АЛГОРИТМЫ СОРТИРОВКИ ЧАСТЬ 2

Лекция 4

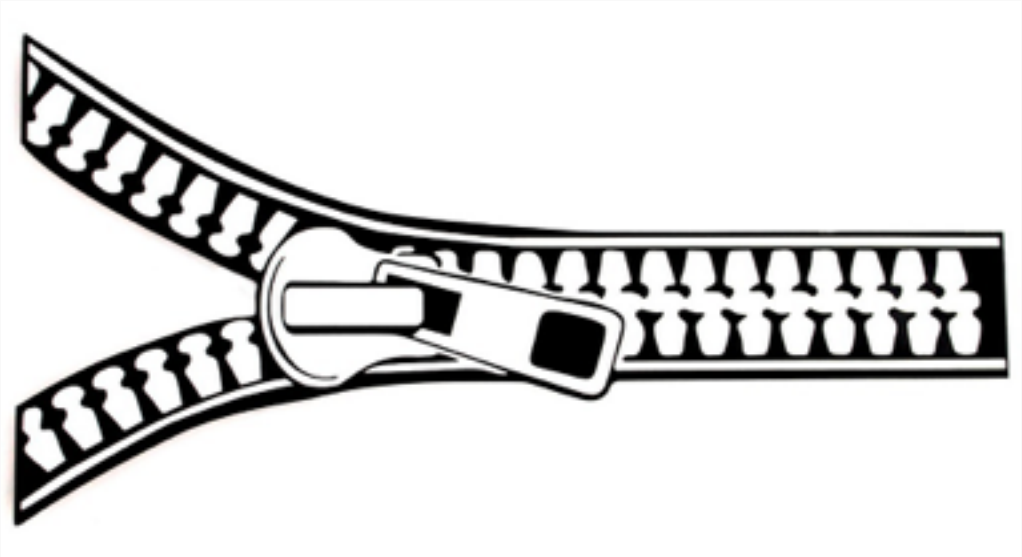
Иванов Г.В.

Сортировки 2

1. Сортировка слиянием
2. Быстрая сортировка
3. Порядковые статистики
4. Сортировки без сравнений

Слияние 2х упорядоченных массивов

- Выберем массив, крайний элемент которого меньше
- Извлечём этот элемент в массив-результат
- Продолжаем, пока один из массивов не опустеет
- Копируем остаток второго массива в конец массива-результата



Слияние 2х упорядоченных массивов


```
void merge(int *a, int a_len, int *b, int b_len, int *c) {
  int i=0; int j=0;
  for (;i < a_len and j < b_len;) {
    if (a[i] < b[j]) {
      c[i+j] = a[i];
      ++i;
    } else {
      c[i+j] = b[j];
      ++j;
    }
  }
  if (i==a_len) {
    for (;j < b_len;++j) { c[i+j] = b[j]; }
  } else {
    for (;i < a_len;++i) { c[i+j] = a[i]; }
  }
}
```

Слияние 2x упорядоченных массивов

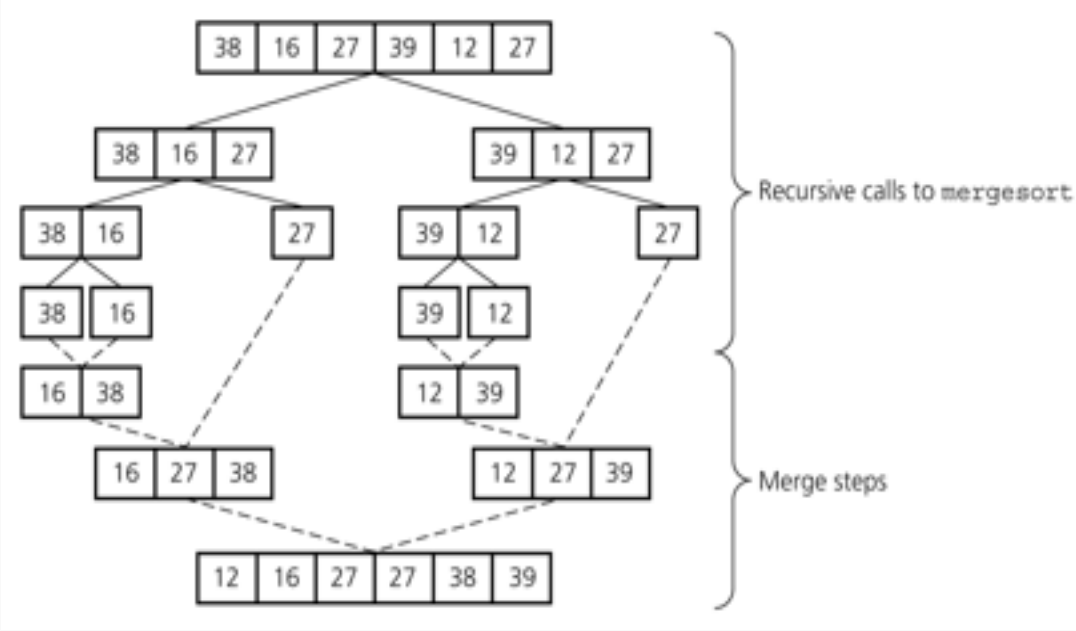
Сложность *O(n+m)*

Количство сравнений

- Лучшее: min(n,m)
- Худшее n+m

Нисходящая **сортировка слиянием**

- Разбить массив на 2 части
- Отсортировать каждую часть рекурсивно
- Объединить 1 и 2 части



Нисходящая сортировка слиянием


```
void merge_sort(int *data, int size, int *buffer) {
  if (size < 2) return;
  merge_sort(data, size / 2, buffer);
  merge_sort(&data[size / 2], size - size / 2, buffer);

  merge(&data[0], size / 2, &data[size/2], size - size / 2, buffer);

  for (size_t pos = 0; pos < size; ++ pos) {
    data[pos] = buffer[pos];
  }
}
```

Восходящая **сортировка слиянием**

- Разбить массив на 2^k частей размером не больше m.
- Отсортировать каждую часть другим алгоритмом
- Объединить 1 и 2, 3 и 4, … n-1 и n части.
- Повторить шаг 3, пока не останется одна часть

