习题七

1、解：由 $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]$

有 $f'(101) \approx \frac{1}{2}[-3\times 10.04988+4\times 10.09950-10.14889]$

$= 0.04974$

由 $f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]$

有 $f'(102) \approx \frac{1}{2}[-10.04988+10.14889]$

≈ 0.04951

2. 解：$h=0.1$ 时，取 $x_0=2.6$，$x_1=2.7$，$x_2=2.8$

则 $f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]$

$= \frac{1}{0.2}[-13.4637+16.4446]$

≈ 14.9045

$f''(x_1) \approx \frac{1}{h^2}[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)]$

$= \frac{1}{0.01}[13.4637-2\times 14.8797+16.4446]$

≈ 14.8900

$h=0.2$ 时．取 $x_0=2.5$　$x_1=2.7$　$x_2=2.9$

则 $f'(x_1) \approx \frac{1}{0.4}[-12.1825+18.1741]$

≈ 14.9790

$f''(x_1) \approx \frac{1}{0.04}[12.1825-2\times 14.8797+18.1741]$

≈ 14.9300

3. 取如下函数表：

x_i	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	0.510204	0.444444	0.390625

用二点公式，取 $x_0=0.4 \quad x_1=0.5$，

则 $f'(0.5) \approx \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h} = \dfrac{0.444444-0.510204}{0.1} \approx -0.657600$

截断误差 $|R_1'(x_1)| = \left|\dfrac{h}{2} f''(\xi_1)\right| = \left|\dfrac{0.1}{2} \times \dfrac{6}{(\xi_1+1)^4}\right| \le \dfrac{0.1}{2} \times \dfrac{6}{(1.4)^4} = 0.07809$

用三点公式，取 $x_0=0.4 \quad x_1=0.5 \quad x_2=0.6$

则 $f'(x_1) = f'(0.5) \approx \dfrac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]$

$= \dfrac{1}{0.2}\left[-0.510204+0.390625\right]$

≈ -0.597895

截断误差 $|R_2'(x_1)| = \left|-\dfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)\right| = \left|-\dfrac{0.01}{6} \times \dfrac{-24}{(\xi_1+1)^5}\right|$

$\le \dfrac{0.01}{6} \times \dfrac{24}{1.4^5}$

≈ 0.000743737

4. (1) 梯形公式：$\int_0^1 e^{-x}dx \approx \dfrac{1-0}{2}\left[e^0+e^{-1}\right] = 0.6839397$

Simpson公式：$\int_0^1 e^{-x}dx \approx \dfrac{1-0}{6}\left[e^0+4\times e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}\right] \approx 0.63233368$

梯形公式误差为 $|R_1| = \dfrac{1}{12}|f''(\xi)| = \dfrac{1}{12}|e^{-\xi}| \le \dfrac{1}{12} = 0.08333333$

Simpson公式误差为 $|R_2| = \dfrac{1}{2880}|f^{(4)}(\xi)| \le \dfrac{1}{2880} \approx 0.000347222$

(2) 梯形公式：$\int_{0.1}^{0.5} e^{\frac{1}{x}}dx \approx \dfrac{0.5-0.1}{2}\left[e^{\frac{1}{0.5}}+e^{\frac{1}{0.1}}\right] \approx 4406.77097$

Simpson公式：$\int_{0.1}^{0.5} e^{\frac{1}{x}}dx \approx \dfrac{0.5-0.1}{6}\left[e^{\frac{1}{0.1}}+4e^{\frac{1}{0.3}}+e^{\frac{1}{0.5}}\right] \approx 1476.398757$

梯形公式误差为 $|R_1| = \dfrac{0.4^3}{12}|f''(\xi)| = \dfrac{0.4^3}{12}\left|\dfrac{2e^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^3}+\dfrac{e^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^4}\right| \le \dfrac{0.4^3}{12}\left|\dfrac{2e^{\frac{1}{0.1}}}{0.1^3}+\dfrac{e^{\frac{1}{0.1}}}{0.1^4}\right|$

$\approx 1.40969 \times 10^6$

Simpson公式误差为 $|R_2| = \dfrac{0.4^3}{2880}|f^{(4)}(\xi)| \le \dfrac{0.4^3}{2880}|f^{(4)}(0.1)| \approx 1.2648086 \times 10^8$

5. 解：已知 $C_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)dt$

$n=3$时，有：

$C_0^{(3)}=\frac{1}{8}$，$C_1^{(3)}=\frac{3}{8}$，$C_2^{(3)}=\frac{3}{8}$，$C_3^{(3)}=\frac{1}{8}$.

