习题三

1. (1) 解：Jacobi 迭代法：

用Jacobi迭代法的计算公式，有：

$$A=\begin{pmatrix}10 & -2 & -1\\ -2 & 10 & -1\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 0\end{pmatrix} \qquad g=\begin{bmatrix}0.3\\ 1.5\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.3\\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+1.5\\ x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.4x_2^{(k)}+2\end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，代入上式得：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	0.300	1.500	2.000
2	0.800	1.760	2.660
3	0.918	1.926	2.864
4	0.972	1.970	2.954
5	0.989	1.990	2.982
6	0.996	1.996	2.994

迭代6次，得近似解 $x^{(6)}=(0.996, 1.996, 2.994)^T$

易验证方程组精确解为 $x=(1,2,3)^T$. 随k增加，结果越接近（实际 $k=15$ 时，$x=(1,2,3)^T$）

Gauss - Seidel 迭代法：

用Gauss - Seidel 迭代法计算公式，有：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.3\\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.1x_3^{(k)}+1.5\\ x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.4x_2^{(k+1)}+2.\end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 代入上式得右表：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	0.300	1.560	2.684
2	0.880	1.944	2.954
3	0.994	1.994	2.996

随k次数增加，结果越接近 $(1,2,3)^T$.

实际 $k=9$ 时，便有 $x=(1,2,3)^T$

(1) 解：Jacobi 迭代法：

用 Jacobi 迭代法的计算公式，有：

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad g=\begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{-1}{4}x_3^{(k)} + 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{4}{11}x_1^{(k)} - \frac{1}{11}x_3^{(k)} + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{4}x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 代入上式得：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	2.500	3.000	3.000
2	2.875	2.364	1.000
3	3.136	2.045	0.972
4	3.024	1.948	0.920
5	3.000	1.984	1.001
6	2.994	2.003	1.003
7	2.999	2.003	0.999
8	3.000	2.000	1.000

得近似解为 $x^*=(3.000, 2.000, 1.000)^T$

Gauss-seidel 迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{8}x_2^{(k)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)} + 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{4}{11}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{11}x_3^{(k)} + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} + 3 \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 代入上式得：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	2.500	2.091	1.227
2	3.010	1.997	0.996
3	3.010	1.999	1.000
4	3.000	1.999	1.000
5	3.000	2.000	1.000

得近似解 $x^*=(3.000, 2.000, 1.000)$

2. 解：Jacobi 迭代法：

用Jacobi迭代法的公式，有：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_1^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 0.5x_4^{(k)} + 0.5 \\ x_4^{(k+1)} = 0.5x_3^{(k)} - x_4^{(k)} \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (1,1,1,1)^T$，代入上述方程组，有

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.500	~~0.5~~ 0.500	0.500	0.000
2	0.500	0.500	0.500	0.250
3	0.750	0.813	0.875	0.438
4	0.750	0.813	0.875	0.438
5	0.906	~~1.016~~ 0.813	1.125	0.438
6	0.906	1.016	1.125	0.563
7	1.008	1.016	1.289	0.645
8	1.008	1.148	1.396	0.644

改为

$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	k
1.000	1.000	1.000	1.000	0
~~0.500~~ 0.500	0.000	0.500	0.000	1
0.500	0.500	0.500	0.2500	2
0.7500	0.500	0.875	0.250	3
0.750	0.813	0.875	0.438	4
0.906	0.813	1.125	0.563	5
0.906	1.016	1.125	0.563	6
1.008	1.016	1.289	0.563	7
1.008	1.148	1.289	0.644	8

迭代法有近似解：$x^* = (1.2, 1.4, 1.6, 0.8)^T$

用Gauss-Seidel迭代法有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_1^{(k+1)} + 0.5x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 0.5x_4^{(k)} + 0.5 \\ x_4^{(k+1)} = 0.5x_3^{(k+1)} - x_4^{(k+1)} \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (1,1,1,1)^T$，代入上述方程组，有

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.000	1.000	1.500	0.750
2	1.125	1.250	1.500	0.750
3	1.125	1.312	1.531	0.765
4	~~1.1~~ 1.156	1.344	1.554	0.777
5	1.172	1.363	1.570	0.785
6	~~1.18~~ 1.181	1.376	1.581	0.790
7	1.187	1.384	1.587	0.794
8	1.921	1.389	1.591	0.795
9	1.194	1.393	1.594	0.797
10	1.196	1.395	1.596	0.798