1	X	B	R	S	T	U	A	C	N	P	D
2	B	X	R	S	T	U	A	C	N	P	D
4	B	R	S	X	A	C	T	U	D	N	P
8	A	B	C	R	S	T	U	X	D	N	P
16	A	B	C	D	N	P	R	S	T	U	X

Восходящая сортировка слиянием


```
void merge_sort(int *data, size_t size, int *buffer) {
  for(size_t chunk_size = 1; chunk_size < size; chunk_size *= 2) {
    size_t offset = 0;
    for (; offset + chunk_size < size; offset += 2 * chunk_size) {
      size_t right_size = chunk_size;
      if (offset + chunk_size + right_size > size) {
        right_size = size - offset - chunk_size;
      }
      merge(
        &data[offset], chunk_size,
        &data[offset + chunk_size], right_size,
        &buffer[offset]);
    }
    for(size_t pos = 0; pos < size; ++pos) {
      data[pos] = buffer[pos];
    }
  }
}
```

Восходящая сортировка слиянием


```
void merge_sort_fast(int *data, size_t size, int *buffer) {
  bool is_swapped = false;
  for(size_t chunk_size = 1; chunk_size < size; chunk_size *= 2, is_swapped = !is_swapped) {
    size_t offset = 0;
    for (; offset + chunk_size < size; offset += 2 * chunk_size) {
      size_t right_size = chunk_size;
      if (offset + chunk_size + right_size > size) {
        right_size = size - offset - chunk_size;
      }
      merge(
        &data[offset], chunk_size,
        &data[offset + chunk_size], right_size,
        &buffer[offset]);
    }
    for (size_t pos = offset; pos < size; ++pos) {
      buffer[pos] = data[pos];
    }
    std::swap(data, buffer);
  }
  if (is_swapped) {
    std::swap(data, buffer);
    for(size_t pos = 0; pos < size; ++pos) {
      data[pos] = buffer[pos];
    }
  }
}
```

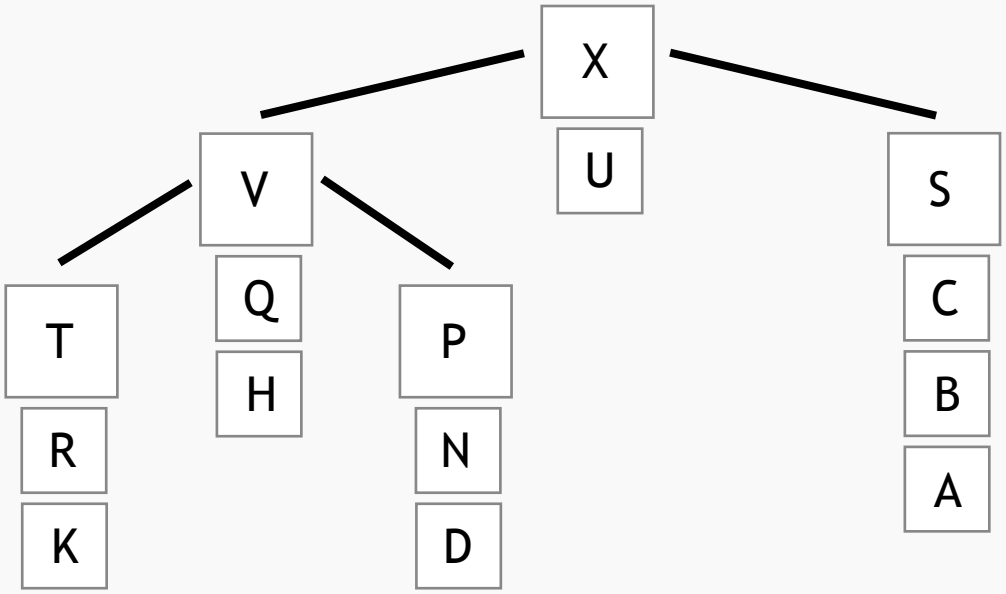
K-путевое **слияние**

Дано *k* упорядоченных массивов суммарным размером *n* : A1, A2, .. Ak

- Построить кучу из *k* массивов *O(k)*
- Перенести первый элемент из вершины кучи в результат *O(1)*
- Если массив на вершине кучи пуст – извлечь элемент из кучи
- Восстановить порядок массивов в куче *O(log(k))*
- Повторить пока куча не пуста

Суммарная сложность: *O(k + n*log(k))*

K-путевое **слияние**



K-путевое **слияние**

- Дано *k* упорядоченных массивов суммарным размером *n* : A1, A2, .. Ak
- Построим бинарное дерево с массивами A1..Ak в листьях
- В узловых вершинах будем хранить указатель на минимальный элемент поддерева
- Изъятие элемента из узловой вершины – изъятие из минимального из дочерних узлов
- При изъятии элемента из списка, его размер уменьшается на 1
- Если список пуст – его сосед перемещается на место родительской узловой вершины
- При изъятии происходит одно сравнение на каждом уровне дерева