6. 证明：一般求积公式对 $f(x)\equiv1$ 准确成立，

因此 $\sum_{k=0}^{n}A_k=\int_a^b dx=b-a$

即 $\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n}A_k=1$

7. 证明：由定理7.2，有

$R_1(f)=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

$=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$. $\xi\in(a,b)$.

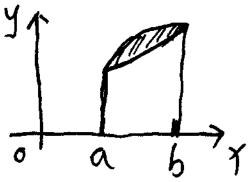
因为 $b-a>0$，$f''(\xi)<0$

则 $R_1(f)>0$

即 $\int_a^b f(x)dx>\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 恒成立.

即 梯形公式所得近似值小于准确值.

几何意义：如图



图中阴影部分为少算的部分.

8. 解：记 $I(f)=\int_0^1 f(x)dx$. $\hat{I}(f)=\frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$.

因为 $I(1)=1$，$\hat{I}(1)=1$

$I(x)=\frac{1}{2}$ $\hat{I}(x)=\frac{1}{2}$

$I(x^2)=\frac{1}{3}$ $\hat{I}(x^2)=\frac{1}{3}$

$I(x^3)=\frac{1}{4}$ $\hat{I}(x^3)=\frac{1}{4}$

$I(x^4)=\frac{1}{5}$ $\hat{I}(x^4)=\frac{37}{192}$，左端≠右端.

所以求积公式的代数精确度为3.

9、解：先画出函数表：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x_k)$	0.3679	0.5273	0.6977	0.8521	0.9608	1	0.9608	0.8521	0.6977	0.5273	0.3679

由复化梯形公式，有

$$I \approx \frac{0.2}{2}\left[0.3679+0.3679+2\left((0.5273+0.6977+0.8521+0.9608)\times 2+1\right)\right]$$

$$\approx 1.48874$$

截断误差 $|R_T(f)| = \frac{1}{6}\times 0.2^2 |f''(\xi)| \le \frac{0.2^2}{6}|f''(0)| \approx 0.013333$

由复化Simpson公式，有

$$I \approx \frac{0.2}{3}\left[0.3679\times 2+2(0.6977+0.9608+0.9608+0.6977)+4\times(0.5273+0.8521+1+0.8521+0.5273)\right]$$

$$\approx 1.49367$$

截断误差 $|R_S(f)| = \frac{2}{180}\times 0.2^4 |f^{(4)}(\xi)| \le \frac{2}{180}\times 0.2^4 |f^{(4)}(0)| \approx 0.00021333$

10.(1) 解：先画函数表：

x_i	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
$f(x_i)$	0	0.12307	0.23529	0.32877	0.40000	0.44944	0.48000	0.49558	0.50000

由复化梯形公式，有

$$I \approx \frac{1}{16}\left[0+0.5+2(0.12307+0.23529+0.32877+0.40000+0.44944+0.48000+0.4955\right.$$

$$\approx 0.34526875$$

由复化Simpson公式，有

$$I \approx \frac{1}{24}\left[0+0.5+2(0.23529+0.40000+0.48000)+4(0.12307+0.32877+0.44944+0.49558\right.$$

$$\approx 0.34658417$$

(2) 解：先画函数表

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x_i)$	0	0.14281	0.18021	0.18273	0.17329

由复化梯形公式，有：

$$I \approx \frac{1}{8}[0+0.17329+2\times(0.14281+0.18021+0.18273)]$$

$$\approx 0.148099$$

由复化Simpson公式，有：

$$I \approx \frac{1}{12}[0+0.17329+2\times 0.18021+4(0.14281+0.18273)]$$

$$\approx 0.152989$$

11. 解：考虑 e^{-x^2} 的Maclaurin级数展开：

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

可得，当 $x\in[0,1]$ 时，$e^{-x^2}\geq 1-x^2$，从而：

$$\frac{2}{3}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq 1$$

按照精度要求，绝对误差 $\leq \frac{1}{2}\times10^{-4}$.

