课程编号：100171019　　北京理工大学 2019-2020 学年第二学期

2019 级理科数学分析（II）期终考试试题 A 卷

班级__________学号___________姓名________成绩______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8		
得分										
签名										

1.(10 分)

(1)给定向量 $\vec{a}=(3,2,1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$．求 $\vec{a}+2\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|$ 和 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(2)求过点 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$，$(1,-1,2)$ 的平面方程.

2.(16 分)求下列函数的偏导数

(1)设 $u=(xy)^z$，求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$.

(2)设 $z=z(x,y)$ 由方程 $yz-\ln z=x+y$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3.(15 分)

(1)求二重积分 $I=\iint\limits_D 2y^2\sin(xy)dxdy$，其中 D 为由 $x=0,y=2,y=x$ 所围的区域.

(2)求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4,0\le z\le 1\right\}$.

(3)证明第二型曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$ 与路径无关，并求其积分值.

4.(12 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n+1}x^n$ 的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

5.(15 分)设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$.

(1)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

(3)求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$， $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

6.(12 分)证明： $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 当 $1<p<3$ 时绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时条件收敛，其余情况下发散.

7.(10 分)

(1)设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都收敛，且 $a_n\le u_n\le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明： $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

(2)证明： $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

8.(10 分)

(1)设 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在点 (x_0,y_0) 连续， $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 存在. 证明： $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

(2)设 $f(x,y)$ 在 R^2 可微，且 $f(0,0)=0$. 证明：

$$f(x,y)=x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt.$$