

Numerieke Modelling en Benadering

De Wolf Peter
Vekemans Wout

21 mei 2014

Inhoudsopgave

Benaderen met veeltermen	3
Berekenen van nulpunten van orthogonale veeltermen	3
Evalueren van drietermsrecursiebetrekking	3
Berekenen van interpolerende veelterm	3
Benaderen met trigonometrische veeltermen	5
function $y = \text{periotrig}(x,K,M)$	5
Invloed van de parameter K op de benadering.	5

Lijst van figuren

1	Evaluatie van eerste tien Cheybchev veeltermen op 200 punten in $[-1,1]$	4
2	Enkele interpolerende veeltermen van $\cos(x)$	4
3	Enkele interpolerende veeltermen van $\frac{1}{1+6x^2}$	5
4	Absolute fout bij het interpoleren	6
5	Maximale interpolatiefout	7
6	Conditiegetal van M	7

Benaderen met veeltermen

In dit practicum willen we eerst enkele functies benaderen met behulp van veeltermen door interpolatie. We gebruiken hiertoe nulpunten van orthogonale veeltermen als interpolatiepunten.

Berekenen van nulpunten van orthogonale veeltermen

Zie bijlage `poly_zeros.m`

Deze functie berekent de nulpunten van de orthogonale veeltermen gebaseerd op de waarden α_k, β_k , en λ_k uit de recursiebetrekking voor orthogonale veeltermen (1). Het doet dit door een tridiagonale matrix op te stellen met elementen afgeleid van de coëfficiënten uit die recursiebetrekking. De nulpunten van de veelterm zijn dan gelijk aan de eigenwaarden van die matrix.

$$\phi_0(x) = \lambda_0 ; \phi_1(x) = \lambda_1(x - \alpha_1)\phi_0(x) \quad (1a)$$

$$\phi_k(x) = \lambda_k(x - \alpha_k)\phi_{k-1}(x) - \beta_k\phi_{k-2}(x) \quad (1b)$$

Evalueren van drietermsrecursiebetrekking

Zie bijlage `eval_recursion.m`

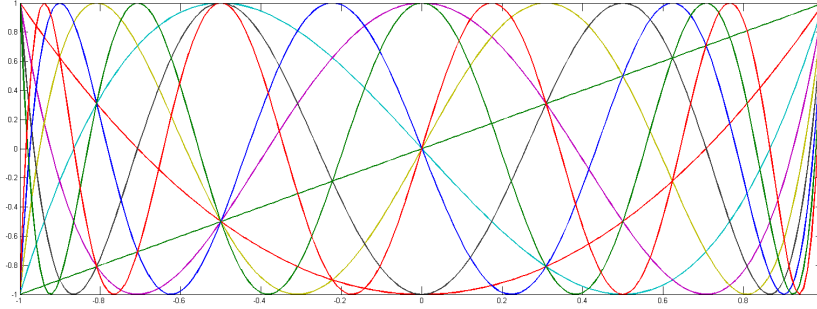
Deze functie evalueert de drietermsrecursiebetrekking in de punten gegeven in de vector x . Als we deze methode toepassen op de 10 eerste Chebychev veeltermen krijgen we figuur 1. Deze functie is eenvoudig toe te passen omdat Chebychev veeltermen duidelijk voldoen aan vergelijking (1). Dit is makkelijk in te zien als men in de recursiebetrekking volgende waarden invult: $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1$ en alle andere λ_k gelijk aan 2. α_k is gelijk aan 0, en β_k is 1.