用复化梯形公式：

设等分区间份数为 n，则截断误差为 $\frac{-1}{12n^2}f''(\xi)$. 其中 $f(\xi)=e^{-\xi^2}$，

$\xi\in[0,1]$. 计算可得 $f''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)$. $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|=2$.

令 $\left|-\frac{1}{12n^2}f''(\xi)\right|\leq\frac{1}{6n^2}\leq\frac{1}{2}\times10^{-4}$

解得 $n\geq\sqrt{\frac{10000}{3}}$。

故用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 时，满足精度要求的所需等分区间份数至少为58

用复化Simpson公式：

设等分区间份数为 n.

$$|R_s|=\left|\frac{-1}{180n^4}f^{(4)}(\xi)\right|\leq\frac{1}{15n^4}\leq\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

解得 $n\geq\sqrt[4]{\frac{4000}{3}}$，故取 $n=8$.

故用复化Simpson公式计算时，应取 $n\geq 8$

12. 用梯形公式的逐次分半计算公式：

区间分成了 $n=8=2^3$ 等份. 则 $m=3$, $h_0=1$

记 $h_1=\frac{1}{2}$ $h_2=\frac{1}{4}$ $h_3=\frac{1}{8}$

$T_1=\frac{1}{2}[1.000000+0.841471]\approx 0.9207355$

$T_2=\frac{1}{2}\times T_1+\frac{1}{2}f(0.5)\approx 0.93979325$

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left(f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\right)\approx 0.944513625$

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})\right]\approx 0.9456910625$

则 $I\approx T_8=0.9456910625$

误差：$|R(f,T_8)|\approx\frac{1}{3}|T_8-T_4|\approx 0.00039247917$

13. (1) 利用梯形公式的逐次分半算法，令 $f=\frac{1}{x+\cos x}$.

$T_1=\frac{\pi}{2}(f(0)+f(\pi))\approx 2.3042674 3$

$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{\pi}{2}f(\frac{\pi}{2})\approx 2.152133715$, $\frac{1}{3}|T_1-T_2|=0.0507112383$

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{\pi}{4}\times\left(f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{3}{4}\pi)\right)\approx 2.0785573$, $\frac{1}{3}|T_2-T_4|=0.0245254872$

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{\pi}{8}\times\left(f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{3}{8}\pi)+f(\frac{5}{8}\pi)+f(\frac{7}{8}\pi)\right)\approx 2.0527473164$,

$\frac{1}{3}|T_8-T_4|=0.0086033$

$T_{16}=\frac{1}{2}T_8+\frac{\pi}{16}\times\left(f(\frac{\pi}{16})+f(\frac{3\pi}{16})+f(\frac{5\pi}{16})+f(\frac{7\pi}{16})+f(\frac{9\pi}{16})+f(\frac{11\pi}{16})+f(\frac{13\pi}{16})+f(\frac{15\pi}{16})\right)$

≈ 2.045550697

$\frac{1}{3}|T_{16}-T_8|=0.002398873$

$T_{32}=\frac{1}{2}T_8+\frac{\pi}{32}\sum_{k=1}^{16}f((2k-1)\frac{\pi}{32})\approx 2.04368958 1$

$\frac{1}{3}|T_{32}-T_{16}|=6.20371\times 10^{-4}$

$T_{64}=\frac{1}{2}T_{32}+\frac{\pi}{64}\sum_{k=1}^{32}f((2k-1)\frac{\pi}{64})\approx 2.04322$

$\frac{1}{3}|T_{64}-T_{32}|=1.5652\times 10^{-4}$

则 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{x+\cos x}\approx 2.04322$

(2) 令 $f=\frac{1}{1+x^3}$

$T_1=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=0.75$

$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\approx 0.8194444$

$\frac{1}{3}|T_2-T_1|=0.023148$

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}(f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4}))\approx 0.831700244$

