习题五.

1.解：(1) 取两个节点 $x_0=0$ $x_1=1$ 时插值基函数为：

$$l_0(x)=\frac{x-1}{\cancel{x_0}0-1}=-(x-1),\quad l_1(x)=\frac{x-0}{1-0}=x$$

则~~线性差~~插值 $L_1(x)=-(x-1)\times1+x\times2=x+1$

将 $x=0.3$ 代入，即得：$2^{0.3}\approx0.3+1=1.3$

$$|R_1(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-0)(x-1)\right|=\frac{2^{\xi}(\ln2)^2}{2}|(x-0)(x-1)|$$

ξ 介于 0, 1 之间

故 $|R_1(0.3)|=\frac{2^{\xi}(\ln2)^2}{2}\times0.3\times0.7\le\frac{2\times(\ln2)^2}{2}\times0.3\times0.7=0.1009=1.009\times10^{-1}$

(2) 取 $x_0=-1$, $x_1=0$ $x_2=1$, 插值多项式为：

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\times0.5+\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\times1+\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\times2$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x+1$$

所以 $2^{0.3}\approx1.2475$.

~~因此用~~ $R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+1)(x-1)x$. ξ 介于 $(-1,1)$ 之间

因此用二次插值计算的误差为：

$$|R_2(0.3)|=\frac{2^{\xi}(\ln2)^3}{3!}\times1.3\times0.7\times0.3\le0.0303=3.03\times10^{-2}$$

2.解：取 $x_0=0.527$ $x_1=0.727$ $x_2=0.807$, 插值多项式为：

$$L_2(x)=\frac{(x-0.727)(x-0.807)}{(0.527-0.727)(0.527-0.807)}\times0.01075+\frac{(x-0.527)(x-0.807)}{(0.727-0.527)(0.727-0.807)}\times\cancel{0.729}\,0.01219$$

$$+\frac{(x-0.527)(x-0.727)}{(0.807-0.527)(0.807-0.727)}\times0.01188.$$

所 $y(0.7)$ 即将 0.7 代入 $L_2(x)$ 中得：

$y(0.7)\approx$ ~~0.0101~~ 0.0122

3. 解：取节点 $x_0=1$，$x_1=3$　$x_2=4$.　$x_3=6$　插值多项式为：

$$L_3(x)=\frac{5}{3}(x-1)\cdot(x-4)(x-6)-\frac{4}{3}(x-1)(x-3)(x-6)+\frac{7}{30}(x-3)(x-4)(x-6)$$
$$+\frac{7}{15}(x-1)(x-3)(x-4)$$

将 2 代入 $L_3(x)$ 中得：

$f(2)\approx 0.4$

4. 解：取节点 $x_0=0.40$　$x_1=0.55$　$x_2=0.65$　$x_3=0.80$　$x_4=0.90$，插值多项式为：

$$L_4(x)=\frac{929}{5}\left(4x-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{9}{10}\right)+\frac{102652}{875}\times\left(2x-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{11}{20}\right)\cdot\left(x-\frac{13}{20}\right)$$
$$-\frac{88811}{375}\left(\frac{5}{2}x-1\right)\left(x-\frac{9}{10}\right)\cdot\left(x-\frac{11}{20}\right)\left(x-\frac{13}{20}\right)-\frac{11563}{175}\left(\frac{20}{3}x-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\times$$
$$\left(x-\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{13}{20}\right)+\frac{1643}{200}\cdot\left(\frac{20}{3}x-\frac{11}{3}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{9}{10}\right)\cdot\left(x-\frac{13}{20}\right)$$

将 0.569 代入 $L_4(x)$ 中得：

$\mathrm{sh}\,0.569\approx 0.6002$

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{6!}\cdot(x-0.40)\cdot(x-0.55)\cdot(x-0.65)(x-0.80)(x-0.90),$$ ξ 介于 $(0.55, 0.6$