Berekenen van interpolerende veelterm

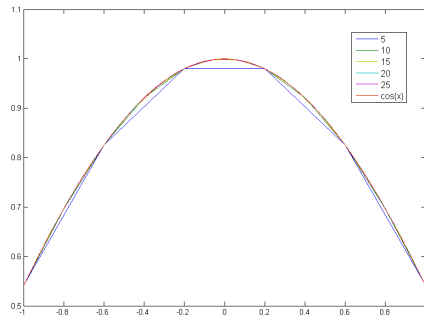
Zie bijlage `interpolate.m`

Dit algoritme berekent een interpolerende veelterm door de waarden $f(x)$ en evalueert die veelterm in de punten gegeven in t . Als we dit toepassen op respectievelijk $\cos(x)$ en $\frac{1}{1+6x^2}$ krijgen we grafiek 2 en 3. We zien op het eerste zicht niet duidelijk verschil tussen het gebruik van equidistante interpolatiepunten en de nulpunten van de Chebychev-veelterm T_n .

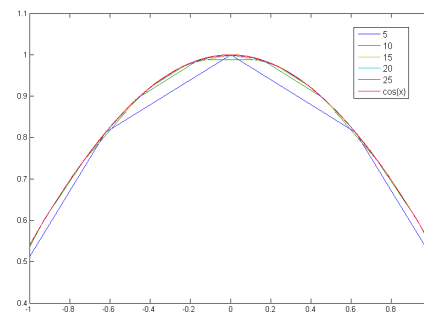
Bij een verdere analyse van de interpolatiefout blijkt echter dat de nulpunten van de Chebychev veeltermen een veel beter gespreide fout geven, de fout is



Figuur 1: Evaluatie van eerste tien Cheybchev veeltermen op 200 punten in $[-1,1]$



(a) Equidistant

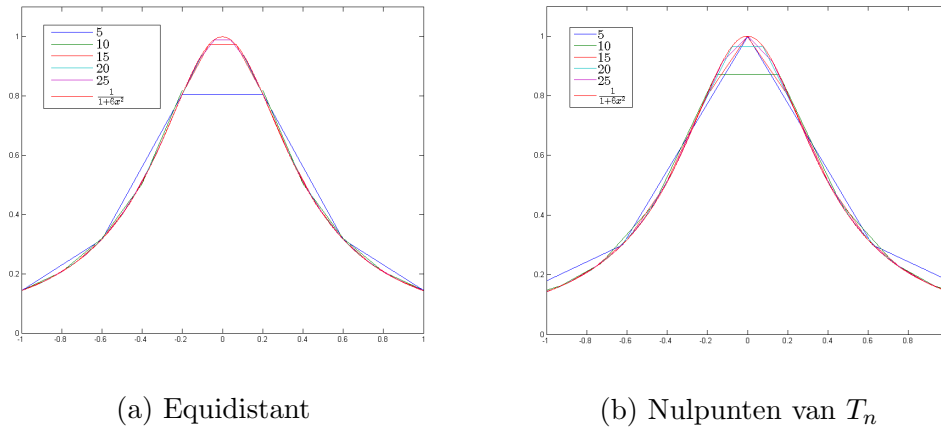


(b) Nulpunten van T_n

Figuur 2: Enkele interpolerende veeltermen van $\cos(x)$

ongeveer overall even groot. Voor illustratie, zie figuur 4. Bij de equidistante punten is er aan de rand van het interval een veel grotere fout aanwezig. Bij benaderingen van lagere graad is de absolute fout wel kleiner bij de equidistante punten. Het verschil aan de rand van het interpolatie-interval wordt veroorzaakt door de locatie van de interpolatiepunten. Als de nulpunten van T_n worden gebruikt, liggen die veel meer geconcentreerd aan de rand van het interval, waardoor de fout aan de rand ongeveer even groot wordt als in het midden van het interval. Dit zorgt voor een fout die gemiddeld hoger is, maar minder hoge pieken heeft dan bij equidistante interpolatiepunten.

