习题九

1.(1) 解：对此问题Euler公式的具体形式为：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+0.1(x_n+y_n)=0.1x_n+1.1y_n \quad (n=0,1,\cdots10)$$

由初值 $y_0=1$ 出发按上式计算，所得数值结果见下表：

（实际上，此问题精确解为 $y=-x-1+2e^x$）

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1.0000	1.1000	1.2200	1.3620	1.5282	1.7210	1.9431	2.1974	2.4872	2.8159	3.1875
$y(x_n)$	1.0000	1.1103	1.2428	1.3997	1.5836	1.7974	2.0442	2.3275	2.6511	3.0192	3.4366
$y(x_n)-y_n$	0.0000	0.0103	0.0228	0.0377	0.0554	0.0764	0.1011	0.1301	0.1639	0.2033	0.2491

由 $y(x_n)-y_n$ 可见，当 x 越接近1，Euler公式方法与准确值误差越来越大.

(2) 解：对此问题Euler公式具体形式为：

$$y_{n+1}=y_n+0.1\left(y_n-\frac{2x_n}{y_n}\right)=1.1y_n-\frac{0.2x_n}{y_n} \quad (n=0,1\cdots10).$$

由初值 $y_0=1$ 出发按上式计算

（实际上，此问题精确解为 $y=$ dsolve('Dy=y-2*x/y','y(0)=1','x')，$y=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$）

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1.000	1.1000	1.1918	1.2774	1.3582	1.4351	1.5090	1.5803	1.6498	1.7178	1.7848
$y(x_n)$	1.000	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6125	1.6733	1.7321
$y_n-y(x_n)$	0.000	0.0046	0.0086	0.0125	0.0166	0.0209	0.0258	0.0311	0.0373	0.0445	0.0527

由 $y_n-y(x_n)$ 可见，Euler方法与实际结果很相近，但随 x 趋于1，误差会增大.

2. 解：对此问题Euler公式具体形式为：

$$y_{n+1}=y_n+0.5\left(1-\frac{2x_ny_n}{1+x_n^2}\right) \quad (n=0,1\cdots4)$$

由初值 $y(0)=0$ 出发按上式计算：

x_n	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_n	0.00000	0.50000	0.80000	0.90000	0.98462
$y(x_n)$	0.00000	0.43333	0.66667	0.80769	0.93333
$y_n-y(x_n)$	0.00000	0.06667	0.13333	0.09231	0.05129

由 $y_n-y(x_n)$ 可初步预测，仅 x_n 从0变化到1，Euler方法误差先增大后减小.

3. (1) 解：由改进Euler公式有：

$$y_p = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(x_n + y_n) = 0.1x_n + 1.1y_n$$

$$y_q = y_n + 0.1(x_n + 0.1 + y_p) = 0.11x_n + 1.11y_n + 0.01$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_q) = \frac{1}{2}(0.21x_n + 2.21y_n + 0.01)$$

数值结果如下：

x_n	y_n	$y(x_n)$	$y(x_n) - y_n$
0	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	1.1100	1.1103	0.0003
0.2	~~1.3986~~ 1.2421	1.2428	0.0007
0.3	~~1.5818~~ 1.3985	1.3997	0.0012
0.4	~~1.7949~~ 1.5818	1.5836	0.0018
0.5	~~2.0409~~ 1.7949	1.7974	0.0025
0.6	~~2.3231~~ 2.0409	2.0442	0.0033
0.7	~~2.6456~~ 2.3231	2.3275	0.0044
0.8	2.6456	2.6511	0.0055
0.9	3.0124	3.0192	0.0068
1.0	3.4282	3.4366	0.0084

(2) 解：由改进Euler公式有：

$$y_p = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right)$$

$$y_q = y_n + hf(x_n + h, y_p) = y_n + 0.1\left(y_p - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_p}\right)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_q)$$

数值结果如下：

x_n	y_n	$y(x_n)$	$y_n - y(x_n)$
0	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	1.0959	1.0954	0.0005
0.2	1.1841	1.1832	0.0009
0.3	1.2662	1.2649	0.0013
0.4	1.3434	1.3416	0.0018
0.5	1.4164	1.4142	0.0022
0.6	1.4860	1.4832	0.0028
0.7	1.5525	1.5492	0.0033
0.8	1.6165	1.6125	0.0040
0.9	1.6782	1.6733	0.0049
1.0	1.7379	1.7321	0.0058

4. 解：(1) 用改进Euler方法：

$$y_p = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.5\left(1 - \frac{2x_n y_n}{1+x_n^2}\right)$$

$$y_q = y_n + hf(x_n + h, y_p) = y_n + 0.5\left(1 - \frac{2(x_n+0.5)y_p}{1+(x_n+0.5)^2}\right)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_q)$$

