

Αριθμητική Ανάλυση Ι
1^η Εργασία

Άσκηση 1

Χρησιμοποιώντας κατάλληλη σειρά Taylor με κέντρο το 0, να γράψετε συνάρτηση Matlab, η οποία θα υπολογίζει την τιμή της παράστασης

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Η συνάρτηση να λαμβάνει υπόψιν όλους τους όρους που είναι μεγαλύτεροι της ποσότητας ϵps (μηδέν της μηχανής).

Εφαρμόστε το προηγούμενο, προκειμένου να υπολογίστε την $f(x)$ για $x = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 0$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά που δίνει η Matlab, για τις ίδιες τιμές του x , χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

Αν θεωρήσουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ είναι η ακριβής τιμή της $f(x)$ για κάθε x που σας ζητήθηκε, ποιά είναι τα απόλυτα και ποιά τα σχετικά σφάλματα, για κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιήσατε και για κάθε τιμή του x ; Ποιόν τρόπο θα προτιμούσατε και γιατί;

Άσκηση 2

Να γράψετε συναρτήσεις στη Matlab για τις μεθόδους:

1. Διχοτόμησης
2. Newton-Raphson
3. Τέμνουσας

Κάθε συνάρτηση θα πρέπει να δέχεται σαν ορίσματα:

1. Την $f(x)$ και, εφόσον χρειάζεται, την $f'(x)$.
2. Τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες της μεθόδου που υλοποιεί.
3. Την επιθυμητή ακρίβεια (*tolerance*).
4. Το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων.

Και να επιστρέφει:

1. Την προσέγγιση της ρίζας.
2. Το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάστηκε.

Σημείωση: Για τη μέθοδο της διχοτόμησης το κριτήριο τερματισμού είναι το ελάχιστο μήκος διαστήματος να είναι μικρότερο του *tolerance*, ενώ για τις άλλες δύο μεθόδους είναι η απόσταση δύο διαδοχικών προσεγγίσεων κατ' απόλυτο τιμή να είναι μικρότερη του *tolerance*.

Άσκηση 3

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

- Δείξτε ότι η εξίσωση έχει 3 πραγματικές ρίζες στο διάστημα $[-2, 2]$.
- Για την εύρεση της ρίζας $\rho_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ χρησιμοποιήστε τις μεθόδους Newton-Raphson, με $x_0 = -2$ και $tolerance = 10^{-8}$, και τέμνουσας, με $x_0 = -2, x_1 = -\frac{7}{4}$ και $tolerance = 10^{-8}$. Ποιά μέθοδος χρειάστηκε λιγότερα βήματα; Ήταν αναμενόμενα τα αποτελέσματά σας, με βάση την ταχύτητα σύγκλισης των δύο μεθόδων;
- Με τη βοήθεια της μεθόδου της τέμνουσας, με $x_0 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{5}{4}$ και $tolerance = 10^{-8}$, προσεγγίστε τη ρίζα $\rho_2 = 1$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό της μεθόδου Newton-Raphson, με $x_0 = \frac{4}{3}$ και $tolerance = 10^{-8}$. Ποιά από τις δύο μεθόδους θα επιλέγατε στην περίπτωση αυτή; Εμφανίζει κάποια από τις δύο μεθόδους πρόβλημα;
- Κάνοντας χρήση της μεθόδου της διχοτόμησης, προσεγγίστε τη ρίζα ρ_3 στο διάστημα $[\frac{3}{2}, 2]$ με $tolerance = 10^{-8}$. Δείξτε ότι το θεωρητικά αναμενόμενο πλήθος επαναλήψεων είναι ίδιο με αυτό που χρειάστηκε η μέθοδος στην πράξη.
- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson, με $x_0 = 2$ και $tolerance = 10^{-8}$, προσεγγίστε τη ρίζα $\rho_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Πόσες επαναλήψεις χρειάστηκε η μέθοδος; Ποιό είναι το απόλυτο και ποιό το σχετικό σφάλμα της μεθόδου.

Σημείωση: Σαν μέγιστο αριθμό επαναλήψεων χρησιμοποιήστε, κάθε φορά, το $N_{max} = 50$.

Άσκηση 4

Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x^3 - 5x = 0$ στο διάστημα $[-2, 2]$. Προσεγγίστε τη ρίζα της $f(x)$ με τη μέθοδο Newton-Raphson με $x_0 = -1$, $tolerance = 10^{-5}$ και μέγιστο πλήθος επαναλήψεων $N_{max} = 50$ ή $N_{max} = 100$. Τι παρατηρείτε; Πού οφείλεται το πρόβλημα και τι μπορούμε να κάνουμε για να λυθεί;

Οδηγίες Υποβολής

Θα υποβάλετε ηλεκτρονικά ένα συμπιεσμένο φάκελο (.zip ή .rar) στην περιοχή των εργασιών της eclass, στην καρτέλα που αντιστοιχεί στο τμήμα σας.

Στο φάκελο, θα έχετε ένα αρχείο κειμένου σε μορφή pdf ή word, που θα περιέχει αναλυτικό σχολιασμό για κάθε άσκηση με τα αποτελέσματά σας. Στην πρώτη σελίδα, θα έχετε το ονοματεπώνυμο, τον αριθμό μητρώου σας.

Θα συμπεριλάβετε επίσης όλα τα αρχεία Matlab που κατασκευάσατε για την επίλυση των ασκήσεων. Θα εκτιμηθεί η ύπαρξη σχολίων στους κώδικές σας.

Προφορική Εξέταση: Στο 5ο εργαστήριο σύμφωνα με το πρόγραμμα.