迭代法，有近似解 $x^* = (1.196, 1.395. 1.595. ~~0.798~~$
$0.798)^T$

用SOR法：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.000	1.000	1.730	0.803
2	1.000	1.5393	1.6393	0.827
3	1.389	1.506	1.679	0.845
4	1.190	1.402	1.598	0.778
5	1.206	1.402	1.586	0.800
6	1.199	1.388	1.598	0.798
7	1.191	1.398	1.598	0.799
8	1.202	1.401	1.601	0.801
9	1.199	1.400	1.600	0.800
10	1.200	1.400	1.600	0.800

3. 解：Jacobi 迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ 代入.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	1.000	1.000	1.000
2	1.000	-1.000	-3.000
3	-3.000	3.000	1.000

Gauss-Seidel 迭代法.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000	0.000	0.000
1	1.000	3.000	-3.000
2	-1.000	3.000	-3.000
3	-11.000	15.000	-7.000
4	-43.000	51.000	-15.000

比较：显然 Jacobi 迭代法准确. Gauss-Seidel 迭代法不适用此题

4. 解：Gauss－Seidel 迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{3}{4}x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{3}{4}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = -x_3^{(k+1)} - 6 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	~~$x_4^{(k)}$~~
1	5.250	3.813	-5.049	
2	3.141	3.883	-5.029	
3	3.088	3.927	-5.019	
4	3.055	3.954	-5.011	
5	3.034	3.971	-5.007	
6	3.021	3.982	-5.004	
7	3.013	3.989	-5.003	

SOR法 $(w=1.25)$：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25\,x_1^{(k)} + 0.3125\cdot(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -0.25\cdot x_2^{k} + 0.3125\,(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -0.25\,x_3^{k} + 0.3125\cdot(-24 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	6.313	3.520	-6.650
2	2.622	3.959	-4.600
3	3.133	4.010	-5.097
4	2.957	4.008	-4.974
5	3.004	4.003	-5.006
6	2.996	4.001	-4.998
7	3.000	4.000	-5.000

显然：SOR法迭代7次已经非常接近准确结果了.

此题SOR法比Gauss－Seidel 好！

SOR法迭代5次结果与Gauss－Seidel 迭代7次相仿

5. 解：$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -3 \\ -1 & a & -2 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix}$　$D=\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$

Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{2}{a} \\ -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为：

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & \lambda & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{4}{a^2}\lambda=0$$，得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\frac{2i}{a}$，$\lambda_3=\frac{-2i}{a}$

则 $\rho(B)=\left|\frac{2i}{a}\right|=\left|\frac{2}{a}\right|<1$

~~可得最大 $\lambda=\left|\frac{5}{a}\right|$~~ . ~~由于 $\rho(B)=|\lambda|_{max}<1$.~~

~~不妨令 $0\le\Delta\le1$~~ 则 $-2>a$ 或 $a>2$.

~~即 $\rho(B)=\left|\frac{5}{a}\right|$~~

~~则 $\left|\frac{5}{a}\right|<1$ 时，即 $a>5$ 时 或 $a<-5$ 时~~

~~Jacobi 迭代法收敛，而 $a\le5$ 时~~

~~而 $-5\le a\le5$ 时，不收敛~~.

则当 $-2>a$ 或 $a>2$ 时.

Jacobi 迭代法收敛.

当 $-2\le a\le2$ 时.

不收敛.

6. 证明：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$　$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为：

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}}=0$$

则 $\lambda^2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}}$

由定理3.6 及谱半径定义知，迭代收敛的条件为：

$$\rho(B)^2=\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$$

7. (1) Jacobi迭代法:

$$A=\begin{bmatrix}10&4&4\\4&10&8\\4&8&10\end{bmatrix}\qquad D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\0&\frac{1}{10}&0\\0&0&\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}13\\11\\25\end{bmatrix}\qquad g=\begin{bmatrix}1.3\\1.1\\2.5\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵: $B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&0&-\frac{4}{5}\\-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.4&-0.4\\-0.4&0&-0.8\\-0.4&-0.8&0\end{bmatrix}$

迭代计算公式为 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.4x_2^{(k)}-0.4x_3^{(k)}+1.3\\x_2^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k)}-0.8x_3^{(k)}+1.1\\x_3^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k)}-0.8x_2^{(k)}+2.5\end{cases}$

Gauss-Seibel迭代法.