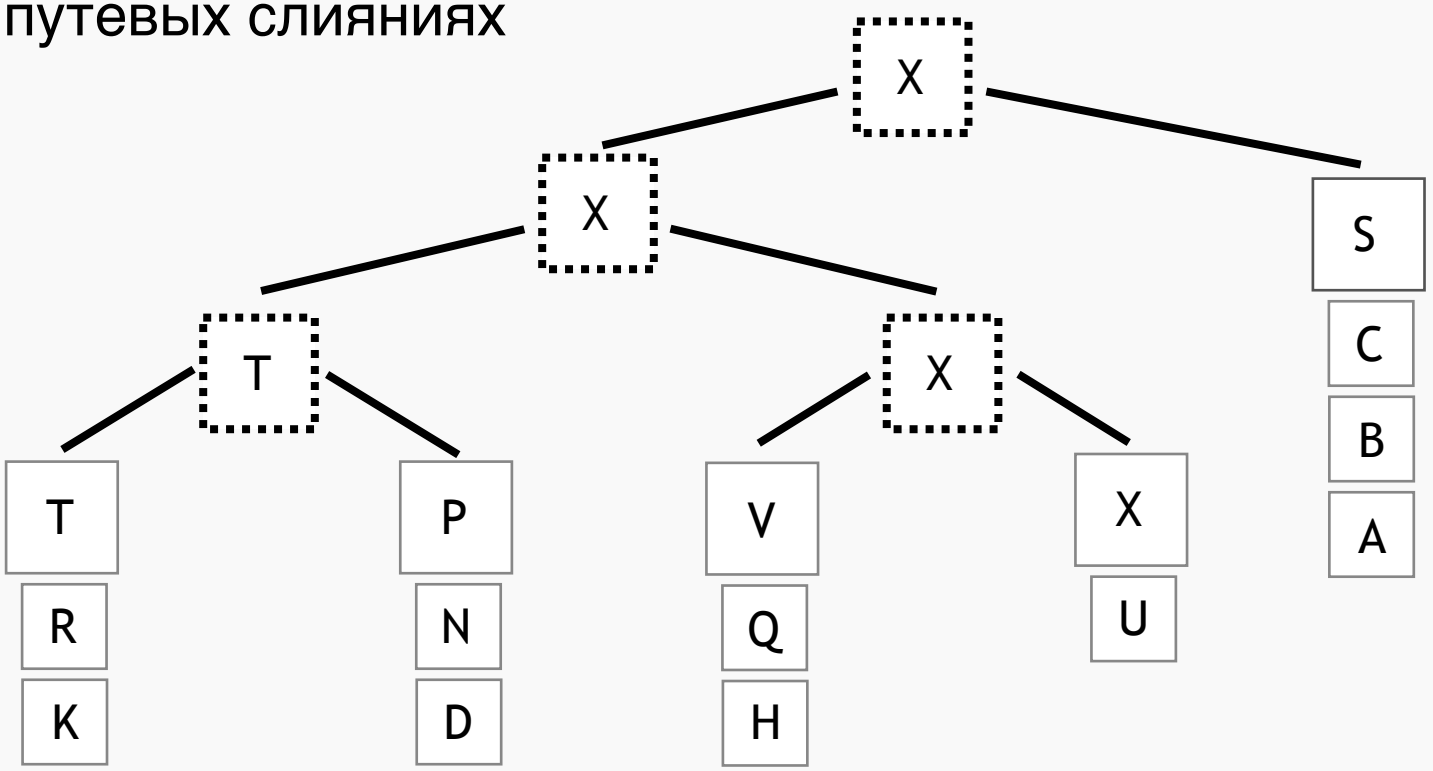
Высота дерева *log(k)*

Итого *O(n*log(k))*

K-путевое **слияние**

Экономия на операциях копирования: *n*

Количество сравнений такое же как и при log(k) 2х путевых слияниях

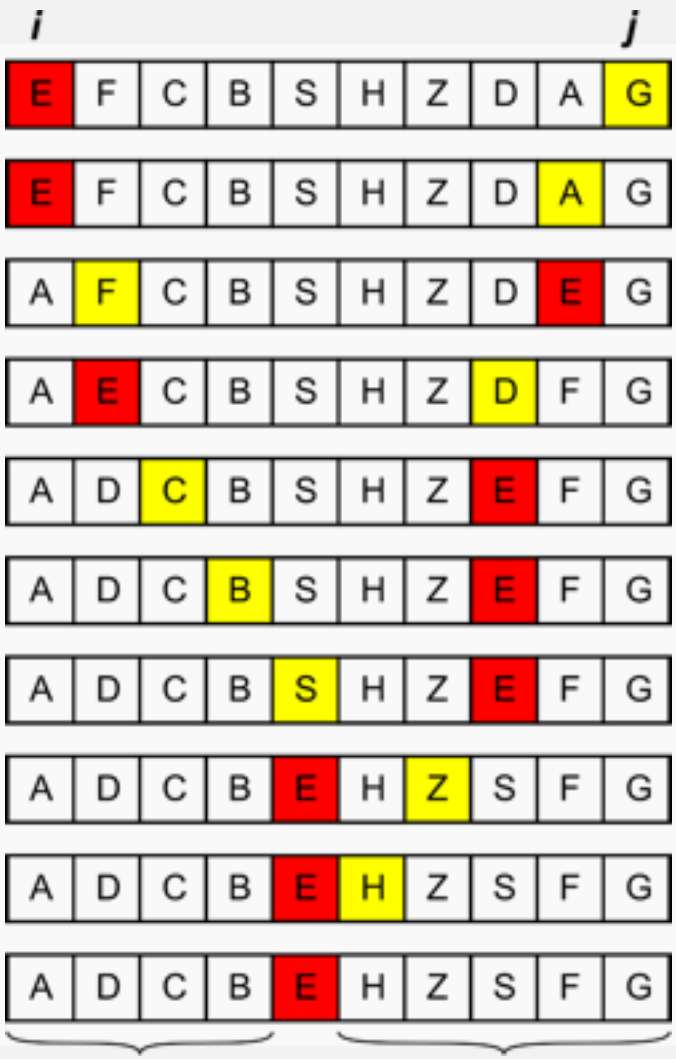


Quick sort

QuickSort: Split

- Установим **2** указателя: ***i*** в – начало массива, ***j*** – в конец
- Будем помнить под каким указателем лежит «пивот»
- Если ***a[j] > a[i]***, поменяем элементы массива под ***i, j***
- Сместим на ***1*** указатель, не указывающий на «пивот»
- Продолжим пока ***i* != *j***

QuickSort: Split



Сортировка Хоара


```
void quick_sort(int *a, int n) {
  int i = 0;
  int j = n - 1;
  bool side = 0;
  while (i != j) {
    if (a[i] > a[j]) {
      swap(a[i], a[j]);
      side = !side;
    }
    if (side) {
      ++i;
    } else{
      --j;
    }
  }
  if (i > 1) quick_sort(a, i);
  if (n > i+1) quick_sort(a + (i+1), n - (i+1));
}
```

