北京理工大学《数值分析》

2010-2011 学年第一学期期末试卷（A）卷（2009 级计算机学院）

班级____________学号____________姓名 ____________成绩 ____________

注意：① 答题方式为闭卷。
② 可以使用计算器。
③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、 **填空题** （20×2′）

1. 设 x=0.231 是精确值 x^*=0.229 的近似值，则 x 有____________位有效数字。

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，$\|A\|_\infty$=________，$\|X\|_\infty$=________，

   $\|AX\|_\infty \leqslant$________(注意：不计算 $\|AX\|_\infty$的值）。

3. 非线性方程 $f(x)=0$ 的迭代函数 $x=\varphi(x)$在有解区间满足__________，则使用该迭代函数的迭代解法一定是局部收敛的。

4. 若 $f(x)=x^7-x^3+1$，则 $f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7]$=________________，$f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8]$=____________。

5. 区间$[a,b]$上的三次样条插值函数 $S(x)$在$[a,b]$上具有直到______阶的连续导数。

6. 当插值节点为等距分布时，若所求节点靠近首节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的________________（填写前插公式、后插公式或中心差分公式），若所求节点靠近尾节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的（填写前插公式、后插公式或中心差分公式）；如果要估计结果的舍入误差，应该选用插值公式中的______________________。

7. 拉格朗日插值公式中 $f(x_i)$的系数 $a_i(x)$的特点是：$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)=$____________；所以当系数 $a_i(x)$满足________________，计算时不会放大 $f(x_i)$的误差。

8. 要使$\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差小于 0.1%，至少要取________位有效数字。

9. 对任意初始向量 $X^{(0)}$及任意向量 g，线性方程组的迭代公式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g(k=0,1,\cdots)$收敛于方程组的精确解 x^*的充分必要条件是__________________。

10. 由下列数据所确定的插值多项式的次数最高是__________。

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5

$y=f(x)$	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

11. 牛顿下山法的下山条件为____________________。

12. 线性方程组的松弛迭代法是通过逐渐减少残差 r_i (i=0,1,…,n)来实现的，其中的残差 r_i=__________________________________，(i=0,1,…,n)。

13. 在非线性方程 $f(x)$=0 使用各种切线法迭代求解时，若在迭代区间存在唯一解，且 $f(x)$ 的二阶导数不变号，则初始点 x_0 的选取依据为__________________________。

14. 使用迭代计算的步骤为建立迭代函数、______________、迭代计算。

二、**判断题**(在题目后的(　　)中填上“√”或“×”。)　　　　（10×1′）

1、 若 A 是 n 阶非奇异矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 一定可以使用高斯消元法求解。(　　)

2、 解非线性方程 $f(x)$=0 的牛顿迭代法在单根 x*附近是平方收敛的。(　　)

3、 若 A 为 n 阶方阵，且其元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

则解线性方程组 $AX=b$ 的高斯——塞德尔迭代法一定收敛。(　　)

4、 样条插值一种分段插值。(　　)

5、 如果插值结点相同，在满足相同插值条件下所有的插值多项式是等价的。(　　)

6、 从实际问题的精确解到实际的计算结果间的误差有模型误差、观测误差、截断误差及舍入误差。(　　)

7、 解线性方程组的的平方根直接解法适用于任何线性方程组 $AX=b$。(　　)

8、 迭代解法的舍入误差估计要从第一步迭代计算的舍入误差开始估计,直到最后一步迭代计算的舍入误差。(　　)

9、 数值计算中的总误差如果只考虑截断误差和舍入误差，则误差的最佳分配原则是截断误差＝舍入误差。(　　)

10、插值计算中避免外插是为了减少舍入误差。(　　)

三、**计算题**　　　　（5×8′+10′）

1、用列主元高斯消元法解线性方程组。(计算时小数点后保留 5 位)。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

2、用牛顿——埃尔米特插值法求满足下列表中插值条件的四次插值多项式 $P_4(x)$，并写出其截断误差的表达式(设 $f(x)$在插值区间上具有直到五阶连续导数)。

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	3
$f'(x_i)$		1	5

3、对下面的线性方程组变化为等价的线性方程组，使之应用雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法均收敛，写出变化后的线性方程组及雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法的迭代公式，并简单说明收敛的理由。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

4、设 $y=\sin x$，当取 x_0=1.74, x_1=1.76, x_2=1.78 建立拉格朗日插值公式计算 x=1.75 的函数值时，函数值 y_0, y_1, y_2 应取几位小数?

5、已知单调连续函数 $y=f(x)$的如下数据：

x_i	-0.11	0.00	1.50	1.80
$f(x_i)$	-1.23	-0.10	1.17	1.58

若用插值法计算，x 约为多少时 $f(x)$=1。(计算时小数点后保留 5 位)。

6、应用牛顿法于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}=0$，导出求$\sqrt{a}$的迭代公式，并用此公式求$\sqrt{115}$的值。(计算时小数点后保留 4 位)。

课程编号：12000044　北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2009 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级__________学号__________姓名__________成绩__________

注意：① 答题方式为闭卷。
② 可以使用计算器。
③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

四、填空题（20×2′）

15. 设 x=0.231 是精确值 x^*=0.229 的近似值，则 x 有__2__位有效数字。

16. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，$\|A\|_\infty$=__5__，$\|X\|_\infty$=__3__，$\|AX\|_\infty \leq$__15__。

17. 非线性方程 $f(x)=0$ 的迭代函数 $x=\varphi(x)$在有解区间满足__$|\varphi'(x)|<1$__，则使用该迭代函数的迭代解法一定是局部收敛的。