由 $L=\begin{bmatrix}0&0&0\\-4&0&0\\-4&-8&0\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}0&-4&-4\\0&0&-8\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$D-L=\begin{bmatrix}10&0&0\\4&10&0\\4&8&10\end{bmatrix}\qquad (D-L)^{-1}=\begin{bmatrix}0.1&0&0\\-0.04&0.1&0\\-0.008&-0.008&0.1\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵为: $M=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&-0.4&-0.4\\0&0.16&-0.64\\0&0.032&0.672\end{bmatrix}$

计算公式为: $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.4x_2^{(k)}-0.4x_3^{(k)}+1.3\\x_2^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k+1)}-0.8x_3^{(k)}+1.1\\x_3^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k+1)}-0.8x_2^{(k+1)}+2.5.\end{cases}$

SOR法 ($w=1.35$).

$$(D-wL)^{-1}=\begin{bmatrix}0.1&0&0\\-0.054&0.1&0\\0.0043&-0.108&0.1\end{bmatrix}\qquad (1-w)D+wU=\begin{bmatrix}-3.5&-5.4&-5.4\\0&-3.5&-10.8\\0&0&-3.5\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵为: $M=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]=\begin{bmatrix}-0.35&-0.54&-0.54\\0.189&-0.0584&-0.7884\\-0.0151&0.3547&0.7931\end{bmatrix}$

计算公式为: $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\frac{1.35}{10}(13-10x_1^{(k)}-4x_2^{(k)}-4x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\frac{1.35}{10}(11-4x_1^{(k+1)}-10x_2^{(k)}-8x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\frac{1.35}{10}(25-4x_1^{(k+1)}-8x_2^{(k+1)}-10x_3^{(k)}).\end{cases}$

(2) 解：易得A为对称正定矩阵.

由判别条件3. Gauss-Seibel迭代法和SOR法 $(0<\omega<2)$ 收敛.

而 Jacobi 迭代法中

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0.4 & 0.4\\ 0.4 & \lambda & 0.8\\ 0.4 & 0.8 & \lambda\end{vmatrix}=0$$

可求得 $\lambda_1=0.8\quad \lambda_2=0.29\quad \lambda_3=-1.09$

则谱半径 $\rho(B)=1.09>1$. 因而 Jacobi 迭代法发散.

8. 解. 若用 Jacobi 迭代法：

$$A=\begin{bmatrix}1.2 & -3.6 & -12\\ -10 & 9 & 0.5\\ 1 & -4 & 2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1.2 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵 $B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 10\\ \frac{10}{9} & 0 & \frac{1}{18}\\ -\frac{1}{2} & 2 & 0\end{bmatrix}$

求特征方程：$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -3 & -10\\ -\frac{10}{9} & \lambda & -\frac{1}{18}\\ \frac{1}{2} & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{16}{9}\lambda+\frac{397}{36}=0$.

~~显然特征值的~~

显然谱半径 $\rho(B)>1$.

则 Jacobi 迭代法不收敛.

若用 Gauss-Seidel 迭代法：

$$L=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}0 & 3.6 & 12\\ 0 & 0 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵 $M=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & 3 & 10\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{199}{18}\\ 0 & \frac{31}{6} & \frac{154}{9}\end{bmatrix}$

求特征方程 $|\lambda I-M|=\begin{vmatrix}\lambda & -3 & -10\\ 0 & \lambda-\frac{10}{3} & -\frac{199}{18}\\ 0 & -\frac{31}{6} & \lambda-\frac{154}{9}\end{vmatrix}$

显然谱半径 $\rho(M)>1$

则 Gauss-Seidel 迭代法不收敛.

用~~Gauss-Seidel~~ SOR法讨论太复杂,不做讨论.

此题若进行行变换使:

$$\begin{bmatrix} -10 & 9 & 0.5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1.2 & -3.6 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

显然,此时A'是严格对角占优阵.

则Jacobi与Gauss-Seidel迭代法收敛.

9. 解:(1) Jacobi迭代法:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 4a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -4a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$

计算公式为$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-ax_2^{(k)}-ax_3^{(k)}+b_1 \\ x_2^{(k+1)}=-4ax_1^{(k)}+b_2 \\ x_3^{(k+1)}=-ax_1^{(k)}+b_3 \end{cases}$

Gauss-Seidel迭代法:

计算公式为$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-ax_2^{(k)}-ax_3^{(k)}+b_1 \\ x_2^{(k+1)}=-4ax_1^{(k+1)}+b_2 \\ x_3^{(k+1)}=-ax_1^{(k+1)}+b_3 \end{cases}$

此时迭代矩阵为

$$M=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 4a^2 & 4a^2 \\ 0 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

(2) 对于B: $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ 4a & \lambda & 0 \\ a & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-5a^2\lambda$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=\sqrt{5}a \quad \lambda_3=-\sqrt{5}a$.