Quicksort: анализ

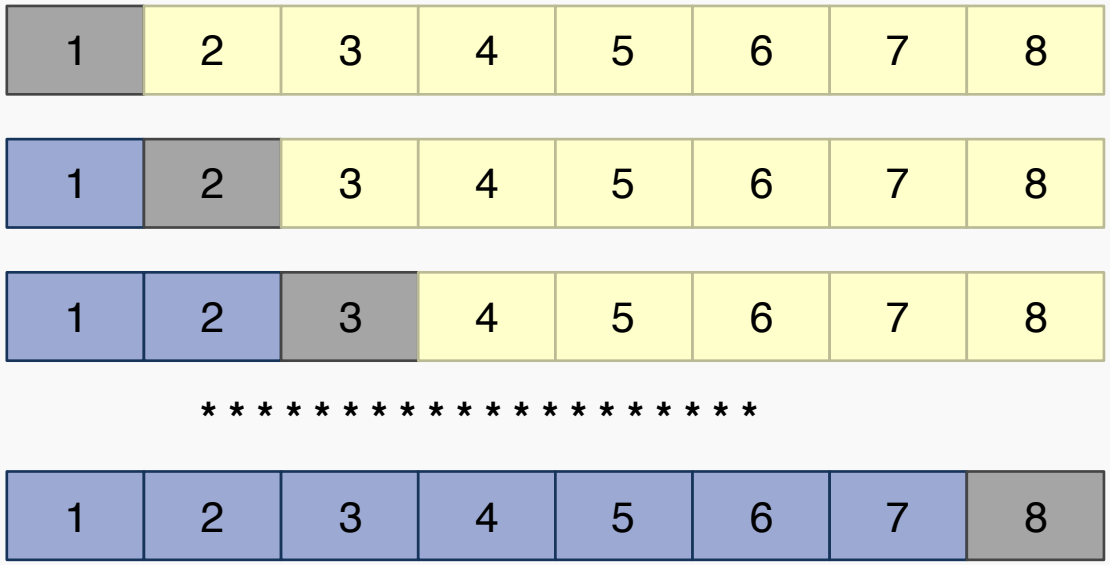
- *Предположим, что split делит массив в соотношении 1:1*
- $T(n) \leq c_1 + c_2\, n + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{log_2 n} \{c_1 2^k + c_2 n\} = c_1 n + c_2 n\, log(n)$$

- $T(n) = O\big(n\, log(n)\big)$

Quicksort: анализ

- *Упорядоченный массив делится в соотношении 1:n-1*
- $T(n) = c_1 + c_2 n + T(n-1) = \frac{1}{2} c_2 n^2 + c_1 n = O(n^2)$



Quicksort: выбор пивота

1й элемент

Серединный элемент

Медиана трёх

Случайный элемент

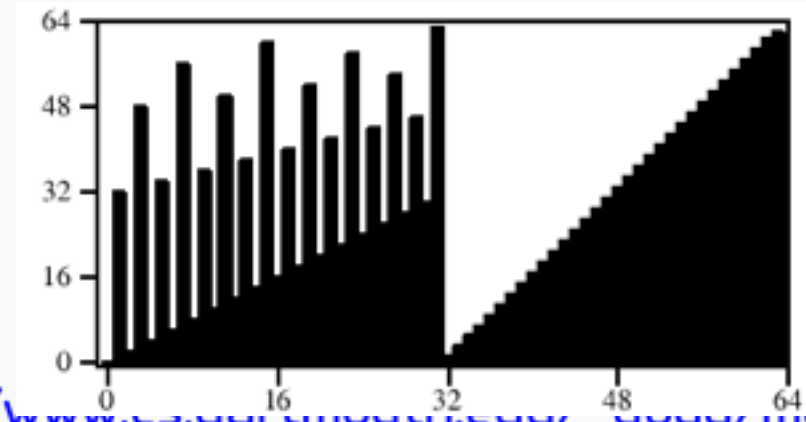
Медиана

Медиана по трём случайным

…

Quicksort-killer

- Последовательность, приводящая к времени: $T(n) = O(n^2)$
- [1,2,3,...n] ⇔ первый элемент
- Для любого предопределённого порядка выбора пивота, существует killer-последовательность



