ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αριθμητική Ανάλυση Ι
$2^η$ Εργασία

Άσκηση 1

Μέρος Α: Να τροποποιηθούν κατάλληλα οι συναρτήσεις του Matlab, που θα βρείτε στα έγγραφα της eclass,

- LUdec.m (LU παραγοντοποίηση)
- Lsol.m (Επίλυση του συστήματος $Ly = b$)
- Usol.m (Επίλυση του συστήματος $Ux = y$)

έτσι ώστε να γίνουν γρηγορότερες, εάν ο πίνακας Α είναι τριδιαγώνιος. Ποιες οι βελτιώσεις που κάνατε; Ποιό το όφελος από άποψης πλήθους πράξεων σε σχέση με τα αρχικά προγράμματα;

Μέρος Β: Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{11\times 11}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να γράψετε πρόγραμμα Matlab, το οποίο:

- Να κατασκευάζει με χρήση συναρτήσεων του Matlab τον πίνακα A.
- Να υπολογίζει την ορίζουσα του πίνακα A, με την βοήθεια της LU παραγοντοποίησης του πίνακα.
- Να υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα του Α, κάνοντας έξυπνη χρήση των συναρτήσεων που τροποποιήσατε.
- Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας, με τη βοήθεια των συναρτήσεων του Matlab det(A) και inv(A), οι οποίες υπολογίζουν την ορίζουσα και τον αντίστροφο ενός πίνακα.

Στο αρχείο κειμένου, εξηγήστε που βασιστήκατε για τον υπολογισμό της ορίζουσας και του αντιστρόφου.

Άσκηση 2

Μέρος Α: Να υλοποιήσετε συνάρτηση Matlab που θα δέχεται πίνακα A και θα επιστρέφει την LU παραγοντοποίηση που προκύπτει αν εφαρμόσουμε μερική οδήγηση (οδήγηση κατά γραμμές), καθώς και τον πίνακα μεταθέσεων P.

Μέρος Β: Έστω το σύστημα

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Να επιλυθεί στο Matlab το σύστημα με την μέθοδο της απαλοιφής Gauss.
- Να επιλυθεί στο Matlab το σύστημα με την μέθοδο της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

Ποιά είναι η λύση; Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 3

Δίνονται οι 4×4 πίνακες Hil και Had,

$$Hil = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \; Had = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

καθώς και τα 4×1 διάνυσματα b_1 και b_2,

$$b_1 = \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & \frac{77}{60} & \frac{19}{20} & \frac{319}{420} \end{bmatrix}^T, \; b_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Τότε τα σύστηματα $Hil \cdot x = b_1$ και $Had \cdot x = b_2$ έχουν μοναδική λύση τη $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Αν λύσουμε στο Matlab τα σύστηματα $Hil \cdot x_1 = b_1^*$ και $Had \cdot x_2 = b_2^*$,όπου $b_1^* = \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & \frac{77}{60} & \frac{19}{20} & \frac{320}{420} \end{bmatrix}^T$ και $b_2^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & \frac{1}{420} \end{bmatrix}^T$ με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss, να υπολογιστούν οι ακόλουθες ποσότητες:

$$\frac{\|x - x_1\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \; \frac{\|b_1 - b_1^*\|_\infty}{\|b_1\|_\infty}, \; \kappa(Hil)_\infty, \; \frac{\|x - x_2\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \; \frac{\|b_2 - b_2^*\|_\infty}{\|b_2\|_\infty}, \; \kappa(Had)_\infty.$$

Εξηγείστε τα αποτελέσματα.

Άσκηση 4

Μέρος Α: Να γραφεί συνάρτηση Matlab,που θα δέχεται τα σημεία παρεμβολής και μια τιμή x και θα επιστρέφει την τιμή $p(x)$, όπου p το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή Lagrange.

Μέρος Β: Έστω τα σημεία με συντεταγμένες (x_i, y_i), για $i = 1, \cdots, 15$, που προκύπτουν από τις ακόλουθες εντολές Matlab

```
f = @(x) 1./(1+x.^2);
x = linspace(-5,5,15);
y = f(x);
```

Να γράψετε πρόγραμμα που θα σχεδιάζει στο ίδιο γράφημα:

- Την $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στο διάστημα $(-5, 5)$.
- Την παρεμβολή Lagrange για τα σημεία παρεμβολής $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, 15$ που υπολογίσαμε, για μια ομοιόμορφη διαμέριση 100 σημείων του $(-5, 5)$.
- Το γράφημα που προκύπτει για την ίδια διαμέριση αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση spline() του Matlab για τα σημεία παρεμβολής.

Ποιά μέθοδος, Lagrange ή Spline, προσεγγίζει καλύτερα την f και γιατί;

Οδηγίες Υποβολής

Θα υποβάλετε ηλεκτρονικά ένα συμπιεσμένο φάκελο (.zip ή .rar) στην περιοχή των εργασιών της eclass, στην καρτέλα που αντιστοιχεί στο τμήμα σας.

Στο φάκελο, θα έχετε ένα αρχείο κειμένου σε μορφή pdf ή word, που θα περιέχει αναλυτικό σχολιασμό για κάθε άσκηση με τα αποτελέσματά σας. Στην πρώτη σελίδα, θα έχετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας.

Θα συμπεριλάβετε επίσης όλα τα αρχεία Matlab που κατασκευάσατε για την επίλυση των ασκήσεων. Θα εκτιμηθεί η ύπαρξη σχολίων στους κώδικές σας.