МГТУ им. Н.Э. Баумана
ТЕХНОПАРК
Mail.Ru Group

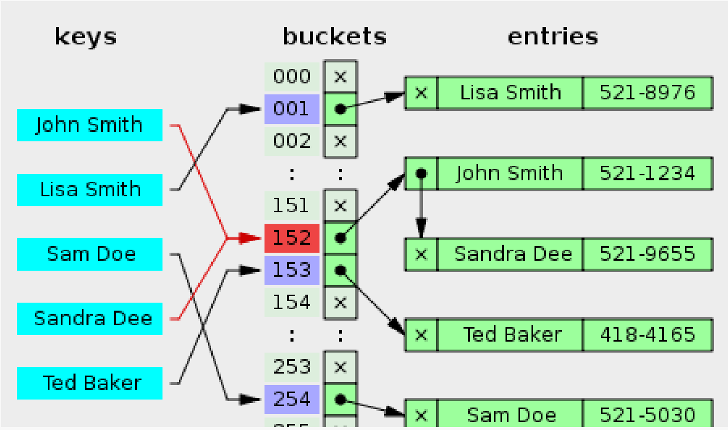
Лекция 5. Хеш-таблицы

Алгоритмы и структуры данных

Мацкевич С. Е.

План лекции 5 «Хеш-таблицы»

- Хеш-функции.
- Хеш-таблица. Стоимость добавления элементов.
- Разрешение коллизий методом цепочек.
- Разрешение коллизий методом открытой адресации.
- Двойное хеширование.



Быстрый контейнер. Постановка задачи.

Задача. Хранить ключи в контейнере:
- быстро добавлять,
- быстро удалять,
- быстро проверять наличие.

Решение 1.
Упорядоченный массив:
- длительное добавление – O(n),
- длительное удаление – O(n),
- быстрый поиск – O(log n).

Быстрый контейнер.
Постановка задачи.

Задача. Хранить ключи в контейнере:

- быстро добавлять,
- быстро удалять,
- быстро проверять наличие.

Частное решение 2.

Пусть ключи – неотрицательные целые числа в диапазоне $[0, .., n-1]$.

Будем хранить A – массив bool.

$A[i] = true \Leftrightarrow$ i содержится:

- мгновенное добавление – O(1),
- мгновенное удаление – O(1),
- мгновенный поиск – O(1).

Быстрый контейнер. Хеш-таблица.

Хеширование – преобразование ключей к числам.

Хеш-таблица – массив ключей с особой логикой, состоящей из:

1. Вычисления хеш-функции, которая преобразует ключ поиска в индекс.
2. Разрешения конфликтов, т.к. два и более различных ключа могут преобразовываться в один и тот же индекс массива.

Отношение порядка над ключами не требуется.

Хеш-функции

Определение. **Хеш-функция —** преобразование по детерминированному алгоритму входного массива данных произвольной длины (один ключ) в выходную битовую строку фиксированной длины (значение).

Результат вычисления хеш-фукнции называют «хешем».

Определение. **Коллизией** хеш-функции H называется два различных входных блока данных X и Y таких, что
$H(x) = H(y)$.

Хеш-функции

Количество возможных значений хеш-функции не больше M и для любого ключа k:

$$0 \leq h(k) < M$$

Важно! Хорошая хеш-функция должна:

1. Быстро вычисляться.
2. Минимизировать количество коллизий.

HASH = рубить, перемешивать.

Хеш-функции

Качество хеш-функции зависит от задачи и предметной области.

Пример плохой хеш-функции.

h(k) = [последние [три] цифры k] = k % 1000.

Такая хеш-функция порождает много коллизий, если множество ключей – цены.

Частые значения:
000, 500, 999, 998, 990, 900.

Хеш-функции. Метод деления.

$\underline{h(k) = k \ mod \ M}$.

M определяет размер диапазона значений:
[0, .. , M–1].

Как выбрать M?

- Если $M = 2^K$, то значение хеш-функции не зависит от старших байтов.
- Если $M = 2^8 - 1$, то значение хеш-функции не зависит от перестановки байт.

Обычно в качестве M выбирают простое число, далекое от степеней двойки.

Хеш-функции.
Метод деления многочленов.

