0.1 Alternatieve eigenwaardeproblemen

0.1.1 Opgave 9

De Jacobi-methode maakt gebruik van de diagonalisatie van 2 x 2 symmetrische matrices met behulp van een orthogonale matrix J,

$$J^T \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} \neq 0 & 0 \\ 0 & \neq 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

De matrix J wordt hier gedefinieerd als een orthogonale rotatie-matrix,

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \tag{2}$$

In wat volgt wordt een uitdrukking voor θ gezocht zodat vergelijking (1) geldt. Als eerste wordt vergelijking (1) uitgewerkt door de uitdrukking voor J uit (2) te substitueren in vergelijking (1):

$$J^T \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} \neq 0 & 0 \\ 0 & \neq 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac^2 - 2cds + bs^2 & acs - ds^2 + c^2d - bcs \\ acs + c^2d - ds^2 - bcs & as^2 + 2cds + bc^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

met $c = \cos(\theta)$ en $s = \sin(\theta)$. Uit vergelijking (1) en vergelijking (3) volgt dan dat

$$acs - ds^2 + cd^2 - bcs = 0. \tag{4}$$

Delen door cs en vermenigvuldigen met -1 levert

$$b - a + d\frac{s}{c} - d\frac{c}{s} = 0. \tag{5}$$

Vergelijking (5) kan herschreven worden als

$$\frac{2d}{b-a} = \frac{2}{\frac{c}{s} - \frac{s}{c}}. \tag{6}$$

Per definitie van de tangens en cotangens van een hoek geldt er dat

$$\frac{s}{c} = \tan(\theta) \quad \text{en} \quad \frac{c}{s} = \cot(\theta). \tag{7}$$

Verder kan de formule voor de dubbele hoek van een tangens kan geschreven worden als

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \tag{8}$$

Door vergelijkingen (7) en (8) te substitueren in vergelijking (6) bekomt men

$$\frac{2d}{b-a} = \tan(2\theta). \tag{9}$$

Uit vergelijking (9) volgt tenslotte de gevraagde uitdrukking voor θ,

$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Bgtan}(\frac{2d}{b-a}). \tag{10}$$

0.1.2 Opgave 10

$V^{(0)} = I_{nxn}$
for k = 1,2,... **do**
  $A^{(k)} = A^{(k-1)}$
  $V^{(k)} = V^{(k-1)}$
  for j = 1,2,...,m-1 **do**
    for i = j+1, j+2, ..., m **do**
      Bereken θ met $a = A$(j,j), $b = A$(i,i) en $d = A$(i,j)
      $J_{i,j}^{(k)} = I_{nxn}$
      $J_{i,j}^{(k)}$(j,j)= $\cos\theta$
      $J_{i,j}^{(k)}$(i,i)= $\cos\theta$
      $J_{i,j}^{(k)}$(i,j)= $-\sin\theta$
      $J_{i,j}^{(k)}$(j,i)= $\sin\theta$
      $A^{(k)} = J^T A^{(k)} J$
      $V^{(k)} = V^{(k)} J_{i,j}^{(k)}$
    end for
  end for
end for

0.1.3 Opgave 11

Figuur 1 laat de relatieve fout van de benaderde eigenwaarde zien na elke stap. Het algoritme convergeert snel (10^{-14} in zeven stappen). In figuur 2 kan gezien worden dat kwadratische convergentie bereikt wordt voor sommige eigenwaarden. Dit komt overeen met wat in het boek staat. In tabel 1 is de relatieve fout te zien van een aantal eigenwaarden. Hier is duidelijk te zien dat er kwadratische convergentie optreedt.

Een tridiagonale mxm symmetrische matrix zal maar één sweep nodig hebben om te convergeren. Er zijn m elementen die nul gemaakt moeten worden en dus $2m$ matrixvermenigvuldigingen. Dit geeft $2m^3$ flops.

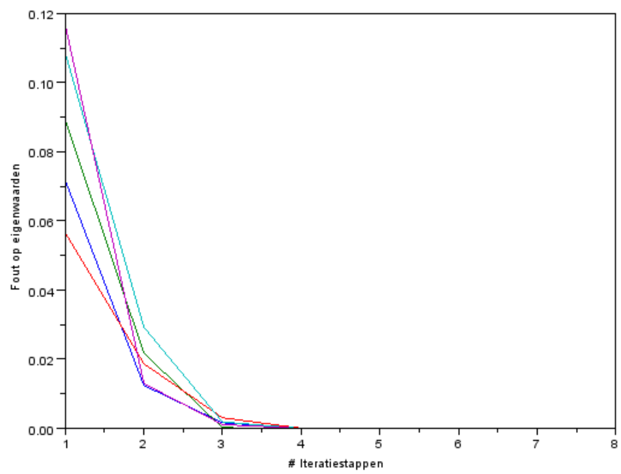

Figure 1: De convergentie van de 5 eerste eigenwaarden van mat1 door middel van Jacobi

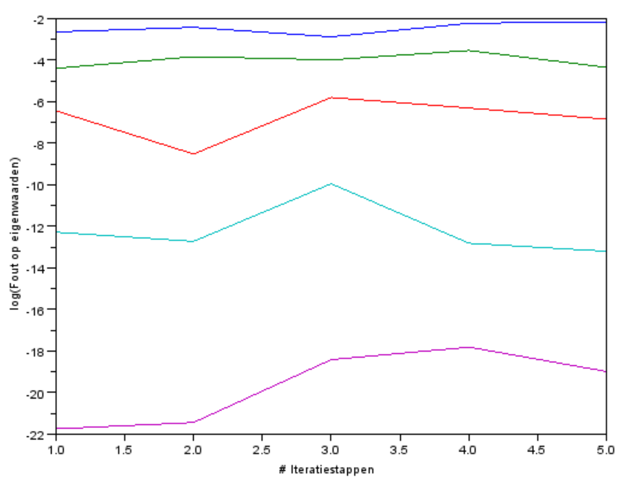

Figure 2: De convergentie van de 5 eerste eigenwaarden van mat1 door middel van Jacobi logaritmisch uitgezet.

λ_1	λ_2	λ_3
0.0157777	0.0089196	0.0360963
0.0022259	0.0125776	0.0029023
0.0002938	0.0030252	0.0003324
0.0000004	0.0000175	0.0000148
1.279e-12	1.527e-09	9.689e-11
0	8.290D-16	0
0	0	0

Table 1: Relatieve fouten voor een aantal eigenwaarden die met Jacobi berekent werden.