

北京理工大学《数值分析》

2009-2010 学年第二学期期末试卷 (A) 卷 (2008 级计算机学院)

课程编号: 12000044 北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2008 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

注意: ① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上, 计算题答在答题纸上。

一、填空题 (每空 2 分, 共 30 分)

1. 设函数 $f(x)$ 区间 $[a, b]$ 内有二阶连续导数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 当 _____ 时, 用双点弦截法产生的解序列收敛到方程 $f(x)=0$ 的根。
2. n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为 _____ 次, n 个求积节点的高斯求积公式的代数精度为 _____。
3. 已知 $a=3.201$, $b=0.57$ 是经过四舍五入后得到的近似值, 则 $a \times b$ 有 _____ 位有效数字, $a+b$ 有 _____ 位有效数字。
4. 当 $x=1, -1, 2$ 时, 对应的函数值分别为 $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(4)=10$, 则 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式是 _____。
5. 设有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_1 =$ _____。
6. 要使 $\sqrt{20} = 4.472135 \dots$ 的近似值的相对误差小于 0.2%, 至少要取 _____ 位有效数字。
7. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 和常数项 N , 有迭代公式 $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + N$ 产生的向量序列 $\{X^{(k)}\}$ 收敛的充分必要条件是 _____。
8. 已知 $n=3$ 时的牛顿-科特斯系数 $c_0^{(3)} = \frac{1}{8}$, $c_1^{(3)} = \frac{3}{8}$, 则 $c_2^{(4)} =$ _____, $c_3^{(3)} =$ _____。
9. 三次样条函数是在各个子区间上的 _____ 次多项式。
10. 用松弛法 ($\omega = 0.9$) 解方程组
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_2 - 3x_3 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$
 的迭代公式是

$f(x_i)$	-4	-1	0	3
----------	----	----	---	---

2. 设 a 为常数, 建立计算 \sqrt{a} 的牛顿迭代公式, 并求 $\sqrt{115}$ 的近似值, 要求计算结果保留小数点后 5 位。(6 分)

3. 用三点高斯求积公式求 $I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx$, 计算结果保留小数点后 6 位(6 分)

n	$\pm t_i$	w_i
2	0.577 350 269 2	1
3	0 0.774 596 692	0.888 888 888 9 0.555 555 555 6

4. 用高斯消元法解下面的线性方程组。(6 分)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5. 用高斯赛德尔方法求下列方程组的解, 计算结果保留 4 位小数。(6 分)

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上具有四阶连续导数, 试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$, 使其满足如下数据表值, 并给出截断误差估计公式。(10 分)

x	y	y'
0	0	
1	1	3
2	1	

7. 用 Euler 法和改进的欧拉法求解下述初值问题, 取 $h=0.1$, 计算到 $x=0.5$, 要求计算结果保留小数点后 6 位。(10 分)

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. 用复化梯形公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, 若要使截断误差不超过 10^{-2} , 则应在区

间 $[0, 1]$ 上分成多少等份? 并计算积分的近似值。(10 分)

课程编号: 12000044 北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2008 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

注意: ① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上, 计算题答在答题纸上。

一、填空题(每空 2 分, 共 30 分)

1. 设函数 $f(x)$ 区间 $[a, b]$ 内有二阶连续导数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 当 $f'(x) \neq 0$ 时, 用双点弦截法产生的解序列收敛到方程 $f(x)=0$ 的根。
2. n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为_____次, n 个求积节点的高斯求积公式的代数精度为_____。
3. 已知 $a=3.201$, $b=0.57$ 是经过四舍五入后得到的近似值, 则 $a \times b$ 有_____2_____位有效数字, $a+b$ 有_____2_____位有效数字。

解析:

$$\eta(ab) = \eta(a) + \eta(b) = \frac{0.0005}{3.201} + \frac{0.005}{0.57} \approx 0.009,$$

$$\varepsilon(ab) = \eta(ab) \times ab = 0.009 \times 3.201 \times 0.57 \approx 0.016 < 0.05$$

$$\varepsilon(a+b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) = 0.0005 + 0.005 = 0.0055 < 0.05$$

4. 当 $x=1, -1, 2$ 时, 对应的函数值分别为 $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(4)=10$, 则 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式是_____。

解析:

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{(x-0)(x-4)}{(-1-0)(-1-4)} \times 0 + \frac{(x+1)(x-4)}{(0+1)(0-4)} \times 2 + \frac{(x+1)(x-0)}{(4+1)(4-0)} \times 10 \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) + \frac{1}{2}x(x+1) \end{aligned}$$