因此用四次插值计算的误差为：

$$|R_4(0.569)|=\left|\frac{\cosh(\xi)}{6!}\times 0.169\times 0.019\times(-0.080)\times(-0.231)\times(-0.331)\right|$$
$$\leq 3.3248\times 10^{-8}$$

5. 解：考虑用四次插值：取节点 $x_0=2.0$　$x_1=2.1$　$x_2=2.2$　$x_3=2.3$　$x_4=2.4$

插值多项式为：
$$L_4(x)=\frac{8721181271906222625}{3377699720527872}\left(\frac{5x}{2}-5\right)\left(x-\frac{11}{5}\right)\left(x-\frac{21}{10}\right)\cdot\left(x-\frac{23}{10}\right)$$
$$+\frac{37081}{50}(5x-10)\left(x-\frac{12}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{21}{10}\right)\cdot\left(x-\frac{23}{10}\right)$$
$$-\frac{40789608480052 6625}{16888498602639 36}\cdot(10x-20)\cdot\left(x-\frac{11}{5}\right)\left(x-\frac{12}{5}\right)\left(x-\frac{23}{10}\right)$$
$$+\frac{2653772351425891 25}{4503599627370496}\cdot(10x-21)\left(x-\frac{11}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{12}{5}\right)\left(x-\frac{23}{10}\right)$$
$$-\frac{60663}{80}\left(\frac{10}{3}x-\frac{20}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{11}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{12}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{21}{10}\right).$$

将2.15代入$L_4(x)$中得：

$\sqrt{2.15} \approx 1.4663$

用四次插值计算的误差为：

$$R_4(x) = \frac{(\sqrt{\xi})^{(5)}}{6!}(x-2.0)\cdot(x-2.1)\cdot(x-2.2)\cdot(x-2.3)(x-2.4) \quad \xi\text{位于}2.1\text{与}2.2\text{间}$$

$$|R_4(2.15)| \le 4.5479\times10^{-8} < \frac{1}{2}\times10^{-5}.$$

则 $\sqrt{2.15} \approx 1.4663$.

6. 解：(1) 取 $x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \quad x_4=1.4$

插值多项式为：
$$L_4(x) = \frac{874098022176805375}{1125899906842624}(5x-5)\cdot(x-\frac{7}{5})(x-\frac{11}{10})(x-\frac{13}{10})$$
$$-\frac{15421}{75}(10x-10)(x-\frac{6}{5})(x-\frac{7}{5})\cdot(x-\frac{13}{10})\cdot(x-\frac{13}{10})$$
$$+\frac{125}{3}(10x-11)(x-\frac{6}{5})\cdot(x-\frac{7}{5})\cdot(x-\frac{13}{10})$$
$$+\frac{26117}{60}(\frac{5}{2}x-\frac{5}{2})(x-\frac{6}{5})\cdot(x-\frac{11}{10})\cdot(x-\frac{13}{10})$$
$$-\frac{49843}{50}(\frac{10}{3}x-\frac{10}{3})(x-\frac{6}{5})\cdot(x-\frac{7}{5})\cdot(x-\frac{11}{10})$$

将1.25代入$L_4(x)$中，得：

$f(1.25)=1.754960937499999$

用四次插值计算的误差为：

$$R_4(x) = \frac{(e^{x^2}-1)^{(5)}}{6!}(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3)(x-1.4), \quad \xi\text{位于}1.2\text{至}1.3\text{间}.$$

$$|R_4(1.25)| \le 0.0176 = 1.76\times10^{-2}$$

(2) 取点 $x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \quad x_4=1.4$ 作四次牛顿插值得：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	
1	1.00000					1
1.1	1.23368	2.33680				$x-1$
1.2	1.55271	3.19030	4.26750			$(x-1)(x-1.1)$
1.3	1.99372	4.41010	6.09899	6.10499		$(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$
1.4	2.61170	6.17980	8.84850	9.16500	7.65000	$(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3$

$N_4(x) = 2.33680(x-1) + 4.26750(x-1)(x-1.1) + 6.10499(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$
$+ 7.65000(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3) + 1$

所以 $f(1.25) \approx 1.754960937499996$.