Als we de maximale fout in functie van de graad van de benadering uitzetten zien we ook dat bij hogere graad de equidistante punten weer onderdoen. We merken zelfs een stijging in de maximale fout vanaf een bepaalde punt. De Chebychev interpolatie daarentegen daalt in het begin ongeveer even snel,



Figuur 3: Enkele interpolerende veeltermen van $\frac{1}{1+6x^2}$

maar blijft bij hogere graad constant rond ϵ_{mach} . Dit wordt duidelijk op figuur 5. De stijgende staart van de grafiek voor equidistante punten wordt veroorzaakt door de zeer slechte benadering aan de rand van het interval.

Tot slot bestuderen we het conditiegetal van de matrix M die gebruikt wordt in `eval_recursion.m`. Als we dit voor beide methodes (equidistant en Chebyshev) tonen in functie van de graad van benadering, zien we dat $k(M)$ exponentieel stijgt voor beide methodes, maar minder snel bij equidistante interpolatiepunten. Bij een interpolatie van graad 25 is k al van grootte-orde 10^7 voor interpolatie in de nulpunten van T_n . Dit wil zeggen dat de interpolerende curve zelfs bij benaderingen van relatief lage graad al zeer gevoelig is aan kleine afwijkingen op de opgemeten waarden van $f(x)$. De toename van het conditiegetal wordt geïllustreerd in figuur 6.

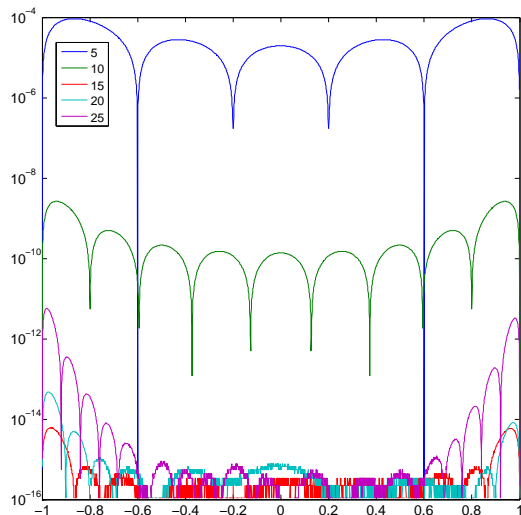
Benaderen met trigonometrische veeltermen

function y = periotrig(x,K,M)

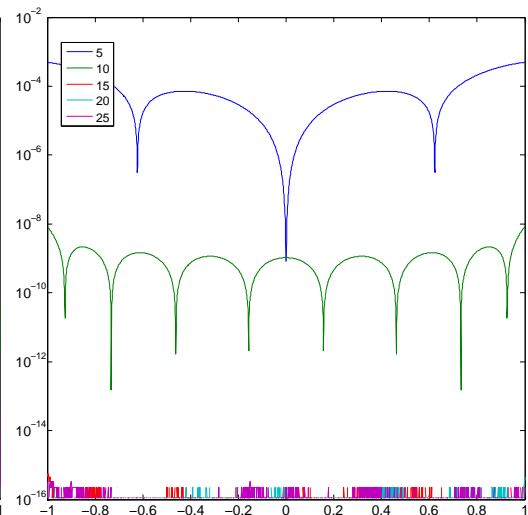
todo code plakken

Invloed van de parameter K op de benadering.

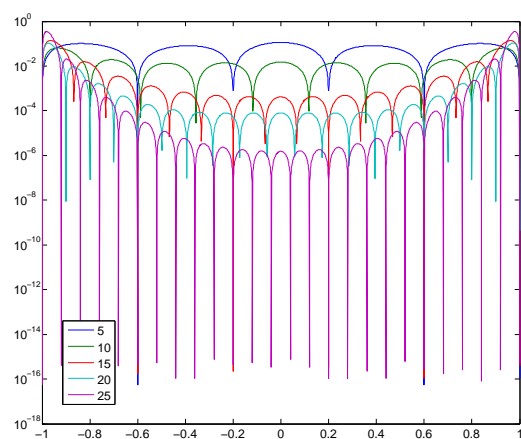
Als te benaderende functie nemen we e^{-x^4} . Deze functie wordt benaderd door trigonometrische functies. De index waardevan de laatste Xk -coëfficiënt die behouden wordt opgegeven. Hoe lager



