习题八.

1.(1) 令 $f(x)=x-\ln x-2$. 则 $f(2)=-\ln 2<0$ $f(4)=2-\ln 2>0$.

且 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $[2,4]$ 上大于0. 故 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单增, 于是

$x-\ln x=2$ 在 $(2,4)$ 有唯一实根, 要使 $|x_k-x^*|\le 10^{-5}$, 则:

$$k\ge \frac{\ln(4-2)-\ln 10^{-5}}{\ln 2}-1=16.6 \Rightarrow k=17.$$

结果如下:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	
0	2.000000	4.000000	3.000000		
1	3.000000	4.000000	3.500000		
2	3.000000	3.500000	3.250000		
3	3.000000	3.250000	3.1250000		
4	3.125000	3.250000	3.125000		
5	3.125000	3.187500	3.187500		
6	3.125000	3.156250	3.156250		
7	3.140625	3.156250	3.140625		
8	3.140625	3.148438	3.148438		
9	3.144531	3.148438	3.144531		
10	3.144531	3.146484	3.144531		
11	3.144508	3.146484	3.145996		
12	3.145996	3.146484	3.156240		
13	3.145996	3.146240	3.146118		
14	3.146118	3.146240	3.146179		
15	3.146179	3.146240	3.146210		
16	3.146179	3.146210	3.146194		
17	3.146179	3.146194	3.146187	0.000001	

$\therefore x^*\approx x_{17}=3.146187$.

(2) 令 $f(x)=xe^x-1$ 则 $f(0)=-1<0$ $f(1)=e-1>0$, 且

$f'(x)=e^x+x$ 在 $[0,1]$ 上大于0, 即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单增,

则 $xe^x-1=0$ 在 $[0,1]$ 上有唯一实根, 要使 $|x_k-x^*|\le 10^{-5}$, 则

$$k\ge \frac{\ln(1-0)-\ln 10^{-5}}{\ln 2}-1=15.6096 \Rightarrow k=16$$

结果如下:

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1.0000	0.5000	-0.1756
1	0.5000	1.0000	0.7500	
3	0.5000	0.6250	0.5625	
4	0.5625	0.6250	0.5938	
5	0.5625	0.5938	0.5781	
6	0.5625	0.5781	0.5703	
7	0.5625	0.5703	0.5664	
8	0.5664	0.5703	0.5684	
9	0.5664	0.5684	0.5674	
10	0.5664	0.5674	0.5669	
11	0.5669	0.5674	0.5671	
12	0.5671	0.5674	0.5673	
13	0.5671	0.5673	0.5672	
14	0.5671	0.5672	0.5672	
15	0.5671	0.5672	0.5672	
16	0.5671	0.5672	0.5671	0.00000

则 $x^* \approx x_{16} = 0.5671$

误差为 7.6294×10^{-6}

(3) 令 $f(x)=x^3+4x^2-10$. 则 $f(1)=-5<0$ $f(2)=14>0$

且 $f'(x)=2x^2+8x$ 在 $[1,2]$ 上大于0，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单增.

则 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上有唯一解：要使 $|x_k-x^*|\le10^{-5}$，则

$$k \ge \frac{\ln(2-1)-\ln10^{-5}}{\ln2}-1=15.6096 \Rightarrow k=16$$

经过16次迭代得：

$x^*=1.3652\cdots$

误差为 7.6294×10^{-6}.

2. (1) $g_1(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $g_1'(x)=-\frac{2}{x^3}$, $|g_1'(1.5)|=0.5926<1$

而且 $g_1(x)$ 在根附近连续可微，由局部收敛性知迭代格式收敛

(2) $g_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $g_2'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$, $|g_2'(1.5)|=1.4142>1$

发散

(3) $g_3(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$, $g_3'(x)=\frac{2}{3}x\cdot(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$ $|g_3'(1.5)|=0.4558<1$

且 $g_3(x)$ 在根附近连续可微，由局部收敛性知迭代格式收敛。

因为 x^* 在1.5附近，所以 $x^*=0.1\cdots\times10^1$，要具有5位有效数字，则

$|x-x^*|\le\frac{1}{2}\times10^{1-5}=\frac{1}{2}\times10^{-4}=5\times10^{-5}$

用(1)：$x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$，计算结果为：

n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	1.500000	6	1.467791	12	1.465717
1	1.444444	7	1.464164	13	1.465479
2	1.479290	8	1.466466	14	1.465630
3	1.456976	9	1.465003	15	1.465534
4	1.471081	10	1.465932	16	1.465595
5	1.462091	11	1.465342	17	1.465556

