《数值计算方法》

习题一

1. 解：~~168.957定~~

$x=168.957$

取 $x^*=169.0$，此时 $|e(x)|=|x-x^*|=0.043<\frac{1}{2}\times10^{-1}$

则 $x\approx169.0$

同理：$3.00045\approx3.000$；$73.2250\approx73.23\ (73.22)$

$0.00152632\approx0.001526$

2. 解：$e(a)\le\frac{1}{2}\times10^{0}$，$e_r(a)=\frac{e(a)}{|a|}\le\frac{\frac{1}{2}\times10^{0}}{3580}\approx1.397\times10^{-4}$ 或 0.14×10^{-3} 或 $\frac{1}{6}\times10^{-3}$

即a的绝对误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{0}$，相对误差限为 1.397×10^{-4}.

同理：$\varepsilon(b)=\frac{1}{2}\times10^{-5}$ $\quad\varepsilon_r(b)=\cancel{0.00105\times10^{-8}}\ 0.105\times10^{-2}$ 或 $\frac{1}{8}\times10^{-2}$.

$\varepsilon(c)=\frac{1}{2}\times10^{-2}$ $\quad\varepsilon_r(c)=\cancel{0.000169\times10^{-6}}\ 0.169\times10^{-3}$ 或 $\frac{1}{4}\times10^{-3}$

$\varepsilon(d)=\cancel{\frac{1}{2}\times10^{8}}\ 0.00005\times10^{8}$ $\quad\varepsilon_r(d)=\cancel{3.496503\times10^{-8}}\ 0.3497\times10^{-3}$ 或 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$

3. 解：$|e(a)|\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$，$|e(b)|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$a+b=2.1811$，$ab=1.1766318$

$e(a+b)\approx e(a)+e(b)$

$e(ab)\approx be(a)+ae(b)$

$|e(a+b)|\approx|e(a)|+|e(b)|\le\frac{11}{20}\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-2}$

$|e(ab)|\approx|be(a)|+|ae(b)|\approx6.5045\times10^{-4}<\frac{1}{2}\times10^{-2}$

所以，$a+b$，ab 都有三位有效数字.

4. 解：$\frac{e(x)}{x}=\delta$，$e(x)=\delta x$

$|e(y)|\approx|f'(x)||e(x)|$

$e(\ln x)=\frac{1}{x}e(x)=\frac{1}{x}\cdot\delta x=\delta$

5. 解：$\sqrt{2}=1.41421356237310$. 设需保留n位有效数字，由定理1，

$\varepsilon_r<\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}$，故只需 $\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}<10^{-3}$ 即可.

因为 $a_1=1$，

可得：$n\ge4$. 故取 $\sqrt{2}=1.414$

6. 解：$\sqrt{20}=4.472135954999958$，设需保留n位有效数字，由定理1.1，

$\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}<10^{-3}$ 即可.

因为 $a_1=4$

可得，$n>3$.

故取4位有效数字.

7. 解：设正方形的边长为 x cm，则其面积

$S=x^2$

这里 $x^*=100$. $|S'(x^*)|=200$

由公式 $|e(S)|\approx|S'(x^*)|\cdot|e(x^*)|$ 可得，只要 $200e(x^*)\le1$

即 $e(x^*)\le0.005$ 即可.

8. 解：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ $\quad V'=4\pi R^2$

$$|e_r^*(V)|\approx\left|\frac{R^*V'(R^*)}{V(R^*)}\right|\cdot|e_r^*(R^*)|$$

由题意，$3|e_r^*(R^*)|\le0.01$.

所以，$|e_r^*(R^*)|\le0.00333$.

9. 解：$s=\frac{1}{2}gt^2$；$s'=gt$，$|e(t^*)|=0.1$

$|e(s^*)|=|s'(t^*)||e(t^*)|=0.1gt^*$，随t增大而增大

$$|e_r(s^*)|=\frac{|s'(t^*)||e(t^*)|}{|s(t^*)|}=\frac{0.2}{t^*}$$ 随t增大而减小.

结论成立.

10. 解：如用求根公式 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

则 $x_1\approx\frac{56+2\times27.983}{2}=55.983$

~~$x_2\approx\frac{56-2\times27.983}{2}=0.034$ 与准确值差别大.~~

~~若用 $x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}=\frac{2}{56+2\times27.983}$~~

$\varepsilon(x_1)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$，$x_1$有5位有效数字.

$x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{55.983}\approx0.01786$

$$|e(x_2^*)|\approx\left(\frac{1}{x_1^*}\right)^2|e(x_1^*)|\le\frac{\frac{1}{2}\times10^{-5}}{55.983^2}<\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

所以 x_2有4位有效数字.

则 $x_1\approx55.983$，$x_2\approx0.01786$.

11. 证明：(1) $I_n+nI_{n-1}=e^{-1}\int_0^1(x^ne^x)'dx=[x^ne^x]_0^1=1$

所以 $I_n=1-nI_{n-1}$

(2) 设 I_0^* 有误差 e_0，假设计算过程中不产生新的舍入误差，则由(1)可得

$e_n=I_n-I_n^*=-n(I_{n-1}-I_{n-1}^*)=-ne_{n-1}$，$(n=1,2\cdots)$

从而，$e_n=(-1)^n n!e_0$，误差逐步增大。

反之，$e_{k-1}=-\frac{1}{k}e_k$，$e_0=(-1)^n\frac{1}{n!}e_n$，误差逐步减小。

12. 解：(1) $\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x^2}{1+3x+2x^2}$

(2) $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{(x+\frac{1}{x})-(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-x}}$.

~~(3)~~ $\cancel{\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^2}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2\cos x}=\frac{2\tan x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x}}$.

(3) $|x|<<1$ 时 $\tan x$ 与 $\sin x$ 接近.

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $x\to0$

则 $\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\tan x\frac{1-\cos x}{x^2}\approx\frac{1}{2}\tan x$