(3) 解：若加节点，$x_5 = 1.5$，$f(x_5) = 3.49034$. 则用五次 Newton 插值多项式近似.

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商		
1	1.0000						1	
1.1	1.23368	2.33680					$x-1$	
1.2	1.55271	3.19030	4.26750				$(x-1)(x-1.1)$	
1.3	1.99372	4.40099	6.09899	6.10499			$(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$	
1.4	2.61170	6.17980	8.84850	9.16500	7.65000		$(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3)$	
1.5	3.49034	8.78640	13.03299	13.94833	11.95833	8.61667	$(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3)(x-1.4)$	

$N_5(x) = 2.33680(x-1) + 4.26750(x-1)(x-1.1) + 6.10499(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$
$+ 7.65000(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3) + 8.61667(x-1)\cdots(x-1.4) + 1$

所以 $f(1.25) \approx 1.755082109375000$

7. 证明：~~(1) 令 $f(x)=x^k$ ($k=0,1\cdots n$)，则插值多项式为~~

(1) 设 x 固定，令 $\varphi(t) = (x-t)^k$. ($k=0,1\cdots n$)，则插值多项式为：

$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x_j) l_j(t) = \sum_{j=0}^{n} (x-x_j)^k l_j(t)$，而插值余项

$R_n(t) = \varphi(t) - P_n(t) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(t)$，对于 $\varphi(t)$，

$\varphi(t) = (x-t)^k$，($k=0,1,\cdots n$)，$\varphi^{(n+1)}(t) \equiv 0$，所以有

$\varphi(t) = (x-t)^k = P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} (x-x_j)^k l_j(t)$，令 $t=x$，则

$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} (x-x_j)^k l_j(x) \equiv 0$，则 $\sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k l_j(x) \equiv 0$.

证毕

(2) 设 $p(x)=x^{n+1}+g_n(x)$，则插值多项式为 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} p(x_j)l_j(x)$，

而插值余项 $R_n(x)=p(x)-L_n(x)=\frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$. 对于 $p(x)=x^{n+1}+g_n(x)$，

$p^{(n+1)}(x)\equiv(n+1)!$. 所以有 $p(x)-L_n(x)=\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$.

证毕.

8. 解：

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶	
1.615	2.41450				1
1.634	2.46259	2.531053			$x-1.615$
1.702	2.65271	2.795882	3.044012		$(x-1.615)(x-1.634)$
1.828	3.03035	2.997143	1.037428	−9.420582	$(x-1.615)(x-1.634)(x-1.702)$

$$N_3(x)=2.41450+2.531053(x-1.615)+3.044012(x-1.615)\cdot(x-1.634)$$
$$+(-9.420582)(x-1.615)\cdot(x-1.634)(x-1.702)$$

所以 $f(1.682)\approx N_3(1.682)\doteq 2.594476$

9. 用3阶 Lagrange 插值法：

取节点 $x_0=0.10$ $x_1=0.11$ $x_2=0.12$ $x_3=0.13$

插值多项式为：
$$L_3(x)=\frac{1530646849603711875}{56\cdot 29499534213 12}(100x-10)(x-\tfrac{3}{25})(x-\tfrac{13}{100})$$
$$-\frac{593547162\cdot 9990625}{6547069766659}(100x-11)(x-\tfrac{3}{25})\cdot(x-\tfrac{13}{100})$$
$$+\frac{9705908107867 0625}{3518437208 8832}(\tfrac{100}{3}x-\tfrac{10}{3})\cdot(x-\tfrac{11}{100})\cdot(x-\tfrac{3}{25})$$
$$-\frac{1927252128663 44375}{3518437208 8832}(50x-5)(x-\tfrac{11}{100})\cdot(x-\tfrac{13}{100})$$

将 0.1236 代入 $L_3(x)$，得：

$\varphi(0.1236)\approx 0.5491837008$.