- http://www.cs.dartmouth.edu/~doug/mdmspe.pdf

Рандомизованная медиана

Медиана ⇔ ***RandSelect(A[1, N], k)***; ***k = N/2***

Случайно выберем элемент из ***A***: ***A[j]***

Разобьём ***A*** на 2 части: меньше/больше ***A[j]***

Пусть позиция ***A[j]*** в разделённом массиве: ***k***

k < j **?**

- Найдём: ***RandSelect(A[1, j], k)***
- Иначе: ***RandSelect(A[j+1, N], k-j)***

Quicksort: медиана за линейное время

Медиана ⇔ ***SELECT(A[1,N], k)***; ***k = N/2***

Разобьём массив на пятёрки

Отсортируем каждую пятёрку

Найдём медиану середин пятёрок

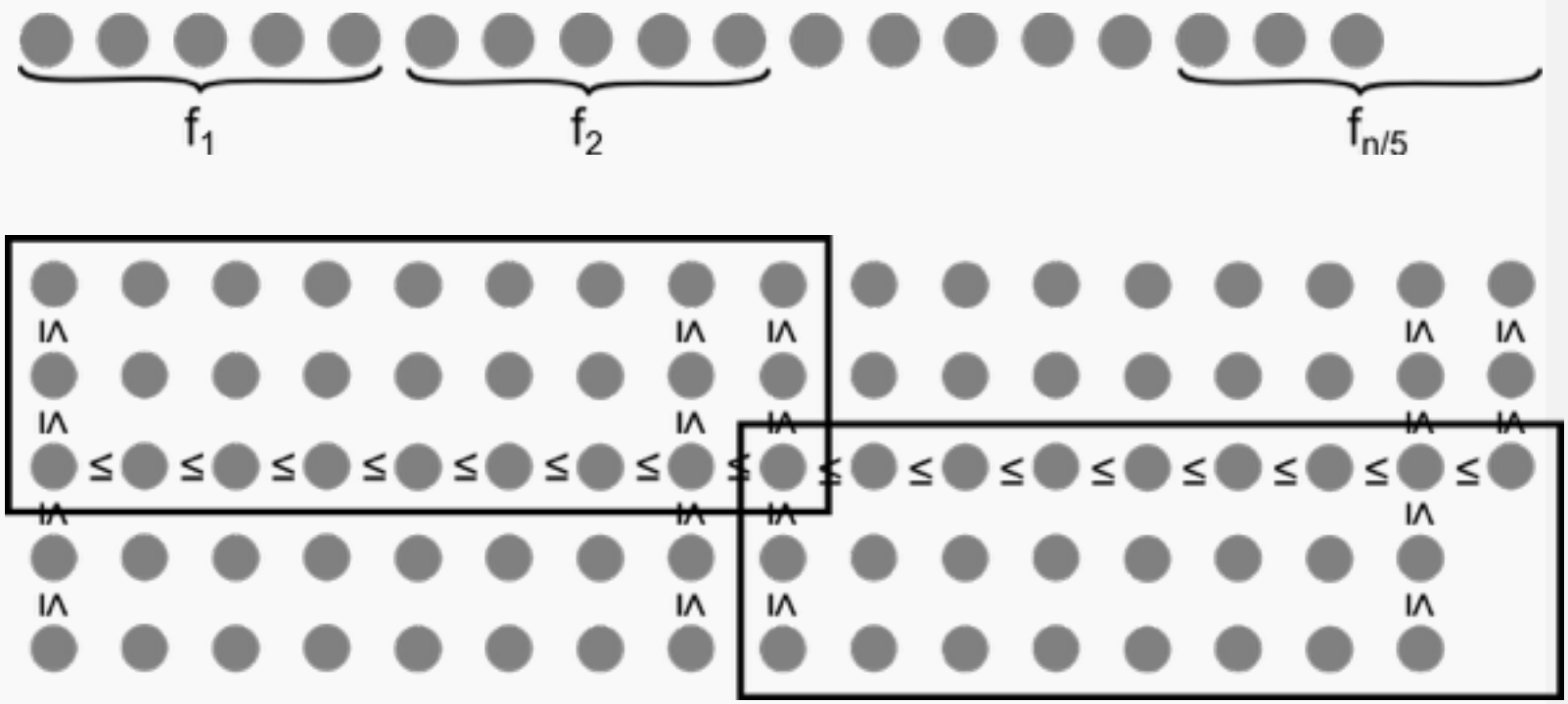
Разобьём массив на 2 группы: меньше/больше медианы пятёрок

Пусть индекс медианы в массиве ***j***

j > k ?

- найдём: ***SECLECT(A[1, j], k)***
- иначе: ***SELECT(A[j+1, N], k-j)***

Медиана за линейное время



Медиана за линейное время: анализ

- Разобьём массив на пятёрки
- Отсортируем каждую пятёрку $c_1 N$
- Найдём медиану середин пятёрок $T(N/5)$
- Разобьём массив на 2 группы <> медианы медиан: $c_2 N$
  - найдём: *SECLECT(A[1, j], k)* => $T(j)$
  - иначе: *SELECT(A[j+1, N], k-j)* => $T(N-j)$; $0.3N \leq j \leq 0.7N$;
- $T(N) \leq T\left(\frac{N}{5}\right) + cN + T(0.7N)$; => $\boldsymbol{T(N) = O(N)}$;

Сравнение сортировок

Name	Best	Average	Worst	Memory	Stable
Quicksort	$n \log n$	$n \log n$	n^2	$\log n$ on average, worst case is n	typical in-place sort is not stable; stable versions exist
Merge sort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	Depends[further explanation needed]; worst case is n	Yes
In-place merge sort	—	—	$n (\log n)^2$	1	Yes
Heapsort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	1	No
Insertion sort	n	n^2	n^2	1	Yes
Introsort	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$\log n$	No
Selection sort	n^2	n^2	n^2	1	No
Timsort	n	$n \log n$	$n \log n$	n	Yes
Shell sort	n	$n(\log n)^2$ or $n^{3/2}$	Depends on gap sequence; best known is $n(\log n)^2$	1	No
Bubble sort	n	n^2	n^2	1	Yes
Binary tree sort	n	$n \log n$	$n \log n$	n	Yes
Cycle sort	—	n^2	n^2	1	No
Library sort	—	$n \log n$	n^2	n	Yes
Patience sorting	—	—	$n \log n$	n	No
Smoothsort	n	$n \log n$	$n \log n$	1	No
Strand sort	n	n^2	n^2	n	Yes
Tournament sort	—	$n \log n$	$n \log n$	n[4]	
Cocktail sort	n	n^2	n^2	1	Yes
Comb sort	n	$n \log n$	n^2	1	No
Gnome sort	n	n^2	n^2	1	Yes
Franceschini's method[5]	—	$n \log n$	$n \log n$	1	Yes

Сортировки без сравнений

1. Сортировка подсчетом
2. Поразрядная сортировка от младших к старшим
3. Поразрядная сортировка от старших к младшим
4. Поразрядная быстрая сортировка