$|x_{17}-x_{16}|=0.000039<5\times10^{-5}$

$\therefore x^*\approx x_{17}=1.465556$

用(3). $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$，结果为：

n	x_n	n	x_n
0	1.500000	6	1.465877
1	1.481248	7	1.465710
2	1.472706	8	1.465674
3	1.468817	9	1.465600
4	1.467048		
5	1.466243		

$|x_9-x_8|=3.4469\times10^{-5}<5\times10^{-5}$

$\therefore x^*\approx x_9=1.465600$

3. (1) 按迭代格式 $x_{k+1}=\cos x_k$ 计算，取 $x_0=1$，

则：

n	a_n	n	a_n	n	a_n
0	0	11	0.735604	23	0.7390547
1	0.540302	12	0.741425	24	0.7391055
2	0.857553	13	0.737506	25	0.7390713
3	0.654289	14	0.740147	26	0.739094
4	0.793480	15	0.738369	27	0.739078
5	0.701368	16	0.739567	28	0.739089
6	0.763959	17	0.738760	29	0.739082
7	0.722102	18	0.739303		
8	0.750417	19	0.738937		
9	0.734040	20	0.739184		
10	0.7442373	21	0.739018		
		22	0.739130		

$|x_{29}-x_{28}|<10^{-5}$.

则 $x^*\approx x_{29}=0.739082$

(2) 按迭代格式：$x_{k+1}=\dfrac{e^{-x_k}}{4}$.

n	a_n	n	a_n
0	0	7	0.203892
1	0.250000	8	0.203888
2	0.194700	9	
3	0.205770		
4	0.203505		
5	0.203967		
6	0.203872		

$|x_8-x_7|<10^{-5}$

则 $x^*\approx x_8=0.203888$

(3) 按迭代公式：$x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}$，取 $x_0=2$

计算如下：

n	a_n	n	a_n
0	2	4	2.094500
1	2.080083	5	2.09454
2	2.092351	6	2.094550
3	2.094216		

$|x_6-x_5|<10^{-5}$

则 $x^*\approx x_6=2.094550$

（另两个为虚根，不考虑，$-1.047275+1.359399i$，$-1.047275-1.359399i$）

4. ∵取 $x_0=1.5$，迭代公式为 $x_{k+1}=\frac{1}{x_k^2-x_k}$，计算得：

n	x_n	y_n	z_n
0	1.5	1.33333	2.25000
1	1.47435	1.42984	1.62703
2	1.46616	1.46312	1.47577
3	1.46557	1.46556	1.46561

迭代3次，则得到满足精度的解

$x^*\approx x_3=1.46557$

显然，Steffense方法更加迅速。

5. 用简单迭代法，由1题中，我们取 $x_0=0.5$，迭代公式为：$x_{k+1}=\frac{1}{e^{x_k}}$，则

n	a_n	n	a_n
0	0.5	9	0.567559
1	0.60653	10	0.566.9072
2	0.545239	11	0.567277
3	0.579703	12	0.567067
4	0.560064	13	0.567186
5	0.571172	14	0.567188
6	0.564862	15	0.5671571
7	0.568438	16	0.567135
8	0.566409	17	0.567147
		18	0.567140

$|x_{18}-x_{17}|<10^{-5}$. 则 $x^*=0.567140$

用Steffensen方法：

n	x_n	y_n	z_n
0	0.5	0.606530	0.545239
1	0.5676238	0.566870	0.567297
2	0.5671433	0.5671432	0.567143

此时 $x_2=0.5671433$ 已满足精度要求. 则 $x^*=0.5671433$.

6. 令 $h(x)=x+cf(x)$. 则 $h'(x)=1+cf'(x)$. 因为 $f'(x)\neq 0$.

则由定理8.3. 只要 $|h'(x^*)|<1$ 即若 $f'(x^*)>0$, $\frac{-2}{f'(x^*)}<c<0$, 若 $f'(x^*)<0$, $0<c<\frac{-2}{f'(x^*)}$.

