习题二.

1.(1)解: Gauss消去法:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -19 & 30 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -27 & 9 \end{pmatrix}$$

回代得解 $x_3=-0.333$ $x_2=0.001$ $x_1=1.331$

列主元素法:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & 4.167 & -8 & 2.667 \\ 0 & 6.333 & -10 & 3.333 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & 6.333 & -10 & 3.334 \\ 0 & 4.167 & -8 & 2.667 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & 6.333 & -10 & 3.334 \\ 0 & 0 & -1.420 & 0.473 \end{pmatrix}$$

回代得解 $x_3=-0.333$ $x_2=0.001$ $x_1=1.331$

全主元素法:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 1 & 3 \\ 18 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 18 & -1 & 6 & 2 \\ -5 & 4 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 18 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 3.722 & 2.667 & 3.556 \\ 0 & 5.778 & 3.333 & 4.444 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 18 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5.778 & 3.333 & 4.444 \\ 0 & 3.722 & 2.667 & 3.556 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 18 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5.778 & 3.334 & 4.444 \\ 0 & 0 & 0.520 & 0.693 \end{pmatrix}$$

回代得解 $x_3=-0.333$ $x_2=0.000$ $x_1=1.333$

(2)解: Gauss消去法:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 6 & 1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

回代得解 $x_3=1.000$ $x_2=2.000$ $x_3=1.000$.

列主元素法:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 6 & 1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2.333 & -2.333 & 2.333 \\ 0 & 0.667 & 0.333 & 1.667 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2.333 & -2.333 & 2.333 \\ 0 & 0 & \cancel{0.333}\ 1 & \cancel{2.333}\ 1 \end{pmatrix}$$

全主元素法同列主元素法

回代得解 $x_3=1.000$ $x_2=\cancel{0.000}\ 2.000$ $\cancel{x_1=1.000}$ $x_1=1.000$.

2.(1) 解：紧凑格式：

(2) 2	(6) 6	(−4) −4	(4) 4
(1) $\frac{1}{2}$	(4) 1	(−5) −3	(3) 1
(6) 3	(−1) −19	(18) −27	(2) 9

所以 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ 3&-19&1\end{bmatrix}$ $y=\begin{bmatrix}4\\1\\9\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}2&6&-4\\0&1&-3\\0&0&-27\end{bmatrix}$

解方程组 $Ux=\begin{bmatrix}2&6&-4\\0&1&-3\\0&0&-27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\9\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_3=-\frac{1}{3}$ $x_2=0$ $x_1=\frac{4}{3}$

(2) 解：紧凑格式：

(2) 2	(1) 1	(2) 2	(6) 6
(4) 2	(3) 1	(1) −3	(11) −1
(6) 3	(1) −2	(5) −7	(13) −7

所以 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}$ $y=\begin{bmatrix}6\\-1\\-7\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&-3\\0&0&-7\end{bmatrix}$

解方程组 $Ux=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&-3\\0&0&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\\-7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_3=1$ $x_2=2$ $x_1=1$

3. 解：紧凑格式：

(1) 1	(2) 2	(3) 3	(4) 4	(2) 2
(1) 1	(4) 2	(9) 6	(16) 12	(10) 8
(1) 1	(8) 3	(27) 6	(64) 24	(44) 18
(1) 1	(16) 7	(81) 6	(256) 24	(190) 24

所以 $L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&3&1&0\\1&7&6&1\end{bmatrix}$ $y=\begin{bmatrix}2\\8\\18\\24\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&6&12\\0&0&6&12\\0&0&0&24\end{bmatrix}$

由 $Ux=y$ 得：$x_4=1$ $x_3=-1$ $x_2=1$ $x_1=-1$

即 $x=(-1,1,-1,1)^T$

4．证明：$L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$

$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & -l_{k+2,k} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$

则 $I - L_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & l_{nk} & & 0 \end{bmatrix} = L_k^{-1} - I$

则 (1) 得证．

$L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

由归纳法易得：

$L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ \vdots & l_{32} & 1 & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

（出这种题的老师都吔屎啦！）

5．(1) 解：紧凑格式：

(1)	1	(1)	1	(−1)	−1
(2)	2	(1)	−1	(0)	2
(1)	1	(−1)	2	(0)	−4

所以 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

则设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

则 $A = L \cdot U$

$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(2) 解：紧凑式：

$$\begin{array}{ccc} (2)\ 2 & (2)\ 2 & (3)\ 3 \\ (1)\ \frac{1}{2} & (-1)\ -2 & (0)\ -\frac{3}{2} \\ (-1)\ -\frac{1}{2} & (2)\ -\frac{3}{2} & (1)\ \frac{1}{4} \end{array}$$

所以 $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

则 $A=L\cdot U$

则 $A^{-1}=U^{-1}\cdot L^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

6. 解：平方根法：

容易验证：系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{bmatrix}$ 为对称正定阵.