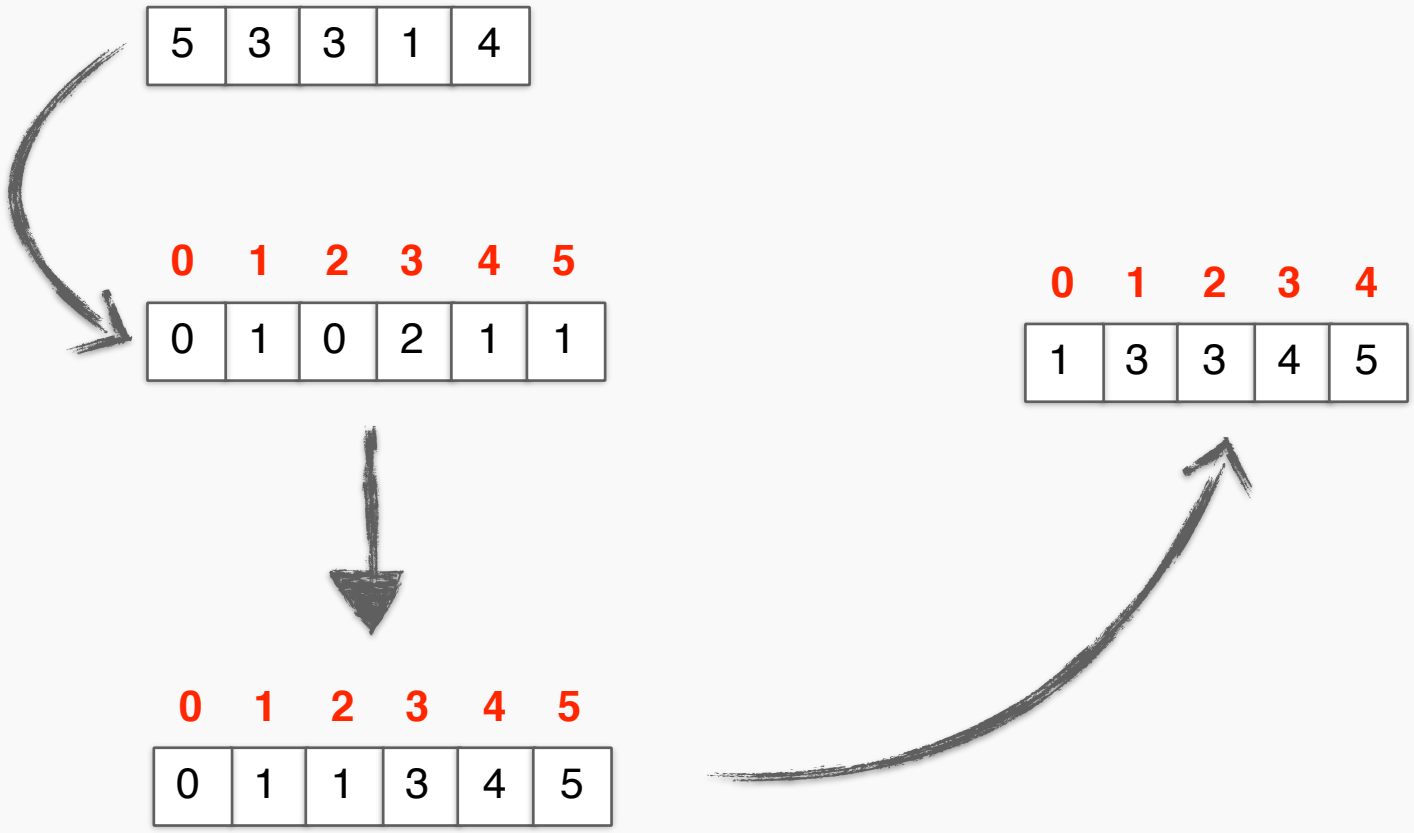
Сортировка подсчётом

Algorithm 3.10: CountingSort(R)

Input: (Multi)set $R = \{k_1, k_2, \ldots k_n\}$ of integers from the range $[0..\sigma)$.
Output: R in nondecreasing order in array $J[0..n)$.

```
(1) for i ← 0 to σ − 1 do C[i] ← 0
(2) for i ← 1 to n do C[k_i] ← C[k_i] + 1
(3) sum ← 0
(4) for i ← 0 to σ − 1 do          // cumulative sums
(5)     tmp ← C[i]; C[i] ← sum; sum ← sum + tmp
(6) for i ← 1 to n do              // distribute
(7)     J[C[k_i]] ← k_i; C[k_i] ← C[k_i] + 1
(8) return J
```

Сортировка подсчётом



Сортировка подсчётом


```
void count_sort(int *data, int size, int range) {
  int *count = new int[range];
  int *aux = new int[size];

  for (int i = 1; i < range; ++i) {
    count[i] = 0;
  }
  for (int i = 0; i < size; ++i) {
    ++count[data[i] + 1];
  }
  for (int i = 1; i < range; ++i) {
    count[i] += count[i - 1];
  }
  for (int i = 0; i < size; ++i) {
    aux[count[data[i]]++] = data[i];
  }
  for (int i = 0; i < size; i++) {
    data[i] = aux[i];
  }

  delete [] aux;
  delete [] count;
}
```

Сортировка подсчётом

+ O(n) - linear time
+ stable
+ нет сравнений
- требует O(n) памяти
- O(n) перемещений