用3阶 Lagrange 插值计算的误差为：$\xi\in(0.12, 0.13)$

$$|R_3(0.1236)|=\left|\frac{\varphi^{(4)}(\xi)}{5!}\times(0.1236-0.10)(0.1236-0.11)(0.1236-0.12)(0.1236-0.13)\right|$$
$$\le 9.4537384\times10^{-12}<\tfrac{1}{2}\times10^{-5}.$$

此时，取6位有效数字. $\varphi(0.1236)\approx 0.549184$

10、解：取 $x_0=1$　$x_1=2$　$x_2=3$　$x_3=4$，计算得：

x_i	$f_i(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	
1	3				1
2	5	2			t
3	9	4	2		$\frac{1}{2}t(t-1)$
4	15	6	2	0	$\frac{t}{3!}(t-1)(t-2)$
	1	t	$\frac{t}{2}(t+1)$	$\frac{t}{3!}(t+1)(t+2)$	

对 $f(1.5)$，Newton 向前插值公式为：

$$N_3(x_0+th)=3+2t+2\times\frac{1}{2}t(t-1)+0$$

将 $t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1.5-1}{1}=0.5$ 代上式得：

~~f(1.5) ≈ N3(1.5) = [illegible]~~

$$f(1.5)\approx N_3(1.5)=3.75$$

对 $f(3.7)$，Newton 向后插值公式为

$$N_3(x_4+th)=15+6t+2\times\frac{1}{2}t(t+1)$$

将 $t=\frac{x-x_4}{h}=\frac{3.7-4}{1}=-0.3$ 代入上式得：

$$f(3.7)\approx 12.99$$

11、解：取对 $\cos 0.048$，取 $x_0=0.0$　$x_1=0.1$　$x_2=0.2$　$x_3=0.3$　$x_4=0.4$ 计算得：

x_i	$f_i(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分	
0.0	1.00000					1
0.1	0.99500	-0.004500				t
0.2	0.98007	-0.015430	-0.010930			$\frac{1}{2}t(t-1)$
0.3	0.95534	-0.024730	-0.009300	0.001630		$\frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)$
0.4	0.92106	-0.034280	-0.009550	-0.000250	-0.001880	$\frac{1}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3)$

$$N_4(x)=1-0.0045t-0.01093\times\frac{1}{2}t(t-1)+0.001630\times\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)$$
$$-0.001880\times\frac{1}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3)$$

将 $t=\frac{x-x_0}{h}=0.48$ 代入上式得：

$$\cos 0.048\approx N_4(0.048)=0.999382$$

对 $\cos 0.575$，取 $x_2=0.2$　$x_3=0.3$　$x_4=0.4$　$x_5=0.5$　$x_6=0.6$

用后插值公式为：

$$N_4(x_6+th)=f_6+\nabla f_6 t+\frac{\nabla^2 f_6}{2!}t(t+1)+\frac{\Delta^3 f_6}{3!}t(t+1)(t+2)+\frac{\Delta^4 f_6}{4!}t(t+1)(t+2)(t+3)$$

$$=0.82534-0.052240t-0.008760\frac{t(t+1)}{2}+0.000440\frac{t(t+1)(t+2)}{6}$$

$$+0.000090\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}$$

将 $t=\frac{x-x_6}{h}=-0.25$ 代入上式得：

$\cos 0.575\approx N_4(0.575)=0.8392$

---

12. 解：用分段线性插值法：

由定理 5.2.

$$M=\max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}}|f''(x)|=1$$

令 $\frac{h^2}{8}M\le 10^{-6}$

$\Rightarrow h\le 2.8284\times 10^{-3}$

若改用二次插值法：

用误差估计式，$n=2$　$f(x)=\sin x$，$f^{(3)}(x)=-\cos x$

$$\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|f(x)-P_2(x)|\le\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|\cdot\max_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

