

Liczby zespolone

Mateusz Stefański

$$z = x + yi$$

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

z - oznaczenie liczby zespolonej

x, y - liczby rzeczywiste

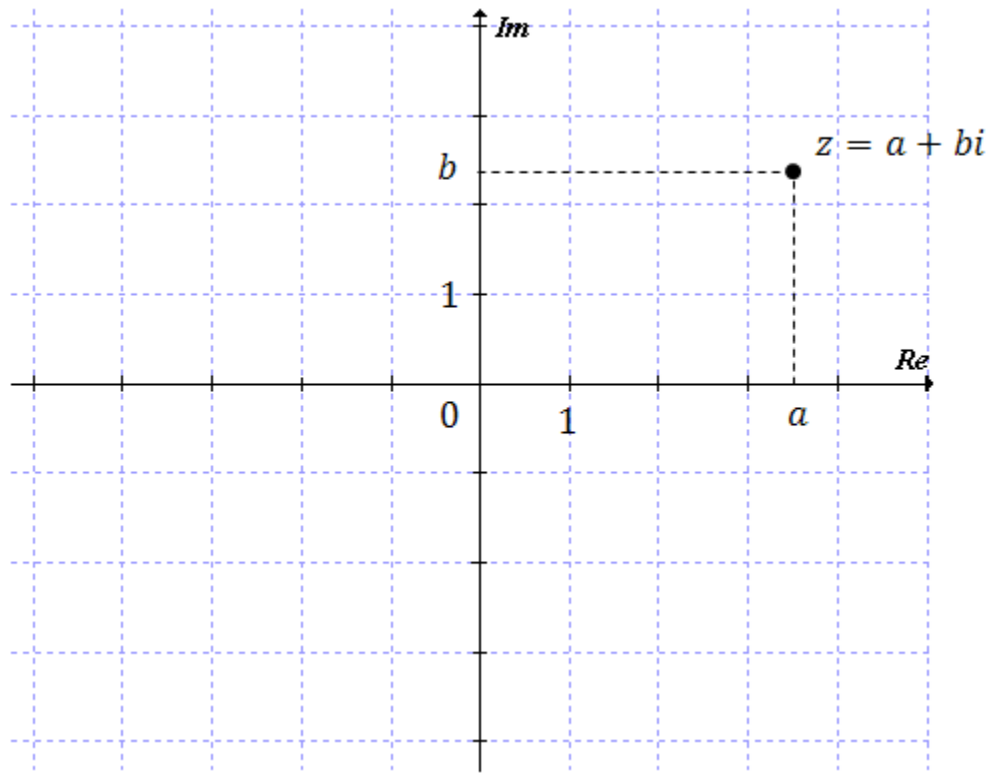
i - jednostka urojona

$$i^2 = -1$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczany jest jako \mathbb{C} .

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych



Równość liczb zespolonych

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = x_1 = x_2 = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = y_1 = y_2 = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$$

Mnożenie liczb zespolonych

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i \end{aligned}$$

Dzielenie liczb zespolonych

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i\end{aligned}$$

Sprzężenie liczby zespolonej

$$\overline{z} = x - yi$$

Sprzężenie liczby zespolonej

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Moduł liczby zespolonej

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Moduł liczby zespolonej

$$|z| \geq 0$$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

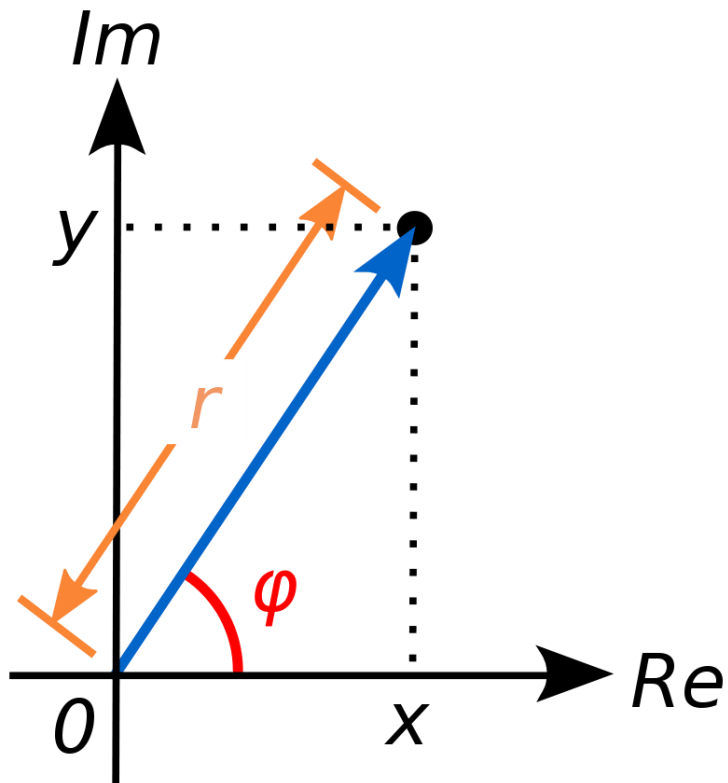
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Moduł liczby zespolonej

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

Argument główny liczby zespolonej



Argument główny liczby zespolonej

$$\sin \alpha = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Argument główny liczby zespolonej

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, \quad k = 0 \text{ lub } k = -1$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, \quad k = 0 \text{ lub } k = 1$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha),$$

Potęgowanie liczb zespolonych - wzór de Moivre'a

$$z^n = |z|^n (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha))$$