Logika i teoria mnogości

4. Algebra zbiorów

- w matematyce nie definiuje się pojęcia zbioru (jest to pojęcie pierwotne)
- zbiór jest definiowany poprzez określenie należących do niego elementów
  - można podać elementy bezpośrednio np. $A = \{1, 2, 3\}$
  - lub określić warunek przynależności do zbioru np. $B = \{x \in N \mid x\%2 = 0\}$
- elementy w zbiorze nie mogą się powtarzać
- moc zbioru – wielkość zbioru – liczba kardynalna – liczba jego elementów. Zbiory są równoliczne, gdy są tej samej mocy.
- $A \sim B$ – zbiory A i B są równoliczne
- $\varnothing$ – zbiór pusty – jest podzbiorem każdego zbioru

Ze względu na liczebność zbiory można podzielić na:
- skończone np. $A = \{x \in N \mid x < 997\}$
- nieskończone np. $A = \{x \in N \mid x > 997\}$

Działania na zbiorach

suma – elementy, które należą do A lub B

$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ np. $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

różnica – elementy, które należą do A, ale nie należą do B

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$ np. $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\}$

różnica symetryczna – elementy, które należą do A lub B ale nie należą do ich części wspólnej

$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ np. $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$

iloczyn – przekrój – elementy, które są w obu zbiorach jednocześnie

$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ np. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$

dopełnienie – wszystko, co nie należy do A. U jest przestrzenią (np. liczb naturalnych)

$A' = U \setminus A$ np. $\{1, 2, 3, 4\}` = N \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ w przestrzeni N

iloczyn kartezjański – wszystkie pary takie, że pierwszy element należy do A, a drugi do B

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$

zbiór potęgowy – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru

np. $2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ dla $A = \{1, 2\}$

Dla działań na zbiorach prawdziwe są prawa de Morgana.

Relacje między zbiorami

równość: zbiory A i B są równe <=> każdy element A należy do B i na odwrót

$A = B \iff \forall_x (x \in A \iff x \in B)$

inkluzja: A jest podzbiorem B (B jest nadzbiorem A), jeżeli każdy element A należy do B

$A \subseteq B \iff \forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

jeżeli dodatkowo $A \neq B$, to A jest podzbiorem właściwym B

rozłączność: A i B są rozłączne, jeżeli ich iloczyn jest pusty

$A \cap B = \varnothing$