令 $x_{i-1}\le x\le x_{i+1}$，$h=x_i-x_{i-1}$，$x_{i-1}=x_i-h$，$x_{i+1}=x_i+h$，因而

$$\max_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}|(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)(x-x_{i+1})|=\frac{2(x_i-x_{i+1})^3}{3\sqrt{3}\ \cancel{8}}\ \cancel{\frac{\quad}{8}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot h^3$$

于是 $|R(x)|\le\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right|\cdot\cancel{\frac{\quad}{8}}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}f^{(3)}(x)\cdot\frac{1}{9\sqrt{3}}h^3$

$$=\frac{1}{9\sqrt{3}}h^3<10^{-6}$$

$\Rightarrow h\le 2.49805\times 10^{-3}$

13. 解：由差商与导数关系 $f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi)$

$f(x) = x^7 + 5x^5 + 1$， $f^{(7)}(x) = 7!$ $f^{(k)}(x) = 0$ $(k \geq 8)$.

于是：

(1) $f[2^0, 2^1, \cdots 2^7] = \frac{1}{7!} \times 7! = 1$

(2) $f[2^0, 2^1 \cdots 2^k] = 0$ $(k \geq 8)$.

---

14. ~~解~~ 证明：由差商与导数关系 $f[x_0 \cdots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$

则 $f[x_0 \cdots x_m, x] = \cancel{\frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)} \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$

当 $m \leq n-1$ 时：$f^{(m+1)}(\xi) = n(n-1) \cdots (n-m) a_n x^{n-m-1} + (n-1) \cdots (n-m-1) a_{n-1} x^{n-m-2}$

$+ \cdots + m! a_m$

则 $f[x_0 \cdots x_m, x] = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$

为 $n-m-1$ 次多项式.

当 $m = n-1$ 时，由上述 $f^{(m+1)}(\xi)$ 表达示，有 $f^{(m+1)}(\xi) = n! a_n$

则 $f[x_0 \cdots x_m, x] = \frac{1}{n!} \cdot n! a_n = a_n$.

当 $m > n-1$ 时. $f^{(m+1)}(\xi) = 0$.

则 $f[x_0 \cdots x_m, x] = \frac{1}{(m+1)!} \cdot 0 = 0$.

综上，得证.

15. 解：

x_i	1	1.05
y_i	$3e-e^2$	$3.15e^{1.05}-e^{2.1}$
y_i'	$6e-2e^2$	$3e^{1.05}-2e^{2.1}+3.15e^{1.05}$

≈

x_i	1	1.05
y_i	0.765789	0.83543
y_i'	1.531578	1.2422146

则由三次 Hermite 插值多项式公式得：

$H(x) \approx 400 \times (32.163x - 31.397)(x - \frac{21}{20})^2 - 400 \times (32.175x - 34.619)(t-1)^2$

将 1.03 代入 $H(x)$ 中. 得 $f(1.03) \approx H(x) \approx 0.80932$

$|R(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^2 (x-1.05)^2 \right|$， $\xi \in [1, 1.05]$

$|R(1.03)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)^2 (x-1.05)^2 \right| \leq 2.61396 \times 10^{-6}$

16. 解：（降阶法）设 $H_4(x)=N_2(x)+P_1(x)w_3(x)$

其中 $N_2(x)$ 为 Newton 插值多项式，$w_3(x)=(x-0)(x-1)(x-2)$

$P_1(x)$ 待定（$P_1(x)=a+bx$）

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	
0	1			1
1	2	1		$x-0$
2	1	-1	-1	$(x-0)(x-1)$