Пусть

$$K(x) = k_0 + k_1 x + \cdots + k_n x^n,$$
$$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m.$$

Деление многочленов с остатком:

$$K(x) = A(x) \cdot P(x) + R(x),$$

$A(x)$ – частное, $R(x)$ – остаток, $\deg R < \deg P = m$.

Все коэффициенты в поле. Например, в поле Z_p, p – простое.

Делить удобно в столбик.

Хеш-функции.
Метод деления многочленов.

Каждый ключ K определяется числами $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$.

Пусть $K(x) = k_0 + k_1 x + \cdots + k_{n-1} x^{n-1}$.
Пусть задан полином $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m$.
Многочлен $P(x)$ называют порождающим многочленом.

Определим хеш-функцию как остаток от деления:

$$H_P(K)(x) = K(x) \bmod P(x) =$$
$$= h_0 + h_1 x + \cdots + h_{m-1} x^{m-1} =$$
$$= (h_0, h_1, \dots, h_{m-1}).$$

Все коэффициенты в поле Z_p, где p – простое.

В алгоритмах CRC используется p = 2 и немного другая формула

$$H_P(K)(x) = K(x) \cdot x^m \bmod P(x)$$

Хеш-функции. Метод умножения.

$\underline{h(k) = [M \cdot \{k \cdot A\}]}$,

где {} – дробная часть,
где [] – целая часть,
A – действительное число, $0 < A < 1$,
M определяет диапазон значений: [0, .. , M–1].

Кнут предложил в качестве A использовать число, обратное к золотому сечению:

$$A = \phi^{-1} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = 0.6180339887 \ldots$$

Такой выбор A дает хорошие результаты хеширования.

Хеш-функции. Метод умножения.

Хеш-функцию $h(k) = [M \cdot \{k \cdot A\}]$ вычисляют без использования операций с числами с плавающими точками.

Пусть M – степень двойки. $M = 2^p, p \leq 32$.

Вместо действительного числа A берут близкое к нему $A = \frac{s}{2^{32}} = \frac{2654435769}{2^{32}}$. То есть $s = 2654435769$.

Тогда $h(k) = \left[2^p \cdot \left\{k \cdot \frac{s}{2^{32}}\right\}\right] = \left[2^p \cdot \left\{\frac{r_1 2^{32} + r_0}{2^{32}}\right\}\right] = \left[2^p \cdot \frac{r_0}{2^{32}}\right]$

$= \left[\frac{r_0}{2^{32-p}}\right] = \left[\frac{r_{01} 2^{32-p} + r_{00}}{2^{32-p}}\right] = r_{01} =$ Старшие p бит r_0.

Итого, $\boldsymbol{h(k)} = \left(\boldsymbol{k \cdot s} \ \mathbf{mod}\ \mathbf{2^{32}}\right) \gg (\mathbf{32} - \boldsymbol{p})$.

Хеш-функции строки.

Строка $s = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Вариант 1. $h_1(s) = (s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + \cdots +$

Хеш-функции строки

Теорема. 1) Если a и M не являются взаимно простыми, то $\{s \cdot a \bmod M, 0 \le s < M\} \ne \{0, \dots, M-1\}$.

2) Если a и M взаимно просты, то $\{s \cdot a \bmod M, 0 \le s < M\} = \{0, \dots, M-1\}$.

Доказательство. 1) Пусть a и M не являются взаимно простыми.
Тогда a и M имеют общий делитель d.
$a = d \cdot x, M = d \cdot y$.
Для любого s остаток от деления $s \cdot a$ на M также делится на d:
$s \cdot a = M \cdot k + r, r = s \cdot d \cdot x - d \cdot y \cdot k = d(sx - yk)$.

2) От противного. Пусть множество $\{s \cdot a \bmod M, 0 \le s < M\}$ имеет меньше M различных элементов. Тогда существуют i и j, что $ia \equiv ja \pmod M$, $i < j < M$. Следовательно, $(j - i)a = M \cdot u$. Из этого следует, что $j - i$ делится на M, т.к. a и M – взаимно простые. Но $0 < j - i < M$. Противоречие.

Хеш-функции строки

$h_2(s)$ вычисляется эффективнее, если использовать метод Горнера:

$$h_2(s) = \Big(\big((s_0 a + s_1)a + s_2\big)a + \cdots + s_{n-2}\Big)a + s_{n-1}.$$

$h_1(s)$ можно вычислять аналогично, но начиная с конца строки.