则只须$|\sqrt{5}a|<1$. 即$-\frac{\sqrt{5}}{5}<a<\frac{\sqrt{5}}{5}$. 则Jacobi收敛

对于 M 有：$|\lambda I-M| = \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ 0 & \lambda-4a^2 & -4a^2 \\ 0 & -a^2 & \lambda-a^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-5a^2)$

$\lambda_1=\lambda_2=0 \quad \lambda_3=5a^2$

则谱半径 $\rho(M)<1$

$\Rightarrow |5a^2|<1$.

$\Rightarrow -\frac{\sqrt5}{5}<a<\frac{\sqrt5}{5}$

综上：要使两种迭代法都收敛.

则 $-\frac{\sqrt5}{5}<a<\frac{\sqrt5}{5}$.

10. 解：$A=\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}$

显然 A 是严格对角占优阵

则 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

由 Jacobi 迭代法产生的迭代矩阵

$B=\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ -0.125 & 0 & -0.125 \\ -0.1333 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$, $x^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$

有 $\|B\|_\infty=\frac{1}{3}$, $\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=2$.

由 $k \geq \dfrac{\ln\frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}}{\ln\|B\|}=13.5754$.

所以需要迭代14次才能保证各分量误差绝对值小于 10^{-6}.

由 Gauss-Seidel 迭代法产生的迭代矩阵.

$M=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ 0 & 0.0125 & -0.1063 \\ 0 & 0.0158 & -0.0013 \end{bmatrix}$, $x^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.35 \\ 2.11 \end{bmatrix}$

有 $\|M\|_\infty=0.25 \quad \|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=2.11$

由 $k \geq \dfrac{\ln\frac{\varepsilon(1-\|M\|)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}}{\ln\|M\|}=10.7119$

所以需要迭代11次才能保证各分量误差绝对值小于 10^{-6}.

11. 证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为严格对角占优矩阵，即

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ i=1,\cdots n.$$

则要证 A 非奇异，即证 $\det A\neq 0$.

用反证法：

假设 $\det A=0$，则线性方程 $Ax=0$ 有非零解 x

$x=(x_1,\cdots x_n)^T$. 设 $|x_1|\cdots|x_n|$ 中最大的一个是 $|x_k|$

则 $|x_k|>0$. 由假设 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\cdot x_j=0$.

我们得到：

$$\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|=|-a_{kk}x_k|=|a_{kk}|\,|x_k|>|x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$$

$$\geq\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,|x_j|\geq\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|\ \text{~~矛盾~~}.$$

即得：$\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|>\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|$，矛盾.

则假设不成立.

则原命题得证.

12. 证明：要使A为正定矩阵，则：

$$|1|>0,\ \begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}>0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1>0\\ \cancel{a^2-1>0}\ 1-a^2>0\\ (1-a)^2\cdot(1+2a)>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<1.$$

则 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时，A为正定矩阵.

有 $B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0&-a&-a\\-a&0&-a\\-a&-a&0\end{bmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&a&a\\a&\lambda&a\\a&a&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-a)^2(\lambda+2a)$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=a,\ \lambda_3=-2a.$

要使 Jacobi 迭代法收敛，则 $|-2a|<1$

$\therefore$ $\cancel{a\leq\frac{1}{2}}$ $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

证毕.

13. ①利用共轭梯法，取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，精度要求 10^{-8}.

$$A=\begin{bmatrix}4&3&0\\3&4&-1\\0&-1&4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}24\\3\\-24\end{bmatrix}$$

~~第一项~~迭代如下:

$d^{(0)}=(24,30,-24)^T$

$\lambda^{(0)}=0.1469$

$x^{(1)}=(3.5258,\ 4.4072,\ -3.5258)^T$

$d^{(1)}=(-2.8079,-1.0859,-6.0065)^T$

$\lambda^{(1)}=0.2378$

$x^{(2)}=(2.8580,\ 4.1490,\ -4.9542)^T$

$d^{(2)}=(0.1191,-0.1249,-0.0384)^T$

$\lambda^{(2)}=1.1926$

$x^{(3)}=(3.000,\ 4.000,\ -5.000)^T$

此时 $r^{(3)}=b-Ax^{(3)}$

有 $\|r^{(3)}\|_2<10^{-8}$. 满足收敛条件，因此有:

$x^*=x^{(3)}=(3.000,4.000,-5.000)^T$.

②利用最速下降法:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(4x_1^2+3x_1x_2+3x_2x_1+4x_2^2-x_2x_3-x_3x_2+4x_3^2\right)-24x_1-3x_2+24x_3$$

$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+3x_1x_2-x_2x_3-24x_1-3x_2+24x_3$$

取 $\alpha=0.5$. $\delta=0.4$. $\varepsilon=10^{-8}$. $x^{(0)}=(0,0,0)^T$

此方法不做要求……

详请参考《最优化方法》一解可新编.