$N_2(x)=1+1(x-0)+(-1)(x-0)(x-1)$

$=1+2x-x^2$

$w_3(x)=x^3-3x^2+2x$

$\therefore H_4'(x)=N_2'(x)+P_1'(x)w_3(x)+P_1(x)w_3'(x)$

$=2-2x+b\cdot(x^3-3x^2+2x)+(a+bx)\cdot(3x^2-6x+2)$

由已知 $H_4'(1)=0$，$H_4'(2)=-1$ 得：$b+a=0$，$-2+2(a+2b)=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{2}$，即 $P_1(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$

$\therefore H_4(x)=1+2x-x^2+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)\cdot(x^3-2x^2+2x)$

$=\frac{1}{2}x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2+x+1$

余项 $f(x)-H_4(x)=\dfrac{f^{(1+1+1+2)}(\xi)}{(1+2+2)!}(x-0)(x-1)^2(x-2)^2$

$=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x(x-1)^2(x-2)^2$.　$\xi\in[0,2]$

17. 解：(1) 用三弯矩方程求解，已知 $h_i=1$，$i=0,1,2,3$.

j	α_j	β_j	d_j	
0		1	0	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
3	$\frac{1}{2}$		0	

以及由三弯矩方程：$\beta_j m_{j-1}+2m_j+\alpha_j m_{j+1}=d_j$　$j=1,2$.

得 $\begin{cases}\frac{1}{2}m_0+2m_1+\frac{1}{2}m_2=0\\ \frac{1}{2}m_1+2m_2+\frac{1}{2}m_3=0\end{cases}$　由于 $m_0=1$ $m_3=0$ 从而 $\begin{cases}4m_1+m_2=-1\\ m_1+4m_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow m_1=\frac{-4}{15}$，$m_2=\frac{1}{15}$.

故 $S(x)=\begin{cases}x(x-1)(15-11x)/15, & x\in[0,1]\\ (x-1)(x-2)(7-3x)/15, & x\in[1,2]\\ (x-3)^2(x-2)/15 & x\in[2,3]\end{cases}$

(2) 用三弯矩方程求解，已知 $h_i=1$，$i=0,1,2,3$.

j	α_j	β_j	c_j
0		1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	1		0

以及由三弯矩方程：$\alpha_j M_{j-1}+2M_j+\beta_j M_{j+1}=c_j \quad j=1,2$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}M_0+2M_1+\frac{1}{2}M_2=0\\ \frac{1}{2}M_1+2M_2+\frac{1}{2}M_3=0.\end{cases}$$

由于 $M_0=1$，$M_3=0$. 代入方程得 $M_1=-\frac{4}{15}$，$M_3=\frac{1}{15}$

$$\text{故}\ S(x)=\begin{cases}x(1-x)(19x-26)/90 & x\in[0,1]\\ (x-1)(x-2)(5x-12)/90 & x\in[1,2]\\ (3-x)(x-2)(x-4)/90 & x\in[2,3]\end{cases}$$

18. 解：

（题中"0.2780"应改为"0.7280"）

x_i	y_i	h_i	β_i	α_i	c_i
0.25	0.5000				0
0.30	0.5477	0.05	0.3571	0	-4.3143
0.39	0.6245	0.09	0.6000	0.6429	-3.2667
0.45	0.6708	0.06	0.4286	0.4000	-2.4268
0.53	0.7280	0.08	0	0.5714	0

由此得矩阵形式的线性方程组为：

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0.3571&2&0.6429&0&0\\0&0.6000&2&0.4000&0\\0&0&0.4286&2&0.5714\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\\M_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4.3143\\-3.2667\\-2.4286\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M_0=0 \quad M_1=-1.8795 \quad M_2=-0.8636 \quad M_3=-1.0292 \quad M_4=0$

$$\Rightarrow S(x)=\begin{cases}0(0.30-x)^3-6.2652(x-0.25)^3+10(0.3-x)+10.9679(x-0.25). & x\in[0.25,0.30]\\ -3.4806(0.39-x)^3-1.5993(x-0.30)^3+6.1137(0.39-x)+6.9518(x-0.3) & x\in[0.3,0.39]\\ -2.3990(0.45-x)^3-2.8590(x-0.39)^3+10.417(0.45-x)+11.1903(x-0.39) & x\in[0.39,0.45]\\ -2.1442(0.53-x)^3-0(x-0.45)^3+8.3987(0.53-x)+9.1000(x-0.45) & x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

19. 解: ~~这属于第三种~~ (此题小编用三弯矩解方程求解, 读者可用三弯转角).