5. 设有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_1 =$ _____。

解析: $\|A\|_1 = \max\{2+0, 3+4\} = 7$

6. 要使 $\sqrt{20} = 4.472135 \dots$ 的近似值的相对误差小于 0.2%, 至少要取_____3_____位有效数

字。

解析: $\frac{\varepsilon(\sqrt{20})}{\sqrt{20}} < 0.2\%, \varepsilon(\sqrt{20}) < \sqrt{20} \times 0.2\% \approx 0.009$

$$0.005 < 0.009$$

7. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 和常数项 N , 有迭代公式 $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + N$ 产生的向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛的充分必要条件是 $\rho(M) < 1$ 。

8. 已知 $n=3$ 时的牛顿-科特斯系数 $c_0^{(3)} = \frac{1}{8}, c_1^{(3)} = \frac{3}{8}$, 则 $c_2^{(4)} =$ _____ ,

$$c_3^{(3)} = \text{_____}。$$

9. 三次样条函数是在各个子区间上的 3 次多项式。

10. 用松弛法 ($\omega = 0.9$) 解方程组 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_2 - 3x_3 + 10x_3 = 3 \end{cases}$ 的迭代公式是

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_1^k + \frac{0.9}{5}(-12 - 5x_1^k - 2x_2^k - x_3^k) \\ x_2^{k+1} = x_2^k + \frac{0.9}{4}(20 + x_1^{k+1} - 4x_2^k - 2x_3^k) \\ x_3^{k+1} = x_3^k + \frac{0.9}{10}(3 - 2x_1^{k+1} + 3x_2^{k+1} - 10x_3^k) \end{cases}$$

_____。

11. 用牛顿下山法求解方程 $\frac{x^3}{3} - x = 0$ 根的迭代公式是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\lambda(x_n^2 - 1)}{x_n^3 - 3x_n}$$

_____ , 下山条件是 $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ 。

解析: 牛顿迭代公式: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

牛顿下山法迭代公式: $x_{n+1} = x_n - \lambda f'(x_n)/f(x_n)$

$$f'(x) = x^2 - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \lambda(x_n^3/3 - x_n)/(x_n^2 - 1) = x_n - \lambda x_n(x_n^3 - 3)/(3x_n^2 - 3)$$

二、选择填空 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 已知数 $x_1=721$ $x_2=0.721$ $x_3=0.700$ $x_4=7*10^{-2}$ 是由四舍五入得到的, 则它们的有效数字的位数应分别为 (A)。

- A. 3, 3, 3, 1
B. 3, 3, 3, 3
C. 3, 3, 1, 1
D. 3, 3, 3, 2

2. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间 $[1.3, 1.6]$ 内的一个根, 把方程改写成下列形式, 并建立相应的迭代公式, 迭代公式不收敛的是 (A, D)。

- A. $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n - 1}}$
B. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$
C. $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}$
D. $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n + 1}$

解析: A: $|\varphi'(1.3)| \approx 3.1$ $|\varphi'(1.6)| \approx 1.1$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{-2\sqrt{(x-1)^3}}$$

B: $|\varphi'(1.3)| \approx 0.9$

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

C:

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

D:

$$\varphi'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)+x^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4x^3+3x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$$

3. 线性方程组 $AX=B$ 能用高斯消元法求解的充分必要条件是 (D)。

- A. A 为对称矩阵
B. A 为实矩阵
C. $|A| \neq 0$
D. A 的各阶顺序主子式不为零

4. 用选主元的方法解线性方程组 $AX=B$, 是为了 (B)。

- A. 提高计算速度
B. 减少舍入误差
C. 减少相对误差
D. 方便计算

5. 下列说法不正确的是 (B)。

- A. 二分法不能用于求函数 $f(x)=0$ 的复根。
B. 方程求根的迭代解法的迭代函数为 $\varphi(x)$, 则迭代收敛的充分条件是 $\varphi(x)<1$ 。
C. 用高斯消元法求解线性方程组 $AX=B$ 时, 在没有舍入误差的情况下得到的都是精确解。
D. 如果插值节点相同, 在满足插值条件下用不同方法建立的插值公式是等价的。

三、计算题（共 60 分）

1. 已知单调连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据，若用插值法计算， x 约为多少时 $f(x)=0.5$ ，要求计算结果保留小数点后 4 位。（6 分）