Но в с-строках известен только указатель на начало строки, а размер строки не известен.

Поэтому удобнее вычислять $h_2(s)$.

Хеш-функция строки

```
// Хеш-функция строки.
int Hash( const char* str, int m )
{
    int hash = 0;
    for( ; *str != 0; ++str )
        hash = ( hash * a + *str ) % m;
    return hash;
}
```

Другие хеш-функции

Функции вычисления контрольной суммы также являются хеш-функциями.

CRC — циклически избыточный код, Cyclic redundancy check. Использует метод деления многочленов, но не просто остаток от деления многочленов, а:

$$H_P(K)(x) = K(x) \cdot x^m \bmod P(x),$$

коэффициенты в поле Z_2.

Для разных версий используются многочлены разных степеней, с разными коэффициентами.

Другие хеш-функции

Некоторые стандарты CRC

CRC стандарт	Многочлен
CRC-1	$x + 1$
CRC-5-USB	$x^5 + x^2 + 1$
CRC-8	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
CRC-16(-IBM)	$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$
CRC-32-IEEE 802.3	$x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
CRC-64-ISO	$x^{64} + x^4 + x^3 + x + 1$

Другие хеш-функции

MD1, MD2, MD3, MD4, MD5, MD6 — известные алгоритмы вычисления контрольных сумм.

Message Digest. Один из самых популярных – MD5 – 128-битный алгоритм хеширования. Разработан Рональдом Л. Ривестом в 1991г. Использует битовые операции с блоками длины 128.

Важное преимущество MD – лавинный эффект. Замена одного символа приводит к полному изменению хеша:

MD5("md5") = 1BC29B36F623BA82AAF6724FD3B16718.

MD5("md4") = C93D3BF7A7C4AFE94B64E30C2CE39F4F

Другие хеш-функции

Криптографические хеш-функции.

SHA-1, SHA-2 — 160, 256/512-битные хеши.

SHA = Secure Hash Code.

Криптографические = нет способа нахождения коллизий.

Хеш-таблицы

<u>Определение.</u> Хеш-таблица – структура данных, хранящая ключи в таблице. Индекс ключа вычисляется с помощью хеш-функции. Операции: добавление, удаление, поиск.

Пусть хеш-таблица имеет размер M, количество элементов в хеш-таблице – N.

<u>Определение.</u> Число хранимых элементов, делённое на размер массива (число возможных значений хеш-функции), называется **коэффициентом заполнения хеш-таблицы** (load factor). Обозначим его $\alpha = \frac{N}{M}$.

Этот коэффициент является важным параметром, от которого зависит среднее время выполнения операций.

Хеш-таблицы

Парадокс дней рождений.

При вставке в хеш-таблицу размером 365 ячеек всего лишь 23-х элементов вероятность коллизии уже превысит 50 % (если каждый элемент может равновероятно попасть в любую ячейку).

Хеш-таблицы различаются по методу разрешения коллизий.

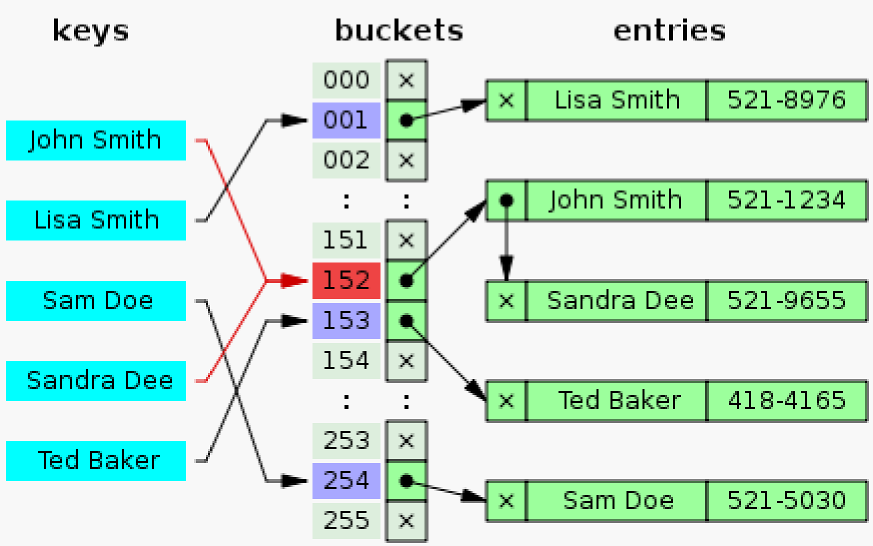
Основные **методы** разрешения коллизий:

1. Метод цепочек.
2. Метод открытой адресации.

