幼儿园数论 下

Scape

July 27, 2018

积性函数

- $$\forall a, b, (a, b) = 1, f(ab) = f(a)f(b)$$

积性函数

- $$\forall a, b, (a, b) = 1, f(ab) = f(a)f(b)$$
- **欧拉函数** $\varphi(n)$
  莫比乌斯函数 $\mu(n)$
  除数函数 $d_k(n)$**:n 的所有正因子 k 次幂和。**

积性函数性质

- **设** $n = \prod p_i^{q_i}$，**那么** $f(n) = \prod f({p_i}^{q_i})$

积性函数性质

- 设 $n = \prod p_i^{q_i}$，那么 $f(n) = \prod f({p_i}^{q_i})$
- **大多数积性函数可以线性筛预处理**。

积性函数性质

- 设 $n = \prod p_i^{q_i}$，那么 $f(n) = \prod f({p_i}^{q_i})$
- 大多数积性函数可以线性筛预处理。
- **如果 $f(n), g(n)$ 都是积性函数，那么下列函数也都是积性函数。**

$$(fg)(n) = f(n)g(n)$$

$$(f/g)(n) = f(n)/g(n)$$

Dirichlet 卷积

- **两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积**

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$$

Dirichlet 卷积

- 两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

- 满足交换律结合律分配律。

Dirichlet 卷积

- 两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

- 满足交换律结合律分配律。
- **如果 f, g 为积性函数，那么显然 $f * g$ 也是积性函数。**

莫比乌斯函数

- **如果 n 含平方因子，那么 $\mu(n) = 0$。**
  否则，$\mu(n) = (-1)^k$，其中 k 为 n 的本质不同质因子个数。

莫比乌斯函数

- 如果 n 含平方因子，那么 $\mu(n)=0$。
  否则，$\mu(n)=(-1)^k$，其中 k 为 n 的本质不同质因子个数。
- **证明:**

$$e(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$$

，**其中 e 是狄尼克雷卷积的单位元。**

莫比乌斯函数

- 如果 n 含平方因子，那么 $\mu(n)=0$。
  否则，$\mu(n)=(-1)^k$，其中 k 为 n 的本质不同质因子个数。
- 证明:

$$e(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$$

，其中 e 是狄尼克雷卷积的单位元。
- 设

$$n=\prod p_i^{q_i}, n'=\prod p_i$$

两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积:

(f*g)(n) = ∑(d|n) f(d) g(n/d)

莫比乌斯函数

- 如果 n 含平方因子，那么 $\mu(n)=0$。 μ(1) = 1
  否则，$\mu(n)=(-1)^k$，其中 k 为 n 的本质不同质因子个数。
- 证明:

μ 和 1 的卷积为 e，即 μ 和 1 是逆元

$$e(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$$

，其中 e 是狄尼克雷卷积的单位元。

- 设

$$n=\prod p_i^{q_i},\ n'=\prod p_i$$

- 那么

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n'}\mu(d)$$

n 的任何平方因子都对答案没有贡献，于是 n' 将 n 中的平方因子筛去，可得 e(n) = e(n')

n 的质因子集合的为 S，则

e(n)

= Σ(S' ∈ S) (|S|,|S'|)*(-1)^(|S'|)

= Σ(k,i)*(-1)^i*(1)^(k-i)

（k=|S|）

= ((-1)+1)^k

故只有在 k=0 时，e(n) = 1；

否则 e(n) = 0

枚举 i 为质因子集合大小 $=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i=[(k==0)]$

莫比乌斯反演

- **设** $f(n), g(n)$ **是两个数论函数**。

莫比乌斯反演

- 设 $f(n), g(n)$ 是两个数论函数。
- **如果有**

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

莫比乌斯反演

- 设 $f(n), g(n)$ 是两个数论函数。
- 如果有

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

- **那么有**

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

莫比乌斯反演

- 设 $f(n), g(n)$ 是两个数论函数。
- 如果有

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

证明:
由 f(n) = Σ(d|n) g(d)
f = g * 1
可得 μ*f = g*1*μ
因为 1 和 μ 是逆元，即 μ*f = g
故 g = μ*f = Σ(d|n) μ(d)f(n/d)

- 那么有

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

- 那么

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n'} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = [(k == 0)]$$