数值结果如下：

x_n	y_n	$y(x_n)$	$y(x_n)-y_n$
0	0.00000	0.00000	0.00000
0.5	0.400000	0.43333	0.03333
1.0	0.63500	0.66667	0.03167
1.5	0.78760	0.80769	0.02009
2.0	0.92103	0.93333	0.01230

与第2题相比，改进Euler方法明显精确度更高。

(2) 用4阶RK方法：

由公式(9-19)有：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{0.5}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = 1 - \frac{2x_n y_n}{1+x_n^2} \\ K_2 = 1 - \frac{2\left(x_n + \frac{0.5}{2}\right)\left(y_n + \frac{0.5}{2}K_1\right)}{1+\left(x_n+\frac{1}{4}\right)^2} \\ K_3 = 1 - \frac{2\left(x_n + \frac{1}{4}\right)\left(y_n + \frac{1}{4}K_2\right)}{1+\left(x_n+\frac{1}{4}\right)^2} \\ K_4 = 1 - \frac{2(x_n+0.5)\left(y_n + \frac{1}{2}K_3\right)}{1+\left(x_n+\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

计算结果如下：

x_n	y_n	$y(x_n)$	$y(x_n)-y_n$
0	0.00000	0.00000	0.00000
0.5	0.43322	0.43333	0.00011
1.0	0.66631	0.66667	0.00036
1.5	0.80742	0.80769	0.00027
2.0	0.93316	0.93333	0.00017

与2题相比，精度明显更高。

5. 解：令 $y=\int_0^x e^{t^2}dt$，则 $\begin{cases} y'=e^{x^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$；从而令 $h=0.1$.

由Euler公式有：

$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+0.1e^{x_n^2}$，又 $y_0=0$，则有：

$\cancel{y_1=y_0+}$

x_n	y_n	x_n	y_n
0	0.0000	0.6	0.6603
0.1	0.1000	0.7	0.8036
0.2	0.2010	0.8	0.9668
0.3	0.3051	0.9	1.1565
0.4	0.4145	1.0	1.3813
0.5	0.5319		

则由Euler公式，可得 $I(x)$ 在 $x=1$ 处近似为 1.3813

由改进Euler公式有：

$y_p=y_n+0.1e^{x_n^2}$

$y_q=y_n+0.1e^{(x_n+0.1)^2}$

$y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_q)=y_n+\frac{1}{20}\left(e^{x_n^2}+e^{(x_n+0.1)^2}\right)$.

则有：

x_n	y_n	x_n	y_n
0	0.0000	0.5	0.5461
0.1	0.1005	0.6	0.6819
0.2	0.2030	0.7	0.8352
0.3	0.3098	0.8	1.0116
0.4	0.4232	0.9	1.2189
		1.0	1.4672

由改进Euler公式，可得 $I(x)$ 在 $x=1$ 处近似为 1.4672

6. 解：中点公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+0.2K_2 \\ K_1=x_n+y_n \\ K_2=x_n+0.1+y_n+0.1K_1 \end{cases}$$

计算结果如下：

x_n	y_n	x_n	y_n
0	1.0000	0.8	2.6307
0.2	1.2400	1.0	3.4054
0.4	1.5768		
0.6	2.0317		

则由中点公式计算得 $y(x)$ 在 $x=1$ 处近似值为 3.4054

四阶RK公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{0.2}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=x_n+y_n \\ K_2=x_n+0.1+y_n+0.1K_1 \\ K_3=x_n+0.1+y_n+0.1K_2 \\ K_4=x_n+0.2+y_n+0.2K_3 \end{cases}$$

计算结果如下：

x_n	y_n	x_n	y_n
0	1.0000	0.6	2.0442
0.2	1.2428	0.8	2.6510
0.4	1.5836	1.0	3.4365

则由四阶RK公式有 $y(x)$ 在 $x=1$ 处的近似值为3.4365.

7. 解：四阶RK公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{0.1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=-y_n \\ K_2=-y_n-\frac{0.1}{2}K_1 \\ K_3=-y_n-\frac{0.1}{2}K_2 \\ K_4=-0.1K_3 \end{cases}$$

计算结果如下：

x_n	y_n	x_n	y_n
0	1.0000	0.6	0.6123
0.1	0.9215	0.7	0.5643
0.2	0.8492	0.8	0.5200
0.3	0.7825	0.9	0.4792
0.4	0.7211	1.0	0.4415
0.5	0.6645		

8. 解：由式(9-18)知：$C_1=0$. $C_2=1$,

则须满足 $\begin{cases} C_2a=\frac{1}{2} \\ C_2b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