首先计算有关参数,

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_0 & & & \\ \beta_1 & 2 & \alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & \beta_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

得: $\alpha_0 = 1 \quad d_0 = 3.6822$

$\alpha_1 = 0.5 \quad d_1 = 6$

$\beta_1 = 0.5 \quad \beta_2 = 1 \quad \cancel{d_2 = 9.2}$

$d_2 = 9.2712$.

x_i	y_i	α_i	β_i	d_i
1	2	1		3.6822
2	4	0.5	0.5	6
3	8		1	9.2712

然后解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6822 \\ 6 \\ 9.2712 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M_0 = 0.92055 \quad M_1 = 1.8411 \quad M_2 = 3.71505$

$$故\ S(x) = \begin{cases} 0.92055 + 0.926025x + 0.153425x^3 & 1 \le x \le 2 \\ -0.35065 + 2.832825x - 0.9534x^2 + 0.312325x^3 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

20. 解: 由已知可得:

x_i	0	0.2	0.6	1.0
$f(x_i)$	1	0.81873	0.54881	0.36788

(1) 用三弯矩方程求解.

x_i	y_i	h_i	α_i	β_i	c_i
0	1		0		0
0.2	0.81873	0.2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2.3155
0.6	0.54881	0.4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.6686
1.0	0.36788	0.4	1	0	0

由此得矩阵形式的线性方程组为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.3155 \\ 1.6686 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M_0 = 0 \quad M_1 = 0.959625 \quad M_2 = 0.594375 \quad M_3 = 0$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} 0\times(0.2-x)^3 + 0.7997(x-0)^3 + 5(0.2-x) + 4.06166(x-0) & x\in[\cancel{0.25,\ 0.30}]\ 0,\ 0.2 \\ 0.3998(0.6-x)^3 + 0.2477(x-0.2)^3 + 1.9829(0.6-x) + 1.3324(x-0.2) & x\in[0.2,\ 0.6] \\ 0.24766(1.0-x)^3 + 0\ (x-0.6)^3 + 1.3324(1.0-x) + 0.9197(x-0.6) & x\in[0.6,\ 1.0] \end{cases}$$

(2) 修正题目：$f'(0)=-1$. $f'(3)=-0.3679$

用三转角方程求解：

x_i	$f(x_i)$	h_i	α_i	β_i	d_i
0	1		0		2.8095
0.2	0.8187	0.2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2.3155
0.6	0.54881	0.4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.6689
1.0	0.36789	1.0	1	0	12.3026

得线性方程组为：

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8095 \\ 2.3155 \\ 1.6689 \\ 12.3026 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m_0 = 1 \quad m_1 = 0.81078 \quad m_2 = 0.54122 \quad m_3 = 0.36220$

$\Rightarrow \cancel{S(x) =} \{ 0.\cancel{8328(0.2-x)^3}$ 将 m_1 m_2 代入 (5-71)公式即可.

(3)：用(1)中的$S(x)$进行近似积分：

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{0.2} S(x)dx + \int_{0.2}^{0.6} S(x)dx + \int_{0.6}^{1} S(x)dx$$

$$\approx 0.181553125 + 0.269364 + 0.181753$$

$$\approx 0.63267$$

21. 解：用DFT法：

四个节点为 $\{f_l\}_{l=0}^{3}=\{4,1,0,1\}$，$N=4$.

