# Teoria podzielności liczb całkowitych

## 1. Dzielenie całkowitoliczbowe

Dla każdej pary liczb całkowitych (a,b) istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych (q,r) spełniająca równanie

$$a = qb + r$$

przy warunku $r \in \{0,...,b-1\}$. Liczby te oznaczamy następująco:

- **q = a div b** (iloraz całkowitoliczbowy liczb a i b)
- **a mod b** (reszta z dzielenia a przez b)

## 2. Relacja podzielności

Mówimy, że liczba całkowita b dzieli liczbę całkowitą a **(ozn. b | a)**, jeśli istnieje liczba całkowita c, że **a = b * c**.

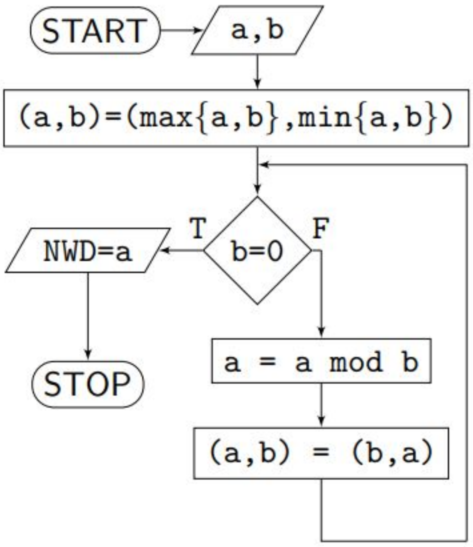
**Własności relacji podzielności**:

- $a \mid 0$
- $0 \mid a \iff a = 0$
- $a \mid a$
- $a \mid b\,,\ b \mid a \implies a = \pm b$
- $a \mid b\,,\ b \mid c \implies a \mid c$ ; w szczególności $a \mid b \implies a \mid kb$
- $a \mid b\,,\ c \mid d \implies ac \mid bd$ ; w szczególności $a \mid b \implies ac \mid bc$
- $d \mid a\,,\ d \mid b \implies d \mid xa + yb.$

## 3. Największy wspólny dzielnik

Największy wspólny dzielnik liczb a i b to największa liczba całkowita, która dzieli obie liczby. Oznaczamy go jako NWD(a,b).

NWD możemy wyznaczyć za pomocą Algorytmu Euklidesa.




### Własności NWD

- Istnieją $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$
- $\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$
- $\mathrm{NWD}(a, 0) = a$
- $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - kb, b)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$;

  w szczególności $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, (a)_b)$ o ile $b \neq 0$
- $\mathrm{NWD}(ac, bc) = c\,\mathrm{NWD}(a, b)$
- $d = \mathrm{NWD}(a, b) \implies \mathrm{NWD}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$
- $c \mid ab,\ \mathrm{NWD}(c, a) = 1 \implies c \mid b$
- $a \mid c\ ,\ b \mid c,\ \mathrm{NWD}(a, b) = 1 \implies ab \mid c$

**5. Najmniejsza wspólna wielokrotność**

Liczbę całkowitą e nazywamy najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych a1,...,an jeśli

- $a_1 \mid e, \ldots, a_n \mid e,$
- $a_1 \mid c, \ldots, a_n \mid c \implies e \mid c.$

**Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)** liczb naturalnych n i m - to najmniejsza liczba różna od zera, która jest jednocześnie wielokrotnością liczby n i liczby m.

Źródła:
https://fizyka.umk.pl/~gniewko/didaktiki/MD2013-2014/wyk%C5%82ad4.pdf
http://www.math.us.edu.pl/sladek/dydaktyka/WAiTL/WAiTL1.pdf