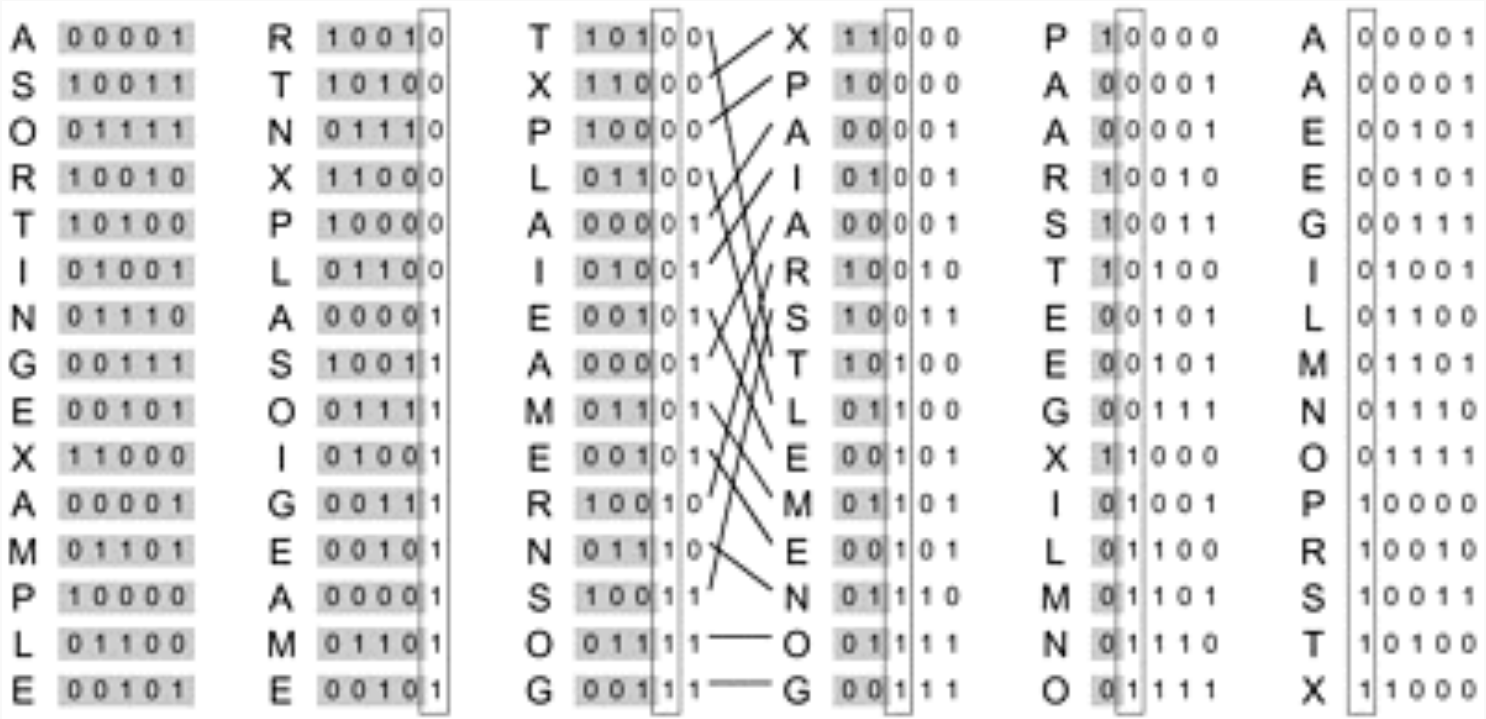
LSD raddix sort

Algorithm 3.11: LSDRadixSort($\mathcal{R}$)

Input: Set $\mathcal{R} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ of strings of length m over the alphabet $[0..\sigma)$.
Output: $\mathcal{R}$ in increasing lexicographical order.

(1) for $\ell \leftarrow m-1$ to 0 do CountingSort($\mathcal{R}$,ℓ)
(2) return $\mathcal{R}$

LSD raddix sort



LSD raddix sort


```
 3
 4 void jsw_radix_pass ( int a[], int aux[], int n, int radix )
 5 {
 6   int i;
 7   int count[RANGE] = {0};
 8
 9   for ( i = 0; i < n; i++ )
10     ++count[digit ( a[i], radix ) + 1];
11
12   for ( i = 1; i < RANGE; i++ )
13     count[i] += count[i - 1];
14
15   for ( i = 0; i < n; i++ )
16     aux[count[digit ( a[i], radix )]++] = a[i];
17
18   for ( i = 0; i < n; i++ )
19     a[i] = aux[i];
20 }
21
```

LSD raddix sort

+ O(n*key len) время работы
+ O(n) время работы
+ stable
- can’t use unstable sort for buckets

MSD raddix sort

Algorithm 3.15: MSDRadixSort($\mathcal{R}, \ell$)
Input: Set $\mathcal{R} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ of strings over the alphabet $[0..\sigma)$ and the length ℓ of their common prefix.
Output: $\mathcal{R}$ in increasing lexicographical order.

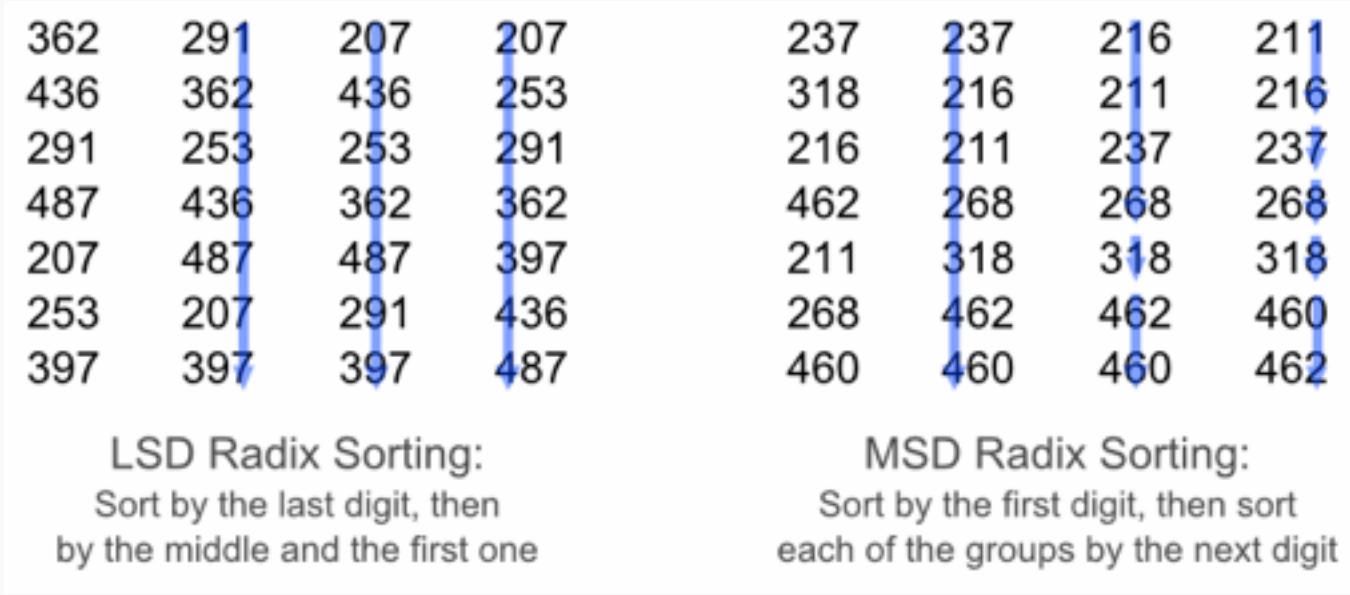
(1) if $|\mathcal{R}| < \sigma$ then return StringQuicksort($\mathcal{R}, \ell$)
(2) $\mathcal{R}_\perp \leftarrow \{S \in \mathcal{R} \mid |S| = \ell\}$; $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_\perp$
(3) $(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{\sigma-1}) \leftarrow$ CountingSort($\mathcal{R}, \ell$)
(4) for $i \leftarrow 0$ to $\sigma - 1$ do $\mathcal{R}_i \leftarrow$ MSDRadixSort($\mathcal{R}_i, \ell + 1$)
(5) return $\mathcal{R}_\perp \cdot \mathcal{R}_0 \cdot \mathcal{R}_1 \cdots \mathcal{R}_{\sigma-1}$

MSD raddix sort

MSD raddix sort

+ O(n*key_len) время работы*
+ O(n) памяти
+ нет сортировки частей размером 1
+ could be unstable
- рекурсивная реализация

MSD vs LSD


362 291 207 207
436 362 436 253
291 253 253 291
487 436 362 362
207 487 487 397
253 207 291 436
397 397 397 487
LSD Radix Sorting:
Sort by the last digit, then
by the middle and the first one
237 237 216 211
318 216 211 216
216 211 237 237
462 268 268 268
211 318 318 318
268 462 462 460
460 460 460 462
MSD Radix Sorting:
Sort by the first digit, then sort
each of the groups by the next digit

Как сортировать ключи разной длинны?