Хеш-таблицы. Метод цепочек.

Каждая ячейка массива является указателем на связный список (цепочку).

Коллизии приводят к тому, что появляются цепочки длиной более одного элемента.



Хеш-таблицы. Метод цепочек.

Добавление ключа.

1. Вычисляем значение хеш-функции добавляемого ключа – h.
2. Находим A[h] – указатель на список ключей.
3. Вставляем в начало списка (в конец списка дольше). Если запрещено дублировать ключи, то придется просмотреть весь список.

Время работы:
В лучшем случае – **O(1)**.
В худшем случае
– если не требуется проверять наличие дубля, то **O(1)**,
– иначе – **O(N)**.

Хеш-таблицы. Метод цепочек.

<u>Удаление ключа.</u>

1. Вычисляем значение хеш-функции удаляемого ключа – h.
2. Находим A[h] – указатель на список ключей.
3. Ищем в списке удаляемый ключ и удаляем его.

Время работы:
В лучшем случае – **O(1)**.
В худшем случае – **O(N)**.

Хеш-таблицы. Метод цепочек.

Поиск ключа.

1. Вычисляем значение хеш-функции ключа – h.
2. Находим A[h] – указатель на список ключей.
3. Ищем его в списке.

Время работы:
В лучшем случае – **O(1)**.
В худшем случае – **O(N)**.

Хеш-таблицы. Метод цепочек.

Среднее время работы.

Теорема. Среднее время работы операций поиска, вставки (с проверкой на дубликаты) и удаления в хеш-таблице, реализованной методом цепочек – $O(1+\alpha)$, где α – коэффициент заполнения таблицы.

Доказательство. Среднее время работы – математическое ожидание времени работы в зависимости от исходного ключа.

Время работы для обработки одного ключа $T(k)$ зависит от длины цепочки и равно $1+N_{h(k)}$, где N_i – длина i-ой цепочки. Предполагаем, что хеш-функция равномерна, а ключи равновероятны.

Среднее время работы

$$T_{\text{ср}}(M,N) = M\big(T(k)\big) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M}(1+N_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}(1+N_i) = \frac{M+N}{M}$$

$$= 1+\alpha$$

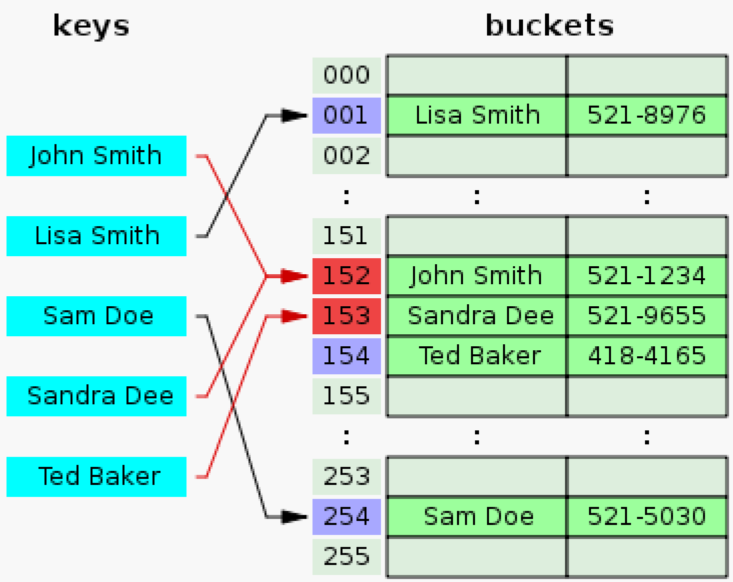
Хеш-таблицы. Метод цепочек.

```
// Хеш-функция.
template<class T>
int Hash( T& data );

// Элемент цепочки в хеш-таблице.
template<class T>
struct CHashTableNode {
    T Data;
    CHashTableNode<T>* Next;
};

// Хеш-таблица.
template<class T>
class CHashTable {
public:
    CHashTable( int initialSize );
    bool Has( T& key ) const;
    void Add( T& key );
    bool Delete( T& key );

private:
    vector<CHashTableNode<T>*> table;
};
```

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Все элементы хранятся непосредственно в массиве.
Каждая запись в массиве содержит либо элемент, либо NIL.