$\frac{1}{3}|T_4-T_2|=0.004085266$

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}(f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8}))\approx 0.8346696$

$\frac{1}{3}|T_8-T_4|=9.89792\times 10^{-4}$

$T_{16}=\frac{1}{2}T_8+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{8}f((2k-1)\frac{1}{16})\approx 0.83540454$

$\frac{1}{3}|T_{16}-T_8|=2.4497\times 10^{-4}<3\times 10^{-4}$

则 $\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}\approx 0.83540454$

14. 解：令 $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$

按式(7-33)和式(7-40)计算得：

$T_0^{(0)}=T_1=\frac{4-0}{2}(f(0)+f(4))\approx 5.217778487$

$T_0^{(1)}=T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{4-0}{2}f(2)\approx 4.775156253 4$

$T_1^{(0)}=\frac{4T_0^{(1)}-T_0^{(0)}}{3}\approx 4.6276155089$

$T_0^{(2)}=\frac{1}{2}T_2+\frac{4-0}{4}\times[f(1)+f(3)]\approx 4.931362592$

$T_1^{(1)}=\frac{4T_0^{(2)}-T_0^{(1)}}{3}\approx 4.98343137119$

$T_2^{(0)}=\frac{16T_1^{(1)}-T_1^{(0)}}{15}\approx 5.0071524287$

$T_0^{(3)}=\frac{1}{2}T_0^{(2)}+\frac{4-0}{8}[f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{2})+f(\frac{5}{2})+f(\frac{7}{2})]\approx 4.957844925$

$T_1^{(2)}=\frac{4T_0^{(3)}-T_0^{(2)}}{3}\approx 4.9666723694$

$T_2^{(1)}=\frac{16T_1^{(2)}-T_1^{(1)}}{15}\approx 4.96555510264$

$T_3^{(0)}=\frac{64T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{63}\approx 4.9648948276$

此时 $|T_3^{(0)}-T_2^{(0)}|=4.22576\times 10^{-2}>10^{-2}$，继续计算

$T_0^{(4)} = \frac{1}{2}T_0^{(3)} + \frac{4-0}{16}\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})+\cdots+f(\frac{15}{4})\right] \approx 4.96445034$

$T_1^{(3)} = \frac{4T_0^{(4)}-T_0^{(3)}}{3} \approx 4.966652144$

$T_2^{(2)} = \frac{16T_1^{(3)}-T_1^{(2)}}{15} \approx 4.9666507956$

$T_3^{(1)} = \frac{64T_2^{(2)}-T_2^{(1)}}{63} \approx 4.96666818756$

$T_4^{(0)} = \frac{128T_3^{(1)}-T_3^{(0)}}{127} \approx 4.966682151021$

此时: $|T_4^{(0)}-T_3^{(0)}| = 0.178732\times10^{-2} < 10^{-2}$

则 $I \approx 4.966682151021$

15. 解: 令 $f(x)=e^{-x^2}$

$T_0^{(0)}=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)] \approx 0.683939720586$

$T_0^{(1)}=\frac{1}{2}T_0^{(0)}+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) \approx 0.7313702518286$

$T_1^{(0)}=\frac{4T_0^{(1)}-T_0^{(0)}}{3} \approx 0.74718042891$

$T_0^{(2)}=\frac{1}{2}T_0^{(1)}+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})] \approx 0.7429840978$

$T_1^{(1)}=\frac{4T_0^{(2)}-T_0^{(1)}}{3} \approx 0.7468553797909$

$T_2^{(0)}=\frac{16T_1^{(1)}-T_1^{(0)}}{15} \approx 0.74683370984970 7$

此时 $|T_2^{(0)}-T_1^{(0)}| \approx 3.46719\times10^{-4} > 10^{-4}$

$T_0^{(3)}=\frac{1}{2}T_0^{(2)}+\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})] \approx 0.74586561484$

$T_1^{(2)}=\frac{4T_0^{(3)}-T_0^{(2)}}{3} \approx 0.746826120 53$

$T_2^{(1)}=\frac{16T_1^{(2)}-T_1^{(1)}}{15} \approx 0.7468241699098$

$T_3^{(0)}=\frac{64T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{63} \approx 0.746824018482$