一种问题形式

- **求**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\gcd(i,j))$$

一种问题形式

- **求**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\gcd(i,j))$$

- T **组询问**，$T \le 10^4$。
  Subtask1: $n, m \le 10^6$。
  Subtask2: $n, m \le 10^7$。

一种问题形式

- **枚举** $d = \gcd(i, j)$，**并强制** $i = i' d, j = j' d, \gcd(i', j') = 1$。

$$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i'=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j'=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} f(d) e(\gcd(i', j'))$$

一种问题形式

- 枚举 $d=\gcd(i,j)$，并强制 $i=i'd, j=j'd, \gcd(i',j')=1$。

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i'=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} f(d)e(\gcd(i',j'))$$

- 莫比乌斯反演展开 e 函数

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i'=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} f(d)\sum_{d'|d}\mu(d')$$

一种问题形式

- 枚举 $d=\gcd(i,j)$，并强制 $i=i'd, j=j'd, \gcd(i',j')=1$。

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i'=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}f(d)e(\gcd(i',j'))$$

- 莫比乌斯反演展开 e 函数

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i'=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}f(d)\sum_{d'|d}\mu(d')$$

- 变换枚举顺序

$$=\sum_{d}\sum_{d'}\mu(d')\sum_{i'=1}^{\lfloor\frac{n}{dd'}\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor\frac{m}{dd'}\rfloor}f(d)$$

一种问题形式

- $$= \sum_{d} \sum_{d'} \mu(d') f(d) \lfloor \frac{n}{dd'} \rfloor \lfloor \frac{m}{dd'} \rfloor$$

一种问题形式

- $$= \sum_{d} \sum_{d'} \mu(d') f(d) \lfloor \frac{n}{dd'} \rfloor \lfloor \frac{m}{dd'} \rfloor$$
- 令
$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

一种问题形式

- $$= \sum_{d} \sum_{d'} \mu(d') f(d) \lfloor \frac{n}{dd'} \rfloor \lfloor \frac{m}{dd'} \rfloor$$
- 令
$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$
- $$= \sum_{d=1}^{n} g(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$$

PE512

$$f(n) = (\sum_{i=1}^{n} \varphi(n^i)) \bmod (n+1)$$

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

求 $g(5 \times 10^8)$

PE530

$$f(n) = \sum_{d|n} gcd(d, \frac{n}{d})$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

求 $F(10^{15})$

PE441

设 $R(M)$ 为满足所有以下条件的 p, q 的 $\frac{1}{pq}$ 和。

$$1 \leq p < q \leq M$$

$$p + q \geq M$$

$$\gcd(p, q) = 1$$

设 $S(n) = \sum_{i=2}^{n} R(i)$，求 $S(10^7)$，保留四位小数。

DZY Loves Math V

给定 n **个正整数** $a_1, a_2, \cdots, a_n$，**求**
$\sum_{i_1|a_1}\sum_{i_2|a_2}\cdots\sum_{i_n|a_n}\varphi(i_1 i_2 \cdots i_n)$
$n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^7$。

杜教筛

设 $f(n)$ 为一个数论函数，$S(n)=\sum_{i=1}^{n} f(i)$。
考虑再找到一个合数的数论函数 $g(n)$。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(d)g(\frac{i}{d})=\sum_{i=1}^{n} g(i)S(\frac{n}{i})$$

也就是

$$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\frac{n}{i})$$

随手推推

$\sum_{i=1}^{n} \mu(i)$

DZY Loves Math IV

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(ij)$$

$n \le 10^5, m \le 10^9$。

PE439

求 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d|ij}d$
$n\leq 10^{11}$

DIVCNT2

设 $d(n)$ 为 n 的约数个数。
$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} d(i^2)$
求 $S_2(n)$
$n \leq 10^{12}, 20s, 1536MB$

DIVCNT3

设 $d(n)$ 为 n 的约数个数。
$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} d(i^3)$
求 $S_3(n)$
$n \leq 10^{11}, 20s, 1536MB$

GCD Array

Maintain an array a with index from 1 to l . There are two kinds of operations:

1. Add v to a_x for every x that $(x, n) = d$.
2. Query $\sum_{i=1}^{x} a_i$