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	-4	-1	0	3

解答：

用反插值法：

$$\begin{aligned}
 l(y) &= \frac{(y+1)(y-0)(y-3)}{(-4+1)(-4)(-4-3)} \times (-1) + \frac{(y+4)(y-0)(y-3)}{(-1+4)(-1)(-1-3)} \times 0 \\
 &+ \frac{(y+4)(y+1)(y-3)}{(0+4)(0+1)(0-3)} \times 2 + \frac{(y+4)(y+1)(y-0)}{(3+4)(3+1)3} \times 3 \\
 &= -\frac{1}{84}y(y+1)(y-3) - \frac{1}{6}(y+4)(y+1)(y-3) + \frac{1}{28}y(y+4)(y+1)
 \end{aligned}$$

$$l(0.5)=2.91667$$

2. 设 a 为常数，建立计算 \sqrt{a} 的牛顿迭代公式，并求 $\sqrt{115}$ 的近似值，要求计算结果保留小数点后 5 位。（6 分）

解答：

令 $p(x)=x^2-a$ ，则 $p(x)=0$ 的解即为 \sqrt{a} 。

其牛顿迭代公式为：

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - f(x_n)/f'(x_n) \\
 &= x_n - (x_n^2 - a)/2x_n \\
 &= \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)
 \end{aligned}$$

取 $a=115$ ， $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 115/x_n)$

$f'(x)=2x>0$ 取 $x_0=11$

$$x_1 = \frac{1}{2}(11 + 115/11) = 10.72727$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(10.72727 + 115/10.72727) = 10.72381$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(10.72381 + 115/10.72381) = 10.72381$$

3. 用三点高斯求积公式求 $I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx$, 计算结果保留小数点后 6 位 (6 分)

n	$\pm t_i$	w_i
2	0.577 350 269 2	1
3	0 0.774 596 692	0.888 888 888 9 0.555 555 555 6

4. 用高斯消元法解下面的线性方程组。(6 分)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解答:

$l_{11}=1, u_{11}=1$	$u_{12}=1$	$u_{13}=-1$	$z_1=1$
$l_{21}=1/1=1$	$l_{22}=1, u_{22}=2-1 \times 1=1$	$u_{23}=-2-1 \times (-1)=-1$	$z_2=0-1 \times 1=-1$
$l_{31}=-2/1=-2$	$l_{32}=1-(-2) \times 1=3$	$l_{33}=1, u_{33}=1-(-2) \times (-1)-3 \times (-1)=2$	$z_3=1-(-2) \times 1-3 \times (-1)=6$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{解得:} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

5. 用高斯赛德尔方法求下列方程组的解, 计算结果保留 4 位小数。(6 分)

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

解答:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{10}(3 + 2x_2^k + x_3^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{10}(15 + 2x_1^{k+1} + x_3^k) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{5}(10 + x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{k+1} = 0.3 + 0.2x_2^k + 0.1x_3^k \\ x_2^{k+1} = 1.5 + 0.2x_1^{k+1} + 0.1x_3^k \\ x_3^{k+1} = 2 + 0.2x_1^{k+1} + 0.4x_2^{k+1} \end{cases}$$

取 $x_0=(0,0,0)$

$x_1=(0.3, 1.56, 2.684)$

$x_2=(0.8804, 1.9445, 2.9539)$

$x_3=(0.9843,1.9923,2.9938)$
 $x_4=(0.9978,1.9989,2.9991)$
 $x_5=(0.9997,1.9999,2.9999)$
 $x_6=(1.0000,2.0000,3.0000)$
 $x_7=(1.0000,2.0000,3.0000)$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上具有四阶连续导数, 试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$, 使其满足如下数据表值, 并给出截断误差估计公式。(10 分)

x	y	y'
0	0	
1	1	3
2	1	

解答:

构造差商表:

x	y	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0			
1	1	$(1-0)/(1-0)=1$		
1	1	$y'/1!=3$	$(3-1)/(1-0)=2$	
2	1	$(1-1)/(2-1)=0$	$(0-3)/(2-1)=-3$	$(-3-2)/(2-0)=-2.5$

$$P_3(x)=0+x \times 1+x(x-1) \times 2+x(x-1)^2 \times (-2.5)=-2.5x^3-3x^2-3.5x$$

$$\text{截断误差公式: } R(x)=f'(\xi)/4! \times x \times (x-1)^2 (x-2) \quad \xi \in [0,2]$$

7. 用 Euler 法和改进的欧拉法求解下述初值问题, 取 $h=0.1$, 计算到 $x=0.5$, 要求计算结果保留小数点后 6 位。(10 分)

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. 用复化梯形公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, 若要使截断误差不超过 10^{-2} , 则应在区间 $[0, 1]$ 上分成多少等份? 并计算积分的近似值。(10 分)