迭法收敛, 其中 x^* 为选取的初始点.

7. (1) 令 $f(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$. 则 $f'(x)=-\frac{2}{3}\sin x$

因为 $|f'(x)|=\frac{2}{3}|\sin x|<1$ 恒成立. 满足定理8.3.

则对 $\forall x_0\in R$, 此迭代法均收敛到方程的根.

(2) 取 $x_0=4$, 用Steffensen方法求解.

n	x_n	y_n	z_n
0	4	3.564237	3.391995
1	3.279413	3.339654	3.346366
2	3.347208	3.347376	3.347390
3	3.347402	3.347402	3.347402

此时 $x_3=3.347402$ 满足精度要求.

则 $x^*\approx x_3=3.347402$.

(3) 因 $h'(x)=-\frac{2}{3}\sin x$. $|h'(x^*)|=|\frac{2}{3}\sin x^*|\neq 0$ 且 $0<|h'(x^*)|<1$. 则

此方法迭代只具有线性收敛性.

8. 记 $\phi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$, 则 $\phi'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$, $\phi''(x)=\frac{2}{x^3}$, 取正数 $L\geq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

在 $[1,L]$ 中, 其中 $L>\sqrt{2}$, 当 $x\in[1,L]$ 时, $\phi(x)\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$,

又当 $x\in[1,\sqrt{2}]$ 时, $\phi(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}+1\leq L$, 当 $x\in[\sqrt{2},L]$ 时, $\phi(x)=$

$x+\frac{2-x^2}{2x}\leq x\leq L$, 故当 $x\in[1,L]$ 时, 有 $\phi(x)\in[1,L]$, 由压缩映射原理.

另, 当 $x\in[1,L]$ 时, $|\phi'(x)|\leq\frac{1}{2}<1$. 所以对任意 $x_0\in[1,L]$,

由迭代格式产生的序列收敛于方程 $x=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$

在 $[1,L]$ 内的唯一根 x^*, 由 L 的任意性, 对任意 $x_0\geq 1$, 由迭

代格式产生的序列均收敛于方程 $x^*=\frac{x^*}{2}+\frac{1}{x^*}$.

则 $x^*=\sqrt{2}$, 即 $\forall x_0>1$, $\{x_n\}$ 收敛到 $\sqrt{2}$.

又 $\phi'(\sqrt{2})=0$ $\phi''(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$. 则 $\{x_n\}$ 是二阶收敛的

9. 证明: 令 $f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$, 则 $f(x)$ 在 $\sqrt{a}$ 的任意, $O(\sqrt{a},\delta^*)$ 邻域内连

续可微. 又 $f'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-6x(x^3+3ax)}{(3x^2+a)^2}$.

则 $|f'(\sqrt{a})|=0<1$ 则 由定理 8.3.

$\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{a}$,

又 $f''(x)=\frac{6x}{3x^2+a}-\frac{24x^3+18x(x^2+3a)}{(3x^2+a)^2}+\frac{72x^3(x^2+3a)}{(3x^2+a)^3}$

则 $f''(\sqrt{a})=0$.

又 $f'''(x)=\frac{6}{3x^2+a}-\frac{144x^2+18(x^2+3a)}{(3x^2+a)^2}+\frac{432x^4+432x^2(x^2+3a)}{(3x^2+a)^3}$

$-\frac{1296x^4(x^2+3a)}{(3x^2+a)^4}$

则 $f'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}\neq 0$

则 $\{x_n\}$ 收敛阶为3.

10.(1) 令 $f(x)=x-\ln x-2$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

∴ Newton迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-\ln x_k-2)x_k}{x_k-1}$

取 $x_0=3$（由第1题）代入得：

$x_1=3.147918433$ $x_2=3.146193440$ $x_3=3.146193221$

∵ $|x_3-x_2|<10^{-6}$

∴ $x^*\approx x_3=3.14619322$

(2) 令 $f(x)=xe^x-1$，$f'(x)=e^x+xe^x$

∴ Newto迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k e^{x_k}-1}{e^{x_k}+x_k e^{x_k}}$

取 $x_0=0.5$，代入得：

$x_1=0.571020440$

$x_2=0.567155568$

$x_3=0.567143291$

$x_4=0.567143290$

则 $|x_4-x_3|<10^{-6}$

∴ $x^*\approx x_4=0.567143290$

(3) 令 $f(x)=x+\sin x-1$ $f'(x)=1+\cos x$

则 Newton迭代公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k+\sin x_k-1}{1+\cos x_k}$.