此时 $|T_3^{(0)}-T_2^{(0)}| = 9.6913668\times10^{-6} < 10^{-4}$

则 $I \approx 0.746824018482$

16. (1) 记 $I(f)=\int_{-h}^{h} f(x)dx$ $\hat{I}(f)=A_1 f(-\frac{h}{2})+A_2 f(0)+A_3 f(\frac{h}{2})$

因为 $I(1)=\int_{-h}^{h} 1\,dx=2h$，$\hat{I}(1)=A_1+A_2+A_3$

$I(x)=\int_{-h}^{h} x\,dx=0$ $\hat{I}(x)=-A_1\cdot\frac{h}{2}+0+A_3\cdot\frac{h}{2}$

$I(x^2)=\int_{-h}^{h} x^2dx=\frac{2}{3}h^3$ $\hat{I}(x^2)=A_1\cdot\frac{h^2}{4}+A_3\cdot\frac{h^2}{4}$

令 $\begin{cases} 2h=A_1+A_2+A_3 \\ 0=-A_1\cdot\frac{h}{2}+A_3\cdot\frac{h}{2} \\ \frac{2}{3}h^3=A_1\cdot\frac{h^2}{4}+A_3\cdot\frac{h^2}{4} \end{cases}$

解得: $A_1=A_3=\frac{4}{3}h$. $A_2=-\frac{2}{3}h$.

此时代数精度最高.

(2) 记 $I(f)=\int_0^2 f(x)dx$ $\hat{I}(f)=f(x_1)+f(x_2)$

因为 $I(1)=\int_0^2 1\,dx=2$，$\hat{I}(1)=2$

$I(x)=\int_0^2 x\,dx=2$，$\hat{I}(x)=x_1+x_2$

$I(x^2)=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$，$\hat{I}(x^2)=x_1^2+x_2^2$

$I(x^3)=\int_0^2 x^3dx=4$，$\hat{I}(x^3)=x_1^3+x_2^3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2=2 \\ 2=x_1+x_2 \\ \frac{8}{3}=x_1^2+x_2^2 \\ 4=x_1^3+x_2^3 \end{cases}$

解得 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$ $x_2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

或 $x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x_2=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 记 $I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx$，$\hat{I}(f)=A_1 f(x_1)+A_2 f(0)+f(1)$

因为 $I(1)=\int_{-1}^{1} 1\,dx=2$ $\hat{I}(1)=A_1+A_2+1$

$I(x)=0$ $\hat{I}(x)=A_1x_1+0+1$

$I(x^2)=\frac{2}{3}$ $\hat{I}(x^2)=A_1x_1^2+0+1$

则令 $\begin{cases} 2=A_1+A_2+1 \\ 0=A_1x_1+0+1 \\ \frac{2}{3}=A_1x_1^2+0+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A_1=-3 \\ A_2=4 \\ x_1=\frac{1}{3} \end{cases}$

17. 我们知道在$[-1,1]$上的两点Gauss型求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

对于$[a,b]$区间上的定积分，构造变换

$$x(t) = \frac{b-a}{2}\cdot t + \frac{b+a}{2} \qquad t\in[-1,1]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

令$h=b-a$，则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f\left(a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(a+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)\right]$$

证毕.

截断误差为：

$$|R(f)| = \left|\frac{2^5(2!)^4}{5\cdot(4!)^3} f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{1}{135}\left|f^{(4)}(\xi)\right|,\quad \xi\in[a,b]$$

18、令题中公式对于$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$准确成立

则：
$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \frac{2}{3} \\ x_0A_0 + x_1A_1 = \frac{2}{5} \\ x_0^2A_0 + x_1^2A_1 = \frac{2}{7} \\ x_0^3A_0 + x_1^3A_1 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{9} + \frac{2\sqrt{70}}{63} \\ x_1 = \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{70}}{63} \\ A_0 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{70}}{150} \\ A_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{70}}{150} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_0 = \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{70}}{63} \\ x_1 = \frac{5}{9} + \frac{2\sqrt{70}}{63} \\ A_0 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{70}}{150} \\ A_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{70}}{150} \end{cases}$$

总之：$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx \left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{70}}{150}\right) f\left(\frac{5}{9}-\frac{2\sqrt{70}}{63}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{70}}{150}\right) f\left(\frac{5}{9}+\frac{2\sqrt{70}}{63}\right)$

为Gauss型求积公式.