按计算分解式，得：

$l_{11}=(1)^{\frac{1}{2}}=1$

$l_{21}=\frac{2-0}{1}=2$ $l_{31}=1$ $l_{41}=-3$.

$l_{22}=(5-2^2)^{\frac{1}{2}}=1$

$l_{32}=\frac{0-1\times2}{1}=-2$ $l_{42}=\frac{-5-(-3)\times2}{1}=1$

$l_{33}=(14-1^2-(-2)^2)^{\frac{1}{2}}=3$

$l_{43}=\frac{1-(-3)\times1-1\times(-2)}{3}=2$.

$l_{44}=15-(-3)^2-(1)^2-2^2=1$

则 $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

又 $Ly=b$ 得 $y=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

又由 $L^T x=y$

即 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

即原方程组解为 $x^*=(1,1,1,1)^T$

改进平方根法：

易验证 A 为对称正定阵

由计算分解式，得：

$d_1 = a_{11} = 1$

$u_{21} = a_{21} = 2 \quad u_{31} = a_{31} = 1 \quad u_{41} = a_{41} = -3$

$l_{21} = \frac{u_{21}}{d_1} = 2 \quad l_{31} = \frac{u_{31}}{d_1} = 1 \quad l_{41} = \frac{u_{41}}{d_1} = -3$

$d_2 = a_{22} - u_{21} l_{21} = 1$

$u_{32} = a_{32} - u_{31} l_{21} = -2 \quad u_{42} = a_{42} - u_{41} l_{21} = 1$

$l_{32} = \frac{u_{32}}{d_2} = -2 \quad l_{42} = \frac{u_{42}}{d_2} = 1$

$d_3 = a_{33} - u_{31} l_{31} - u_{32} l_{32} = 9$

$u_{43} = a_{43} - u_{41} l_{31} - u_{42} l_{32} = 6$

$l_{43} = \frac{u_{43}}{d_3} = \frac{2}{3}. \quad d_4 = a_{44} - u_{41} l_{41} - u_{42} l_{42} - u_{43} l_{43} = 1$

则 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad D = diag(1, 1, 9, 1)$

由 $Ly = b$ 得 $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}$

又由 $L^T x = D^{-1} y$

有：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1$

即所求方程组解为 $x^* = (1, 1, 1, 1)^T$

7.(1) 解：由定理2.4. 只需A为对称正定矩阵即可.

则须满足：

$$\begin{cases} |2|>0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}>0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}>0 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}.$$

(2) 取 $a=1$ 时在 $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ 内，可进行Cholesky分解.

此时 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$l_{11}=a_{11}^{\frac{1}{2}}=1.41$

$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=0.71 \quad l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=0$

$l_{22}=(a_{22}-l_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=1.22$

$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=0.82$

$l_{33}=(a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2)^{\frac{1}{2}}=1.15$

则 $L=\begin{bmatrix} 1.41 & 0 & 0 \\ 0.71 & 1.22 & 0 \\ 0 & 0.82 & 1.15 \end{bmatrix}$

又 $Ly=b$ 得 $y=\begin{bmatrix} 2.12 \\ 1.23 \\ 0 \end{bmatrix}$

又由 $L^Tx=y$

即 $\begin{bmatrix} 1.41 & 0.71 & 0 \\ 0 & 1.22 & 0.82 \\ 0 & 0 & 1.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.12 \\ 1.23 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

即方程组解为 $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8.(1) 解：由已知得：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\l_2&1&0&0\\0&l_3&1&0\\0&0&l_4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1&c_1&0&0\\0&u_2&c_2&0\\0&0&u_3&c_3\\0&0&0&u_4\end{pmatrix}$$

$u_1=2$

$l_2=-\frac{1}{2}$ $u_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$l_3=-\frac{2}{3}$ $u_3=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$l_4=-\frac{3}{4}$ $u_4=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

由$Ly=d$ 得：$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\l_2&1&0&0\\0&l_3&1&0\\0&0&l_4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2.5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow y_1=0$ $y_2=1$ $y_3=\frac{2}{3}$ $y_4=3$

由$Ux=y$ 得：$\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1&0\\0&0&\frac{4}{3}&-1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{2}{3}\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1=\frac{11}{10}$ $x_2=\frac{11}{5}$ $x_3=\frac{23}{10}$ $x_4=\frac{12}{5}$

