УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Вероятностное пространство.** Теоретико-множественная модель событий. Способы определения вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрические вероятности. Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Свойства вероятности.
2. **Условная вероятность.** Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Независимость. Независимые испытания: схема Бернулли и полиномиальная схема. Лемма Бореля–Кантелли.
3. **Дискретные случайные величины.** Индикаторы и их свойства. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Независимость случайных величин и мультипликативное свойство математического ожидания. Совместное распределение и ковариация. Свойства ковариации и коэффициента корреляции. Ковариационная матрица. Целочисленные случайные величины и производящие функции.
4. **Структура сигма-алгебр, продолжение меры, независимость классов событий.** Определения пи- и дельта-систем. Теорема о связи их с понятием сигма-алгебры. Минимальная сигма-алгебра, порожденная классом множеств. Лемма Дынкина. Определение случайной величины как измеримого отображения и его распределения. Теорема о единственности продолжения меры с пи-системы. Теорема о независимости сигма-алгебр, порожденных пи-системами.
5. **Случайные величины (общий случай).** Определение функции распределения и плотности, их свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Характеристические функции и их свойства. Характеристические функции некоторых распределений. Неравенства Иенсена, Ляпунова, Маркова и Чебышёва. Совместное распределение и независимость.
6. **Законы больших чисел и центральная предельная теорема.** Сходимости последовательностей случайных величин почти наверное и по вероятности, теорема о связи между ними. Законы больших чисел Чебышёва и Бернулли. Усиленный закон больших чисел. Сходимость по распределению. Центральная предельная теорема. Сходимость в среднем.
7. **Цепи Маркова.** Условия марковости и однородности в терминах переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова — Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
8. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона — Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией про-

цесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.

9. **Задача линейного оценивания и уравнение регрессии.**

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
2. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
3. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
4. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.
5. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.
6. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
7. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. — Москва : КДУ, 2009.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 марта)

I. Вероятностное пространство. Свойства вероятности

Т.1. Пусть A, B, C — три события. Найти выражения для событий:

а) произошло только A;

б) произошли A и B, а C не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из них;

д) произошло только одно из них;

е) ни одно из них не произошло;

ж) произошло не более двух из них.

Т.2. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

Т.3. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что $AX = AB$.

Т.4. Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Т.5. Пусть

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathscr{A}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \quad \mathscr{A}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}.$$

Являются ли $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ алгебрами? Является ли алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$?

Т.6. Пусть $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \ldots$ — последовательность алгебр подмножеств Ω. Является ли алгеброй их объединение $\mathscr{A} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$?

Т.7. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Покажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \leq \mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрические вероятности

Т.8. Пусть $1 \leq m < n$. Доказать, что $C_n^m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1}$.

Т.9. Из урны по очереди без возвращения извлекают 10 шаров, среди которых 6 белых и 4 чёрных. Какова вероятность, что не будет извлечено подряд два чёрных шара?

Т.10. Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

Т.11. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет подряд два раза одной стороной. Описать пространство элементарных исходов. Используя соображения симметрии, найти:

а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до шестого бросания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Т.12. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Т.13. $2n$ команд разбиваются на 2 равные подгруппы. Какова вероятность того, что 2 сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах?

Т.14. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

Т.15. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Т.16. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

Т.17. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

Т.18. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

Т.19. У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100–рублевые купюры, а вторая половина — 50–рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета — 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

III. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Независимость

Т.20. Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

Т.21. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий и $C \subset B$. Покажите, что A и $B \setminus C$ также независимы.

Т.22. В семье двое детей. Найти вероятность того, что оба ребёнка — мальчики, если

а) старший ребёнок — мальчик;

б) известно, что хотя бы один ребёнок — мальчик.

Т.23. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Т.24. Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

Т.25. Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

Т.26. Из урны, содержащей M белых и N черных шаров, утеряно r шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

Т.27. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

Т.28. Пусть A, B, C — три попарно независимые равновероятные события, $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = p$. При этом $ABC = \varnothing$. Найти максимально возможное значение p.

Т.29. Пусть в схеме Бернулли вероятность успеха в отдельном испытании равна p, $0 < p < 1$. Какова вероятность того, что цепочки из десяти подряд успехов появятся бесконечное число раз?

Т.30*. При посадке в автобус выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Найти вероятность того, что последний пассажир займет свое место.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–15 мая)

I. Случайные величины и их характеристики

Т.1. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

Т.2. Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть ξ — число бросаний. Найти распределение вероятностей ξ, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leqslant 5$?

Т.3. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

Т.4. Подбрасываются две игральные кости. Пусть ξ_1 — число очков, выпавших на первой игральной кости, а ξ_2 — на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$.

Т.5. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число появлений единицы, а η — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Т.6. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая, то из некоррелируемости следует независимость.

Т.7. Пусть ξ_k, $k = 1, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

Т.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

Т.9. Привести примеры трех случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, удовлетворяющих условиям:

$$\text{(a)} \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j, \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 \neq \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3;$$

$$\text{(b)} \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3, \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j \neq \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j.$$

Т.10. Пусть ξ — номер r-го успеха в последовательности независимых испытаний Бернулли. Найти $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$.

Т.11. В квадрат $\{(x_1,\ x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,\ 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Т.12. Точка $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

Т.13. Точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi, \eta\}$.

Т.14. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Придумать такие функции $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$, чтобы случайные величины $f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi)$ были независимыми и имели распределение Бернулли с параметром $\frac{1}{2}$.

Т.15. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

II. Характеристические функции. Неравенство Чебышёва

Т.16. Случайная величина ξ имеет распределение, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \ge 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

Т.17. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

Т.18. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,1.$$

Т.19. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t; \quad \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

Т.20. Какие из функций

$$\sin t; \quad \left(\frac{1}{2 - e^{-it}}\right)^3; \quad \frac{1}{1 + t^4}$$

являются характеристическими?

Т.21. Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x), \quad \alpha > 0.$$

III. Последовательности случайных величин. Предельные теоремы

Т.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин такая, что $\mathsf{E}\xi_k = a$, $\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\mathsf{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v$, $i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Т.23. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$.

Т.24. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

Т.25. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

IV. Цепи Маркова. Ветвящиеся процессы

Т.26. Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-й подгруппе было 20% населения, во 2-й подгруппе — 30%, и в 3-й подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Т.27. В биологических приложениях процессов Гальтона — Ватсона используется производящая функция

$$f(x) = px^2 + (1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Найти

а) при каких значениях параметра p процесс является докритическим, критическим, надкритическим;

б) математическое ожидание и дисперсию n-го поколения;

в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

Т.28*. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за n шагов и финальные вероятности.

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов
к. ф.-м. н., ст.преподаватель М. П. Савелов