19. (1) 令 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$; $\hat{I}(f)=\frac{2}{3}[f(-1)+f(0)+f(1)]$

则: $I(1)=2=\hat{I}(f)=2$

$I(x)=0=\hat{I}(f)=0$

$I(x^2)=\frac{2}{3}\neq\hat{I}(f)=\frac{4}{3}$

因此其代数精确度为 $1\neq 2\times 3-1=5$

则不是Gauss型求积公式.

(2) 令 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$, $\hat{I}(f)=\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$

则 $I(1)=\int_{-1}^{1}1dx=2$ $\hat{I}(1)=\frac{1}{3}(1+4+1)=2$

$I(x)=\int_{-1}^{1}xdx=0$ $\hat{I}(x)=\frac{1}{3}(-1+0+1)=0$

$I(x^2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$ $\hat{I}(x)=\frac{1}{3}(1+0+1)=\frac{2}{3}$

$I(x^3)=0$ $\hat{I}(x^3)=\frac{1}{3}(-1+0+1)=0$

$I(x^4)=\frac{2}{5}$ $\hat{I}(x^4)=\frac{1}{3}(1+0+1)=\frac{2}{3}\neq\frac{2}{5}$

则其代数精确度为 $3\neq 2\times 3-1=5$

则不是Gauss型求积公式.

(3) 令 $I(f)=\int_{0}^{2}f(x)dx$. $\hat{I}(f)=\frac{1}{9}[5f(1-\sqrt{0.6})+8f(1)+5f(1+\sqrt{0.6})]$

则 $I(1)=2$ $\hat{I}(1)=\frac{1}{9}(5+8+5)=2$

$I(x)=2$ $\hat{I}(x)=\frac{1}{9}[5\times(1-\sqrt{0.6})+8+5\times(1+\sqrt{0.6})]=2$

$I(x^2)=\frac{8}{3}$ $\hat{I}(x^2)=\frac{1}{9}[5\times(1-\sqrt{0.6})^2+8+5\times(1+\sqrt{0.6})^2]=\frac{8}{3}$

$I(x^3)=4$ $\hat{I}(x^3)=\frac{1}{9}[5\times(1-\sqrt{0.6})^3+8+5\times(1+\sqrt{0.6})^3]=4$

$I(x^4)=\frac{32}{5}$ $\hat{I}(x^4)=6.4$

$I(x^5)=\frac{32}{3}$ $\hat{I}(x^5)=\frac{32}{3}$

$I(x^6)=\frac{128}{7}$ $\hat{I}(x^6)\approx 18.24\neq\frac{128}{7}$

则其代数精确度为 $5=2\times 3-1$

则是Gauss型求积公式.

20、证明：

因为求积公式代数精确度不小于$n-1$

则对$f(x)=1, x, x^2 \cdots x^{n-1}$都精确成立.

则有：

$$\begin{cases} A_1+A_2+\cdots+A_n=b-a \\ A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n=\frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ \vdots \\ A_1x_1^{n-1}+A_2x_2^{n-1}+\cdots+A_nx_n^{n-1}=\frac{1}{n}(b^n-a^n) \end{cases}$$

对于给定的x_k, $k=1,\cdots n$.

线性方程组有唯一解.

将$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$代入. 其中$k=1,2\cdots n$.

满足方程组的条件.

则必有$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$ 成立.

证毕

21. 三点公式：

$$I=\int_0^1 \frac{2\sin(2x-1)}{3-2x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2\sin t}{2-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}\frac{2\sin\sqrt{\frac{3}{5}}}{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}+\frac{8}{9}\cdot\frac{2\sin 0}{2-0}+\frac{5}{9}\cdot\frac{2\sin(-\sqrt{\frac{3}{5}})}{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}\right]$$

$$\approx 0.177051$$

五点公式：

$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2\sin t}{2-t}dt$, 令$f(t)=\frac{2\sin t}{2-t}$,

$$=\frac{1}{2}\Big[0.23692689\cdot(f(0.90617985)+f(-0.90617985))$$
$$+0.47862867\cdot(f(0.53846931)+f(-0.53846931))$$
$$+0.56888889\cdot f(0)\Big]$$

$$\approx 0.1775771949$$

22.解：构造 n 点的 Gauss-Chebyshev 求积公式.