取 $x_0=0$ 由公式得

$x_1=0.500000000$ $x_2=0.510957953$

$x_3=0.510973429$ $x_4=0.510973429$.

∴ $|x_4-x_3|<10^{-6}$

∴ $x^*\approx x_4=0.510973429$

11. 令 $f(x)=x^p-a$，$(x>0)$。则 $f(x)=0$ 的根为 $\sqrt[p]{a}$，$f'(x)=px^{p-1}$，$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$

用牛顿法求解的迭代公式是：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^p-a}{px_n^{p-1}}$，且 $f''(x_0)$ 在 x_0 邻近连续可微的

由于对 $x_0\neq0$ 的点，$f'(x_0)\neq0$。由定理8.5，可知，对 $\forall x_0\neq0$ 的

初始近似值，由上述公式产生的序列必定收敛于 $\sqrt[p]{a}$。

下面求：$\sqrt[3]{3}$ 的近似值：

用Newton法，取 $p=3$，$a=3$。取 $x_0=1.5$。

则 $x_1=1.44444444$

$x_2=1.44225290$

$x_3=1.44224957$

$|x_3-x_2|<10^{-5}$

则 $x^*\approx x_3=1.44224957$，即 $\sqrt[3]{3}$ 约为1.44224957

12. $f'(x)=3x^2-1$。因为 $f'(x)$ 在 $[1,2]$ 内大于0，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递增，又 $f(1)=-1<0$ $f(2)=5>0$

则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内有且仅有一个实根。

则Newton迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$。

取 $x_0=1.5$。由"精确到5位有效数字"得精度为 $|x_{k+1}-x_k|<5\times10^{-5}$，则：

$x_1=1.347826086$

$x_2=1.325200398$

$x_3=1.324718173$

$x_4=1.32471795$。

$|x_4-x_3|<5\times10^{-5}$

则 $x^*\approx x_4=1.3247$

因 $f'(x^*)=4.264632\neq0$ 则阶数至少为2。

因为 $f(x)=0$ 在 $[1,2]$ 内有一个根，即单根，则阶数为2。

13. (1) 当x^*是$f(x)=0$的r重根$(r\geq 2)$时，迭代函数$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$在$x^*$处的导数$\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{r}\neq 0$，且$|\varphi'(x^*)|<1$. 由定理8.4知，牛顿法求重根只能是线性收敛的，原题得证.

(2) r是$f(x)=0$的根x^*的重数，则迭代式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{rf(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2\cdots$$

迭代函数为：$\varphi(x)=x-r\frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi'(x)=1-r\frac{[f'(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-r+r\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

因 $\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)\cdot f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=1-\frac{1}{r}$，有：

$$\varphi'(x^*)=1-r+r(1-\frac{1}{r})=0$$

故修正牛顿法为至少平方收敛.

14. 当重根数未知，令$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$. 设x^*是$f(x)=0$的m重根，则：

$f(x)=(x-x^*)^m q(x)$，且$q(x)\neq 0$. 此时，

$$u(x)=\frac{(x-x^*)^m g(x)}{m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x)}=\frac{(x-x^*)\cdot g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

故x^*是$u(x)=0$的单根.

牛顿迭代法修正为$x=x-\frac{u(x)}{u'(x)}$. 则是二阶收敛的.

此时$\varphi(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}=x-\frac{f'(x)f(x)}{f(x)^2-f(x)f''(x)}$.

迭代格式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'(x_k)\cdot f(x_k)}{f(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)},\quad k=0,1\cdots$$

15. 解：$f'(x)=4x^3-1.2x^2+2.08x-0.4$

$f''(x)=12x^2-2.4x+2.08$

~~按~~迭代格式为：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f'(x_k)f(x_k)}{f(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)}$

取 $x_0=0.1$，精度为 10^{-5}.