18. 若 $f(x)=x^7-x^3+1$，则 $f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7]$=__1__，$f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8]$=__0__。

19. 区间$[a,b]$上的三次样条插值函数 $S(x)$在$[a,b]$上具有直到__2__阶的连续导数。

20. 当插值节点为等距分布时，若所求节点靠近首节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的__前插公式__，若所求节点靠近尾节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的__后插公式__；如果要估计结果的舍入误差，应该选用插值公式中的__拉格朗日插值公式__。

21. 拉格朗日插值公式中 $f(x_i)$的系数 $a_i(x)$的特点是：$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)=$__1__；所以当系数 $a_i(x)$满足__$a_i(x)>1$__，计算时不会放大 $f(x_i)$的误差。

22. 要使$\sqrt{20}$的近似值的相对误差小于 0.1%，至少要取__4__位有效数字。

23. 对任意初始向量 $X^{(0)}$及任意向量 g，线性方程组的迭代公式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g(k=0,1,\cdots)$收敛于方程组的精确解 x^*的充分必要条件是__$\rho(B)<1$__。

24. 由下列数据所确定的插值多项式的次数最高是__5__。

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5

$y=f(x)$	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

25. 牛顿下山法的下山条件为 |f(xn+1)|<|f(xn)| 。

26. 线性方程组的松弛迭代法是通过逐渐减少残差 r_i $(i=0,1,\cdots,n)$来实现的，其中的残差 r_i= $(b_i-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n)/a_{ii}$ ，$(i=0,1,\cdots,n)$。

27. 在非线性方程 $f(x)=0$ 使用各种切线法迭代求解时，若在迭代区间存在唯一解，且 $f(x)$ 的二阶导数不变号，则初始点 x_0 的选取依据为 f(x0)f''(x0)>0 。

28. 使用迭代计算的步骤为建立迭代函数、 选取初值 、迭代计算。

五、判断题（10×1′）

10、 若 A 是 n 阶非奇异矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 一定可以使用高斯消元法求解。（ × ）

11、 解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法在单根 x^* 附近是平方收敛的。（ √ ）

12、 若 A 为 n 阶方阵，且其元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

则解线性方程组 $AX=b$ 的高斯——塞德尔迭代法一定收敛。（ × ）

13、 样条插值一种分段插值。（ √ ）

14、 如果插值结点相同，在满足相同插值条件下所有的插值多项式是等价的。（ √ ）

15、 从实际问题的精确解到实际的计算结果间的误差有模型误差、观测误差、截断误差及舍入误差。（ √ ）

16、 解线性方程组的的平方根直接解法适用于任何线性方程组 $AX=b$。（ × ）

17、 迭代解法的舍入误差估计要从第一步迭代计算的舍入误差开始估计,直到最后一步迭代计算的舍入误差。（ × ）

18、 数值计算中的总误差如果只考虑截断误差和舍入误差，则误差的最佳分配原则是截断误差＝舍入误差。

（　√　）

10、插值计算中避免外插是为了减少舍入误差。（　×　）

六、计算题（5×10′）

1、用列主元高斯消元法解线性方程组。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

解答：

（1，5，2）最大元 5 在第二行，交换第一与第二行：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

$L_{21}=1/5=0.2, l_{31}=2/5=0.4$ 方程化为：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ -0.2x_2 + 0.4x_3 = -1.6 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \end{cases}$$

（-0.2,2.6）最大元在第三行，交换第二与第三行：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \\ -0.2x_2 + 0.4x_3 = -1.6 \end{cases}$$

L32=-0.2/2.6=-0.076923,方程化为：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \\ 0.38462x_3 = -0.38466 \end{cases}$$

回代得：
$$\begin{cases} x_1 = 3.00005 \\ x_2 = 5.99999 \\ x_3 = -1.00010 \end{cases}$$

2、用牛顿——埃尔米特插值法求满足下列表中插值条件的四次插值多项式 $P_4(x)$，并写出其截断误差的表达式(设 $f(x)$ 在插值区间上具有直到五阶连续导数)。

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	3
$f'(x_i)$		1	5

解答：

做差商表

xi	F(xi)	F[xi,xi+1]	F[xi.xi+1.xi+2]	F[xi,xi+1,xi+2,xi+3]	F[xi,xi+1,xi+2,xi+3,xi+4]
0	1				
1	-1	-2			
1	-1	1	3		
2	3	4	3	0	
2	3	5	1	-2	-1

P4(x)=1-2x-3x(x-1)-x(x-1)(x-1)(x-2)

R4(x)=f(5)(ξ)/5!x(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)

3、对下面的线性方程组变化为等价的线性方程组，使之应用雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法均收敛，写出变化后的线性方程组及雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法的迭代公式，并简单说明收敛的理由。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解答：

交换第二和第四个方程，使系数矩阵为严格对角占优：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

雅克比迭代公式：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

4、设 $y=\sin x$，当取 $x_0=1.74$, $x_1=1.76$, $x_2=1.78$ 建立拉格朗日插值公式计算 $x=1.75$ 的函数值时，函数值 y_0, y_1, y_2 应取几位小数?

5、已知单调连续函数 $y=f(x)$的如下数据：

x_i	-0.11	0.00	1.50	1.80
$f(x_i)$	-1.23	-0.10	1.17	1.58

若用插值法计算，x 约为多少时 $f(x)=1$。(计算时小数点后保留 5 位)。

6、应用牛顿法于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}=0$ ，导出求$\sqrt{a}$ 的迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值。(计算时小数点后保留 4 位)。