Rachunek zdań, tautologie oraz zastosowanie rachunku zdań

Rachunek zdań - najważniejsze reguły

I. Rachunek zdań ma wspomóc intuicję i uporządkować proces oceny prawdziwości zdania (oznajmującego).

II. Rachunek zdań jest opisem reguł, jakimi należy się kierować próbując określić wartość logiczną zdania złożonego na podstawie analizy jego struktury.

III. Rachunek zdań nie daje żadnych podstaw do oceny, czy zdanie proste jest prawdziwe czy fałszywe.

Rachunek zdań - analiza składniowa.

W rachunku zdań wyróżniamy następujące spójniki zdaniowe:

Koniunkcja zdań - “Jestem w pracy <u>i</u> wykonuje swoje obowiązki.” (ozn. **„$\wedge$”**)

Alternatywa Zdań - “Pójdę do kina<u> lub </u>do teatru” (ozn. **„$\vee$”**)

Implikacja - “<u>Jeżeli </u>jestem w pracy, <u>to</u> nie śpię” (ozn. **„**$\rightarrow$**”**)

Negacja - ”<u>Nieprawda, że </u>pada deszcz.” (ozn. **„¬”**)

Semantyka: algebra Boole’a wartości logicznych

Koniunkcja

$\wedge$	true	false
true	true	false
false	false	false

Alternatywa

$\vee$	true	false
true	true	true
false	true	false

Semantyka: algebra Boole'a wartości logicznych

Implikacja

$\rightarrow$	true	false
true	true	false
false	true	true

Negacja

$\neg$	
true	false
false	true

Rachunek zdań - przykład.

„Jeśli dziś jest wtorek, to jesteśmy w Belgii."

p - dziś jest wtorek

q - jesteśmy w Belgii.

Jeśli p, to q. $\Leftrightarrow$ $p \rightarrow q$

Prawa logiki zdaniowej - tautologie

Tautologia to formuła zdaniowa, która ma wartość logiczną „true" niezależnie od wartości logicznych przypisanych występującym w niej zmiennych zdaniowych.

Inaczej: tautologia to formuła prawdziwa przy każdym wartościowaniu. Zamiast „tautologia" mówimy też „prawo logiki zdaniowej".

Przykłady tautologii

$p \vee \neg p$ - *tertium non datur, prawo wyłączonego środka,*

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ - *prawo odrywania,*

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ - *prawo de Morgana,*

$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ - *prawo podwójnej negacji.*

$(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow r$ - *prawo „redukcji do absurdu”*

$(\neg p \rightarrow 0) \rightarrow p$ - *(to samo co powyżej)*

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ - *prawo kontrapozycji.*

$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ - *prawo podwójnego przeczenia.*

Przykład tautologii

Jeśli nie jestem i nauczycielem, i hydraulikiem, to nie jestem nauczycielem lub nie jestem hydraulikiem.

$$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Rachunek zdań w rozwiązywaniu zadań - schemat

Schemat każdego zadania, które rozwiązujemy można przedstwic tak:

dane: - zbiór zdań $Z = \{Z1, . . . , Zn\}$ (zwanych przesłankami bądź założeniami),

zdanie T (zwane tezą lub konkluzją).

cel: uzasadnić, że teza T jest konsekwencją zbioru założeń P, co oznacza, że: jeśli wszystkie założenia ze zbioru P są prawdziwe, to i teza T jest prawdziwa

dowodzenie to wykazanie, że zdanie $(Z1 \land \cdots \land Zk) \rightarrow T$ jest prawdziwe

Założenia to zdania:

Z1 : „Jan jest w domu (jd) $\rightarrow$ Jan pracuje przy komputerze” (jk),

Z2 : „Anna jest w biurze (ab) $\rightarrow$ Anna pracuje przy komputerze” (ak),

Z3 : „ Anna jest w biurze (ab) $\vee$ Jan jest w domu” (jd)

T : Anna pracuje przy komputerze lub Jan pracuje przy komputerze.

Nasze zadanie to pokazać, że implikacja Z1 $\wedge$ Z2 $\wedge$ Z3 $\rightarrow$ T jest zdaniem prawdziwym tzn. zakładając, że zdania Z1, Z2, Z3 są prawdziwe musimy pokazać, że zdanie T jest również prawdziwe

Z1: $jd \rightarrow jk$,

Z2: $ab \rightarrow ak$,

Z3: $ab \vee jd$

T: $ak \vee jk$

Schemat zdania $Z1 \wedge Z2 \wedge Z3 \rightarrow T$ to formuła zdaniowa:

$$((jd \rightarrow jk) \wedge (ab \rightarrow ak) \wedge (ab \vee jd)) \rightarrow (ak \vee jk)$$