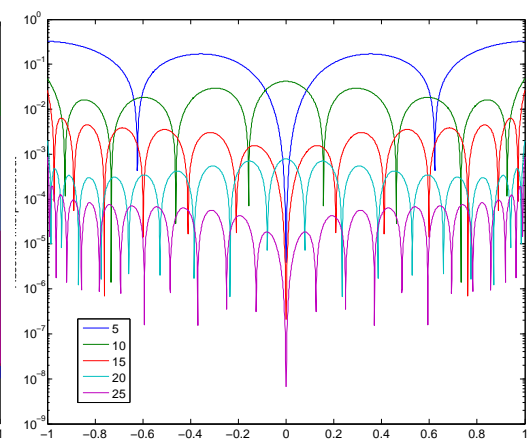
(a) Equidistant, $\cos(x)$



(b) Nulpunten van T_n , $\cos(x)$

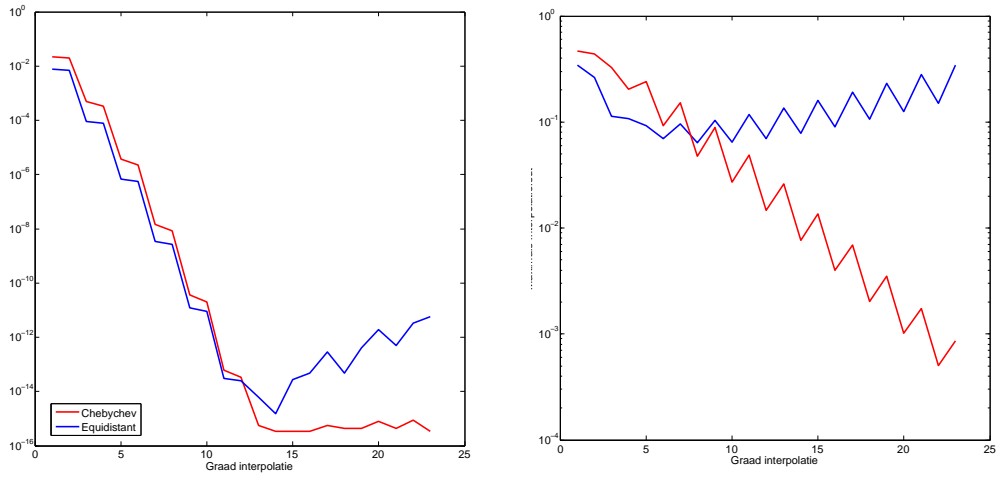


(c) Equidistant, $\frac{1}{1+6x^2}$



(d) Nulpunten van T_n , $\frac{1}{1+6x^2}$

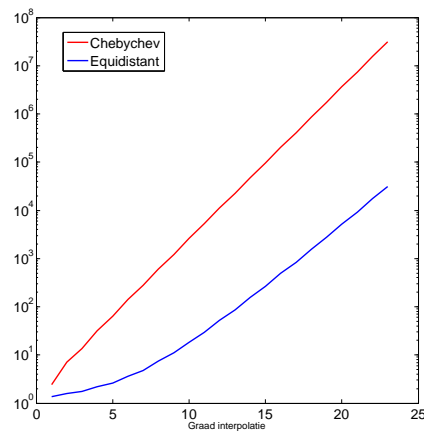
Figuur 4: Absolute fout bij het interpoleren



(a) $\cos x$

(b) $\frac{1}{1+6x^2}$

Figuur 5: Maximale interpolatiefout



Figuur 6: Conditiegetal van M

waarde, hoemindertermenerindebenaderingaanwezigzijn. Een hogere K – waarde zal dus een betere waarde van 64 denormvande foutschommeltrond 10^{-16} .