιστα οτι εγκλωβίζεται σε κύκλο μεταξύ των τιμών -1 και 1. Δηλαδή η μέθοδος δεν συγκλίνει για $x_0 = -1$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{4}{-2} = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{-4}{-2} = -1$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1 - \frac{4}{-2} = 1$$
$$\dots$$
$$x_{2k} = -1$$
$$x_{2k+1} = 1$$

Το πρόβλημα λύνεται εύκολα με την επιλογή μιας άλλης αρχικής εκτίμησης. Κάθε ρίζα της f είναι απλή, δηλαδή $f(x^*) = 0 \implies f'(x^*) \neq 0$ και επιπλέον $f \in C^2(\mathbb{R})$, επομένως απο θεωρία υπάρχει μία γειτονία γύρω απο κάθε ρίζα, στην οποία η μέθοδος των Newton-Raphson συγκλίνει τετραγωνικά στην επιθυμητή ρίζα. Στην προκειμένη περίπτωση δοκιμάζοντας τη τη μέθοδο με $x_0 = -1.001$, καταλήγουμε σε μια καλή εκτίμηση της $\rho_1 = -\sqrt{5}$, ενώ για $x_0 = -0.999$ καταλήγουμε σε μια καλή εκτίμηση της $\rho_2 = 0$.