则 $x_1=0.1999802019$

$x_2=0.199999999$

$x_3=0.199999999$

$|x_3-x_2|<10^{-5}$

则 $x^*\approx x_3=0.199999999$

16.（1）使用迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\cdot f(x_k)$

计算如下：∵因 $f(x)=x-\ln x-2$，有 $f(2)<0$　$f(4)=2-\ln 2>0$. 取 $x_0=2$　$x_1=4$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	2.0000000	-0.693147180
1	4.00000000	0.613705638
2	3.060788438	-0.057884104
3	3.141738781	-0.003037617
4	3.146222134	0.000019723
5	3.146193221	-0.6×10^{-8}
6	3.146193221	0.0

则 $|x_6-x_5|<10^{-5}$

则 $x^*\approx 3.146193221$

(2) 设 $f(x)=5x-\cos x-1$，取 $x_0=0$　$x_1=1$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	-2
1	1	3.459697694
2	0.36632064	-0.1020048299
3	0.384476322	-0.004613631
4	0.3853359602	7.593931652×10^{-9}
5	0.385334547	$-5.61820590\times10^{-10}$

则 $|x_5-x_4|<10^{-5}$

则 $x^*=0.385334547$

(3) 设 $f(x)=x-3+2^x$　取 $x_0=0$　$x_1=2$

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	-2
1	2	3
2	0.8000000	-0.45889887
3	0.95920634	-0.09655361
4	1.001629830	0.00389053
5	0.999986629	-3.190588×10^{-5}
6	0.999999956	-1.047037×10^{-8}
7	1.00000000012	2.81996648×10^{-14}

则 $|x_7-x_6|<10^{-5}$

则 $x^*\approx1.00000000012$

17. 因为 $F(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2-5 \\ (x+1)y-3x-1 \end{bmatrix}$ $F'(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y-3 & x+1 \end{bmatrix}$

$x^{(0)}=(1,1)^T$ 故 Newton 方程组为

$$F'(x^{(0)})\Delta\vec{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta x^{(0)}=0.25 \quad \Delta y^{(0)}=1.25$

则 $\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}+\Delta\vec{x}^{(0)}=(1.25,2.25)^T$.

第二次迭代：

$$F'(x^{(1)})\Delta\vec{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} 2.5 & 4.5 \\ -0.75 & 2.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x^{(1)} \\ \Delta y^{(1)} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1.625 \\ 0.3125 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta x^{(1)}=-0.25, \Delta y^{(1)}=-0.22222$

则 $\vec{x}^{(2)}=\vec{x}^{(1)}+\Delta\vec{x}^{(1)}=(1,2.02778)$.

第三次迭代：

$$F'(x^{(2)})\Delta\vec{x}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & 4.05556 \\ -0.97222 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x^{(2)} \\ \Delta y^{(2)} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0.111892 \\ 0.05556 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta x^{(2)}=0.00019425 \quad \Delta y^{(2)}=-0.02768557$

则 $\vec{x}^{(3)}=\vec{x}^{(2)}+\Delta\vec{x}^{(2)}=(1.00019425, 2.00010)$.

得近似解为 $x^*=(1.00019425, 2.00010)$.

18. (1) 用最速下降法：

$\phi(x)=(x^2-x+y^2)^2+(-x^2+y^2+y)^2$

梯度方向为 $(8x^3-6x^2-4xy-2y^2, -2x^2-4xy+8y^3+6y^2+2y)$

取精度为 10^{-4}，计算如下：

$x\approx 0.783362038422612$

$y\approx 0.418033007431344$

共迭代 116 次

(2) $\phi(x)=\left(\frac{\cos y}{5}-x+\frac{7\sin x}{10}\right)^2+\left(y-\frac{7\cos x}{10}+\frac{\sin y}{5}\right)^2$

$$G=\left[\frac{7\sin x\cdot\left(y-\frac{7\cos x}{10}+\frac{\sin y}{5}\right)}{5}+2\left(\frac{7\cos x}{10}-1\right)\left(\cos\frac{y}{5}-x+\frac{7\sin x}{10}\right),\right.$$

$$\left.2\left(\frac{\cos y}{5}+1\right)\left(y-\frac{7\cos x}{10}+\frac{\sin y}{5}\right)-\frac{\left(\frac{2\sin y\cos y}{5}-x+\frac{7\sin x}{10}\right)}{5}\right]$$

取$(x_0, y_0)=(0.5, 0.5)$. 取精度为10^{-4}

用最速下降计算结果如下:

$x=0.52652262$

$y=0.50791971903$