При поиске элемента систематически проверяем ячейки до тех пор, пока не найдем искомый элемент или не убедимся в его отсутствии.



Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Вставка ключа.

1. Вычисляем значение хеш-функции ключа – h.
2. Систематически проверяем ячейки, начиная от A[h], до тех пор, пока не находим пустую ячейку.
3. Помещаем вставляемый ключ в найденную ячейку.

В п.2 поиск пустой ячейки выполняется в некоторой последовательности. Такая последовательность называется **«последовательностью проб».**

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Последовательность проб зависит от вставляемого в таблицу ключа. Для определения исследуемых ячеек расширим хеш-функцию, включив в нее номер пробы (от 0).

$$h : U \times \{0, 1, \dots, M-1\} \to \{0, 1, \dots, M-1\}.$$

Важно, чтобы для каждого ключа k последовательность проб

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, M-1) \rangle$$

представляла собой перестановку множества $\langle 0,1, \dots, M-1 \rangle$, чтобы могли быть просмотрены все ячейки таблицы.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

```
// Вставка ключа в хеш-таблицу (без учета удаленных
элементов).
void CHashTable::Insert( T& k )
{
    for( int i = 0; i < tableSize; ++i ) {
        int j = h( k, i );
        if( IsNil( table[j] ) ) {
            table[j] = k;
            return;
        }
    }
    throw CHashTableException( “Overflow” );
}
```

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Поиск ключа.

Исследуется та же последовательность, что и в алгоритме вставки ключа.

Если при поиске встречается пустая ячейка, поиск завершается неуспешно, поскольку искомый ключ должен был бы быть вставлен в эту ячейку в последовательности проб, и никак не позже нее.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Удаление ключа.

Алгоритм удаления достаточен сложен.

Нельзя при удалении ключа из ячейки i просто пометить ее значением NIL. Иначе в последовательности проб для некоторого ключа (или некоторых) возникнет пустая ячейка, что приведет к неправильной работе алгоритма поиска.

Решение. Помечать удаляемые ячейки спец. значением «Deleted».

Нужно изменить методы поиска и вставки.
В методе вставки проверять «Deleted», вставлять на его место.
В методе поиска продолжать поиск при обнаружении «Deleted».

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Вычисление последовательности проб.

Желательно, чтобы для различных ключей k последовательность проб $\langle h(k,0), h(k,1), \dots, h(k, M-1) \rangle$ давала большое количество последовательностей-перестановок множества $\langle 0,1,\dots, M-1 \rangle$.

Обычно используются три метода построения h(k, i):

1. Линейное пробирование.
2. Квадратичное пробирование.
3. Двойное хеширование.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Линейное пробирование.

$$h(k,i) = (h'(k) + i) \bmod M.$$

Основная проблема – кластеризация.

Последовательность подряд идущих занятых элементов таблицы быстро увеличивается, образуя кластер.

Попадание в элемент кластера при добавлении гарантирует «одинаковую прогулку» для различных ключей и проб. Новый элемент будет добавлен в конец кластера, увеличивая его.

Если $h(k_1, i) = h(k_2, j)$, то $h(k_1, i + r) = h(k_2, j + r)$ для всех r.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Квадратичное пробирование.

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod M.$$

Требуется, чтобы последовательность проб содержала все индексы 0, .. , M–1. Требуется подбирать c_1 и c_2.

При $\mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 = 1/2$, то проба вычисляется рекуррентно:

$$h(k, i+1) = h(k, i) + i + 1 \ (mod\ M).$$

Возникает **вторичная кластеризация**. Проявляется на ключах с одинаковым хеш-значением $h'(\cdot)$.
Если $h(k_1, 0) = h(k_2, 0)$, то $h(k_1, i) = h(k_2, i)$ для всех i.
Соответствует цепочкам в методе цепочек. Разница лишь в том, что в методе открытой адресации эти цепочки могут еще пересекаться.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

<u>Квадратичное пробирование.</u>

<u>Утверждение.</u> Если $c_1 = c_2 = 1/2$, а $M = 2^p$, то квадратичное пробирование дает перестановку {0, 1, 2, 3, …, M-1}.

