d) Demostración de Hamiltoniano de la nave

A partir del movimiento de la nave, podemos decir que su energía cinetica viene dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

como estamos tomando coordenadas polares tendriamos que

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial}{\partial t}(r\hat{r})\right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(r\hat{r}) = \frac{\partial}{\partial t}(r)^2\hat{r} + \frac{\partial}{\partial t}(\hat{r})^2 r^2$$

$$= \dot{r}^2\hat{r} + \dot{\phi}^2 r^2 \hat{\phi}$$

como la energia es una cantidad escalar

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)}$$

Adicionalmente, encontramos que la energia potencial viene dada por la energia gravitacional de la interacción con la tierra y la luna

$$\boxed{U = -G\frac{mm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L}}$$

Con esto en mente tendriamos que el lagrangiano del sistema estaria dado por

$$\mathcal{L} = T - U$$

Ahora, calculamos los momentos conjugados, donde tenemos que

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{Gmm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L}\right)$$

$\boxed{P_r = m\dot{r}}$ momento lineal de la nave

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GmmT}{r} - \frac{GmmL}{r_L}\right)$$

$\boxed{p_\phi = mr^2\dot{\phi}}$ momento angular del sistema

Ahora, teniendo los momentos lineal y angular y el lagrangiano podemos encontrar el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \dot{i} - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - G\frac{mmT}{r} - G\frac{mmL}{r_L}$$

$$\mathcal{H} = m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - G\frac{mmT}{r} - G\frac{mmL}{r_L}$$

$\boxed{H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - G\frac{mmT}{r} - G\frac{mmL}{r_L}}$ Hamiltoniano del sistema

finalmente, $p_r = m\dot{r}$, $p_\phi = m\dot{\phi}$

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mmT}{r} - G\frac{mmL}{r_L}}$$

Partiendo del Hamiltoniano del sistema puede encontrarse las ecuaciones de movimiento

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{Gmm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right) - \frac{\partial 1}{\partial p_r}\left(\frac{Gmm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right)$$

Como el momento angular p_ϕ no depende del momento lineal de la particula ya que proviene de un punto en el espacio de estado diferente, entonces

$$\frac{\partial}{\partial p_r}(p_\phi) = 0$$

Y más claramente, por conservación del la masa en el sistema conocemos que

$$\frac{\partial}{\partial n}(m_i) = 0 \, , \ \forall n$$ $\longrightarrow$ Resultado generalizado para el sistema completo

Por lo tanto, tenemos que

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{2p_r}{2m}$$

$$\boxed{\dot{r} = \frac{p_r}{m}}$$

Por otro lado, derivando con respecto al segundo momento generalizado

$$\frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{2p_\phi}{2mr^2} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad \boxed{\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}}$$

Ahora para conocer la variación de los momentos generalizados vamos a tener que

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right)$$

como la distancia de la nave a la luna depende de la distancia r, entonces tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right) = Gmm_L \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_L(r,\phi,t)}\right)$$

Ahora bien

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t)}}\right)$$

$$= -\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t)}\right)}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t)}^{\,2}}$$

$$= + \frac{2r-2d\cos(\phi-\omega t)}{2\left(r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t)\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{r-d\cos(\phi-\omega t)}{\left(r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t)\right)^{3/2}}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right) = G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \cdot \left[r-d\cos(\phi-\omega t)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right) = G\frac{mm_T}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) = -\frac{p_\phi^2}{mr^3}$$

finalmente tenemos que

$$\boxed{\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{Gmm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3}\left[r - d\cos(\phi-\omega t)\right]}$$

para encontrar la otra ecuación tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(p_r^2/2m\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right)$$

como ϕ indica la posición angular de la nave con respecto a la tierra, vamos a tener que

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) = 0 \quad , \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) = 0 \quad \sim \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{Gmm_T}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right) = Gmm_L \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\phi-\omega t)}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\dots\right) = \frac{rd\,\mathrm{sen}(\phi-\omega t)}{(r^2+d^2-2rd\cos(\phi-\omega t))^{3/2}}$$

Por lo tanto, tenemos que el cambio en el momento angular viene dado por

$$\boxed{\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mm_L}{r_L(\;)^{3/2}}\left[rd\,\mathrm{sen}(\phi-\omega t)\right]}$$

Reducción de error de redondeo

$$\tilde{r} = \frac{r}{d} \qquad \tilde{P}_r = \frac{P_r}{m \cdot d} \qquad \tilde{P}_\phi = \frac{P_\phi}{m d^2}$$

Partiendo de estas nuevas variables podemos reescribir nuestro sistema de ecuaciones de manera que la solución sea más precisa

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m} = \frac{\tilde{P}_r \cdot m d}{m} = \frac{\tilde{P}_r \cdot d}{1}$$

$$\boxed{\dot{\tilde{r}} = \tilde{P}_r \cdot d}$$ Ecuación 1 normalizada

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{m r^2} = \frac{\tilde{P}_\phi m d^2}{m \tilde{r}^2 d^2} = \frac{\tilde{P}_\phi}{\tilde{r}^2}$$

$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{\tilde{P}_\phi}{\tilde{r}^2}}$$ Ecuación 2 normalizada

$$\dot{P}_r = \frac{P_\phi^2}{m r^3} - G\frac{m m_T}{r^2} - G\frac{m m_L}{r_L^{3/2}}\left[r - d\cos(\phi - \omega t)\right]$$

$$= \frac{\tilde{P}_\phi^2 m^2 d^4}{m \tilde{r}^3 d^3} - G\frac{m m_T}{\tilde{r}^2 d^2} - G\frac{m m_L}{\tilde{r}^3 d^3}\left[\tilde{r} d - d\cos(\phi - \omega t)\right]$$

$$= \frac{\tilde{P}_\phi^2 m d}{\tilde{r}^3} - \frac{\Delta d}{\tilde{r}^2} - \frac{\Delta d}{\tilde{r}^3}\left[\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)\right]$$

$$\boxed{\dot{\tilde{P}}_r = \frac{\tilde{P}_\phi^2 m d}{\tilde{r}^3} - \Delta d\left[\frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{\mu}{\tilde{r}^3}\left[\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)\right]\right]}$$ Ecuación 3 normalizada