(2) 解：由已知得：

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\l_2&1&0&0\\0&l_3&1&0\\0&0&l_4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1&c_1&0&0\\0&u_2&c_2&0\\0&0&u_3&c_3\\0&0&0&u_4\end{pmatrix}$

$u_1=136.01$

$l_2=\frac{a_2}{u_1}=0.67$ $u_2=b_2-c_1l_2=38.12$

$l_3=\frac{a_3}{u_2}=-1.77$ $u_3=b_3-c_2l_3=12.38$

$l_4=\frac{a_4}{u_3}=3.74$ $u_4=b_4-c_3l_4=4.16$

由$Ly=d$ 得：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0.67&1&0&0\\0&-1.77&1&0\\0&0&3.74&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33.254\\49.709\\28.067\\-7.3244\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33.254\\71.989\\155.560\\-50.559\end{pmatrix}$$

由$Ux=y$ 得

$$\begin{pmatrix}136.01&98.860&0&0\\0&38.12&-67.590&0\\0&0&12.38&46.260\\0&0&0&4.16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33.254\\71.989\\155.560\\-50.559\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=-24.26$ $x_2=33.05$ $x_3=17.57$ $x_4=-1.34$

9. 证明：即证明：$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \cdot \|x\|_2$，其中$\|\cdot\|_2$为向量2-范数，$\|\cdot\|_F$为矩阵F-范数

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $\|Ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A\|_F \cdot \|x\|_2$$

~~证毕~~ 即矩阵的F-范数与向量的2-范数相容.

10. 解：~~cond(A)F~~

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 24 & -\frac{23}{3} & \frac{7}{3} \\ 19 & -\frac{19}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$cond(A)_1 = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 105 \times 34 = 3570$

$cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 105 \times 45 = 4725$.

因$cond(A)_1$和$cond(A)_\infty$都較大.

则$Ax=b$是病态的.

11. 解：Causs消去法：

$$\begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 & 68.12 \\ 321.8 & 5.550 & 377.3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 & 68.12 \\ 0 & -186.3\times10^2 & -214.8\times10^2 \end{pmatrix}$$

回代得解：$x_2 = 1.153 \qquad x_1 = 1.140$

列主元素法：

$$\begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 & 68.12 \\ 321.8 & 5.550 & 377.3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 321.8 & 5.550 & 377.3 \\ 1.003 & 58.09 & 68.12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 321.8 & 5.550 & 377.3 \\ 0 & 58.07 & 66.94 \end{pmatrix}$$

回代得解：$x_2 = 1.153$，$x_1 = 1.153$.

考虑计算结果的残量

$$r_1 = b - Ax_1^* = \begin{pmatrix} 68.12 \\ 377.3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 321.8 & 5.550 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.140 \\ 1.153 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = b - Ax_2^* = \begin{pmatrix} 68.12 \\ 377.3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 321.8 & 5.550 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.153 \\ 1.153 \end{pmatrix}$$

则$r_2 < r_1$，则由列主元素法所求结果精度高.

12、解：(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0.99\\ 0.99 & 0.98\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-9800 & 9900\\ 9900 & -10000\end{pmatrix}$

$\because \|A\|_\infty=1.99$ $\|A^{-1}\|_\infty=19900$

$\therefore cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=39601$

(2) $x_1^*=(1,0)^T$，则 $r_1=b-Ax_1^*=(0,0.01)^T$

$x_2^*=(100.5,-99.5)^T$，则 $r_2=b-Ax_2^*=(-0.995,-0.985)^T$

对于 $x_1^*=(1,0)^T$，相对误差 $\frac{\|x-x_1^*\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\frac{100}{100}=1$

对于 $x_2^*=(100.5,-99.5)^T$，相对误差 $\frac{\|x-x_2^*\|}{\|x\|_\infty}=\frac{0.5}{100}=0.005$

因而，当方程组严重病态时系数矩阵的条件数很大，此时即使残量很小，解得相对误差仍可能很大，那么这种情况下残量的大小不能刻画近似解的准确程度。

13. 解：因为系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

于是有 $A^TA=\begin{bmatrix}18 & -3\\ -3 & 46\end{bmatrix}$

$A^Tb=\begin{bmatrix}51\\ 48\end{bmatrix}$

正则方程组为 $\begin{cases}18x_1-3x_2=51\\ -3x_1+46x_2=48\end{cases}$

其解为 $x_1=\frac{830}{273}$，$x_2=\frac{339}{273}$

也是所求超定线性方程组的最小二乘解。