<u>Доказательство.</u> От противного. Пусть существуют i и j, $0 \le i, j \le M - 1$, для которых

$$\frac{i(i+1)}{2} \equiv \frac{j(j+1)}{2} (mod\ 2^p).$$

Тогда

$$i^2 + i - j^2 - j = 2^{p+1}D,$$
$$(i-j)(i+j+1) = 2^{p+1}D,$$

Если i и j одинаковой четности, то $i + j + 1$ нечетна, но $i - j$ не может делиться на 2^{p+1}.

Если i и j разной четности, то $i - j$ нечетна, но $i + j + 1$ не может делиться на 2^{p+1}, т.к. $0 < i + j + 1 < 2^{p+1}$. Противоречие.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Двойное хеширование.

$$h(k,i) = \left(h_1(k) + ih_2(k)\right) \bmod M.$$

Требуется, чтобы последовательность проб содержала все индексы 0, .. , M–1. Для этого все значения $h_2(k)$ должны быть взаимно простыми с M.

- M может быть степенью двойки, а $h_2(k)$ всегда возвращать нечетные числа.
- M простое, а $h_2(k)$ меньше M.

Общее количество последовательностей проб = $O(M^2)$.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Анализ хеш-таблиц с открытой адресацией.

Теорема. Математическое ожидание количества проб при неуспешном поиске в хеш-таблице с открытой адресацией и коэффициентом заполнения $\alpha = \frac{n}{m} < 1$ в предположении равномерного хеширования не превышает $\frac{1}{1-\alpha}$.

Без доказательства.

Время работы методов поиска, добавления и удаления:
В лучшем случае – $O(1)$.
В худшем случае – $O(N)$.
В среднем – $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$.

Хеш-таблицы. Открытая адресация.

Плюсы.

+ Основное преимущество метода открытой адресации – не тратится память на хранение указателей списка.
+ Нет элементов, хранящихся вне таблицы.

Минусы.

– Хеш-таблица может оказаться заполненной. Коэффициент заполнения α не может быть больше 1.
– При приближении коэффициента заполнения α к 1 среднее время работы поиска, добавления и удаления стремится к N.
– Сложное удаление.

Динамическая хеш-таблица.

Изначально может быть неизвестно количество хранимых ключей. Коэффициент заполнения α может приближаться к 1, а в реализации методом цепочек может быть больше 1.

Среднее время работы для метода цепочек: $O(1 + \alpha)$, для открытой адресации $O(1/(1 - \alpha))$.

Требуется динамически увеличивать размер таблицы. Аналогично динамическому массиву.

Процесс увеличения размера хеш-таблицы называется «**перехешированием**».

Динамическая хеш-таблица.

Перехеширование.

1. Создать новую пустую таблицу. Размер новой таблицы $\widetilde{M}$ может быть равен $2 \cdot M$, где M – размер старой таблицы. Если размер таблицы должен быть простым, то следует использовать простое число близкое к $2 \cdot M$.
2. Проитерировать старую таблицу. Каждый ключ старой таблицы перенести в новую. Для добавления в новую таблицу надо использовать другую хеш-функцию, возвращающую значения от 0 до $\widetilde{M} - 1$.

Динамическая хеш-таблица.

Когда выполнять перехеширование?

Для разных хеш-таблиц следует использовать разные стратегии.

<u>Для хеш-таблиц, реализованных методом цепочек</u>:

Например, когда коэффициент заполнения α достиг 1.

<u>Для хеш-таблиц, реализованных методом открытой адресации:</u>

Например, когда α достиг значения ⅔ или ¾.

Хеш-таблицы. Время работы.

	Лучший случай.	В среднем. Метод цепочек.	В среднем. Метод открытой адресации.	Худший случай.
Поиск	$O(1)$	$O(1+\alpha)$	$O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$O(N)$
Вставка	$O(1)$	$O(1+\alpha)$	$O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$O(N)$
Удаление	$O(1)$	$O(1+\alpha)$	$O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$O(N)$

МГТУ
им. Н.Э. Баумана
ТЕХНОПАРК
Mail.Ru Group

???????????

Спасибо за внимание!