* расширить алфавит пустым символом
- сложность LSD ~ максимальной длине
+ MSD сортирует только непустуе суффиксы

Как сортировать длинные строки?

дорогое сравнение если строки отличаются только на конце

много итераций LSD на длинных ключах

MSD sort vs QuickSort

первый бит == 1 как опорный элемент

Binary QuickSort

разделим массив на две части

- с ведущим разрядом 0
- с ведущим разрядом 1ы

рекурсивно отсортируем обе части

Binary quicksort


```
quicksortB(int a[], int l, int r, int w)
{ int i = l, j = r;
   if (r <= l || w > bitsword) return;
   while (j != i)
   {
      while (digit(a[i], w) == 0 && (i < j)) i++;
      while (digit(a[j], w) == 1 && (j > i)) j--;
      exch(a[i], a[j]);
   }
   if (digit(a[r], w) == 0) j++;
   quicksortB(a, l, j-1, w+1);
   quicksortB(a, j, r, w+1);
}
```

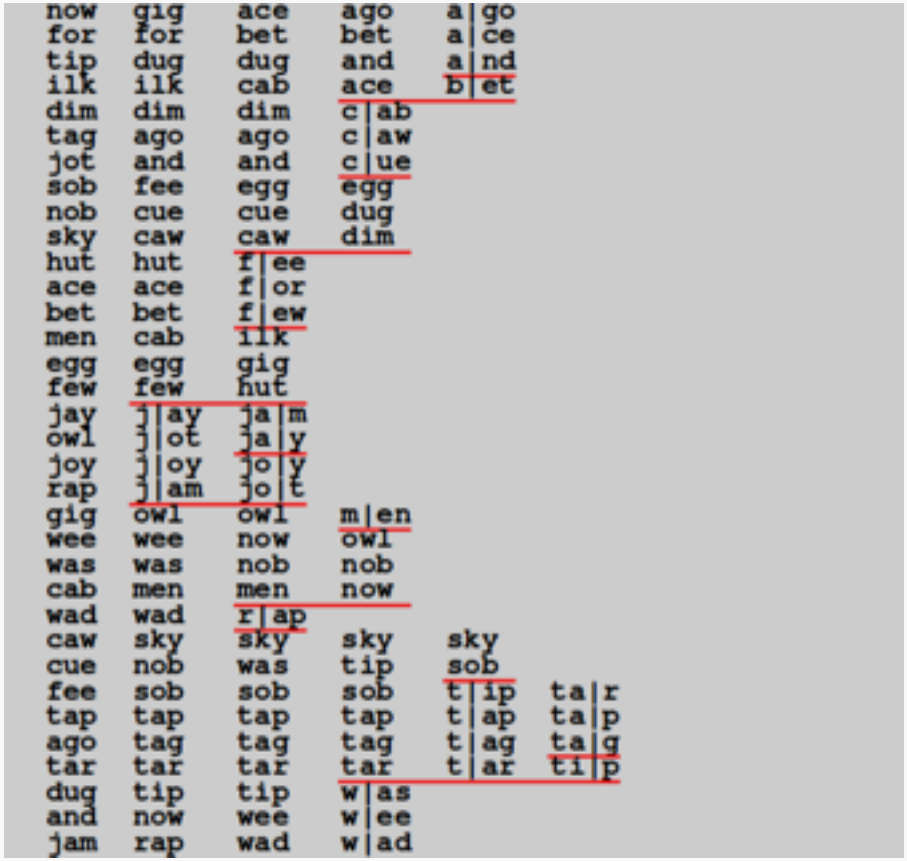
3-way split


actinian
jeffrey
coenobite
conelrad
secureness
cumin
chariness
bracteal
displease
millwright
repertoire
dourness
centesimal
fondler
interval
reversionary
dilatedly
inkblot
southeast
cankerous
circumflex
coenobite
conelrad
actinian
bracteal
secureness
dilatedly
inkblot
jeffrey
displease
millwright
repertoire
dourness
southeast
fondler
interval
reversionary
cumin
chariness
centesimal
cankerous
circumflex
actinian
bracteal
coenobite
conelrad
cumin
chariness
centesimal
cankerous
circumflex
millwright
repertoire
dourness
southeast
fondler
interval
reversionary
secureness
dilatedly
inkblot
jeffrey
displease

3-way raddix quick sort


```
#define ch(A) digit(A, D)
void quicksortX(Item a[], int l, int r, int D)
{
   int i, j, k, p, q; int v;
   if (r-l <= M) { insertion(a, l, r); return; }
   v = ch(a[r]); i = l-1; j = r; p = l-1; q = r;
   while (i < j)
   {
      while (ch(a[++i]) < v) ;
      while (v < ch(a[--j])) if (j == l) break;
      if (i > j) break;
      exch(a[i], a[j]);
      if (ch(a[i])==v) { p++; exch(a[p], a[i]); }
      if (v==ch(a[j])) { q--; exch(a[j], a[q]); }
   }
   if (p == q)
      { if (v != '\0') quicksortX(a, l, r, D+1);
        return; }
   if (ch(a[i]) < v) i++;
   for (k = l; k <= p; k++, j--) exch(a[k], a[j]);
   for (k = r; k >= q; k--, i++) exch(a[k], a[i]);
   quicksortX(a, l, j, D);
   if ((i == r) && (ch(a[i]) == v)) i++;
   if (v != '\0') quicksortX(a, j+1, i-1, D+1);
   quicksortX(a, i, r, D);
}
```

3-way raddix quick sort



Спасибо за внимание!