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} P_n\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$$

23 解：用 $n=4$ 的 Gauss-Laguerre 求积公式：

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \sum_{k=1}^{4} A_k e^{x_k} e^{-x_k^2}$$

$$\approx 0.83273912\cdot e^{-0.32254769^2}+2.04810244e^{-1.74576110^2}$$

$$+3.63114631e^{-4.53662030^2}+6.48714508e^{-9.39507091^2}$$

$$\approx 0.8476788322$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}-0.8476788322\approx 0.03854809325$$

即结果偏小约 0.03854809325

用 $n=4$ 的 Gauss-Hermite 求积公式

因积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛，e^{-x^2} 为偶函数，

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$

查表得：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx \approx (0.80491409\times 1\times 2+0.08131284\times 1\times 2)\times\frac{1}{2}$$

$$\approx 0.88622693$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}-0.88622693\approx 4.54724\times 10^{-9}$$

即结果与真实值基本相同

24. 解：$\alpha=\frac{4\times 20}{15^2\times 3\pi}\sin^2\left(\frac{15}{2}\cdot\frac{3\pi}{20}\right)\approx 0.00552478857$

$\beta=\frac{2\times 20}{15^2\times 3\pi}\sin\left(\frac{15}{2}\cdot\frac{3\pi}{20}\right)\approx -0.007218484136$

$I\approx -\frac{1}{15}\sin 0+\beta\sin\left(15\times\frac{3\pi}{40}\right)+\frac{1}{15}\sin\left(15\times\frac{3\pi}{2}\right)-\beta\sin\left(15\times\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3\pi}{40}\right)\right)$

$+\alpha\sum_{i=1}^{9}\sin\left(15\times\frac{3\pi}{20}i\right)$

≈ 0.0666666667

与真实值 $\frac{1}{15}$ 相同.

25. 略

26. (1) 用复化梯形公式. $h=\frac{1.5-1.0}{4}=\frac{1}{8}$，$k=\frac{1.6-1.2}{4}=\frac{1}{10}$.

$I\approx T_{4,4}(f)=\frac{hk}{4}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{m}t_{ij}f(x_i,y_j)$

$=\frac{1}{320}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}t_{ij}\ln\left[1.0+\frac{1}{8}i+2\left(1.2+\frac{1}{10}j\right)\right]$

$\approx 0.27923154 3$

事实上准确值 $I=\int_{1.0}^{1.5}dx\int_{1.2}^{1.6}\ln(x+2y)dy=0.27928885194\cdots\cdots$

可见近似值 $T_{4,4}$ 已有4位有效数字.

用复化Simpson公式.

$I\approx S_{4,4}(f)=\frac{1}{720}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}S_{ij}f(x_i,y_j)$

$=\frac{1}{720}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}S_{ij}\ln\left[1.0+\frac{1}{8}i+2\left(1.2+\frac{1}{10}j\right)\right]$

$\approx 0.2792888 0437$

可见近似值 $S_{4,4}$ 已有7位有效数字.

(2) $h=\frac{0.5-0}{4}=\frac{1}{8}$ $k=\frac{1.5-1}{4}=\frac{1}{8}$.

I的精确值为 0.1943470619 16333

用复化梯形公式

$I\approx T_{4,4}(f)=\frac{1}{256}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}t_{ij}\frac{1}{1+\frac{1}{8}i\cdot\left(1+\frac{1}{8}j\right)}\approx 0.1948705147$

$T_{4,4}(f)$ 已有3位有效数字.

用复化Simpson公式.

$$I \approx S_{4,4}(f) = \frac{1}{576} \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{4} S_{ij} \frac{1}{1+\frac{1}{8}i(1+\frac{1}{8}j)} \approx 0.1943537569$$

已具有4位有效数字.