则 $c_0=\frac{1}{4}(4e^{0}+1e^{0}+0e^{0}+1e^{0})=\frac{3}{2}$

$c_1=\frac{1}{4}(4e^{0}+1e^{-i\frac{2\pi}{4}}+0e^{-i\frac{4\pi}{4}}+1e^{-i\frac{6\pi}{4}})$

$=\frac{1}{4}(4-i+0+i)=1$

$c_2=\frac{1}{4}(4e^{-2i\times 0}+1e^{-2i\frac{2\pi}{4}}+0e^{-2i\frac{4\pi}{4}}+1e^{-2i\frac{6\pi}{4}})$

$=\frac{1}{4}(4-1+0+(-1))=\frac{1}{2}$

$c_3=\frac{1}{4}(4e^{0}+1e^{-3i\frac{2\pi}{4}}+0e^{-3i\frac{4\pi}{4}}+1e^{-3i\frac{6\pi}{4}})$

$=\frac{1}{4}(4+i+0-i)=1$

则 $\{c_3\}_{k=0}^{3}=\{\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},1\}$

用FFT法：

l,k: $0=(0,0)$ $1=(0,1)$ $2=(1,0)$ $3=(1,1)$

则 $c_k=\sum_{l_0=0}^{1}\left(\sum_{l_1=0}^{1}a(l_1,l_0)w^{2k_0l_1}\right)w^{(2k_1+k_0)l_0}$，其中 $w=e^{-i\frac{2\pi}{N}}=e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$a_l=\frac{f_l}{N}=a(l_1,l_0)$

则 $c_0=a(0,0)+a(1,0)+a(0,1)+a(1,1)$

$=1+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$.

$c_1=(a(0,0)w^0+a(1,0)w^2)w^0+(a(0,1)w^0+a(1,0)w^2)w^1$

$=(1+0)\times 1+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})(-1)=1$

同理 $c_2=\frac{1}{2}$

$c_3=1$

则 $\{c_3\}_{k=0}^{3}=\{\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},1\}$

比较：用DFT法共用了16次乘法，12次加法和4次除法

用FFT法共用了4次复数乘法，8次加法.

显然，FFT法比DFT法更可观.

22、解：令 $k=(k_3,k_2,k_1,k_0)$ · $l=(l_3,l_2,l_1,l_0)$，$a_l=a(l_3,l_2,l_1,l_0)$.

则：

$$C_k=\sum_{l_0=0}^{1}\left\{\sum_{l_1=0}^{1}\left[\sum_{l_2=0}^{1}\left(\sum_{l_3=0}^{1}a(l_3,l_2,l_1,l_0)W^{2^3k_0l_3}\right)W^{(2^3k_1+2^2k_0)l_2}\right]W^{(2^3k_2+2^2k_1+2^1k_0)l_1}\right\}W^{(2^3k_2+2^2k_1+2k_0+k_0)l_0}$$

$(k=0,1,2,3\cdots15)$.

流程图：

$k=0$, $l_0=0$ $l_1=0$ $l_2=0$ $l_3=0$ | $C_0=0$

↓

计算 C_k，并求 $C_0=C_0+C_k$

↓

令 $l_0=0$，$l_1=0$，$l_2=0$，$l_3=1$

↓

计算 C_k，并求 $C_0=C_0+C_k$

⋮

↓

令 $l_0=1$，$l_1=1$ $l_2=1$ $l_3=1$

↓

计算 C_k，并求 $C_0=C_0+C_k$ ⟶ 输出 C_0.

↓

$k=1$. $l_0=0$ $l_1=0$ $l_2=0$ $l_3=0$ | $C_1=0$

↓

计算 C_k，并求 $C_1=C_1+C_k$.

⋮

↓

$k=15$. $l_0=0$ $l_1=0$ $l_2=0$ $l_3=0$ $C_{15}=0$

↓

计算 C_k，求 $C_{15}=C_{15}+C_k$ ⟶ ~~输出 C_1~~

⋮

↓

计算 C_k，并求 $C_{15}=C_{15}+C_k$ ⟶ 输出 C_{15}.