则当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，式子为二阶公式

9. 解：根据题意，$x_n=nh=0.2n$，$f_n=-x_n y_n^2=-0.2ny_n^2$

由四阶Adams显式公式有：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3})$$
$$=y_n+\frac{0.2}{24}(-55x_n y_n^2+59x_{n-1}y_{n-1}^2-37x_{n-2}y_{n-2}^2+9x_{n-3}y_{n-3}^2)$$
$$=y_n+\frac{1}{120}(-11ny_n^2+11.8(n-1)y_{n-1}^2-7.4(n-2)y_{n-2}^2+1.8(n-3)y_{n-3}^2)$$

$(n=3,4,5)$

由四阶Adam隐式公式有：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2})$$
$$=y_n+\frac{1}{120}(-1.8(n+1)y_{n+1}^2-3.8ny_n^2+(n-1)y_{n-1}^2-0.2(n-2)y_{n-2}^2)$$

~~则 $y_{n+1}=$~~

则 $$y_{n+1}=\frac{60}{1.8(n+1)}\left(-1+\sqrt{1+4\times\frac{1.8(n+1)}{120}\times\left[y_n+\frac{1}{120}(-3.8ny_n^2+(n-1)y_{n-1}^2-0.2(n-2)y_{n-2}^2)\right]}\right)$$

利用精确解：$y=\frac{2}{1+x^2}$ 求出起步值后，按上面公式计算，结果如下：

x_n	Adam显式法		Adams隐式法	
	y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
0	2		2	
0.2	1.9230769		1.9230769	
0.4	1.7241379		1.7241379	
0.6	1.4705882		~~1.387811~~ 1.469512	~~8.27×10⁻²~~ 1.075×10^{-3}
0.8	1.232429	1.29×10^{-2}	1.218639	8.73×10^{-4}
1.0	1.002328	0.23×10^{-2}	0.999658	3.416×10^{-4}

10、证明：因为 $y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+\frac{h}{4}(4f_{n+1}-f_n+3f_{n-1})=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+\frac{h}{4}(4y'_{n+1}-y'_n+3y'_{n-1})$

则由截断误差定义知：

$$T_{n+1}=y(x_n+h)-\frac{1}{2}y(x_n)-\frac{1}{2}y(x_n-h)-\frac{h}{4}[4y'(x_n+h)-y'(x_n)+3y'(x_n-h)]$$

$$=y(x_n)+hy(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{3}h^3y'''(x_n)+o(h^4)-\frac{1}{2}y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n)-\frac{1}{4}h^2y''(x_n)$$

$$+\frac{1}{2\times3!}h^3y'''(x_n)+o(h^4)-\frac{h}{4}[4y'(x_n)+4hy'(x_n)+\frac{4h^2}{2!}y'''(x_n)+o(h^3)-y'(x_n)$$

$$-3hy''(x_n)+\frac{3h^2}{2!}y'''(x_n)+o(h^3)]$$

$$=-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)+o(h^4)$$

故为二阶方法.

且截断误差的主项为 $-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)+o(h^4)$.

11. 解：因为 $y_{n+1}=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2}y''_n+\frac{h^3}{6}y'''_n+\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}+\cdots$

$y_{n-1}=y_n-hy'_n+\frac{h^2}{2}y''_n-\frac{h^3}{6}y'''_n+\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}-\cdots$

$y'_{n+1}=y'_n+hy''_n+\frac{h^2}{2}y'''_n+\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\cdots$

$y'_{n-1}=y'_n-hy''_n+\frac{h^2}{2}y'''_n-\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\cdots$

所以：

$$y_n+\frac{h}{12}(5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1})$$

$$=y_n+\frac{h}{12}(5y'_{n+1}+8y'_n-y'_{n-1})$$

$$=y_n+\frac{h}{12}[5(y'_n+hy''_n+\frac{h^2}{2}y'''_n+\frac{h^3}{6}y_n^{(4)})+8y'_n-y'_n+hy''_n-\frac{h^2}{2}y'''_n+\frac{h^3}{6}y_n^{(4)}+\cdots]$$

$$=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2}y''_n+\frac{h^3}{6}y'''_n+\frac{h^4}{12}y_n^{(4)}+o(h^5)$$

比较泰勒公式系数可得，该二步公式具有三阶精度.

局部误差的主项为 $\left|\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}-\frac{h^4}{12}y_n^{(4)}+o(h^5)\right|=\frac{h^4}{24}y_n^{(4)}+o(h^5)$

14. 解：向后Euler方法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$ 用于 $y'=\lambda y$

有 $y_{n+1}=y_n+\lambda h\, y_{n+1}$

则 $y_{n+1}=\frac{1}{|1-\lambda h|}\cdot y_n$

$\bar{h}=\lambda h$

$\frac{1}{|1-\bar{h}|}<1 \iff |1-\bar{h}|>1$

它是以(1,0)为圆心，1为半径的单位圆外部，故绝对稳定性区间为 $-\infty<\lambda h<0$